Võrrandisüsteemide lahendamine. Newtoni meetod

Loeng 6

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

18.03.2019

1. Newtoni meetod
   - Meetodi kirjeldus
   - Koonduvusteoreem

Newtoni meetod

Antud on süsteem

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

kus $x = (x_1, \dots, x_n)$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Olgu F diferentseeruv, see on samaväärne sellega, et $f_1, \dots, f_n$ on diferentseeruvad. (Mitmemuutuja funktsiooni f_i diferentseeruvus ei ole samaväärne osatuletiste eksisteerimisega. Lõplike osatuletiste olemasolu on tarvilik, osatuletiste pidevus on piisav diferentseeruvuseks.) Newtoni meetodis antakse ette alglähend x^0, järgmised lähendid leitakse valemiga

$$x^{m+1} = x^m - (F'(x^m))^{-1} F(x^m), \qquad m = 0, 1, \dots,$$

kus

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Newtoni meetod

Newtoni meetodi eeskirjas

$$x^{m+1} = x^m - (F'(x^m))^{-1}F(x^m), \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

esinev $(F'(x^m))^{-1}$ on pöördmaatriks. Üleminekusamm $x^m \rightsquigarrow x^{m+1}$ on samaväärne lineaarse süsteemi

$$\boxed{F'(x^m)x^{m+1} = F'(x^m)x^m - F(x^m)}$$

lahendamisega (tundmatu on x^{m+1}, ülejäänu on teada). Meetodi samm on teostatav, kui eksisteerib $(F'(x^m))^{-1}$ ehk $\det F'(x^m) \neq 0$.

Newtoni meetod

Teoreem

Olgu F pidevalt diferentseeruv (st f_i, $i = 1, \ldots, n$, on diferentseeruvad ning lisaks $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, on pidevad) süsteemi (1) lahendi x^* ümbruses ning eksisteerigu $(F'(x^*))^{-1}$. Siis Newtoni meetod on rakendatav x^* ümbruses ning meetod koondub lahendiks x^* kiiremini igast geomeetrilisest progressioonist, kui alglähend x^0 valida lahendi x^* küllalt väikesest ümbrusest.

Teoreem

Kui lisaks eelmise teoreemi eeldustele

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\|$$

lahendi x^* ümbruses, siis

$$\|x^{m+1} - x^*\| \leq \text{const}\, \|x^m - x^*\|^2.$$

Märkus. Teoreemis toodud Lipschitzi tingimuse

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B}(x^*, \delta)$$

täidetuseks piisab, kui kõikvõimalikud teist järku osatuletised $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$, on pidevad lahendi x^* ümbruses $\overline{B}(x^*, \delta)$.

Näide

Lahendame Newtoni meetodiga võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0, \\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0. \end{cases}$$

Leiame esmalt

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2\sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2+0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{pmatrix}.$$

Newtoni meetod

Näide jätkub

Selle asemel, et igal sammul $x^m \rightsquigarrow x^{m+1}$ leida pöördmaatriks $(F'(x^m))^{-1}$ (mis on suurte süsteemide korral ajaliselt väga kulukas), lahendame igal sammul lineaarse süsteemi

$$F'(x^m)z = F(x^m)$$

tundmatu z suhtes ning leiame

$$x^{m+1} = x^m - (F'(x^m))^{-1}F(x^m) = x^m - z, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

m	x_1^m	x_2^m	x_3^m	$\|x^m - x^{m-1}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	
1	0.49986967	0.01946685	−0.52152047	0.422
2	0.50001424	0.00158859	−0.52355696	$1.8 \cdot 10^{-2}$
3	0.50000011	0.00001244	−0.52359845	$1.6 \cdot 10^{-3}$
4	0.50000000	0.00000000	−0.52359878	$1.2 \cdot 10^{-5}$
5	0.50000000	0.00000000	−0.52359878	$7.8 \cdot 10^{-10}$