# Funktsioonide lähendamine. Interpoleerimine.

Loeng 8–9

MTMM.00.005 Numbrilised meetodid

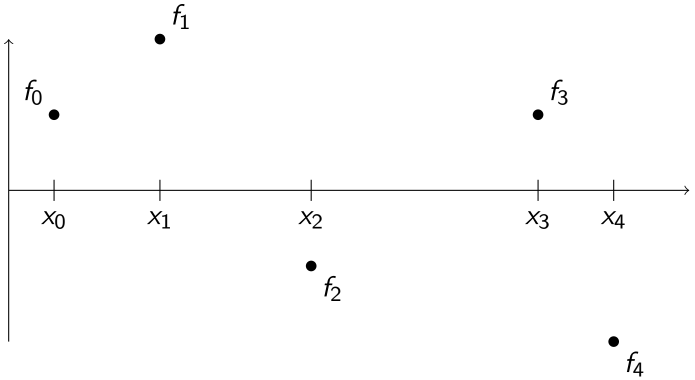
08/15.04.2019

1. Interpoleerimisülesanne
   - Ülesande püstitus
   - Interpolandi olemasolu ja ühesus
   - Lagrange'i fundamentaalpolünoomid
   - Lagrange'i interpolatsioonivalem
   - Diferentssuhted
   - Newtoni interpolatsioonivalem
   - Interpolatsioonivalemi jääkliige
   - Interpolatsiooniprotsessi koondumisest
   - Vigade mõju interpoleerimisel
   - Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

Üles. 28 | Ülesanded 29-30 | Üles. 31 | Ülesanded 32-35 | Üles. 36

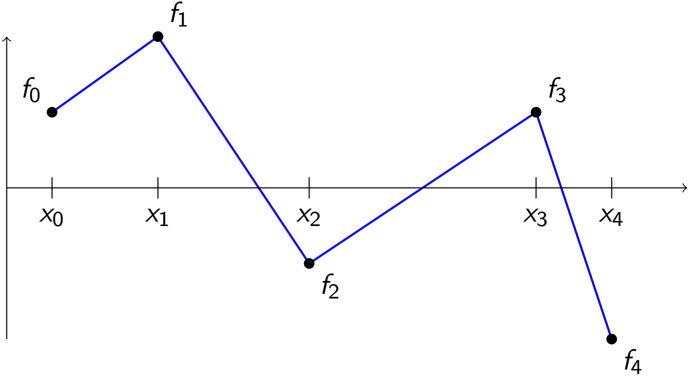
# Ülesande püstitus

$x_i$ – interpolatsioonisõlmed
$f_i$ – interpoleeritavad väärtused
$\varphi(x_i) = f_i$ – interpolatsioonitingimused
$i = 0, \ldots, n$
$\varphi$ – interpolant



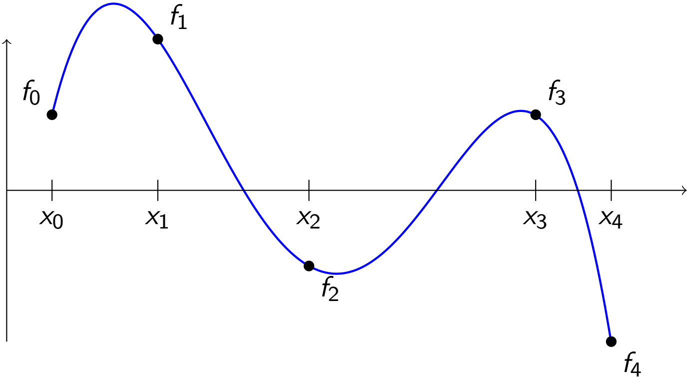
# Ülesande püstitus

$x_i$ – interpolatsioonisõlmed
$f_i$ – interpoleeritavad väärtused
$\varphi(x_i) = f_i$ – interpolatsioonitingimused
$i = 0, \dots, n$
$\varphi$ – interpolant



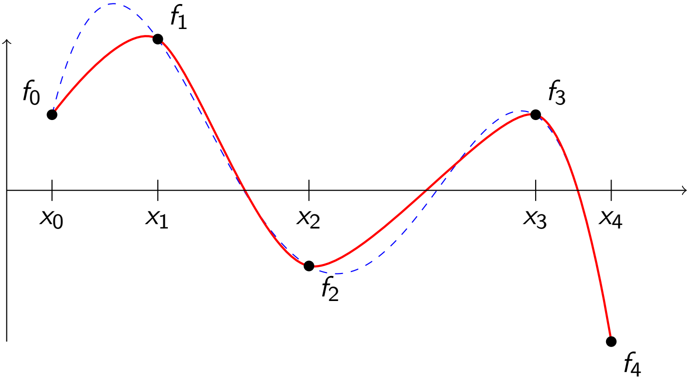
# Ülesande püstitus

$x_i$ – interpolatsioonisõlmed
$f_i$ – interpoleeritavad väärtused
$\varphi(x_i) = f_i$ – interpolatsioonitingimused
$i = 0, \ldots, n$
$\varphi$ – interpolant



# Ülesande püstitus

$x_i$ – interpolatsioonisõlmed
$f_i$ – interpoleeritavad väärtused
$\varphi(x_i) = f_i$ – interpolatsioonitingimused
$i = 0, \ldots, n$
$\varphi$ – interpolant



# Ülesande püstitus

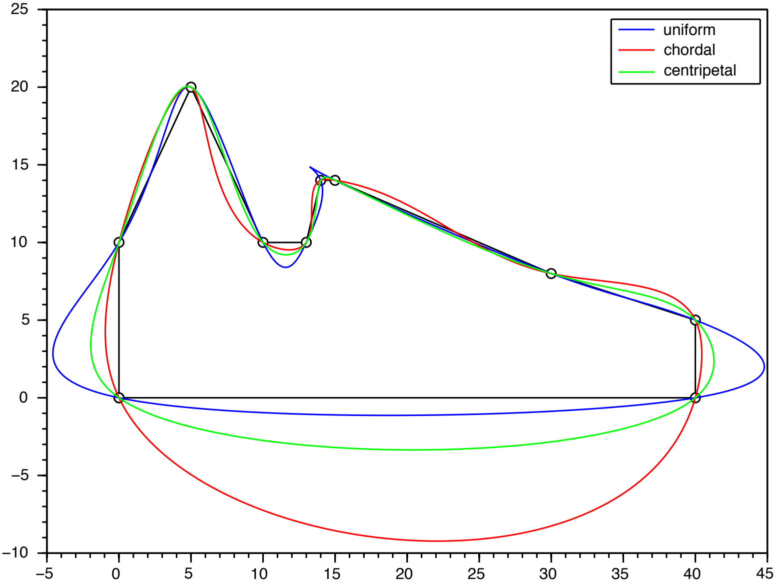
Klassikalise interpolatsiooniülesande korral on antud sõlmed $x_i \in \mathbb{R}$ ning interpoleeritavad väärtused $f_i \in \mathbb{R}$. Otsitakse funktsiooni $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Vaadeldakse ka mitme muutuja funktsioonide interpoleerimist, kus antud on sõlmed $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ ning interpoleeritavad väärtused $f_i \in \mathbb{R}$. Otsitakse funktsiooni $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nii, et $\varphi(x_i, y_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

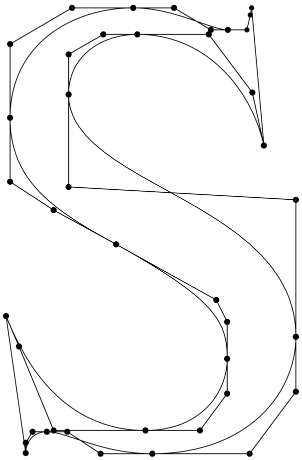
Parameetrilise interpoleerimise korral on antud punktid $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ ning otsitakse parameetrilist kõverat $\varphi$, mis läbiks neid punkte, st $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t_i) = P_i$, $i = 0, \ldots, n$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Kõvera kuju sõltub siin parametriseeringust. $\mathbb{R}^2$ asemel võib vaadelda ruumi $\mathbb{R}^m$, tulemuseks on endiselt parameetriline kõver.

Arvutigraafikas on enamasti tarvis kujutada 3D pindasid, neid vaadeldakse kui parameetrilisi funktsioone $\varphi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$.

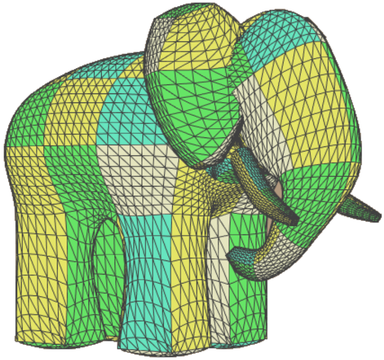
# Ülesande püstitus



# Ülesande püstitus



Täht S PostScript fondis Times Roman
(kuup Bezier' kõver)



bikuup Bezier' pind
Allikas: Wikipedia

# Ülesande püstitus

Antud kursuses me piirdume klassikalise interpolatsiooniülesandega ning vaatleme ainult erijuhtu, kus interpolandiks on polünoom. Pisut puudutame ka mitme muutuja funktsioonide interpoleerimist polünoomidega.

# Interpolandi olemasolu ja ühesus

Olgu **interpolatsioonisõlmed** $x_i$, $i = 0, \dots, n$, **paarikaupa erinevad**. Vaatleme interpolatsiooniülesannet $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Olgu meil antud koordinaatfunktsioonid $\psi_0, \dots, \psi_m$ ning interpolant avaldugu kujul

$$\varphi = c_0\psi_0 + \ldots + c_m\psi_m,$$

kus kordajad $c_0, \dots, c_m$ tuleb määrata interpolatsioonitingimustest. Tekib lineaarne võrrandisüsteem

$$c_0\psi_0(x_i) + \ldots + c_m\psi_m(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

mille üheseks lahenduvuseks on tarvilik, et $m = n$. Süsteem

$$c_0\psi_0(x_i) + \ldots + c_n\psi_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

on üheselt lahenduv parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \cdots & \psi_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_0(x_n) & \cdots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

# Interpolandi olemasolu ja ühesus

Vaatleme juhtu, kus koordinaatfunktsioonid on polünoomid $\psi_j(x) = x^j$, siis $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ (interpolatsioonipolünoom). Vastav determinant on Vandermonde'i determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \prod_{i>j} (x_i - x_j) =$$

$$\begin{aligned} &= (x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (x_{n-1} - x_0) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \\ &\quad \ldots \\ &\quad \cdot (x_1 - x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Võrduse (*) tõestust vaadake nt siit.

# Interpolandi olemasolu ja ühesus

**Lause**

Suvaliste arvude $f_0, \ldots, f_n$ korral leidub parajasti üks polünoom $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ nii, et $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

# Interpolandi olemasolu ja ühesus

**Kuidas leida interpolanti?**

Üheks võimaluseks on lineaarse süsteemi

$$c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \ldots + c_n x_i^n = f_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

lahendamine. Siis polünoom $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ interpoleerib väärtusi $f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

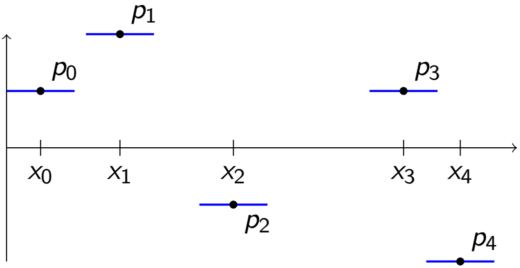
# Interpolandi olemasolu ja ühesus (Neville'i skeem)

Teine võimalus sellesama polünoomi konstrueerimiseks on **Neville'i skeem**:

Olgu $p_i$ 0-astme polünoomid ehk konstantsed funktsioonid $p_i(x) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Olgu $p_{i,i+1}$ 1-astme polünoomid ehk lineaarsed funktsioonid

$$p_{i,i+1}(x) = \frac{(x - x_i)f_{i+1} + (x_{i+1} - x)f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$



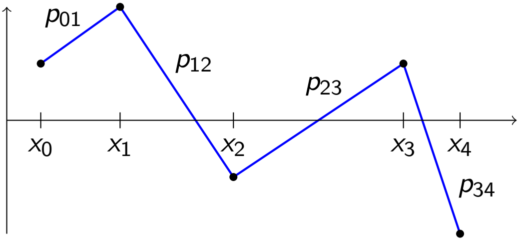
# Interpolandi olemasolu ja ühesus (Neville'i skeem)

Teine võimalus sellesama polünoomi konstrueerimiseks on **Neville'i skeem**:

Olgu $p_i$ 0-astme polünoomid ehk konstantsed funktsioonid $p_i(x) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Olgu $p_{i,i+1}$ ülimalt 1-astme polünoomid ehk lineaarsed funktsioonid

$$p_{i,i+1}(x) = \frac{(x - x_i)f_{i+1} + (x_{i+1} - x)f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$



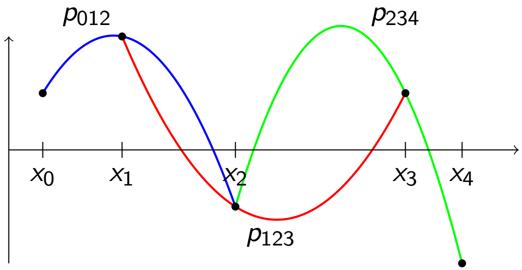
# Interpolandi olemasolu ja ühesus (Neville'i skeem)

Olgu $p_{i,i+1}$ ülimalt 1-astme polünoomid ehk lineaarsed funktsioonid

$$p_{i,i+1}(x) = \frac{(x - x_i)f_{i+1} + (x_{i+1} - x)f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

Olgu $p_{i,i+1,i+2}$ ülimalt 2-astme polünoomid ehk paraboolid

$$p_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,i+2}(x) + (x_{i+2} - x)p_{i,i+1}(x)}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, \dots, n-2.$$



# Interpolandi olemasolu ja ühesus (Neville'i skeem)

Jne. Üldiselt

$$p_{i,\dots,i+k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,\dots,i+k}(x) + (x_{i+k} - x)p_{i,\dots,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i},$$

$$i = 0, \dots, n-k.$$

Iga polünoom $p_{i,\dots,i+k}$ interpoleerib väärtusi $f_i, \dots, f_{i+k}$. Polünoom $p_{0\dots n}(x)$ on ülimalt $n$-astme polünoom, mis rahuldab kõiki interpolatsioonitingimusi $p_{0\dots n}(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$.

# Interpolandi olemasolu ja ühesus (Neville'i skeem)

$$
\begin{tikzcd}
p_0(x) = f_0 \arrow[dr] & & & \\
& p_{01}(x) \arrow[dr] & & \\
p_1(x) = f_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & p_{012}(x) \arrow[dddr, dotted, no head] & \\
& p_{12}(x) \arrow[ur] & & \\
p_2(x) = f_2 \arrow[ur] & & & \\
\dots & & & p_{0\dots n}(x) \\
p_{n-1}(x) = f_{n-1} \arrow[dr] & & & \\
& p_{n-1,n}(x) \arrow[uurr, dotted, no head] & & \\
p_n(x) = f_n \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

# Ülesanne

28. Olgu antud $x_0, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, kui $i \neq j$, ja $f_0, \ldots, f_n$. Olgu $p_{i,\ldots,i+k}$ polünoom, mille aste ei ületa arvu $k$, ja $p_{i,\ldots,i+k}(x_j) = f_j$, $j = i, \ldots, i+k$. Tõestada, et

$$p_{i,\ldots,i+k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,\ldots,i+k}(x) + (x_{i+k} - x)p_{i,\ldots,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i},$$

kui $p_j(x) = f_j$ iga $x$ ja iga $j$ korral.

# Lagrange'i fundamentaalpolünoomid

Kolmas võimalus interpolatsioonipolünoomi konstrueerimiseks on Lagrange'i interpolatsioonivalem.

Olgu antud paarikaupa erinevad $x_0, \ldots, x_n$. Vaatleme polünoome

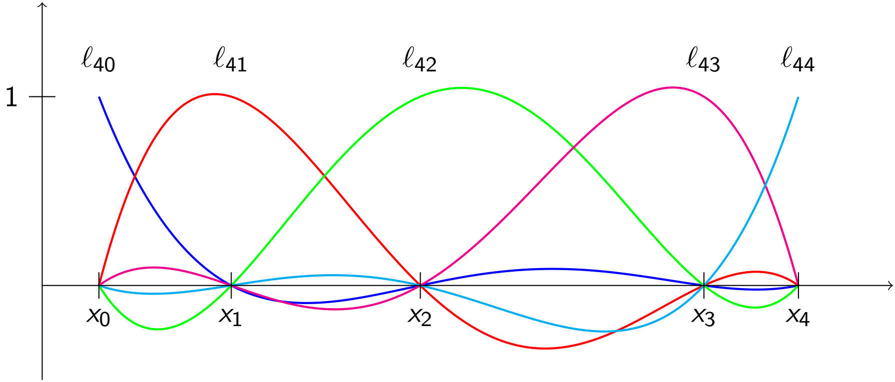
$$\ell_{ni}(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

$i = 0, \ldots, n$. Tegemist on $n$-astme polünoomiga, kusjuures

$$\ell_{ni}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\}\,. \end{cases}$$

Polünoome $\ell_{ni}$, $i = 0, \ldots, n$, nimetatakse sõlmedele $x_0, \ldots, x_n$ vastavateks **Lagrange'i fundamentaalpolünoomideks**.

# Lagrange'i fundamentaalpolünoomid



# Ülesanded

29. Olgu $\omega_n(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$. Näidake, et
$$\ell_{ni}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}.$$
30. Tõestada, et $\ell_{ni}$, $i = 0, \dots, n$, on lineaarselt sõltumatud.

# Lagrange'i interpolatsioonivalem

Olgu antud sõlmed $x_0, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, kui $i \neq j$, ja vastavad arvud $f_0, \ldots, f_n$. Polünoom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_{ni}(x) = f_0 \ell_{n0}(x) + \ldots + f_n \ell_{nn}(x)$$

on interpolatsioonipolünoom, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Põhjendus:

- Kuna $\ell_{ni}$ on $n$ astme polünoomid, siis nende lineaarse kombinatsiooni $P_n$ aste ei ületa $n$.
- Võrduse $\ell_{ni}(x_j) = \delta_{ij}$ tõttu kehtib

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_{ni}(x_j) = f_j, \quad j = 0, \ldots, n.$$

# Lagrange'i interpolatsioonivalem

Kasutades varemtoodud $\ell_{ni}$ avaldisi võime kirjutada

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)},$$

kus $\omega_n(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$.

Seda valemit nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonivalemiks**.

# Lagrange'i interpolatsioonivalem

Täiendused:

- Interpolatsioonipolünoom ei muutu, kui muudame Lagrange'i interpolatsioonivalemis sõlmede järjekorda.

  Põhjendus: kui muuta sõlmede järjekorda, siis Lagrange'i valemis muutub liidetavate järjekord, liidetavad ise ei muutu. Näiteks liidetav $f_i \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_k'(x_i)}$ on määratud sõlmede komplekti $x_0, \ldots, x_n$ ja indeksiga $i$, ta ei muutu sõlmede järjekorra muutmisel.

- Lagrange'i fundamentaalpolünoomid $\ell_{n0}, \ldots, \ell_{nn}$ moodustavad baasi kõigi ülimalt $n$ astme polünoomide ruumis $\mathcal{P}_n$.

  Põhjendus: $\dim \mathcal{P}_n = n+1$ ja Lagrange'i fundamentaalpolünoomid on lineaarselt sõltumatud. Iga $P \in \mathcal{P}_n$ korral $P(x) = \sum_{i=0}^n P(x_i)\ell_{ni}(x)$, mis tuleneb sellest, et $P$ ja $\sum_{i=0}^n P(x_i)\ell_{ni}$ rahuldavad mõlemad samu interpolatsioonitingimusi, nende aste ei ületa $n$, kuid interpolatsioonipolünoom on üheselt määratud.

# Diferentssuhted

Olgu antud paarikaupa erinevad argumendi väärtused $x_0, \ldots, x_n$ ja funktsiooni väärtused $f(x_0), \ldots, f(x_n)$. Defineerime diferentssuhted rekursiivselt:

0\. järku diferentssuhted $f[x_i] = f(x_i)$;

esimest järku diferentssuhted

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad i \neq j;$$

teist järku diferentssuhted

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad k \neq i;$$

$k$. järku differentssuhted

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] - f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

# Diferentsuhted

## Näide

Olgu $x_i = i$, $i = 0, \ldots, 4$, ning $f(x) = x^3$. Siis 0. – 4. järku diferentssuhted $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ avalduvad kujul

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f[x_i]$ | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 |
| $f[x_i, x_{i+1}]$ | $\frac{1-0}{1-0} = 1$ | $\frac{8-1}{2-1} = 7$ | $\frac{27-8}{3-2} = 19$ | $\frac{64-27}{4-3} = 37$ | |
| $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ | $\frac{7-1}{2-0} = 3$ | $\frac{19-7}{3-1} = 6$ | $\frac{37-19}{4-2} = 9$ | | |
| $f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$ | $\frac{6-3}{3-0} = 1$ | $\frac{9-6}{4-1} = 1$ | | | |
| $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ | $\frac{1-1}{4-0} = 0$ | | | | |

***Ülesanne.** Olgu $f$ $n$ korda pidevalt diferentseeruv. Näidake, et iga $k \leq n$ korral

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h, \ldots, x+kh] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x).$$

# Diferentssuhted

## Lause

Kehtib võrdus

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega_n'(x_i)}.$$

[Tõestus tahvlil.]

Järeldused:

1. $(f_1 + f_2)[x_0, \dots, x_n] = f_1[x_0, \dots, x_n] + f_2[x_0, \dots, x_n]$,
2. $(cf)[x_0, \dots, x_n] = cf[x_0, \dots, x_n]$,
3. diferentssuhe on sümmeetriline argumentide suhtes.

# Newtoni interpolatsioonivalem

Neljas võimalus interpolatsioonipolünoomi konstrueerimiseks on Newtoni interpolatsioonivalem. (Neid võimalusi on veel.)

Olgu antud paarikaupa erinevad sõlmed $x_0, \ldots, x_n$ ja vastavad arvud $f(x_0), \ldots, f(x_n)$.

**Lause**

Interpolatsioonitingimusi $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, rahuldav ülimalt $n$ astme polünoom avaldub kujul

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

[Tõestus tahvlil.]

# Newtoni interpolatsioonivalem

Newtoni interpolatsioonivalemis kasutatavate diferentssuhete arvutamine toimub kolmnurkse skeemi abil

$$\begin{array}{ccccc}
x_0 & f[x_0] & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_2] & & \\
x_2 & f[x_2] & & & \\
\dots & & & & f[x_0,x_1,\dots,x_n], \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & & & \\
 & & f[x_{n-1},x_n] & & \\
x_n & f[x_n] & & &
\end{array}$$

kusjuures interpolatsioonivalemis kasutatakse ainult iga veeru esimesi elemente.

# Ülesanne

31. Leida, kui palju tuleb teha korrutamisi ja jagamisi, et arvutada Lagrange'i interpolatsioonivalemi abil $P_n(x)$, $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$. Sama küsimus Newtoni valemi korral.

# Näide

Interpoleerime $f(x) = |x|$ väärtusi sõlmedes $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

1) Lineaarse süsteemi

$$c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, 2,$$

lahendamine annab $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$ ning $P_2(x) = x^2$.

2) Neville'i skeem annab $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 1$.

$$p_{01}(x) = \frac{(x - x_0)f_1 + (x_1 - x)f_0}{x_1 - x_0} = (x+1) \cdot 0 + (-x) \cdot 1 = -x,$$

$$p_{12}(x) = \frac{(x - x_1)f_2 + (x_2 - x)f_1}{x_2 - x_1} = (x-0) \cdot 1 + (1-x) \cdot 0 = x.$$

$$p_{012}(x) = \frac{(x - x_0)p_{12}(x) + (x_2 - x)p_{01}(x)}{x_2 - x_0} = \frac{(x+1)x + (1-x)(-x)}{2}$$

# Näide jätkub

3) Lagrange'i fundamentaalpolünoomid on $\ell_{20}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, $\ell_{21}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{-1}$, $\ell_{22}(x) = \frac{(x+1)x}{2}$.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom on

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_{ni}(x) = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)x}{2}.$$

4) Diferentssuhted

$$\begin{array}{llll}
x_0 = -1 & f[x_0] = 1 & & \\
 & & f[x_0, x_1] = -1 & \\
x_1 = 0 & f[x_1] = 0 & & f[x_0, x_1, x_2] = 1 \\
 & & f[x_1, x_2] = 1 & \\
x_2 = 1 & f[x_2] = 1 & &
\end{array}$$

Newtoni interpolatsioonipolünoom on

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 - (x + 1) + (x + 1)x
\end{aligned}$$

# Näide jätkub

Kõik neli meetodit annavad interpolatsioonipolünoomiks $P_2(x) = x^2$. Erinevus seisneb vaid selles, millist baasi polünoomide ruumis $\mathcal{P}_n$ kasutatakse.

Juhul 1) on baasiks

$$\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right\},$$

juhul 3) on baasiks

$$\left\{\ell_{ni}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \ldots, n\right\},$$

juhul 4) on baasiks

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})\}.$$

# Kõrvalepõige. Bernsteini polünoomid

***Ülesanne.** (1 p) Defineerime $x \in [0,1]$ korral Bernsteini baaspolünoomid

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Juhul $i \notin \{0, \dots, n\}$ olgu $B_{i,n}(x) = 0$. Tõestada üksikasjalikult, et

1. $B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$;
2. $B_{i,n}(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$;
3. $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1$;
4. $B_{i,n-1}(x) = \frac{n-i}{n} B_{i,n}(x) + \frac{i+1}{n} B_{i+1,n}(x)$;
5. polünoomil $B_{i,n}(x)$, $x \in [0,1]$, on üks lokaalne maksimum punktis $\frac{i}{n}$, mis on ühtlasi ka globaalne maksimum.

# Kõrvalepõige. Bernsteini polünoomid

***Ülesanne.** (0.5 p) Olgu $f \in C[0,1]$. Defineerime Bernsteini polünoomi

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_{i,n}(x), \tag{1}$$

kus

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

on Bernsteini baaspolünoomid.

Kas polünoom (1) interpoleerib funktsiooni $f$ väärtusi sõlmedes $\frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$? Põhjendage. Näidake, et funktsiooni $f(x) = x^2$ korral esitub Bernsteini polünoom (1) kujul

$$P_n(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x.$$

Leidke vähim $n$, mille korral $\max_{0 \le x \le 1} |P_n(x) - x^2| \le 10^{-6}$?

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

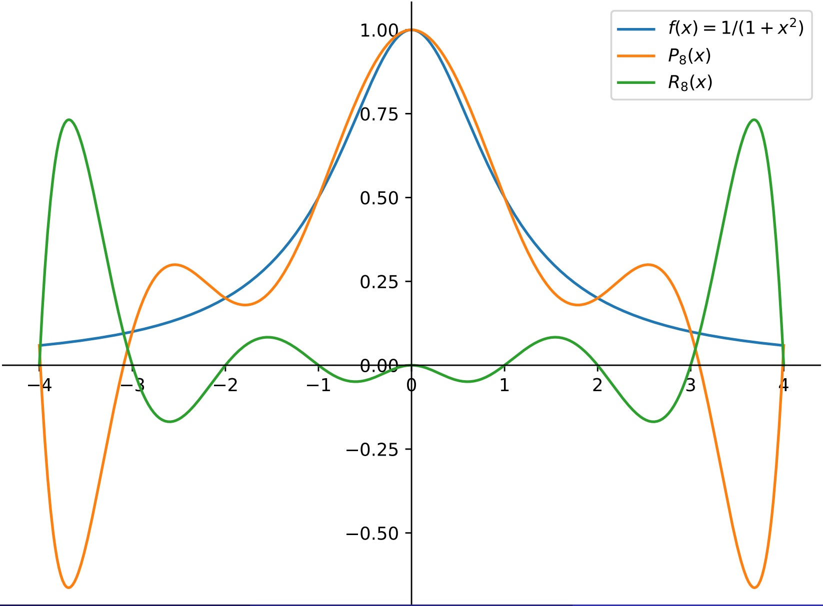
Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ interpoleeritav funktsioon ning $P_n$ interpolatsioonipolünoom, st ülimalt $n$ astme polünoom, mille korral $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Tähistame jääkliikme

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Ilma täiendavaid eeldusi tegemata saab väita vaid, et

$$R_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0, \quad i = 0, \ldots, n.$$

# Interpolatsioonivalemi jääkliige



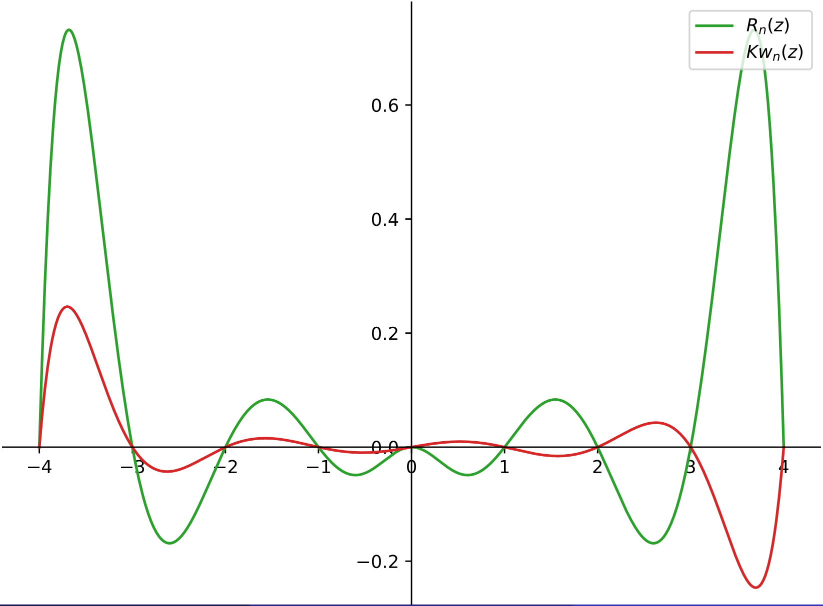
# Interpolatsioonivalemi jääkliige

Eeldame, et $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ ning $f \in C^{n+1}[a, b]$. Fikseerime $x \in [a, b]$, olgu esialgu $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$. Vaatleme abifunktsiooni

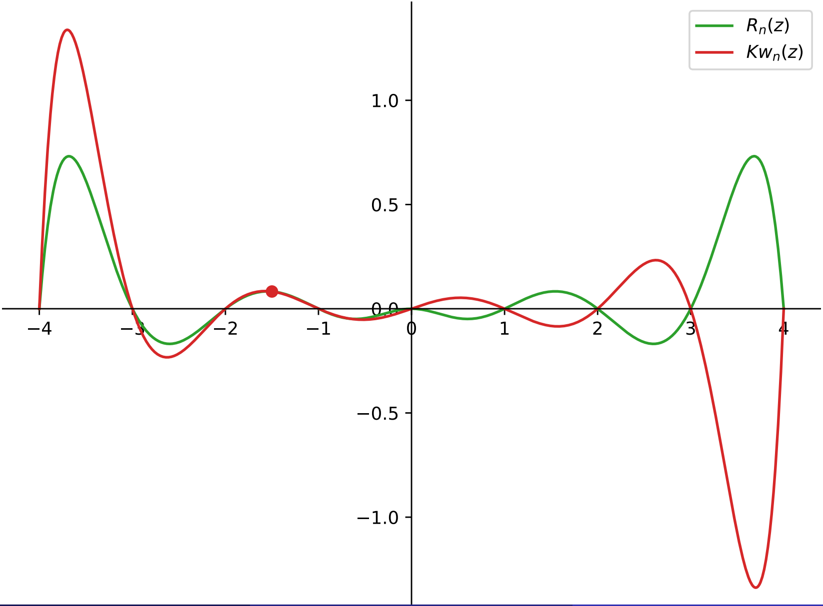
$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - K\omega_n(z) = R_n(z) - K\omega_n(z),$$

kus $K$ on konstant ja $\omega_n(z) = (z - x_0) \ldots (z - x_n)$. On näha, et $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$, iga $K$ korral. Olgu $K$ selline, et $\varphi(x) = 0$, mis tähendab, et $R_n(x) - K\omega_n(x) = 0$ ehk $K = \frac{R_n(x)}{\omega_n(x)}$.

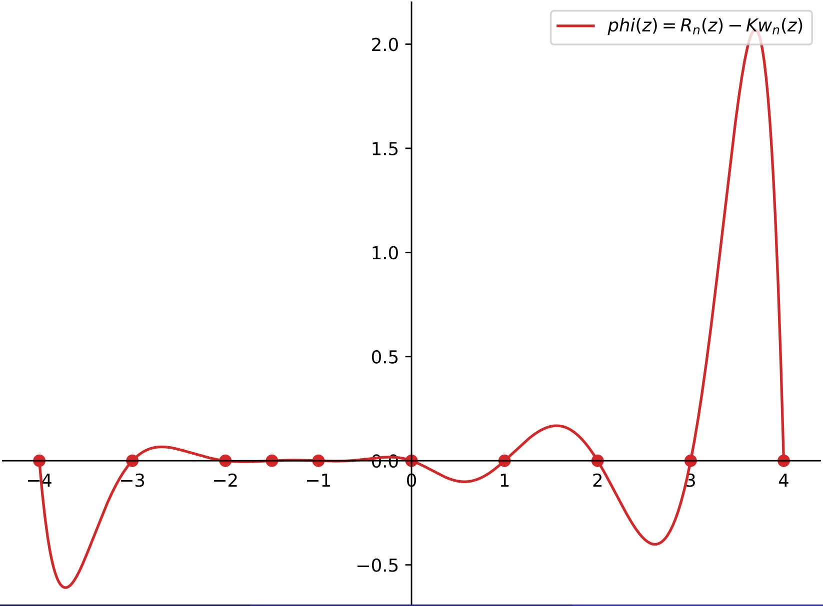
# Interpolatsioonivalemi jääkliige



# Interpolatsioonivalemi jääkliige



# Interpolatsioonivalemi jääkliige



# Interpolatsioonivalemi jääkliige

Funktsioonil $\varphi$ on lõigus $[a, b]$ $n+2$ erinevat nullkohta $x_0, \ldots, x_n, x$. Rolle'i teoreemi põhjal on funktsioonil $\varphi'$ vahemikus $(a, b)$ vähemalt $n+1$ erinevat nullkohta, need asuvad funktsiooni $\varphi$ nullkohtade vahel. Analoogiliselt jätkates, funktsioonil $\varphi''$ on $n$ erinevat nullkoha, kuni funktsioonil $\varphi^{(n+1)}$ on vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks nullkoht $\xi$, $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Kuna $\xi$ sõltub fikseeritud arvust $x$, siis oleks korrektsem kirjutada, et leidub $\xi = \xi(x)$ nii, et $\varphi^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$.

Leiame nüüd $\varphi^{(n+1)}$.

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

Diferentseerime funktsiooni

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - K(z - x_0)\dots(z - x_n),$$

$n + 1$ korda. Saame

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)!,$$

millest

$$\varphi^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - \frac{R_n(x)}{\omega_n(x)}(n+1)! = 0,$$

ehk $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n(x)$.

Kui $x = x_i$, siis $\omega_n(x) = 0$ ja $R_n(x) = 0$, mistõttu saadud $R_n(x)$ esitus kehtib, seejuures võib $\xi$ võtta suvalise.

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

## Lause

Olgu $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ paarikaupa erinevad sõlmed, $f \in C^{n+1}[a, b]$ ning $P_n$ ülimalt $n$ astme polünoom, mis interpoleerib funktsiooni $f$ väärtusi sõlmedes $x_i$, $i = 0, \ldots, n$. Iga $x \in [a, b]$ korral leidub $\xi(x) \in (a, b)$ nii, et

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

kus $\omega_n(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$.

Arvestades, et $f^{(n+1)}$ on pidev, on ta tõkestatud lõigus $[a, b]$. Olgu $M_{n+1} = \max\limits_{a \leq x \leq b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$. Siis $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$, see võimaldab hinnata interpoleerimise täpsust.

# Ülesanded

Kas funktsioon $x \to f^{(n+1)}(\xi(x))$ on pidev? Kas ta on mingi arv kordi pidevalt diferentseeruv?

32. Tõestada, et eksisteerib $\lim\limits_{x \to x_i} f^{(n+1)}(\xi(x))$.
    Soovitus: kasutada L'Hospitali reeglit.
33. Tõestada, et on olemas $\xi_i \in [a, b]$ nii, et

$$f^{(n+1)}(\xi_i) = \lim_{x \to x_i} f^{(n+1)}(\xi(x)).$$

34. Tõestada, et funktsioon $x \to f^{(n+1)}(\xi(x))$ on pidevalt diferentseeruv.

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

35. Tõestada, et kui $f \in C^{n+1}[a,b]$ ja $x_i \to x_0$, $i = 1, \ldots, n$, siis interpolatsioonivalemist saab piirväärtusena Taylori valemi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

Jääkliikmele on võimalik anda ka teistsugune esitus. Olgu $x \neq x_i, i = 0, \ldots, n$, leiame $f[x, x_0, \ldots, x_n]$. Kasutades juba tõestatud valemit

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

saame

$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f(x)}{(x - x_0) \ldots (x - x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1) \ldots (x_0 - x_n)} + \\ + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x)(x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Korrutame võrduse mõlemad pooled läbi avaldisega $\omega_n(x)$, siis

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

$$
\begin{aligned}
f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_n(x) &= \frac{f(x)\omega_n(x)}{(x - x_0)\ldots(x - x_n)} \\
&\quad + \frac{f(x_0)\omega_n(x)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} \\
&\quad + \ldots + \frac{f(x_n)\omega_n(x)}{(x_n - x)(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})} \\
&= f(x) - f(x_0)\frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} \\
&\quad - \ldots - f(x_n)\frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})} \\
&= f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_{ni}(x) \\
&= f(x) - P_n(x).
\end{aligned}
$$

# Interpolatsioonivalemi jääkliige

Oleme saanud jääkliikmele järgmise esituse

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_n(x).$$

Siin ei ole funktsiooni $f$ kohta mingeid sileduse ega pidevuse nõudeid.

Kui eeldada, et $f \in C^{n+1}[a, b]$, siis saime eespool, et $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$. Kahte jääkliikme esitust kõrvutades saame järgmise tulemuse

## Teoreem diferentssuhte esitusest

Kui $f \in C^n[a, b]$ ja $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$, siis $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, $\xi \in (a, b)$.

Erijuhul $n = 1$ saame siit Lagrange'i valemi

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Olgu antud lõik $[a, b]$ ja sõlmede süsteem $x_{ni} \in [a, b]$, $n = 0, 1, \ldots,$ $i = 0, \ldots, n$, see on kirjutatav kolmnurksel kujul

$$\begin{array}{lll} x_{00} & & \\ x_{10}, & x_{11} & \\ x_{20}, & x_{21}, & x_{22} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Vaatleme mingit funktsiooni $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Moodustame interpolatsioonipolünoomid $P_n$ nii, et $P_n$ aste ei ületa $n$ ja $P_n(x_{ni}) = f(x_{ni})$, $i = 0, \ldots, n$, tehes seda iga $n = 0, 1, \ldots$ korral. Selliselt moodustub interpolatsioonipolünoomide jada $P_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Püstitame küsimuse: kas $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$?

# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

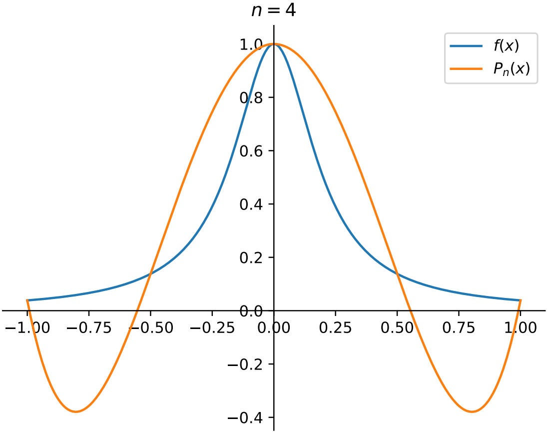
## Teoreem [Faber, 1914]

Iga sõlmede süsteemi $x_{ni} \in [a, b]$, $n = 0, 1, \ldots,$ $i = 0, \ldots, n$, korral on olemas funktsioon $f \in C[a, b]$ nii, et $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$ ei leia aset, kui $n \to \infty$. On olemas isegi funktsioon $f$, kus $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to \infty$, kui $n \to \infty$.

Saab näidata, et interpoleerides ühtlasel võrgul funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kehtib $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to \infty$, kui $n \to \infty$ (Runge fenomen).

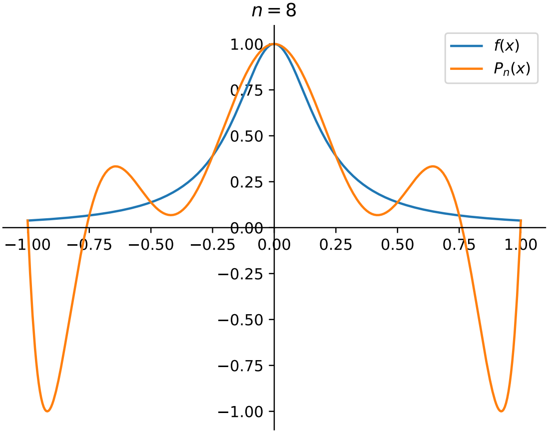
# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Saab näidata, et interpoleerides ühtlasel võrgul funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kehtib $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to \infty$, kui $n \to \infty$ (Runge fenomen).



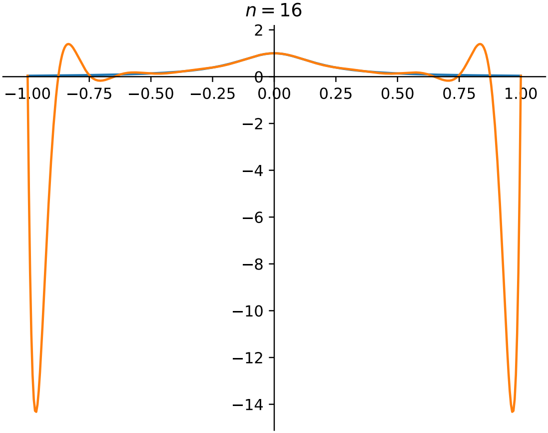
# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Saab näidata, et interpoleerides ühtlasel võrgul funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kehtib $\max_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to \infty$, kui $n \to \infty$ (Runge fenomen).



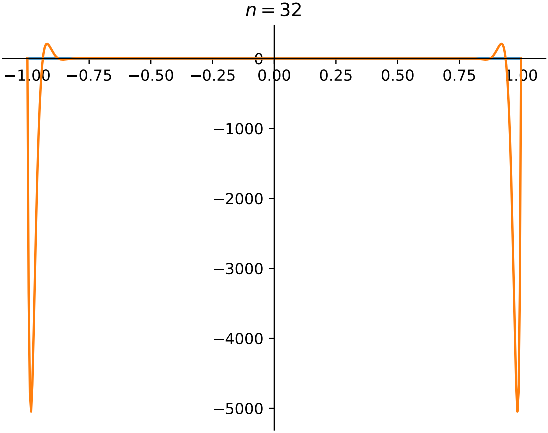
# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Saab näidata, et interpoleerides ühtlasel võrgul funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kehtib $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to \infty$, kui $n \to \infty$ (Runge fenomen).



# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Saab näidata, et interpoleerides ühtlasel võrgul funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kehtib $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to \infty$, kui $n \to \infty$ (Runge fenomen).

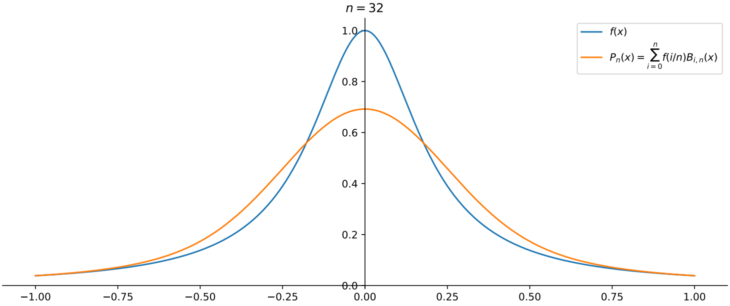


# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Samas saab iga lõigul pidevat funktsiooni kuitahes täpselt polünoomidega lähendada:

**Weierstrassi teoreem**

Olgu $f \in C[a,b]$. Eksisteerib ülimalt $n$ astme polünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$. (Siin $P_n$ ei pruugi olla interpolatsioonipolünoomid.)

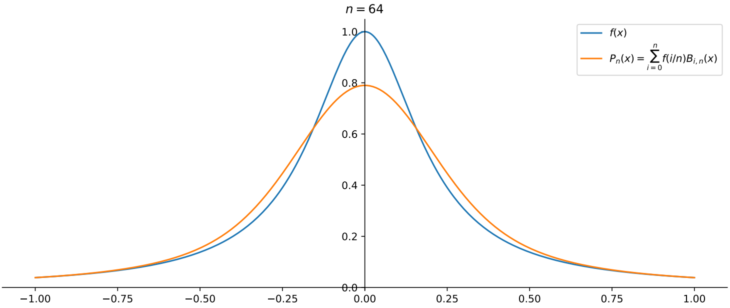


# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Samas saab iga lõigul pidevat funktsiooni kuitahes täpselt polünoomidega lähendada:

## Weierstrassi teoreem

Olgu $f \in C[a, b]$. Eksisteerib ülimalt $n$ astme polünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$. (Siin $P_n$ ei pruugi olla interpolatsioonipolünoomid.)

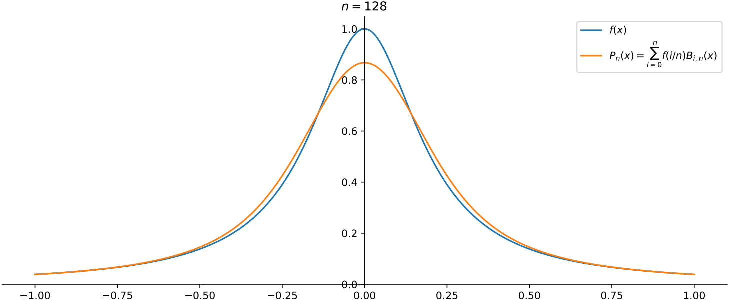


# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Samas saab iga lõigul pidevat funktsiooni kuitahes täpselt polünoomidega lähendada:

## Weierstrassi teoreem

Olgu $f \in C[a, b]$. Eksisteerib ülimalt $n$ astme polünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$. (Siin $P_n$ ei pruugi olla interpolatsioonipolünoomid.)

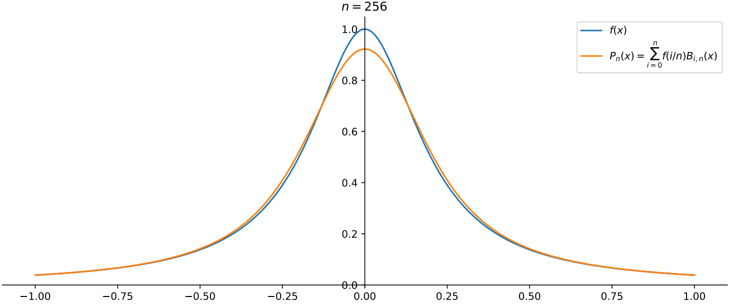


# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Samas saab iga lõigul pidevat funktsiooni kuitahes täpselt polünoomidega lähendada:

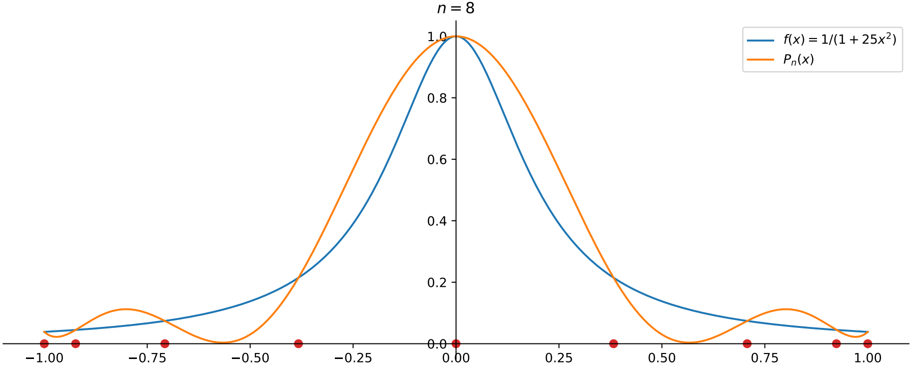
## Weierstrassi teoreem

Olgu $f \in C[a, b]$. Eksisteerib ülimalt $n$ astme polünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$. (Siin $P_n$ ei pruugi olla interpolatsioonipolünoomid.)



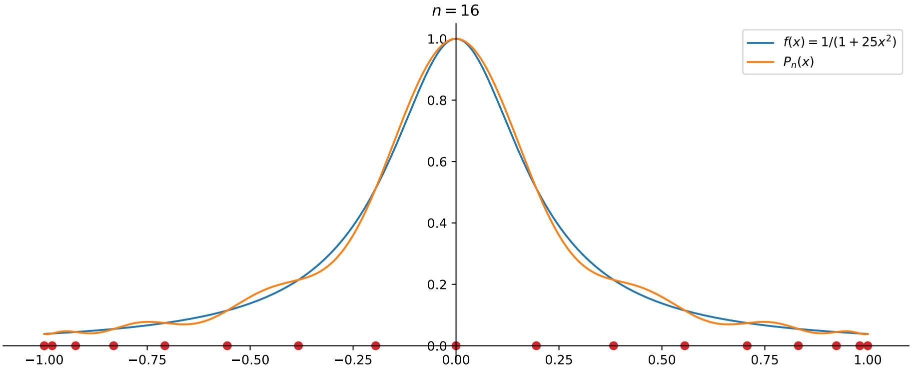
# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Kui valida sõlmed sobivalt, näiteks funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, korral valida interpolatsioonisõlmedeks Tšebõšovi sõlmed $x_i = \cos(\frac{i}{n}\pi)$, $i = 0, \ldots, n$, siis leidub ka ülimalt $n$ astme interpolatsioonipolünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$.



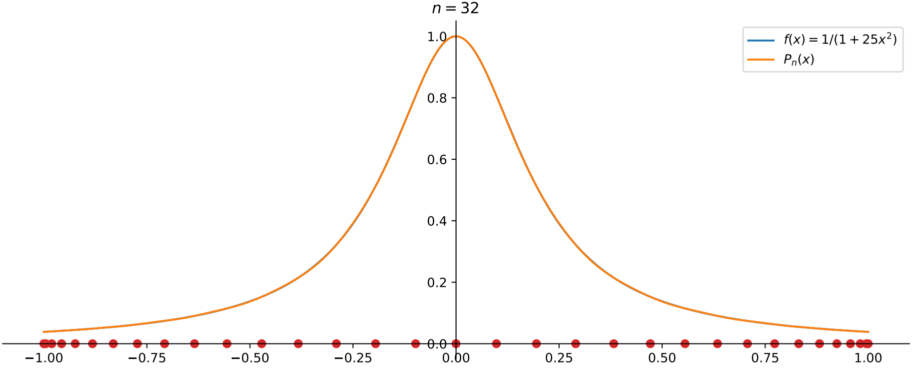
# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Kui valida sõlmed sobivalt, näiteks funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, korral valida interpolatsioonisõlmedeks Tšebõšovi sõlmed $x_i = \cos(\frac{i}{n}\pi)$, $i = 0, \ldots, n$, siis leidub ka ülimalt $n$ astme interpolatsioonipolünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$.



# Interpolatsiooniprotsessi koondumisest

Kui valida sõlmed sobivalt, näiteks funktsiooni $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, korral valida interpolatsioonisõlmedeks Tšebõšovi sõlmed $x_i = \cos(\frac{i}{n}\pi)$, $i = 0, \ldots, n$, siis leidub ka ülimalt $n$ astme interpolatsioonipolünoomide $P_n$ jada, mille korral $\max\limits_{a \le x \le b} |P_n(x) - f(x)| \to 0$, kui $n \to \infty$.



# Vigade mõju interpoleerimisel

## Lisatulemus

Iga sõlmede süsteemi korral $\max\limits_{a \le x \le b} \sum\limits_{i=0}^{n} |\ell_{ni}(x)| \ge c \ln n$, kus $c$ on positiivne konstant.

Analüüsime selle tulemuse valguses andmete vigade mõju interpoleerimisel.

# Vigade mõju interpoleerimisel

Oletame, et täpsete väärtuste $f(x_{ni})$ asemel leitakse arvud $f_{ni}$ nii, et $|f_{ni} - f(x_{ni})| \le \varepsilon$. Leitud arvude $f_{ni}$ abil moodustatakse tegelikult kasutatavad interpolatsioonipolünoomid $\widetilde{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{ni}\ell_{ni}(x)$. Siis

$$
\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b} \left|\widetilde{P}_n(x) - P_n(x)\right| &= \max_{a\le x\le b} \left|\sum_{i=0}^{n} (f_{ni} - f(x_{ni}))\ell_{ni}(x)\right| \le \\
&\le \max_{a\le x\le b} \sum_{i=0}^{n} |f_{ni} - f(x_{ni})|\,|\ell_{ni}(x)| \le \\
&\le \varepsilon \max_{a\le x\le b} \sum_{i=0}^{n} |\ell_{ni}(x)| \to \infty, \text{kui } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

# Vigade mõju interpoleerimisel

Siin hinnangutes võivad võrratused olla võrdused, sest $\max\limits_{a\le x\le b}\sum\limits_{i=0}^{n}|\ell_{ni}(x)| =$
$= \sum\limits_{i=0}^{n}|\ell_{ni}(x_0)|$ mingi $x_0\in[a,b]$ korral ja vastavalt $\ell_{ni}(x_0)$ märkidele võib esineda sobivalt $f_{ni}-f(x_{ni})=\pm\varepsilon$ nii, et

$$\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b}&\left|\sum_{i=0}^{n}(f_{ni}-f(x_{ni}))\ell_{ni}(x)\right| \ge \\
&\ge \left|\sum_{i=0}^{n}(f_{ni}-f(x_{ni}))\ell_{ni}(x_0)\right| = \\
&= \sum_{i=0}^{n}|f_{ni}-f(x_{ni})|\,|\ell_{ni}(x_0)| = \varepsilon\sum_{i=0}^{n}|\ell_{ni}(x_0)|\,.
\end{aligned}$$

Polünoomidega interpoleerimine on ebastabiilne algandmete vigade suhtes, kui suurendada polünoomide astet.

# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

Olgu tasandil antud omavahel erinevad punktid $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, lisaks veel arvud $f_0, \ldots, f_n$, mis võivad olla mingi funktsiooni $f$ väärtused $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n$. On vaja leida ülimalt $m$ astme polünoom $P_m$ nii, et $P_m(x_i, y_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$. Polünoomi $P_m$ üldkuju on

$$
\begin{aligned}
P_m(x, y) = c_{00} &+ c_{10}x + c_{20}x^2 + \ldots + c_{m0}x^m + \\
&+ c_{01}y + c_{11}xy + c_{21}x^2y + \ldots + c_{m-1,1}x^{m-1}y + \\
&\ldots \\
&+ c_{0,m-1}y^{m-1} + c_{1,m-1}xy^{m-1} + \\
&+ c_{0m}y^m.
\end{aligned}
$$

Interpolatsioonitingimused annavad lineaarse süsteemi kordajate $c_{ij}$ määramiseks. Kordajaid on $(m+1) + m + \ldots + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$, interpolatsioonitingimusi ehk võrrandeid $n+1$. Süsteemi üheseks lahenduvuseks igasuguste andmete $f_i$ korral on tarvilik, et $n + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

Süsteemi üheseks lahenduvuseks on tarvilik, et $n + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$, kus $m$ on polünoomi aste ning $n + 1$ sõlmede arv.

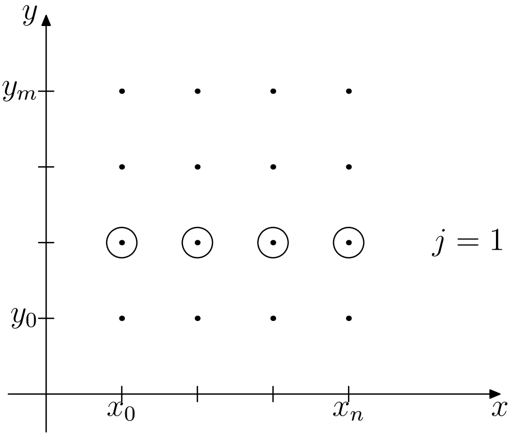
Kui $m = 0$, siis $n = 0$ (1 sõlm), kui $m = 1$, siis $n = 2$ (3 sõlme), kui $m = 2$, siis $n = 5$ (6 sõlme), kui $m = 3$, siis $n = 9$ (10 sõlme) jne. Interpolatsioonipolünoomi üheseks määramiseks **ei saa sõlmede arv olla suvaline**.

Lisaks **ei saa need sõlmed paikneda suvaliselt**. Kolme sõlmega interpolatsiooniülesanne ülimalt esimese astme polünoomi leidmiseks on üheselt lahenduv parajasti siis, kui kolm punkti $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$, ei asu ühel sirgel. Kuue sõlmega $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, 5$, ülesanne on üheselt lahenduv parajasti siis, kui sõlmed ei asu ühel teist järku joonel (ellips, parabool, hüperbool, kaks sirget), kümme sõlme ei tohi asuda ühel kolmandat järku joonel jne.

Ei ole võimalik saada nii häid jääkliikme esitusi kui ühe muutuja juhul.

# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

Vaatame veel ühte võimalust interpoleerimiseks kahe muutuja juhul, kus sõlmede paiknemine on eriline. Oletame, et on antud ristkülikuline sõlmede võrk $(x_i, y_j)$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$.



# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

Olgu antud $f_{ij}$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$. Lahendame interpoleerimisülesande järgmiselt. Fikseerime $j \in \{0, \ldots, m\}$ ja leiame $P_n^j$ kui ülimalt $n$ astme ühe muutuja polünoomi nii, et $P_n^j(x_i) = f_{ij}$, $i = 0, \ldots, n$. Selliselt toimime iga $j$ korral, tulemusena saame polünoomid $P_n^0(x), \ldots, P_n^m(x)$. Seejärel leiame kahe muutuja polünoomi $P_{nm} = P_{nm}(x, y)$, mis on argumendi $y$ järgi ülimalt $m$ astme polünoom nii, et

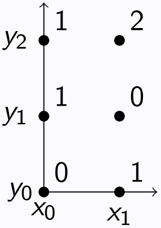
$$P_{nm}(x, y_j) = P_n^j(x), \qquad j = 0, \ldots, m.$$

Selliselt saadav kahe muutuja polünoom $P_{nm}(x, y)$ on ülimalt $n + m$ astme polünoom. Seejuures iga $i$ ja $j$ korral $P_{nm}(x_i, y_j) = P_n^j(x_i) = f_{ij}$. Selliselt saadud polünoom $P_{nm} = P_{nm}(x, y)$ ei pruugi olla minimaalse astme polünoom, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi.

# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

## Näide

Olgu $n = 1$, $m = 2$, sõlmed $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ ja interpoleeritavad väärtused $f_{00} = f_{11} = 0$, $f_{10} = f_{01} = f_{02} = 1$, $f_{12} = 2$ on antud joonisel.




Leiame esmalt polünoomid

$$P_1^0(x) = x, \quad P_1^1(x) = 1 - x, \quad P_1^2(x) = x + 1,$$

mis iga fikseeritud $j$ korral interpoleerivad väärtusi $f_{ij}$. Seejärel leiame kahe muutuja polünoomi

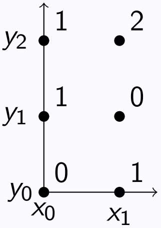
$$\begin{aligned} P_{12}(x, y) = {} & c_{00} + c_{01}y + c_{02}y^2 \\ & + c_{10}x + c_{11}xy + c_{12}xy^2, \end{aligned}$$

mis iga $x$ korral interpoleerib sõlmedes $y_j$ väärtusi $P_1^j(x)$.

## Näide jätkub

$$P_{12}(x,y) = c_{00} + c_{01}y + c_{02}y^2 + c_{10}x + c_{11}xy + c_{12}xy^2$$

Tingimused




$$\begin{cases} P_{12}(x,0) = P_1^0(x), \\ P_{12}(x,1) = P_1^1(x), \\ P_{12}(x,2) = P_1^2(x) \end{cases}$$

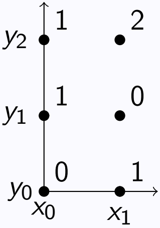
ehk

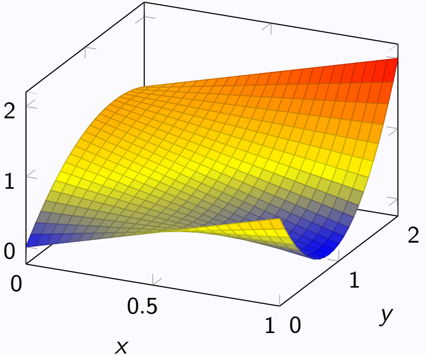
$$\begin{cases} c_{00} + c_{10}x = x, \\ c_{00} + c_{01} + c_{02} + c_{10}x + c_{11}x + c_{12}x = 1 - x, \\ c_{00} + 2c_{01} + 4c_{02} + c_{10}x + 2c_{11}x + 4c_{12}x = x + 1 \end{cases}$$

määravad kordajate väärtused üheselt.

## Näide jätkub

Saame $P_{12}(x,y) = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y^2 + x - 4xy + 2xy^2$.



# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

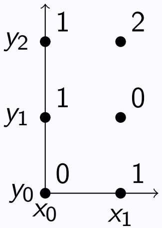
On võimalik interpoleerida teises järjestuses, fikseerides algul $i \in \{0, \ldots, n\}$, leides $\tilde{P}^i_m = \tilde{P}^i_m(y)$ nii, et $\tilde{P}^i_m(y_j) = f_{ij}$, $j = 0, \ldots, m$. Selliselt toimitakse iga indeksi $i$ korral ning seejärel leitakse kahe muutuja polünoom $\tilde{P}_{nm} = \tilde{P}_{nm}(x, y)$, interpoleerides muutuja $x$ järgi, kasutades $\tilde{P}^i_m(y)$ funktsiooni väärtustena, s.t. $\tilde{P}_{nm}(x_i, y) = \tilde{P}^i_m(y)$, $i = 0, \ldots, n$.

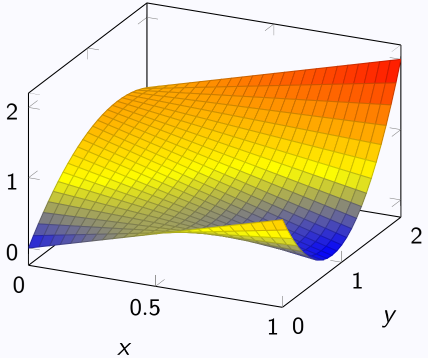
36. Tõestada, et $\tilde{P}_{nm}(x, y) = P_{nm}(x, y)$. Soovitus: kasutada Lagrange'i interpolatsioonivalemit.

# Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

## Näide jätkub

$$P_{12}(x,y) = \tfrac{3}{2}y - \tfrac{1}{2}y^2 + x - 4xy + 2xy^2$$




Kas saaks interpoleerida ka 2.-astme polünoomiga

$$P_2(x,y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2?$$