Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine

Loeng 7

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

25.03.2019

1. Iteratsioonimeetodite vajalikkusest
2. Harilik iteratsioonimeetod
   - Koonduvustingimused
   - Maatriksi omaväärtused, spekter
3. Jacobi meetod
   - Peadiagonaali domineerimine
   - Koonduvustingimused
4. Seideli meetod
   - Koonduvustingimused
   - Seideli ja hariliku iteratsioonimeetodi võrdlus
5. Gauss-Seideli meetod
6. Richardsoni meetod
   - Koonduvustingimused

ÜI 21 | ÜI 22 | ÜI 23 | ÜI 24 | ÜI 25 | ÜI 26–27

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Vaatleme lineaarset süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Kasutame tähiseid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

siis võime süsteemi kirjutada kujul $Ax = b$.

Süsteem on üheselt lahenduv parajasti siis, kui $\det(A) \neq 0$ (Algebra I). Kui $\det(A) = 0$, võivad lahendid puududa või on neid lõpmata palju.

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Näide

Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix},$$

siis võrrandisüsteemi $Ax = b$ lahend on $x = (1, -1, 3)^T$.

Loendame, mitu korrutamist/jagamist tuleb teha selle süsteemi lahendamiseks.

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Näide jätkub

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{3\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.25 & 0.25 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.25 & 0.25 & 2 \\ 0 & 5.5 & 1.5 & -1 \\ 0 & 2.25 & 3.75 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.25 & 0.25 & 2 \\ 0 & 1 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 2.25 & 3.75 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.25 & 0.25 & 2 \\ 0 & 1 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 69/22 & 207/22 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.25 & 0.25 & 2 \\ 0 & 1 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.25 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ kj}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Kokku elimineerimismeetodil 17 $\left(= \frac{n^3+3n^2-n}{3}\right)$ korrutamist jagamist.

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Näide jätkub

Elimineerimismeetod

Esimese võrrandi jagamine arvuga a_{11}: n jagamist.
i-ndale võrrandile $-a_{i1}$-kordse esimese võrrandi liitmine: n korrutamist.
Kokku $n + n(n-1) = n^2$ korrutamist/jagamist.
Süsteemi maatriksi viimine kujule, kus diagonaalil on ühed ja allpool nullid: $n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ korrutamist/jagamist.

Peadiagonaalist ülalpool asuvate arvude elimineerimine nõuab $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ korrutamist.

Elimineerimismeetodi tehete arv on $\frac{2n^3+3n^2+n+3n^2-3n}{6} = \frac{n^3+3n^2-n}{3} \sim \frac{n^3}{3}$.

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Näide jätkub

$$D = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{6\,\mathrm{kj}}{=} \det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 11/2 & 3/2 \\ 0 & 9/4 & 15/4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2\,\mathrm{kj}}{=} \det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 11/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 138/44 \end{pmatrix} = 4 \cdot 11/2 \cdot 138/44 \overset{2\,\mathrm{kj}}{=} 69$$

Determinantide D, D_1, D_2, D_3 leidmine $4 \cdot 10 = 40$ korrutamist/jagamist. Lahendite $x_i = D_i/D$ leimine 3 korrutamist jagamist. Kokku determinantide meetodil 43 $\left(= \frac{n^4+n^3+2n^2+2n-3}{3}\right)$ korrutamist/jagamist.

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Näide jätkub

Determinantide meetod

Vaja on arvutada $n+1$ determinanti D, D_1, ..., D_n, seejärel n jagatist $x_i = \frac{D_i}{D}$.

Teisendame determinandi esmalt rea elementaarteisenduste abil kolmnurksele kujule: $n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2 \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ korrutamist/jagamist. Leiame peadiagonaalil asuvate elementide korrutise: $n-1$ korrutamist. Determinandi leidmine: $\frac{n^3-n+3n-3}{3} = \frac{n^3+2n-3}{3} \sim \frac{n^3}{3}$ korrutamist/jagamist.

Kogu meetodis $\frac{n^3+2n-3}{3}(n+1) + n = \frac{n^4+n^3+2n^2+2n-3}{3} \sim \frac{n^4}{3}$ korrutamist/jagamist.

Kui determinanti arvutada rea/veeru elementide ning ühe võrra madalamat järku determinantide kaudu, on vaja üle $n!$ korrutamise ($n! \gg n^3/3$).

Näide jätkub

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 4\cdot\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= 4\cdot 16 + 1\cdot 6 + 1\cdot(-1) = 69$$

Ühe determinandi leidmiseks
$9 = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n! > n!$ korrutamist.

Iteratsioonimeetodite vajalikkusest

Krameri meetod ehk determinantide meetod: $\sim \frac{n^4}{3}$ korrutamist/jagamist

Gaussi ehk elimineerimismeetod: $\sim \frac{n^3}{3}$ korrutamist/jagamist

Iteratsioonimeetodi samm: $\sim n^2$ korrutamist/jagamist;

ümardamisvigade mõju väike

$n = 1000$, $n^3/3 \approx 3.3 \cdot 10^8 > 20n^2 = 2 \cdot 10^7$

Harilik iteratsioonimeetod

Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n + b_1, \\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

ehk

$$x = Bx + b,$$

kus $x = (x_j)$, $B = (b_{ij})$, $b = (b_i)$ on vastavad vektorid ja maatriks. Harilik iteratsioonimeetod nõuab ühte alglähendit x^0, edasi leitakse

$$\boxed{x^{m+1} = Bx^m + b, \quad m = 0, 1, \ldots\ .}$$

Harilik iteratsioonimeetod

Harilik iteratsioonimeetod lineaarse süsteemi lahendamisel on erijuht üldisemast, kus $G(x) = Bx + b$.

Teame piisavat tingimust koondumiseks: mingi $q < 1$ korral

$$\|G(x) - G(y)\| \leq q\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq y.$$

Siin $G(x) - G(y) = Bx + b - (By + b) = B(x - y)$, seega

$$\begin{aligned}
&\|G(x) - G(y)\| \leq q\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \\
&\|B(x - y)\| \leq q\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \\
&\|Bx\| \leq q\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \\
&\|B\| \leq q.
\end{aligned}$$

Põhjendame viimase samaväärsuse (operaatori normiga tegeletakse aines FA I).

Kõrvalepõige funktsionaalanalüüsi

Põhjendame, et

$$\|Bx\| \leq q\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \|B\| \leq q.$$

"$\Rightarrow$" Definitsiooni kohaselt $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Bx\|$. Ja kui $\|Bx\| \leq q\|x\|$, siis $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} q\|x\| \leq q$.

"$\Leftarrow$" Kuna $\sup\limits_{\|y\|\leq 1} \|By\| \leq q$, siis $x \neq 0$ korral

$$\|Bx\| = \left\|B\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\|x\|B\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \underbrace{\left\|B\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|}_{\leq q} \leq q\|x\|.$$

Kui $x = 0$, siis $\|Bx\| = \|0\| = 0 \leq 0 = q\|0\| = q\|x\|$.

Harilik iteratsioonimeetod, koonduvustingimused

Teoreem 1 (piisav tingimus koonduvuseks)

Kui

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \quad \text{või} \quad \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \quad \text{või} \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 < 1$$

(ehk $\|B\| < 1$), siis süsteem

$$x = Bx + b$$

on üheselt lahenduv ning harilik iteratsioonimeetod koondub lahendiks iga alglähendi korral.

Maatriksi omaväärtused, spekter

Vaatleme $n \times n$ maatriksit A. Arvu $\lambda \in \mathbb{C}$ nimetatakse maatriksi A **omaväärtuseks**, kui on olemas vektor $x \neq 0$ nii, et $Ax = \lambda x$. Lineaaralgebrale tuginedes on vahetult kontrollitav, et λ on A omaväärtus parajasti siis, kui $\det(A - \lambda I) = 0$ ehk

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Viimane võrrand on maatriksi A **karakteristlik võrrand**, tema aste on n ja arvestades kordsusi, on tal kui algebralisel võrrandil täpselt n lahendit. Maatriksi A kõigi omaväärtuste hulka nimetatakse **spektriks** ja tähistatakse $\sigma(A)$.

Harilik iteratsioonimeetod, koonduvustingimused

Teoreem 2 (tarvilik ja piisav tingimus koonduvuseks)

Harilik iteratsioonimeetod süsteemi $x = Bx + b$ lahendamisel koondub süsteemi ainsaks lahendiks iga alglähendi korral parajasti siis, kui B kõik omaväärtused on mooduli poolest väiksemad arvust 1 ($\lambda \in \sigma(B) \Rightarrow |\lambda| < 1$).

[ei tõesta]

Geomeetriliselt tähendab see tarvilik ja piisav tingimus, et maatriksi B spekter asub komplekstasandi ühikringi sees.

Maatriksi omaväärtuste leidmise ülesanne on aga oluliselt raskem kui lineaarse süsteemi lahendamise ülesanne. Seepärast on praktikas tähtsad esimeses teoreemis toodud piisavad tingimused.

Harilik iteratsioonimeetod, koonduvustingimused

Näide

Vaatleme maatriksit

$$B = \begin{pmatrix} 0.1 & -1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$\|B\|_{\infty\to\infty} = \max_i \sum_j |b_{ij}| = \max\{1.1, 0.2\} = 1.1,$$

$$\|B\|_{1\to 1} = \max_j \sum_i |b_{ij}| = \max\{0.1, 1.2\} = 1.2,$$

$$\|B\|_{2\to 2} \le \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2} = \sqrt{1.05} \approx 1.025$$

ning Teoreemi 1 piisavad eeldused ei ole täidetud. Leiame maatriksi omaväärtused ehk võrrandi $\det(B - \lambda I) = 0$ lahendid. Võrrand $(0.1 - \lambda)(0.2 - \lambda) = 0$ annab $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, seega Teoreemi 2 tarvilikud ja piisavad eeldused koondumiseks on täidetud.

Ülesanne

21. Veenduda, et kui $\|B\| < 1$, siis $|\lambda| < 1$ iga $\lambda \in \sigma(B)$ korral.

Jacobi meetod

Vaatleme süsteemi $Ax = b$. Tähistame maatriksi A (pea)diagonaali elemente sisaldava maatriksi $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ ning $R = A - D$, seega $A = D + R$. Süsteemi $Ax = b$ kirjutame samaväärselt $(D + R)x = b$ ehk $Dx = -Rx + b$. Eeldame, et maatriksi A (pea)diagonaal on selline, et $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Siis $D^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$. Seega on $Ax = b$ esitatav samaväärselt $x = -D^{-1}Rx + D^{-1}b$. Rakendame saadud süsteemile harilikku iteratsioonimeetodit

$$\boxed{x^{m+1} = -D^{-1}Rx^m + D^{-1}b.}$$

Sellist protseduuri (diagonaali avaldamine + harilik iteratsioonimeetod) nimetatakse Jacobi meetodiks süsteemi $Ax = b$ lahendamisel.

Peadiagonaali domineerimine

Öeldakse, et maatriksi A (pea)diagonaal **domineerib ridade kaupa**, kui

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Mõnikord saab sellist olukorda saavutada, muutes võrrandite järjekorda süsteemis.

Öeldakse, et maatriksi A (pea)diagonaal **domineerib veergude kaupa**, kui

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Mõnikord saab sellist olukorda saavutada, muutes tundmatute järjekorda süsteemis.

Jacobi meetod

Kui maatriksi A diagonaal domineerib ridade või veergude kaupa, siis $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, seega Jacobi meetod on süsteemile $Ax = b$ rakendatav.

Olgu maatriksi A diagonaal domineeriv ridade kaupa. Siis peale diagonaali avaldamist saadava süsteemi maatriksi $B = -D^{-1}R$ korral

$$\|B\|_{\infty\to\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} =$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < \max_{1\leq i\leq n} \frac{|a_{ii}|}{|a_{ii}|} = 1.$$

Niisiis, kui A diagonaal domineerib ridade kaupa, siis Jacobi meetod koondub. Sel juhul tingimus $\|B\|_{\infty\to\infty} < 1$ tagab ka, et süsteemil on parajasti üks lahend ehk $\det A \neq 0$.

Ülesanne

22. Tõestada ilma iteratsioonimeetodi teooriat kasutamata, et kui A diagonaal domineerib ridade kaupa, siis $\det A \neq 0$.

Jacobi meetod

Kui A diagonaal domineerib veergude kaupa, siis transponeeritud maatriksi A^T diagonaal domineerib ridade kaupa ning seega $\det A^T \neq 0$. Kuid $\det A^T = \det A$, seega $\det A \neq 0$. Seega, kui A diagonaal domineerib veergude kaupa, siis süsteem on üheselt lahenduv.

Näide

Olgu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, siin diagonaal domineerib veergude kaupa. Diagonaali avaldamine viib maatriksini

$$B = -D^{-1}R = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Näitame, et $\|B\|_{p\to p} \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, st kõikide seni vaadeldud normide korral $\|B\| \geq 2$.

Näide jätkub

Hindame maatriksi $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ normi. Olgu $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, siis $\|\bar{x}\|_p = 1$, $B\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\|B\bar{x}\|_p = 2$ iga p-normi korral ($1 \leq p \leq \infty$). Definitsiooni kohaselt

$$\|B\|_{p\to p} = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|Bx\|_p \geq \|B\bar{x}\|_p = 2.$$

Seega diagonaali domineerimine veergude kaupa maatriksis A ei luba väita, et mingi p-normi korral $\|B\|_{p\to p} < 1$.

Hoiatus: me ei väida, et üldse ei leidu sellist normi ruumis $\mathbb{R}^2$, millele vastavalt $\|B\| < 1$.

Ülesanne

23. Tõestada, et kui maatriksi A diagonaal domineerib veergude kaupa, siis peale diagonaali avaldamist saadava maatriksi $B = -D^{-1}R$ kõik omaväärtused on mooduli poolest väiksemad ühest ($\lambda \in \sigma(B) \Rightarrow |\lambda| < 1$). Soovitus: tõestada, et kui $|\lambda| \geq 1$ ja veel $\lambda \in \sigma(B)$, siis $\det(\lambda D + R) = 0$, mis ei ole võimalik A diagonaali domineerimise korral.

Ülesande põhjal võib öelda, et kui maatriksi A diagonaal domineerib veergude kaupa, siis Jacobi meetod koondub.

Jacobi meetod

Teoreem

Vaatleme süsteemi $Ax = b$. Kui maatriksi A diagonaal domineerib ridade või veergude kaupa, siis vaadeldav süsteem on üheselt lahenduv ning Jacobi meetod

$$x^{m+1} = -D^{-1}Rx^m + D^{-1}b$$

koondub. Siin $A = D + R$ ning D on diagonaalmaatriks, mille diagonaalil on maatriksi A (pea)diagonaali elemendid.

Seideli meetod

Vaatleme süsteemi $x = Bx + b$. Olgu $B = L + D + U$, kus D on diagonaalmaatriks, mille diagonaal ühtib B diagonaaliga,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Seideli meetodis valitakse alglähend $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ja üleminek $x^m \rightsquigarrow x^{m+1}$ toimub järgmiselt:

$$x^{m+1} = Lx^{m+1} + (D + U)x^m + b$$

ehk

$$\boxed{x^{m+1} = (I - L)^{-1}(D + U)x^m + (I - L)^{-1}b.}$$

Märgime, et $\det(I - L) = 1$, seega $(I - L)^{-1}$ eksisteerib.

Seideli meetod

Seideli meetod on vaadeldav hariliku iteratsioonimeetodina teisendatud süsteemi $x = (I-L)^{-1}(D+U)x + (I-L)^{-1}b$ lahendamiseks. Seideli meetod koondub parajasti siis, kui võrrandi

$$\det((I-L)^{-1}(D+U) - \lambda I) = 0$$

lahendid on mooduli poolest väiksemad arvust 1. Seejuures

$$\begin{aligned} &\det((I-L)^{-1}(D+U) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det(D+U-\lambda(I-L)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det(\lambda L + D + U - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Teoreem

Seideli meetod süsteemi $x = Bx + b$ lahendamisel koondub parajasti siis, kui võrrandi $\det(\lambda L + D + U - \lambda I) = 0$ kõik lahendid on ühest väiksema mooduliga (siin $B = L + D + U$).

Seideli meetod

Teoreem

Kui $\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|<1$ või $\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{ij}|<1$, siis Seideli meetod koondub.

Tõestuseks märgime, et esimene tingimus annab $\|B\|_{\infty\to\infty}<1$, mis tähendab, et $G(x)=Bx+b$ on ahendav ruumis $\mathbb{R}^n$ ∞-normi suhtes ja võib rakendada üldist koonduvusteoreemi. Teise tingimuse kohta olgu sõnastatud ülesanne

25. Tõestada, et kui $\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{ij}|<1$, siis arv λ , kus $|\lambda|\geq 1$, ei saa olla võrrandi $\det(\lambda L+D+U-\lambda I)=0$ lahend. Soovitus: näidata, et kui $|\lambda|\geq 1$, siis maatriksi $\lambda L+D+U-\lambda I$ diagonaal domineerib veergude kaupa.

Seideli ja hariliku iteratsioonimeetodi võrdlus

Seideli meetod koondub parajasti siis, kui võrrandi

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \lambda b_{21} & b_{22}-\lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_{n1} & \dots & \lambda b_{n,n-1} & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

lahendid on ühest väiksema mooduliga. Harilik iteratsioonimeetod koondub parajasti siis, kui võrrandi

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

lahendid on ühest väiksema mooduliga.

Ülesanne

24. Näidata, et kui süsteemis $x = Bx + b$ võtta 2×2 maatriksiks B
    a) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}$, siis harilik iteratsioonimeetod koondub, Seideli meetod mitte;
    b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$, siis Seideli meetod koondub, harilik iteratsioonimeetod mitte.

Seideli ja hariliku iteratsioonimeetodi võrdlus

Näide

Vt süsteemi $x = Bx + b$, kus $B = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}$ ning $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$. Selle süstemi lahend on $x^* = (1,2)^T$.

	Harilik iteratsioonimeetod		Seideli meetod	
m	x_1^m	x_2^m	x_1^m	x_2^m
0	1,5	1,5	1,5	1,5
1	2,7500	3,2500	2,7500	5,1250
2	2,6250	3,3750	-0,1875	-2,9063
3	2,1875	3,0625	5,9844	14,3828
4	1,7813	2,7188	-7,6055	-23,2910
5	1,4844	2,4531	21,7256	58,3794
6	1,2891	2,2734	-42,1179	-119,0563
7	1,1680	2,1602	96,3486	266,0791
8	1,0957	2,0918	-204,4216	-570,2115
9	1,0537	2,0518	448,4741	1245,4226
10	1,0298	2,0288	-969,1857	-2696,7012
11	1,0164	2,0159	2108,6803	5862,2217
12	1,0089	2,0087	-4573,9718	-12720,6794

Seideli ja hariliku iteratsioonimeetodi võrdlus

Näide

Vt süsteemi $x = Bx + b$, kus $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$ ning $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.2 \end{pmatrix}$. Selle süstemi lahend on $x^* = (1, 2)^T$.

	Harilik iteratsioonimeetod		Seideli meetod	
m	x_1^m	x_2^m	x_1^m	x_2^m
0	1,5	1,5	1,5	1,5
1	3,0000	2,5500	3,0000	4,0500
2	3,9000	3,9450	0,9000	1,6950
3	2,9100	4,7055	1,4100	2,4405
4	-0,5910	3,6395	0,9390	1,8950
5	-5,4609	0,2451	1,0881	2,0986
6	-8,4119	-4,2854	0,9790	1,9691
7	-5,2530	-6,7834	1,0197	2,0228
8	6,0607	-3,3747	0,9938	1,9915
9	21,8708	7,5982	1,0046	2,0054
10	31,5452	22,3110	0,9983	1,9978
...	...	...	...	...
30	-10990,3478	-7150,6685	1,0000	2,0000

Gauss-Seideli meetod

Vaatleme võrrandisüsteemi $Ax = b$. Gauss–Seideli meetod on maatriksi A diagonaali avaldamine koos selliselt saadud süstemi lahendamisega Seideli meetodil.

Olgu $A = R_L + D + R_U$, kus R_L ja R_U on vastavalt diagonaali all ja peal paiknevatest elementidest koosnevad osad. Eeldame, et $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Siis

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow (R_L + D + R_U)x = b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Dx = -R_L x - R_U x + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -D^{-1} R_L x - D^{-1} R_U x + D^{-1} b. \end{aligned}$$

Seideli meetodis valitakse x^0 ning leitakse

$$x^{m+1} = -D^{-1} R_L x^{m+1} - D^{-1} R_U x^m + D^{-1} b, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Ülesanded

26. Veenduda, et vaadeldud iteratsioonimeetodi sammu saab kirjutada kujul

$$x^{m+1} = -(I + D^{-1}R_L)^{-1}D^{-1}R_U x^m + (I + D^{-1}R_L)^{-1}D^{-1}b$$

    või

$$x^{m+1} = -(D + R_L)^{-1}R_U x^m + (D + R_L)^{-1}b.$$

27. Tõestada, et kui maatriksi A diagonaal domineerib ridade või veergude kaupa, siis Gauss–Seideli meetod koondub.

Richardsoni meetod

Vaatleme süsteemi $Ax = b$. Richardsoni meetodil leitakse alglähendist x^0 lähtudes järgmised lähendid

$$\boxed{x^{m+1} = x^m - \omega(Ax^m - b), \quad m = 0, 1, \dots,}$$

kus $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, on fikseeritud. Seda meetodit võib vaadelda kui harilikku iteratsioonimeetodit, mida on rakendatud süsteemile

$$x = (I - \omega A)x + \omega b.$$

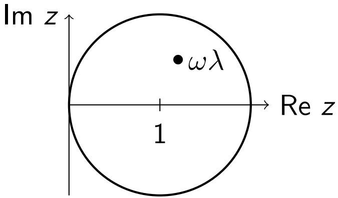
Teame, et koonduvus sõltub ainult maatriksist $B = I - \omega A$, tarvilik ja piisav on, et $\lambda \in \sigma(B)$ korral oleks $|\lambda| < 1$.

Richardsoni meetod

Olgu $B = I - \omega A$, siis

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow \exists x \neq 0\colon Ax = \lambda x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \neq 0\colon -\omega Ax = -\omega\lambda x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \neq 0\colon x - \omega Ax = x - \omega\lambda x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \neq 0\colon (I - \omega A)x = (1 - \omega\lambda)x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \omega\lambda \in \sigma(B)\end{aligned}$$

Richardsoni meetod koondub parajasti siis, kui $|\omega\lambda - 1| < 1$ iga $\lambda \in \sigma(A)$ korral.



$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$

Richardsoni meetod

Kas saab leida $\omega \in \mathbb{C}$ nii, et $|\omega\lambda - 1| < 1$ iga $\lambda \in \sigma(A)$ korral? Et $\omega \neq 0$, siis

$$|\omega\lambda - 1| < 1 \Leftrightarrow \left|\lambda - \frac{1}{\omega}\right| < \frac{1}{|\omega|}$$

ning koondumise tarvilik ja piisav tingimus on, et leidub $\omega \in \mathbb{C}$ nii, et

$$\sigma(A) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda - \frac{1}{\omega}| < \frac{1}{|\omega|}\right\},$$

mis on ring keskpunktiga $\frac{1}{\omega}$, raadiusega $\frac{1}{|\omega|}$ ja seega läbib punkti 0 selle ringi rajajoon. Et $\frac{1}{\omega}$ võib olla suvaline nullist erinev kompleksarv, oleme saanud tulemuse.

Richardsoni meetod

Lause

Richardsoni meetodi koondumiseks sobiv arv $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, on olemas parajasti siis, kui maatriksi A kõik omaväärtused asuvad mingisuguse punkti 0 läbiva ringjoone sees.

Järeldus 1

Kui $\sigma(A) \subset (0, \infty)$, siis leidub ω nii, et Richardsoni meetod koondub. Sobiv arv ω on selline, et $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, kus $\lambda_{\max}$ on maatriksi A suurim omaväärtus.

Olgu $\sigma(A) \subset (0, \infty)$. Kui võtame ω nii, et $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, ja $\lambda \in \sigma(A)$, siis $0 < \omega\lambda < \frac{2\lambda}{\lambda_{\max}} \leq 2$, s.t. $0 < \lambda\omega < 2$ ehk $-1 < \omega\lambda - 1 < 1$, aga sellest järeldub, et $|\omega\lambda - 1| < 1$.

Richardsoni meetod

Järeldus 2

Kui $\sigma(A) \subset (0, \infty)$ ja $0 < \omega < \frac{2}{\|A\|}$, siis Richardsoni meetod koondub.

Iga $\lambda \in \sigma(A)$ korral $\|A\| \geq |\lambda|$. [põhjendame tahvlil]

Tehtud eeldustel iga $\lambda \in \sigma(A)$ korral $\lambda > 0$ ja seepärast $\frac{2}{\|A\|} \leq \frac{2}{\lambda_{\max}}$.
Seega, kui $0 < \omega < \frac{2}{\|A\|}$, siis $0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ ja jääb kasutada Järeldust 1.

Järelduse 2 olulisus on selles, et maatriksi A omaväärtuste leidmine võib olla tunduvalt komplitseeritum kui tema normi hindamine.

Richardsoni meetod

Järeldus 3

Kui maatriks A on positiivselt määratud, siis leidub $\omega > 0$ nii, et Richardsoni meetod koondub.

Maatriksi A positiivne määratus tähendab, et $(Ax, x) > 0$ iga $x \neq 0$ korral. Siis aga $Ax = \lambda x, x \neq 0$ annab, et $(Ax, x) = \lambda(x, x) > 0$, kusjuures $(x, x) > 0$, millest saame, et $\lambda > 0$ ehk $\sigma(A) \subset (0, \infty)$.

Positiivselt määratud maatriks

Maatriks A on **positiivselt määratud** parajasti siis, kui $(Ax, x) > 0$ iga $x \neq 0$ korral.

Näide

Maatriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on positiivselt määratud, sest $x \neq 0$ korral
$Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ning $(Ax, x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 =$
$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0.$
Maatriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ei ole positiivselt määratud, sest $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ korral
$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ning $(Ax, x) = -1 + 1 = 0.$

Richardsoni meetod

Vaatleme juhtu, kus süsteemi $Ax = b$ maatriksi A omaväärtused ei asu ühegi nullpunkti läbiva ringjoone sees, kuid A on regulaarne ($\det A \neq 0$). Siis võime lahendada samaväärset süsteemi $A^T Ax = A^T b$, kus A^T on transponeeritud maatriks. Süsteemide samaväärsus tuleb sellest, et $\det A^T = \det A \neq 0$ ja seepärast on A^T regulaarne ehk pööratav. Maatriks $A^T A$ on positiivselt määratud, sest $x \neq 0$ korral $Ax \neq 0$ ja $(A^T Ax, x) = (Ax, Ax) > 0$. Järelduse 3 põhjal saab leida ω nii, et Richardsoni meetod

$$x^{m+1} = x^m - \omega(A^T Ax^m - A^T b)$$

koondub. Seejuures ei tarvitse korrutist $A^T A$ välja arvutada (see nõuab n^3 tehet), vaid igal sammul võib leida Ax^m, seejärel $A^T(Ax^m)$, mis vajab igal sammul $2n^2$ korrutamist. Liige $A^T b$ leitakse ainult ühel korral, teda ei ole vaja igal sammul uuesti leida.

Richardsoni meetod

Laiaulatuslik uurimisvaldkond kaasajal on meetodid süsteemi $Ax = b$ lahendamiseks kujul

$$x^{m+1} = x^m - M_m(Ax^m - b),$$

kus M_m on $n \times n$ maatriksite jada. Nendest erijuhtudena käsitlesime siin Richardsoni meetodit, kus $M_m = \omega I$, ja valikut $M_m = \omega A^T$.

Kokkuvõte lineaarsetest süsteemidest

Järgmises tabelis on ära toodud piisavad (tarvilikud ja piisavad) tingimused ülesande üheseks lahenduvuseks ning meetodi koonduvuseks lineaarsete süsteemide korral:

$x = Bx + b$	$Ax = b$
Harilik iteratsioonimeetod $\|B\| < 1 \Rightarrow$ üh lah ja koond $(\det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lvert\lambda\rvert < 1) \Leftrightarrow$ üh lah ja koond	**Jacobi meetod** A diag dom $\Rightarrow$ üh lah ja koond
Seideli meetod $\|B\|_\infty < 1$ või $\|B\|_1 < 1 \Rightarrow$ üh lah ja koond $(\det(\lambda L + D + U - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lvert\lambda\rvert < 1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ üh lah ja koond	**Gauss-Seideli meetod** A diag dom $\Rightarrow$ üh lah ja koond
	Richardsoni meetod $x^{m+1} = x^m - \omega(Ax^m - b)$ $\exists \omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 0 : \sigma(A) \subset$ $\subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lvert\lambda - \frac{1}{\omega}\rvert < \frac{1}{\lvert\omega\rvert}\right\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ koond