

Sissejuhatus finantsmatemaatikasse

Toomas Raus

2021

Sisukord

1	Intressid ja investeringute tulumäärad	3
1.1	Intressid	3
1.1.1	Liht- ja liitintressid.	3
1.1.2	Annuiteet ja perpetuiteet	8
1.1.3	Inflatsioon ja tehingu reaalne tulevikuväärtus	11
1.1.4	Krediidi kulukuse määr	12
1.2	Investeeringu ja investeerimisportfelli tulumäär. Investeeringu sisemine tulumäär.	13
1.2.1	Investeeringu aastane tulumäär	13
1.2.2	Investeerimisportfelli tulumäär	15
1.2.3	Investeeringu sisemine tulumäär	17
2	Võlakirjad ja swap-tehingud.	19
2.1	Võlakirjad.	19
2.1.1	Põhimõisted. Võlakirjade liigitus	19
2.1.2	Võlakirja hind	21
2.1.3	Võlakirja must ja puhas hind. Võlakirja tulusus tähtajani	22
2.1.4	Duratsioon	25
2.2	Matemaatiline mudel riskivabade tuleviku rahavoogude hindamiseks.	28
2.2.1	Üldised eeldused finantsturu matemaatilistele mudelitele	28
2.2.2	Ühe hinna seadus	30
2.2.3	Riskivaba finantsturu mudel	31
2.3	Intressimäära swap.	39
2.4	Valuutaswap.	41
3	Markowitzi portfelliteooria. CAPM.	44

3.1	Investeeringutega seonduvad riskid	44
3.2	Markowitzi portfelliteooria kahe väärtpaberi korral	46
3.3	Portfelliteooria n väärtpaberi korral.	52
3.4	Finantsvarade hindamise mudel (CAPM).	57
3.4.1	Arbitraažihindade mudel	62
4	Riskantsed väärtpaberid	63
4.1	Aktsiad. Turgude efektiivsus.	63
4.1.1	Aktsiad	63
4.1.2	Finantsturgude efektiivsus	65
4.1.3	Aktsia tulusus. Aktsia hinna käitumine	67
4.1.4	Oodatav tulusus. Riskineutraalsus	70
4.2	Üldine matemaatiline mudel derivatiivide hinna leidmiseks . . .	72
4.3	Opsioonid. Opsiooni hind	79
4.3.1	Opsiooni mõiste	79
4.3.2	Put-call parity	80
4.3.3	Opsiooni hind Black-Scholes mudeli eeldustel	82
4.3.4	Eksootilised opsioonid	84
4.4	Binoommeetod opsiooni hinna arvutamiseks	86
4.4.1	Üheperioodiline mudel. Riskineutraalne tõenäosus.	86
4.4.2	Binoommeetod	89
4.5	Forwardid ja futuurid.	91
4.5.1	Forwardlepingud	91
4.5.2	Futuurid	94
4.6	Riskide maandamine	95
4.6.1	Opsioonide väljaandmisega seotud riskide maandamine .	95
4.6.2	Spekuleerimine derivatiividega	97

Peatükk 1

Intressid ja investeringute tulumäärad

1.1 Intressid

1.1.1 Liht- ja liitintressid.

Intress ehk kasv on rahasumma, mille raha laenaja või hoiustaja saab laenuvõtjalt või pangalt tasuks raha kasutada andmise eest. Intresside arvestamisel on kasutusel kaks meetodikat:

- Lihtintress (*simple interest*)
- Liitintress (*compound interest*)

Lihtintresside meetodi korral tehingu põhisumma, mis teenib intresse, ei muutu kogu tehinguperioodi jooksul. Lihtintresse kasutatakse peamiselt alla aasta kestvate tehingute korral. Tehingu all peame siin silmas raha hoiustamist või laenamist.

Liitintresside puhul ei maksta intresse arvestusperioodi lõpul välja, vaid need lisatakse tehingu põhisummale. Järgneval perioodil on intresse kandvaks summaks juba põhisumma koos eelmiste arvestusperioodide intressidega.

Lihtintresside arvutamine. Olgu

- P - intressi kandva **tehingu põhisumma** (*principal*); nimetatakse ka tehingu nimiväärtuseks (*face value*) või **nominaaliks** (võlakirjade puhul) (*nominal*),
- r - **intressimäär ühe aasta kohta ehk aastaintressimäär** (*annual / yearly rate of interest*),
- t - **tehingu kestus aastates** (*time period in years*),

- **I - teenitav intress** (*amount of interest earned*).

Siis tehingu teenitav intress lihtintresside korral leitakse vastavalt valemile

$$I = rtP. \quad (1.1)$$

Näide 1.1. Pank andis Matile üheks aastaks laenu 5000 EUR-i intressimääraga 8%. Kui suure summa pidi Mati pangale tagasi maksma?

Lahendus: Laenu intress on $I = 0.08 * 1 * 5000 = 400$ ning tagasimakstav summa on $5000 + 400 = 5400 \text{ EUR}$.

Põhimõtteliselt võib intresside arvestamise perioodiks olla ühe aasta asemel ka mingi muu ajavahemik, näiteks pool aastat, kolm kuud ehk kvartal, üks kuu jne. Samuti võib tehingu kestus olla antud päevades. Siis tuleb valemi (1.1) kasutamiseks päevad teisendada aastateks valemi

$$t = \frac{N}{K}$$

järgi, kus N on tehingu kestus päevades ja K arvestuslik päevade arv aastas. ($K = 360$ või $K = 365$). Eesti kommertspankades kasutatakse süsteemi 365/360, mille korral arvestatakse, et aastas on kõik kuud 30 päeva pikkused, st päevade arv aastas $K = 360$ ja N määramisel võetakse arvesse täpne tehingu päevade arv, s.t. aastas (ka lisaaasta korral) on 365 päeva.

Kui tehingu algus- ja lõppkuupäev on teada, saame leida selle täpse ajalise pikkuse päevades. Tavaliselt võetakse tehingu päevade lugemisel arvesse tehingu alguskuupäev, kuid ei võeta arvesse tehingu lõppkuupäeva. Kui intressimäär ja tehingu kestus on antud erinevate ajaühikute korral, siis tuleb valemi (1.1) rakendamiseks eelnevalt teisendada need suurused nii, et nad vastaksid samale ajaühikule. Näiteks kui intressimäär on antud kuu kohta ning tehingu pikkus on kvartalites, siis tuleb kas

a) tehingu pikkus esitada kuudes või

b) intressimäär kvartali kohta.

Näide 1.2. Mati sõlmis pangas laenulepingu 3000 EUR laenu saamiseks 10.jaanuarist kuni 30.maini kuise intressimääraga 1.5 % Kui suure summa peab Mati pangale tagasi maksma (süsteem 365/360)?

Lahendus. Laenulepingu päevade arv on 22 (jaanuar) + 28 (veebruar)

+ 31 (märts) + 30 (aprill) + 29 (mai) = 140 päeva, intress on $I = \frac{0.015}{30} * 140 * 3000 = 210$ EUR ning tagasimakstav summa on 3210 EUR.

Kui tehinguperioodi vältel intressimäär muutub, tuleb kogu periood jaotada osaperioodideks, mille vältel intressimäär on konstantne, arvutada intress iga osaperioodi kohta eraldi ja tehingu intressiks on siis osaperioodide intresside summa.

Periood	Põhisumma kap. perioodi algul	Kap. perioodil teenitav intress	Teenitud summa kap. perioodi lõpul
1	P	Pi	$P(1+i)$
2	$P(1+i)$	$P(1+i)i$	$P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2i$	$P(1+i)^3$
4	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^3i$	$P(1+i)^4$

Tabel 1.1: Tehingu tulevikuväärtus liitintresside meetodi korral

Liitintresside arvutamine. Liitintresside korral ei maksta intresse arvestusperioodi lõpul välja, vaid need lisatakse tehingu põhisummale. Intressi lisamist intresside arvestamise perioodi algul olevale summale nimetame edaspidi **kapitalisatsiooniks** (*compounding* või *conversion*); ajaperioodi, mille lõpus toimub kapitalisatsioon, nimetame **kapitalisatsiooniperioodiks** (*compounding period*). Liitintresse kasutatakse peamiselt keskmise kestusega ja pikaajalistes tehingutes.

Olgu

- P - tehingu/investeeringu põhisumma (nimiväärtus, nominaal),
- i - intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta (*periodic rate of interest*),
- n - kapitalisatsiooniperioodide arv (*number of compounding periods*),
- S - põhisumma väärtus tehingu lõpukuupäeval ehk tehingu/investeeringu tulevikuväärtus (*future value or maturity value*).

Siis

$$S = P(1+i)^n \quad (1.2)$$

$$I = S - P = P((1+i)^n - 1) \quad (1.3)$$

Tehingu tulevikuväärtuse leidmist valemiga (1.2) selgitab tabel 1.1.

Näide 1.3. Mati investeeris 10000 EUR 2.5 aastaks poolaasta intressimääraga 15.5%. Milline on investeeringu tulevikuväärtus ning saadav intress?

Lahendus. $P = 10000, n = 5, i = 0.155$. Kasutades valemeid (1.2), (1.3) saame $S = 10000(1 + 0.155)^5 = 20554.64$ EUR ning $I = S - P = 10554.64$ EUR.

Kui tehingu kestuse ajal intressimäär kapitalisatsiooniperioodil või kapitalisatsiooniperioodi pikkus muutub, siis jagatakse tehingu kestus osaperioodideks, kus intressimäär ja/või kapitalisatsiooniperioodi pikkus on konstantsed ning leitakse igal osaperioodil tehingu tulevikuväärtus nii, et osaperioodi alguses võetakse põhisummaks eelmise osaperioodi tulevikuväärtus.

Näiteks, kui tehingu esimesel ja teisel perioodil olid kapitalisatsiooniperioodide arvud vastavalt n_1 ja n_2 ning intressimäärad kapitalisatsiooniperioodil vastavalt i_1 ja i_2 , siis tulevikuväärtused esimese ja teise perioodi lõpus on vastavalt

$S_1 = P(1 + i_1)^{n_1}$ ja $S_2 = S_1(1 + i_2)^{n_2}$. Tehingu tulevikuvaartuse teise perioodi lõpus saame leida ka vahetult vastavalt valemile $S_2 = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2}$ ning tehinguga saadav intress on $I = S_2 - P$.

Näide 1.4. Mati investeeris 20000 EUR 3 aastaks. Esimesel kahel aastal oli intressimäär kvartalis 1% ning kolmandal aastal oli intressimäär kvartalis 2%. Kui suur oli tehinguga saadav intress? Kapitalisatsiooniperioodi pikkus oli kogu tehingu jooksul 1 kvartal.

Lahendus. Esimesel kahel aastal $P = 20000, n = 8, i = 0.01$. Kasutades valemid (2), (3) saame tehingu tulevikuvaartuseks teise aasta lõpus $S = 20000(1 + 0.01)^8 = 21657.13$ EUR. Kolmandal aasta alguses $P = 21657.13, n = 4, i = 0.02$ ning tehingu tulevikuvaartus kolmanda aasta lõpus on $S = 21657.13(1 + 0.02)^4 = 23442.38$ EUR. Seega tehinguga saadav intress oli 3442.38 EUR.

Investeeringu, tehingu **tulevikuvaartus** (tähtpäevavaartus) (*future value, maturity value*) on olevikus investeeritud rahasumma vaartus tulevikus tehingu lõppedes.

Investeeringu, tehingu **nüüdisvaartus** ehk praegune vaartus (*present value*) on tulevikus saadava rahasumma vaartus täna (investeermise päeval).

Kui on teada investeeringu tulevikuvaartus S , siis saame investeeringu nüüdisvaartuse P leida vastavalt valemile

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n}. \quad (1.4)$$

Nüüdisvaartuse leidmist valemiga (1.4) nimetatakse **diskonteerimiseks liitintresside meetodiga** ning suurust P nimetatakse tulevikuvaartuse S **nüüdisvaartuseks** ehk **diskonteeritud vaartuseks** (*net present value*). Suurust $(1 + i)^{-n}$ nimetatakse **diskontoteguriks**.

Lihtintresside meetodi korral leitakse tulevikuvaartus vastavalt valemile

$$S = P(1 + rt)$$

ning nüüdisvaartus vastavalt valemile

$$P = \frac{S}{1 + rt}.$$

Nii nagu lihtintresside korral, antakse ka liitintresside korral intressimäär tavaliselt ühe aasta kohta, mitte kapitalisatsiooniperioodi kohta. Aastaintressimäära nimetatakse ka **nominaalseks intressimääraks** ehk **nominaalintressimääraks** (*nominal rate of interest / nominal interest rate*) ja tähistatakse edaspidi sümboliga j . Kui m on kapitalisatsioonide arv aastas, siis intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta i leitakse vastavalt valemile

$$i = \frac{j}{m},$$

ning tehingu tulevikuvaartus on nominaalintressimäära kaudu leitav valemiga

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{tm}. \quad (1.5)$$

Lihtne on näha, et tehingu tulevikuväärtus S suureneb, kui üks parameetritest P, j, t, m suureneb.

Näide 1.5. Tehti investeering 1000 EUR viieks aastaks nominaalse intressimääraga 12%. Kui suur on investeeringu tulevikuväärtus, kui kapitalisatsioon toimub üks kord aastas, b) kaks korda aastas, c) iga kvartal d) iga kuu.

Lahendus. $P = 1000, t = 5, j = 0.12$. Kasutame valemit (1.5). Saame

- a) $S = 1000(1 + 0.12)^5 = 1762.34$;
- b) $S = 1000(1 + 0.12/2)^{10} = 1790.85$;
- c) $S = 1000(1 + 0.12/4)^{20} = 1806.11$;
- d) $S = 1000(1 + 0.12/12)^{60} = 1816.70$.

Paneme tähele, et kapitalisatsiooniperioodi sageduse suurendamine toob endaga kaasa investeeringu tulevikuväärtuse suurenemise.

Valemi $S = P(1 + \frac{j}{m})^{tm}$ saame kirjutada kujul

$$S = P \left(\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{j}} \right)^{jt}.$$

Minnes piirile $m \rightarrow \infty$ saame

$$S = Pe^{jt}. \quad (1.6)$$

Kui investeeringu tulevikuväärtust (ja intressi $I = S - P$) arvutatakse valemi (1.6) järgi, siis vastavat intressimäära nimetatakse **pidevaks annualiseeritud intressimääraks**.

Näide 1.6. Leida näites 5 antud tingimustel investeeringu tulevikuväärtus pideva intressimäära arvutusreegli kohaselt.

Lahendus. $S = 1000e^{0.12 \cdot 5} = 1822.12$.

Majanduses, kus raha kasutamise eest tuleb tasuda intressi, on iga rahasumma antud intressimäära suhtes vaadeldav muutuvana ajas, sest igal erineval ajahetkel on vastav intress erinev. Raha väärtust vaadeldaval kuupäeval nimetatakse **raha ajaväärtuseks** (*time value of money*) ehk **dateeritud väärtuseks**. Antud rahasumma kõiki ajaväärtusi loeme omavahel ekvivalentseteks (**finantsilise ekvivalentsuse printsiip**). Finantsilise ekvivalentsuse printsiipi kasutades on võimalik kokkulepitud maksed asendada kas ühe ekvivalentse maksega või uue ekvivalentse maksegraafikuga.

Näide 1.7. 15 kuud tagasi laenas Mari Jürilt rahasumma, mille nõustus tagasi maksma kahe osamaksega: 800 EURi 21 kuud peale laenu võtmist ja 500 EURi 30 kuud peale laenu võtmist. Täna palus Mari, et lubatud kaks makset asendatakse ühe maksega pärast 2 aasta möödumist laenu võtmisest. Millise summa peaks Mari tagasi maksma, kui turul valitsevaks nominaalintressimääraks on 14% ühe kapitalisatsiooniga igas kvartalis.

Lahendus. Kuna igas kvartalis on üks kapitalisatsioon, siis $i = 14\%/4 = 3.5\%$. Leiame kahe osamaksega ekvivalentseid maksed 9 kuu pärast (15+9 kuud = kaks aastat pärast laenu andmist).

Esimese osamaksega ekvivalentne makse (24 kuud -21 kuud = 1. kvartal): $E_1 = P(1+i)^n = 800(1+0.035)^1 = 828$ EUR.

Teise osamaksega ekvivalentne makse (30-24 kuud = 2 kvartalit)

$$E_2 = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{500}{(1+0.035)^2} = 466.76 \text{ EUR.}$$

Seega Mari peaks ühekordse maksena Jürile tagasi maksma

$$E = E_1 + E_2 = 828 + 466.76 = 1294.76 \text{ EUR.}$$

Ekvivalentseid intressimäärad ja efektiivne intressimäär

Erineva sagedusega nominaalsed intressimäärad on ekvivalentseid, kui sama nimiväärtus teenib nende määradega sama suurt intressi.

Efektiivseks intressimääraks ehk efektiivintressi määraks (*effective interest rate*) nimetatakse nominaalset intressimäära, mille järgi arvestatud intressid lisatakse nimiväärtusele 1 kord aasta lõpus.

Efektiivset intressimäära tähistame edaspidi sümboliga f . Vaatleme, kuidas leida antud kapitalisatsiooniperioodi intressile i vastavat efektiivset intressimäära f .

Olgu

P - investeringu nimiväärtus,

m - kapitalisatsiooniperioodide arv aastas.

Siis intressimääraga f investeeritud summa P tulevikuväärtus 1 aasta pärast on $P(1+f)$. Intressimääraga i investeeritud summa P tulevikuväärtus 1 aasta pärast on aga $P(1+i)^m$. Võrdsustame nüüd f leidmiseks saadud tulevikuväärtused ja avaldame sellest f . Saame

$$f = (1+i)^m - 1. \quad (1.7)$$

Üldjuhul, kui S on investeringu tulevikuväärtus ning t on investeringu kestus aastates, siis efektiivne intressimäär f leitakse võrrandist

$$S = P(1+f)^t.$$

Näide 1.8. Kui suur efektiivne intressimäär vastab nominaalsele intressimäärale 18%, mille järgi arvutatud intressid lisatakse iga kuu lõpul?

Lahendus. Kuna $j = 18\%$ ja $m = 12$, siis $i = 18\%/12 = 1.5\%$ kuu kohta ning

$$f = (1+i)^m - 1 = (1+0.015)^{12} - 1 = 0.1956 = 19.56\%.$$

1.1.2 Annuiteet ja perpetuiteet

Annuiteediks (*annuity*) nimetatakse perioodiliste laekumiste (sisse- või väljamaksete) jada, mis koosneb võrdsete ajavahemike tagant toimuvatest võrdse suurusega rahasummade laekumistest ehk osamaksetest.

Ajavahemikku kahe järjestikuse osamakse vahel nimetame **annuiteedi makseperioodiks** (*payment period / payment interval*), ajavahemikku annuiteedi esimese makseperioodi algusest kuni viimase makseperioodi lõpuni nimetatakse annuiteedi tähtjaks (*term of annuity*).

Annuiteedi osamaksed toimuvad tavaliselt makseperioodide lõpus (**tavaannuiteet**, **harilik annuiteet** (*ordinary annuity*)). Kui aga osamaksed toimuvad makseperioodide algul, siis sellist annuiteeti nimetatakse **avanssannuiteediks** (*annuity due*).

Olgu

n - annuiteedi makseperioodide arv (*number of payment intervals*),

R - annuiteedi osamakse suurus (*size of periodic payment*),

p - intressimäär annuiteedi makseperioodi kohta (*interest rate per payment period*),

i - intressimäär kapitalisatsiooniperioodi kohta (*interest rate per compounding (conversion period)*) (nagu varemgi).

Annuiteedi tulevikuväärtuseks (*amount of annuity*) nimetatakse selle kõigi osamaksedega ekvivalentsete maksete summat annuiteedi tähtaja lõpus. Kui kapitalisatsiooniperioodide sagedus ühtib makseperioodide sagedusega (s.t. $p = i$, siis annuiteeti nimetatakse **lihtsaks annuiteediks** (*simple annuity*)). Lihtsa annuiteedi tulevikuväärtus leitakse vastavalt valemile

$$S = R \left(\frac{(1+p)^n - 1}{p} \right). \quad (1.8)$$

Valemi (1.8) selgitus: esimene osamakse (esimese perioodi lõpul) teenib intressi $n - 1$ perioodi jooksul ning selle tulevikuväärtuseks on $R(1+p)^{n-1}$, teine osamakse teenib intressi $n - 2$ perioodi jooksul ning selle tulevikuväärtuseks on $R(1+p)^{n-2}$, $n - 1$ - perioodi osamakse teenib intressi ühe perioodi jooksul ning selle tulevikuväärtuseks on $R(1+p)$, viimane osamakse enam intressi ei teeni ning selle tulevikuväärtuseks on R . Kokku saame kasutades geomeetrilise jada summa valemist

$$S = R(1+p)^{n-1} + R(1+p)^{n-2} + \dots + R(1+p) + R = R \left(\frac{(1+p)^n - 1}{p} \right).$$

Tavaannuiteedi nüüdisväärtuse saame leida vastavalt valemile

$$P = R \left(\frac{1 - (1+p)^{-n}}{p} \right).$$

Näide 1.9. Mati on maksnud kolme aasta jooksul iga kuu lõpus oma investimiskonto pangavarale 300 EUR, mis teenib intressi nominaalse intressimääraga 9% kapitalisatsiooniga iga kuu lõpus. Milline summa on tema arvele kogunenud?

Lahendus. Et $R = 300$, $p = 9\%/12 = 0.75\%$, $n = 36$, siis

$$S = R \left(\frac{(1+p)^n - 1}{p} \right) = 300 \left(\frac{(1+0.0075)^{36} - 1}{0.0075} \right) = 12345.81.$$

Laenu kustutamine võrdsete osamaksetena. Kui võetakse laenu ühekordses summas P ning laenu makstakse tagasi võrdsete osamaksetena, siis annuiteedi nüüdisväärtuse valemi põhjal avaldub osamakse suurus R

$$R = P \left(\frac{p}{1 - (1 + p)^{-n}} \right).$$

Kogu laenu kustutamiseks kuluv nominaalne rahasumma on nR , ning nominaalne koguintress on $I = nR - P$. Laenujääk L_k pärast k -ndat osamakset on

$$L_k = S_k(P) - S_k(R),$$

kus $S_k(P) = P(1+p)^k$ on laenatud summa tulevikuväärtus k -ndal perioodil ning

$$S_k(R) = R \left(\frac{(1+p)^k - 1}{p} \right)$$

on esimese k osamakse tulevikuväärtus peale k -ndat makset. Saame leida ka k -nda osamakse jaotuse – milline on laenu põhiosa kustutamiseks kuluv osa ning milline on intress. Intressi maksmiseks kuluv osa on leitav valemiga

$$I_k = pL_{k-1}$$

ning laenu nimiväärtuse kustutamiseks kuluv osa on

$$d_k = R - I_k.$$

Et $L_0 = P$ ning $L_k = L_{k-1} - d_k$, siis saame neid valemeid kasutades rekursiivselt arvutada iga perioodi jaoks põhiosa kustutamiseks ja intressi tasumiseks kulunud osa.

Näide 1.10. Laenu summas 10000 EUR, mis on võetud üheks aastaks ning mille aastane intressimäär on 12%, tasutakse iga kvartal võrdsete osamaksetena. Leida osamakse suurus ning laenu jääk pärast iga osamakset. Leida, kui palju iga osamakse korral tasutakse intressi ning kui palju laenu põhiosa.

Lahendus. Annuiteediperioodi intressimäär $p = 0.12/4 = 0.03$ ning osamakse suurus on

$$R = 10000 \left(\frac{0.03}{1 - 1.03^{-4}} \right) = 2690.27$$

Laenu suurus esimese perioodi algul on 10000 EUR. Esimese perioodi eest makstakse intressi $0.03 \cdot 10000 = 300 \text{ EUR}$, seega laenu põhiosa tasutakse 2390.27 EUR. Seega laenujääk teise perioodi alguses on $10000 - 2390.27 = 7609.73 \text{ EUR}$. Teises kvartalis on intressi suurus $0.03 \cdot 7609.73 = 228.29 \text{ EUR}$, põhiosa tasutakse summas 2461.98 ning laenujääk kolmanda perioodi algul on 5147.75 EUR. Kolmandas ja neljandas kvartalis on intressi suurus vastavalt 154.43 ja 78.36 EUR ning põhiosa makstakse vastavalt 2535.84 ja 2611.91 EUR. Neljanda kvartali lõpuks on laen tasutud.

Perpetuiteet ehk igavene annuiteet

Mitmetel juhtudel pole annuiteedi kestus teada või see on väga pikaajaline.

Sellisel juhul on mõistlik vaadelda tähtaega lõpmatuna, st eeldada, et annuiteet sisaldab lõpmata palju makseperioode. Näiteks fond, mis on loodud iga-aastase fikseeritud summaga teaduspreemia väljamaksmiseks.

Annuiteeti, mille tähtaeg on lõpmatu, st sisaldab lõpmata palju osamakseid, nimetatakse **igaveseks** (ka **tähtajatuks** või **lõputuks**) **annuiteediks** ehk **perpetuitediks** (*perpetuity*).

Perpetuitedi nüüdisväärtus

$$P = \frac{R}{p}. \quad (1.9)$$

Näide 1.11. Kultuuriministeerium soovib asutada fondi, mille arvelt saaks aasta parimale näitlejatele maksta aastapreemiat. Kui suur peaks olema fondi algkapital, kui fondis paiknev raha teenib intressi nominaalse intressimääraga 10% kapitalisatsiooniga iga aasta lõpus ning aastapreemia suurus on 3000 EUR?

Lahendus. $p = 10\% = 0.10$, $R = 3000$. Järelikult

$$P = \frac{R}{p} = \frac{3000}{0.10} = 30000 \text{ EUR}.$$

1.1.3 Inflatsioon ja tehingu reaalne tulevikuväärtus

Tehingu reaalse efektiivsuse arvutamisel tuleb arvestada raha ostujõu muutumist ajas. Kui raha ostujõud kahaneb ajas ehk kaupade hinnad tõusevad, siis on tegemist **inflatsiooniga** (*inflation*), kui aga raha ostujõud ajas kasvab ehk kaupade hinnad langevad, siis on tegu **deflatsiooniga** (*deflation*). Märkigem, et igapäevaelus on siiski peaaegu alati tegemist inflatsiooniga, deflatsiooni esineb suhteliselt harva vaid teatavat tüüpi majanduslanguse tingimustes.

Vaatleme arvulist näitajat, mis võimaldab raha ostujõu muutust ajas arvesse võtta. Selliseks arvuliseks näitajaks üldnimetusena on **hinnaindeks** I_p (*price index*), mis näitab mitu protsenti moodustab vaadeldava ajahetke hinnatase mingi muu ajahetke hinnatasemest.

Hinnaindeks arvutatakse alati teataval ajahetkel kehtinud hinnataseme suhtes; nimetatud ajahetke (või ajaperioodi) nimetame hinnaindeksi arvutamise baashetkeks. Oletame, et 1. jaanuar 2005 on võetud hinnaindeksi arvutamise baasiks. Kui soovime teada, milline on hinnaindeks 1. jaanuaril 2007, siis arvutatakse teatava kaupade ja teenuste ostukorvi hind V_1 2005. aasta 1. jaanuari seisuga ning sama ostukorvi hind V_2 2007. aasta 1. jaanuari seisuga. Otsitav hinnaindeks on siis

$$I_p = 100 \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.10)$$

Inflatsioonimääraks (*rate of inflation / inflation rate*) nimetatakse hindade suhtelist juurdekasvu protsentides kindla ajavahemiku jooksul. Seega inflatsioonimäär h avaldub valemiga

$$h = I_p - 100. \quad (1.11)$$

Esitatud arutluse põhjal saame kirja panna ka valemi rahasumma reaalse tulevikuväärtuse arvutamiseks. Olgu S rahasumma nimiväärtusega P nominaalne tulevikuväärtus n aasta möödudes; olgu C rahasumma P reaalne tulevikuväärtus (*real future value*), st tulevikuväärtus, kus inflatsioon on arvesse võetud, st rahasumma C üks ühik on ostujõult võrdne rahasumma P ühe ühikuga.

Siis võttes valemis (1.10) $V_1 = C, V_2 = S$ saame valemi

$$C = \frac{S}{I_p} 100 \quad (1.12)$$

või

$$C = S \frac{100}{100 + h}.$$

Näide 1.12. Investor investeerib 10000 EUR viieks aastaks ning viienda aasta lõpus saab tagasi summa 15000 EUR. Milline on investeeringu reaalne tulevikuväärtus, kui aastane inflatsioonimäär on esimesel kolmel aastal 3% ning kahel viimael aastal 4%?

Lahendus. Inflatsioon h viie aasta peale kokku on

$$h = 100 \left(\prod_{i=1}^5 \left(\frac{h_i}{100} + 1 \right) - 1 \right) = 100(1.03^3 1.04^2 - 1) = 18.19\%$$

ning investeeringu reaalne tulevikuväärtus on $15000 \frac{100}{118.19} = 12691.43 \text{ EUR}$.

1.1.4 Krediidi kulukuse määr

Krediidi kulukuse määr (*annual percentage rate*) on laenatud rahale aastas langev kõigi kulude (kaasa arvatud lepingutasu, kindlustus) koormus protsentides, eeldusel, et leping kehtib kokkulepitud tähtaja jooksul.

Lepingurikkumisega seonduvad kulud (sh sissenõude kulud jms) ei lähe krediidi kulukuse määra arvutamisel ja avaldamisel arvesse.

Esitame krediidi kulukuse määra arvutamise valemi erijuhul, kui
 A - laenu suurus,
 t_k - k -nda osamakse toimumise aeg aastates peale laenu saamist,
 R_k - laenuga seotud maksete väärtused,
 n - osamaksete arv,
 r - krediidi kulukuse määr.

Siis krediidi kulukuse määr r arvutatakse valemist

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Kui laenu (krediiti) antakse mitmes osas, siis

$$\sum_{k'=1}^m \frac{L_{k'}}{(1+r)^{v_{k'}}} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}},$$

kus $v_{k'}$ - k' -nda krediidi andmise aeg aastates peale laenu saamist,
 $L_{k'}$ - k' -nda krediidi suurus,
 m - krediidimaksete arv.

Näide 1.13. Viieaastase laenu võtmisel summas 30000 EUR peab laenuvõtja laenu võtmisel tasuma lepingutasu 300 EUR ning igal poolaasta lõpus tasuma summa 3500 EUR. Leida antud laenu krediidi kulukuse määr. Leida krediidi kulukuse määr, kui lepingutasu puudub.

Lahendus: Krediidi kulukuse määr r leitakse lepingutasu korral võrrandi

$$30000 = 300 + \sum_{j=1}^{10} \frac{3500}{(1+r)^{j/2}}$$

lahendina, milleks on $r = 0.0630$ ehk 6.30%. Kui lepingutasu puudub, siis on krediidi kulukuse määr 5.90%.

1.2 Investeeringu ja investeerimisportfelli tulumäär. Investeeringu sisemine tulumäär.

1.2.1 Investeeringu aastane tulumäär

Investeeringute korral nimetatakse investeerimisel saadud täiendavat tulu mitte intressiks vaid investeeringu puhastuluks. Vaatleme juhtu, kus ajahetkel $t = 0$ investeeritakse summa V_0 ning investeerimise tulemusel saadakse ajahetkel $t > 0$ summa V_t , kus aeg t on mõõdetud aastates. Investeeringu **puhastulu (kasum/kahjum)** on sel juhul $V_t - V_0$. Investeeringu puhastulu iseloomustab investeeringu tulusust absoluutväärtuses. Investeeringu tulusust koguperioodil (return %, rate of return) protsentides saame väljendada suurusega

$$R = \frac{V_t - V_0}{V_0}.$$

Kuna erinevate investeeringute ajaline pikkus võib erinev olla, siis kasutatakse tavaliselt investeeringute tulususe (tootluse) iseloomustamiseks **aastast tulumäära** (*rate of return, annual rate of return*), Kui perioodi vältel reinvesteermist ei toimu, siis

$$r = \frac{R}{t}.$$

Kui aga reinvesteering toimub ning aastas on k reinvesteeringuperioodi, siis aastane tulumäär leitakse võrrandist

$$1 + R = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{tk},$$

millest

$$r = k \left((1 + R)^{1/tk} - 1 \right).$$

Seega investeringu aastane tulumäär leitakse analoogiliselt hoiuse/laenu aastase intressimääraga. Nii nagu intresside puhul, saame ka investeringute korral vaadelda **pidevat tulusust** (*continuously compounded return*)

$$R_{ln} = \ln \left(\frac{V_t}{V_0} \right)$$

ning **logaritmilist ehk pidevat tulumäära** (*logarithmic rate of return, continuously compounded rate of return*)

$$r_{ln} = \frac{R_{ln}}{t} = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{V_t}{V_0} \right).$$

Märgime, et viimane võrdus on ekvivalentne võrdusega

$$V_t = V_0 e^{r_{ln} t}.$$

Näide 1.14. Investeeritakse 30000 EUR, mis viie aasta pärast peaks tulu andma 45000 EUR väärtuses. Leida investeringu aastane tulumäär a) liittulumäära korral, kui reinvesteeringuperiood on 1 aasta ning b) pideva tulumäära korral.

Lahendus.

a) Liittulumäära korral $R = 0.5$ (ehk 50%) ja $k = 1$; seega

$$r = k \left((1 + R)^{1/tk} - 1 \right) = (1.5)^{1/5} - 1 = 0.084472$$

ehk $r = 8.45\%$.

b) Pideva tulumäära korral $R_{ln} = \ln \left(\frac{45000}{30000} \right) = 0.405465$ (40.55%) ning

$$r_{ln} = \frac{0.405465}{5} = 0.081093 \text{ ehk } r_{ln} = 8.11\%.$$

Eespool vaatlesime juhtu, kus leidsime tulumäära ühe perioodi $[0, t]$ jaoks. Kui meil on antud tulumäärad $R_1, R_2, \dots, R_n$ n järjestikuse perioodi kohta, siis **kumulatiivne ehk kogutulusus** (*cumulative return, overall return*) avaldub liittulumäärade korral kujul

$$R = \prod_{i=1}^n (1 + R_i) - 1$$

ning pidevate tulumäärade korral

$$R_{ln} = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Kui ajaperioodid on võrdse pikkusega (näiteks üks aasta), siis saame rääkida ka **aritmeetiliselt keskmisest tulumäärast** (*arithmetic average rate of return*)

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

Aasta	Investeeringu väärtus (EUR)	Aastane tulumäär
2008	200.00	
2009	300.00	50.0%
2010	330.00	10.0%
2011	343.20	4.0%
2012	350.18	2.0%
2013	200.00	-42.887%

Tabel 1.2: Näide 1.15. Investeeringute väärtused ja tulumäärad

ning **geomeetriliselt keskmisest tulumäärast** (*geometric average rate of return*).

$$\overline{R}_g = \left(\prod_{i=1}^n (1 + R_i) \right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Aritmeetiliselt keskmise tulumäära puuduseks on asjaolu, et ta ei võta arvesse liitintressi mõju. Kuna aritmeetiline keskmine tulumäär ei võta arvesse liitintressi mõju, on selle väärtus alati geomeetrilise keskmisega võrdne või sellest suurem. Aritmeetiliselt ja geomeetriliselt keskmised tulumäärad on võrdsed, kui kõigi perioodide tulumäärad on võrdsed. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise tulumäära vahelist erinevust mõjutab ka investeeringu väärtuse muutlikkus (volatiilsus). Volatiilsuse kasvades väheneb investeeringust saadav tegelik tulu ehk keskmine kogutulu, kuigi aritmeetiliselt keskmine tulumäär jääb samaks. Eeltoodut ilmestab tõsiasi, et investeeringust 50% kaotamise korral on meil alginvesteeringu taastamiseks vaja saavutada tootluseks 100%. Ka vastupidine seos kehtib: kui volatiilsus väheneb, siis kahaneb ka aritmeetiliselt ja geomeetriliselt keskmise tulumäära vaheline lõhe.

Näide 1.15. Investeeringu väärtus ning tootlus aastate lõikes on toodud tabelis 1.2. Leida investeeringu aritmeetiliselt ja geomeetriliselt keskmised tulumäärad.

Lahendus. $\overline{R} = (50.0\% + 10.0\% + 4.0\% + 2.0\% - 42.9\%) : 5 = 23.1\% : 5 = 4.6\%$
 $\overline{R}_g = (1.50 * 1.10 * 1.04 * 1.02 * 0.57113)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.0000$ ehk 0.00%.

Näeme, et geomeetriliselt keskmine tulumäär annab meile korrektse vastuse - viie aasta jooksul investeeringu väärtus ei kasvanud.

1.2.2 Investeerimisportfelli tulumäär

Mitu investeeringut koos moodustavad investeerimisportfelli. Vaatleme nüüd, kuidas leida investeerimisportfelli tulusust, kui on teada iga investeeringu osakaal portfellis ning iga investeeringu tulumäär. Koosnegu portfelli n investeeringust ning olgu $V_1, V_2, \dots, V_n$ nende investeeringute maksumused ajahetkel $t = 0$ ning olgu $r_1, r_2, \dots, r_n$ nende investeeringute annualiseeritud tulumäärad. Olgu portfelli kogumaksumus hetkel $t = 0$ $V_{(0)} = \sum_{i=1}^n V_i$ ning portfellis sisalduvate in-

vesteeringute osakaalud $\omega_i = \frac{V_i}{V_{(0)}}, i = 1, 2, \dots, n$. Portfelli tulumäära arvutamise valemid sõltuvad sellest, kas meil on antud üksikute investeeringute liht-, liit- või pidevad tulumäärad.

a) Olgu $r_1, r_2, \dots, r_n$ investeeringute annualiseeritud lihttulumäärad. Sel juhul on investeerimisportfelli väärtus ajahetkel t

$$V_{(t)} = \sum_{i=1}^n V_i(1 + r_i t). \quad (1.13)$$

Teiselt poolt,

$$V_{(t)} = V_{(0)}(1 + rt). \quad (1.14)$$

Seostest (1.13), (1.14) saame, et

$$r = \frac{1}{t} \left(\frac{V_{(t)}}{V_{(0)}} - 1 \right) = \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_{(0)}} (1 + r_i t) - 1 \right) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \omega_i + \sum_{i=1}^n \omega_i r_i - \frac{1}{t} = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i.$$

Seega investeerimisportfelli lihttulumäär on võrdne investeeringute osakaalude ja nende tulumäärade korrutiste summaga:

$$r = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i.$$

b) Olgu $r_1, r_2, \dots, r_n$ investeeringute annualiseeritud lihttulumäärad ning aastas on k reinvesteerimisperioodi. Siis võrdustest $V_{(t)} = \sum_{i=1}^n V_i \left(1 + \frac{r_i}{k}\right)^{kt}$ ning $V_{(t)} = V \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ saame võrrandi investeerimisportfelli lihttulumäära r leidmiseks

$$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = \sum_{i=1}^n \omega_i \left(1 + \frac{r_i}{k}\right)^{kt}$$

c) Olgu $r_1, r_2, \dots, r_n$ nende investeeringute pidevad annualiseeritud tulumäärad. Siis võrdustest $V_{(t)} = \sum_{i=1}^n V_i e^{r_i t}$ ning $V_{(t)} = V_{(0)} e^{rt}$ saame, et

$$e^{rt} = \sum_{i=1}^n \omega_i e^{r_i t},$$

millest

$$r = \frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^n \omega_i e^{r_i t} \right).$$

Näide 1.16. Koosnegu investeerimisportfell kolmest viieaastasest investeeringust summades 30000, 50000 ja 80000 EUR ning olgu nende investeeringute

liittulumäärad vastavalt 15%, 1% ja 6% ja reinvesteeringisperioodi pikkus 1 aasta. Leida investeerimisportfelli liittulumäär.

Lahendus:

$$(1+r)^5 = \frac{3}{16}(1+0.15)^5 + \frac{5}{16}(1+0.01)^5 + \frac{1}{2}(1+0.06)^5 = 1.374683,$$

millest $r = 0.065714$ ehk $r = 6.57\%$.

Näide 1.17. Koosnegu investeerimisportfell kolmest viieaastasest investeringust summades 20000, 60000 ja 80000 ning olgu nende investeringute pidevad tulumäärad vastavalt 12%, 4% ja 8%. Leida investeerimisportfelli pidev tulumäär.

Lahendus:

$$r = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{8}e^{0.6} + \frac{3}{8}e^{0.2} + \frac{1}{2}e^{0.4} \right) = 0.071773$$

ehk $r = 7.18\%$.

1.2.3 Investeeringu sisemine tulumäär

Investeeringu **puhas nüüdisväärtus NPV** (*net present value*) on investeeringu kasumlikkuse näitaja, mis leitakse nii, et investeeringuga kaasnevate sissetulevate rahavoogude nüüdisväärtusest lahutatakse maha investeeringuga seotud väljaminekute nüüdisväärtus. Olgu i investeeringu **nõutav annualiseeritud tulumäär**, s.t sama riskitasemega investeerimisprojektide tulumäär. Olgu meil investeeringuga seotud rahavood $C_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ ning nende toimumise ajahetked $t_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ (aeg t on tavaliselt väljendatud aastates). Summa C_n negatiivne väärtus tähendab raha väljamaksmist, positiivne C_n aga laekumist. Siis investeeringu NPV leitakse valemi

$$NPV = \sum_{n=0}^N \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}}.$$

põhjal. Investeeringuprojekti on mõtet realiseerida siis, kui investeeringu nüüdispuhasväärtus on mittenegatiivne.

Näide 1.18. Olgu investeeringuga 35000 EUR ajahetkel $t = 0$ kaasnev tulu järgmine: pärast 1.5 aastat 5000 EUR, teise aasta lõpus 5000 EUR, kolmanda ja neljanda aasta lõpus 10000 EUR ning viienda aasta lõpus 15000 EUR. Leida investeerimisprojekti NPV, kui nõutav annualiseeritud tulumäär on 5%. Kas investeerimisprojekti on mõtet realiseerida?

Lahendus. Investeeringu NPV nõutava tulumäära 5% korral on

$$NPV = \sum_{n=0}^N \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}} = -35000 + \frac{5000}{(1+0.05)^{3/2}} + \frac{5000}{(1+0.05)^2} + \frac{10000}{(1+0.05)^3} + \frac{10000}{(1+0.05)^4} + \frac{15000}{(1+0.05)^5} =$$

$$-35000 + 4647.143 + 4535.147 + 8638.376 + 8227.025 + 11752.89 = 2800.58 \text{ EUR}.$$

Kuna investeerimisprojekti NPV on positiivne, siis on mõtet projekti realiseerida.

Investeeringu sisemiseks tulumääraks (*internal rate of return, IRR*) nimetatakse aastast tulumäära r , mille korral investeeringu puhas nüüdisväärtus NPV on null, s.t.

$$NPV = \sum_{n=0}^N \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} = 0.$$

Kui investeeringu sisemine tulumäär on suurem või võrdne, kui nõutav tulumäär, siis on projekti mõtet realiseerida.

Näide 1.19. Leida näites 1.18 toodud investeerimisprojekti sisemine tulumäär. **Lahendus.** Investeeringu sisemine tulumäär on võrrandi

$$0 = \sum_{n=0}^N \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}} = -35000 + \frac{5000}{(1+r)^{3/2}} + \frac{5000}{(1+r)^2} + \frac{10000}{(1+r)^3} + \frac{10000}{(1+r)^4} + \frac{15000}{(1+r)^5}$$

lahend. Kasutades Exceli Data Solverit saame lahendiks $r_{IRR} = 7.32\%$.

Näites 1.18 eeldasime, et investeeringuga seotud tulevikumaksed on meile teada investeerimise alguses. Selliseid investeeringuid nimetatakse riskivabadeks. Riskivabade investeeringute korral puudub makserisk, s.t. investeeringu alguses on teada tulevikus saadavate või makstavate summade nominaalväärtused (kuid mitte reaalkväärtused, kuna need sõltuvad raha väärtuse muutumisest tulevikus). Üheks võimaluseks riskivabaks investeerimiseks on investeerida riskivabadesse väärtpaberitesse, mille peamine liik on võlakirjad.

Peatükk 2

Võlakirjad ja swap-tehingud.

2.1 Võlakirjad.

2.1.1 Põhimõisted. Võlakirjade liigitus

Võlakiri (*bond*) on väärtpaber, mille väljaandjal (väärtpaberi emiteerijal) on kohustus maksta võlakirja omanikule intresse ning lunastamistähtajal tagastada ka põhisumma.

Võlakirju iseloomustavad järgmised karakteristikud:

a) **Võlakirja nimiväärtus** (ka **nominaal, põhisumma**) (*principal, par value, redemption price, face value*) on summa, mille pealt võlakirja väljaandja arvustab intresse ja mis tuleb võlakirja kustutamistähtajal tagastada.

b) **Kupongi- ehk intressimaksed** (*coupon payments*) on maksed, mida võlakirja väljaandja maksab investorile tema raha kasutamise eest. Kupongi- ehk intressimäär on kas fikseeritud kogu võlakirja kestvuse ajaks või seotud mõne rahaturu indeksiga (nt Euribor). Samuti on võlakirja ostes teada intressimaksete sagedus.

c) **Lunastamistähtaeg** (*maturity date*) on kuupäev, millal võlakirja väljaandja peab tasuma investorile põhisumma. Kui väljaandja on ka kõik kupongi(intressi)maksed tasunud, ei ole tal peale lunastamistähtaega investorite ees enam kohustusi. Lunastamistähtaja pikkus sõltub võlakirjast ja võib olla mis tahes pikkusega.

d) **Väljalaskehind, võlakirja hind** (*issue price*) on hind, millega investor emiteeritud võlakirja ostab. Väljalaskehind võib võrduda võlakirja nimiväärtusega või olla kas üle või alla nimiväärtuse. Kui võlakirja hind ületab tema

nimiväärtust, siis öeldakse, et võlakiri kaupleb **preemiaga**. Kui võlakirja hind jääb alla nimiväärtust, öeldakse, et ta kaupleb **diskontoga**. Kui nimiväärtus ja kauplemisshind on võrdsed, siis võib öelda, et võlakiri kaupleb **nimiväärtusega** (*price is at par*).

Näide 2.1. Riik annab välja võlakirja nominaaliga 100 EUR tähtajaga 3 aastat ning intressimääraga 4%. Intressi makstakse kord aastas. Ostes sellise võlakirja on investori tuleviku rahavoog järgmine:

- 1.a lõpp – 4 EUR
- 2.a. lõpp – 4 EUR
- 3.a. lõpp – 100 + 4 EUR.

Võlakirjad sobivad investorile, kes on huvitatud madala riskiga, kindlast pidevalt laekuvast tulust, mida talle garanteerib iga-aastane intress. Võrreldes aktsiatega on edukalt toimiva ettevõtte võlakirjade risk ja tulusus väiksem, kuid isegi ettevõtte pankroti korral makstakse võlakirjaomanikele nende osa välja enne aktsionäre. Erinevalt aktsiast ei anna võlakiri selle omanikule õigust emitendi tegevuse üle otsustamiseks.

Võlakirjade liigitus:

- a) **Kupongvõlakiri** (*coupon bond*) – omanik saab intressi perioodiliste intressimaksete kujul (tavaliselt kord või kaks korda aastas).
- b) **Diskontovõlakiri** (ka **nullkupongvõlakiri**) (*discount bond, zero-coupon bond*) – intressi ei maksta, omanik saab tulu võlakirja ostuhinna ja nimiväärtuse (nominaali) vahena.

Võlakirjade väljalaskjateks võivad olla riik, omavalitsus või eraettevõtte. Riigi võlakirju võib reeglina pidada riskivabadeks võlakirjadeks, sest riigi pankrotistumine ei ole tõenäoline. Ettevõtete võlakirju tuleks pidada riskantseteks võlakirjadeks, sest ettevõtte risk pankrotistuda on suurem ning investoritel see läbi võimalus oma investering kaotada samuti suurem.

Riskivabaduse all mõeldakse siin, et võlakirjal ei ole makseriski ehk intressid ja põhisumma makstakse kindlasti õigel ajal ja õiges summas. Muud riskid peale makseriski ohustavad ka riiklike võlakirju (nt. intressimäärarisk, valuutarisk, poliitiline risk).

Võlakirju saab liigitada ka sõltuvalt emitendist ning muudest teguritest:

Valitsuse võlakirju (*treasuries*) liigitatakse tähtaja järgi:

- Lühiajalised (*treasury bills*) – tähtaeg on kuni 1 aasta.
- Keskmise pikkusega (*treasury notes*) - tähtaeg kuni 7 aastat.
- Pikaajalised (*treasury bonds*) – tähtaeg tavaliselt kuni 30 aastat.

Munitsipaalväärtpabereid annavad välja kohalikud omavalitsused. Munitsipaalvõlakirjadelt tasutavad intressimäärad on kõrgemad, kui valitsuse võlakirjadelt makstavad, sest ka nende puhul eksisteerib teoreetiline võimalus, et emitent pankrotistub ja võlakirja ostja kaotab oma raha.

Ettevõtete võlakirjad (*corporate bonds*) on tavaliselt kõrgema intressiga, kui valitsuse võlakirjad, sest nendega kaasnev risk on kõrgem. Suuremate ettevõtete võlakirjadele annavad krediidiriski suhtes reitinuid reitinguagentuurid (Moody's, S&P, Fitch).

Kommertspaber (*commercial paper e. CP*). Ettevõtte poolt välja antud lühiajaline võlakiri maksimumkestusega 270 päeva.

Konverteeritav võlakiri (*convertible bond*). Sellise väärtpaberi omanik võib teatud tingimustel oma võlakirja vahetada ettevõtte aktsiate vastu. Võlakirja vahetamise suhe aktsiate arvusse on määratud konverteerimissuhtega (*conversion ratio*). Konverteerimisaja võib kindlaks määrata näiteks alates mingist tulevasest kuupäevast.

Tagasikutsutav võlakiri (*callable bond*). Sellise võlakirja emiteerijal on õigus võlakiri ennetähtaegselt nii-öelda tagasi kutsuda (eelnevalt kindlaksmääratud hinnaga). Tagasikutsumise võimalus hakkab üldjuhul kehtima siis, kui võlakirja emiteerimisest on möödunud teatud ajavahemik (*call protection period*).

Hüpoteekvõlakiri (*mortgage bond*). Selline võlakiri on tagatud mingi kinnisvaraga, mis tähendab, et laen on võetud kindla kinnisvaraobjekti või kinnisvaraobjektide kogumi finantseerimiseks.

2.1.2 Võlakirja hind

Võlakirja hinna leidmisel lähtutakse võlakirjaga seotud tuleviku rahavoogudest, mida diskonteeritakse sobiva diskontomääraga. Diskontomääras peavad kajastuma kõik vastava võlakirjaga seotud riskid.

Olgu r diskonteerimisel kasutatav efektiivne tulumäär (diskontomäär). Siis kupongvõlakirja hinna B väljalaskekuupäeval saame leida vastavalt valemile

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{N}{(1+r)^{t_n}},$$

kus $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ on intressimaksete toimumise ajad aastates alates võlakirja väljalaskekuupäevast, T on aeg võlakirja lunastamistähtajani aastates, N - võ-

lakirja nominaal ja $c_1, c_2, \dots, c_n$ on intressimaksete suurused.

Näites 2.1 toodud võlakirja hind sõltuvalt diskonteerimisel kasutatavast tulumäärast on

$$B = \frac{4}{1+r} + \frac{4}{(1+r)^2} + \frac{4}{(1+r)^3} + \frac{100}{(1+r)^3}.$$

Nullkupongvõlakirja hinna saame leida vastavalt valemile

$$B = \frac{N}{(1+r)^T}.$$

Juhul kui diskonteerimisel kasutatav tulumäär on antud pideva tulumäärana, siis kupongvõlakirja hind on

$$B = \sum_{i=1}^n c_i e^{-rt_i} + N e^{-rT}$$

ning nullkupongvõlakirja hind on

$$B = N e^{-rT}.$$

Nullkupongvõlakirja hinna leidmine on kõige lihtsam, sest nagu ka nimest võib järeldada, võlakirja omanikule kuponжимakseid ei tehta. Investorile makstakse likvideerimiskuupäeval vaid põhisumma. Kuna intresse ei maksta, on selliste võlakirjade hetkeväärtus alati väiksem kui nende nominaalväärtus ehk põhisumma. Seega öeldakse, et nad kauplevad diskontoga ning tihti kutsutakse neid ka diskontovõlakirjadeks.

2.1.3 Võlakirja must ja puhas hind. Võlakirja tulusus tähtajani

Võlakirjadega saab kaubelda ka n.ö. järelturul, kus võlakiri vahetab omanikku pärast väljalaskekuupäeva. Järelturul võlakirjadega kaubeldes tuleb vahet teha võlakirja mustal ja puhtal hinnal.

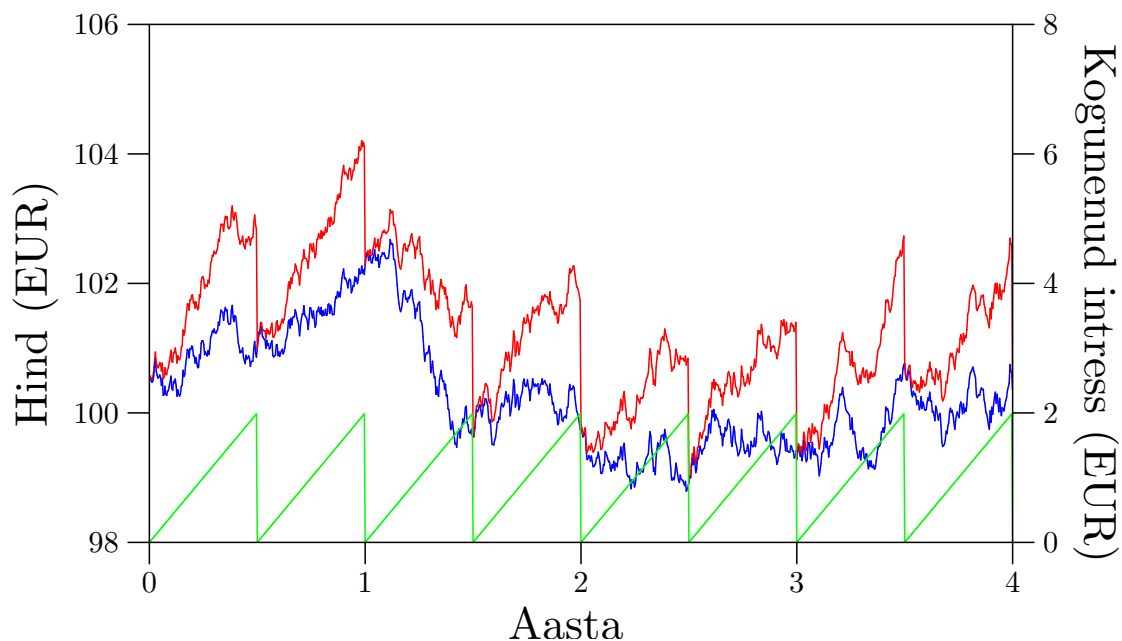
Võlakirja **must hind** (*dirty price*) on võrdne võlakirja turuväärtusega ehk see hind, millega õiglaselt tehingus võlakiri omanikku vahetab.

Võlakirja **puhas hind** (*clean price*) on aga musta hinna ja tehingupäevaks kogunenud intressi vahe.

Võlakirja puhas hind avaldub kujul

$$CP = DP - AI, \tag{2.1}$$

kus CP on puhas hind, DP on must hind ning AI on kogunenud intress (*accrued interest*).



Joonis 2.1: Võlakirja turuhind ehk must hind esimese 4 aasta jooksul

Kogunenud intressi saab leida valemiga:

$$AI = tNR,$$

kus

t – möödunud osa intressiarvestuse perioodist (tavaliselt, kui intressi arvestatakse kord aastas, siis (möödunud päevade arv)/365),

N – Võlakirja nominaal (*par value*),

R – perioodi intressimäär.

Võlakirja must hind leitakse analoogiliselt võlakirja hinnaga väljalaskepäeval, kuid ajahetked $t_1, t_2, \dots, t_n$ ja T on antud aastates alates sellest hetkest, mil võlakiri omanikku vahetab.

Joonisel 2.1 on näha 10-aastase võlakirja, mis maksab intresse (kuponge) kaks korda aastas, turu- ehk musta hinda (punane joon), võlakirja puhas hinda (sinine joon) ning kogunenud intressi (roheline joon) muutumist esimese 4 aasta jooksul. Näeme, et võlakirja must hind kukub 2 EUR võrra iga poole aasta tagant ning on siis võrdne võlakirja puhta hinnaga – see on seotud intresside väljamaksmisega; kukkumisele järgnev tõus näitab aga kogunenud intresside kasvu.

Võlakirja puhas hind sõltub täielikult turuolukorrast ja investorite hinnangust võlakirja riskantsusele ehk investori nõutavale tulunormile. Võlakirja puhas hind on suurem oma nominaalväärtusest, kui investori nõutav tulunorm on alla kupongimäära ja väiksem, kui investori nõutav tulunorm on suurem kupongimäärast. Joonisel 2 nähtav liikumine ongi seega tõlgendatav ka kui investori hinnangu muutus nõutavale tulunormile - kui võlakirja puhas hind tõuseb, siis nõutav tulunorm kahaneb ja vastupidi.

Näide 2.2. Leida 1. jaanuaril 2007.a. välja lastud 2-aastase 10% intressimääraga ja 1000 EUR nominaaliga võlakirja must ja puhas hind ning kogunenud intressid 1. novembril 2007.a. Intressi makstakse 31. detsembril 2007. Lunastustähtaeg on 31. detsember 2008, mil tagastatakse põhisumma koos viimase intressimaksega. Võlakirja diskonteerimisel kasutame pidevat diskontomäära 8%.

Lahendus. Leiame võlakirja musta hinna:

$$DP = 100e^{-0.08 \cdot 2/12} + 1100e^{-0.08 \cdot (2+12)/12} = 1100.65 \text{ EUR}$$

. Järgmisena leiame 1. novembriks kogunenud intressid:

$$AI = (30 \cdot 10) / 365 \cdot 1000 \text{ EUR} \cdot 10\% = 82.19 \text{ EUR}$$

Seega võlakirja puhas hind on 1. novembril $DP - AI = 1100.65 - 82.19 = 1018.46 \text{ EUR}$.

Võlakirja tulusus tähtajani.

Võlakirja tulusus tähtajani (*YTM – yield to maturity*) on selline konstantne tulumäär, millega võlakirjaga seotud tuleviku rahavooge diskonteerides saadakse võlakirja turuväärtus (must hind). Seega võib öelda, et YTM on võlakirja sisemine tulumäär (*IRR – internal rate of return*). Võlakirja tulusus tähtajani on mugav vahend hindamaks investeringu tulusust kui võlakirja plaanitakse hoida kuni lunastustähtajani.

Võlakirja tulusus tähtajani leitakse kui võrrandi

$$DP = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1+y)^{t_i}} + \frac{N}{(1+y)^{t_n}}$$

lahend.

Näide 2.3. Leida Põhjamaade investeerimispanka (NIB) võlakirja (väljaandmise kuupäev - 15.12.2014, lunastamistähtaeg - 15.12.2019, kupongimäär 7,5%, nominaal - 10000 EUR, intressi makstakse kord aastas) tulusus tähtajani 07.03.2015 seisuga. Võlakirja must hind 07.03.2015 oli 10044.29.

Lahendus. Võlakirja väljaandmisest on möödunud 83 päeva = 0.23 aastat ning aeg järgmise intressimakseni on $1 - 0.23 = 0.77$ aastat. Esitame ajad aastates makseteni alates 07.03.2015 ning maksete suurused tabelis 2.1. Võrrand võlakirja tulususe leidmiseks on

$$10044.29 = \frac{750}{(1+y)^{0.77}} + \frac{750}{(1+y)^{1.77}} + \frac{750}{(1+y)^{2.77}} + \frac{750}{(1+y)^{3.77}} + \frac{10750}{(1+y)^{4.77}},$$

mille lahendamisel saame, et $y = 0.0782$. Seega võlakirja tulusus tähtajani on 7.82%. Võlakirja tulevikumaksete (PV) summa intressimäära $y = 7.82\%$ korral on võrdne võlakirja musta hinnaga 10044.29 (vt. tabel 2.1).

Võlakirja puhas hind on $10044.29 - 170.55 = 9873.74$.

Kuupäev	15.12.15	15.12.16	15.12.17	15.12.18	15.12.19	Summa
Aeg makseni	0.77	1.77	2.77	3.77	4.77	
Makse	750	750	750	750	10750	
PV	707.65	656.36	608.78	564.66	7506.85	10044.29

Tabel 2.1: Näide 2.3. Tulevikumaksed ja nende nüüdisväärtused

2.1.4 Duratsioon

Võlakirjadega kaubeldakse ka järelturul, kus võlakirja hind sõltub turul sel hetkel valitsevast intressimäärast. Kui intressimäär (nõutav tulumäär) tõuseb, siis võlakirja hind langeb; kui aga intressimäär langeb, siis võlakirja hind tõuseb. See, kas võlakirja müüakse diskontoga või preemiaga, sõltub antud hetke intressimäärast ja võlakirja kupongiintressimäärast.

Seega üheks põhiliseks võlakirjadega seotud riskiks on intressirisk.

Intressirisk tähendab ohtu, et intressimäärade muutumine turul toob kaasa võlakirja turuhinna muutuse. Selle mõju on pikaajalistele võlakirjadele suurem kui lühiajalistele, kuna kui näiteks turu intressimäär tõusis, siis on investor seotud 10-aastase võlakirja puhul madalama kupongimääraga kuni 10 aastat, kuid kolmeaastase võlakirja korral vaid kolm aastat. Seega intressimäärarisk sõltub vähemalt osaliselt ajast, mille vältel investor peab võlakirja hoidma. Võlakirja tundlikkust intressi muutustele iseloomustatakse duratsiooni näitajaga.

Investeeringu **duratsioon** ehk kestus (*duration*) on **kaalutud keskmine aeg**, mille jooksul realiseeruvad investeeringuga seotud tuleviku rahavood, kusjuures kaaludeks on tulevikumaksete osakaalud. Võime ka öelda, et **duratsioon on tulevikumaksete keskmine laekumisaeg**. Duratsiooni mõiste võttis kasutusele Frederick Macaulay 1938. aastal ja seda kasutakse laialdaselt intressimäärariski mõõtmisel ja juhtimisel.

Duratsiooni D arvutamise üldvalem on

$$D = \frac{1}{PV} \sum_{j \geq 1} t_j PV(C_j),$$

kus $PV(C_j)$ on ajahetkel $t_j > 0$ laekuva tulevikumakse C_j nüüdisväärtus ja $PV = \sum_{j \geq 1} PV(C_j)$ on investeeringu tulevikumaksete nüüdisväärtuste summa.

Nüüdisväärtuste leidmisel kasutatakse nõutavat tulumäära ehk turu intressimäära. Konkreetne duratsiooni arvutamise valem sõltub sellest, millist tüüpi tulumäära kasutatakse. Pideva annualiseeritud tulumäära i korral leitakse duratsioon vastavalt valemile

$$D = \frac{1}{PV} \sum_{j \geq 1} t_j C(t_j) e^{-it_j},$$

kus $PV = \sum_{j \geq 1} C(t_j) e^{-it_j}$.

Liitmäära i korral, kui kapitalisatsiooniperioodide arv aastas on k , leitakse duratsioon vastavalt valemile

$$D = \frac{1}{PV} \sum_{j \geq 1} t_j \frac{C(t_j)}{(1 + \frac{i}{k})^{kt_j}},$$

kus

$$PV = \sum_{j \geq 1} \frac{C(t_j)}{(1 + \frac{i}{k})^{kt_j}}.$$

Erijuhul, kui $k = 1$ ning maksed toimuvad kord aastas kuni aastani T saame

$$D = \frac{1}{PV} \sum_{t=1}^T t \frac{C(t)}{(1+i)^t},$$

mida nimetatakse **Macauley duratsiooniks**.

Duratsiooni saab kasutada firma tulevaste laekumiste ja tulevaste kohustuste hindamisel. Loomulik on eeldada, et firma tulevaste kohustuste ja laekumiste vahel peab valitsema tasakaal, s.t.

$$PV(L) = PV(K),$$

kus $PV(L)$ ja $PV(K)$ on vastavalt laekumiste ja kohustuste nüüdisväärtused. Kuna mõlemad suurused sõltuvad turul valitsevast intressimäärast i , siis tasakaalu kehtimiseks intressimäära muutumisel peab kehtima võrdus

$$\frac{dPV(L)}{di} = \frac{dPV(K)}{di}.$$

Kasutades pidevat tulumäära, saame esitada eelmise võrduse esitada kujul

$$\sum_{j1 \geq 1} t_{j1} C_L(t_{j1}) e^{-it_{j1}} = \sum_{j2 \geq 1} t_{j2} C_K(t_{j2}) e^{-it_{j2}}, \quad (2.2)$$

kus $C_L(t_{j1})$, $C_K(t_{j2})$ on vastavalt tulevased laekumised ja kohustused. Arvestades võrdust $PV(L) = PV(K)$ saame nüüd, et (2.2) kehtib juhul, kui

$$D_L = D_K,$$

s.t. laekumiste ja kohustuste duratsioonid langevad kokku. Seega võime öelda, et firmas on intressirisk maandatud, kui tuleviku laekumiste ja kohustuste duratsioonid on võrdsed.

Duratsiooni mõistet kasutatakse laialdaselt ka võlakirjade intressimäärariski hindamisel. Märgime, et kupongvõlakirjade duratsioon on alati väiksem

Aasta	C	PV i=0.15	Kaalutud PV i=0.15	PV i=0.05	Kaalutud PV i=0.05
1	100	87.0	87.0	95.24	95.24
2	100	75.6	151.2	90.7	181.4
3	100	65.8	197.3	86.38	259.2
4	100	57.2	228.7	82.27	329.1
5	100	49.7	248.6	78.35	391.8
6	100	43.2	259.4	74.62	447.7
7	100	37.6	263.2	71.07	497.5
8	100	32.7	261.8	67.68	541.5
9	100	28.4	255.8	64.46	580.1
10	1100	271.0	2710.1	675.3	6753
Kokku		749.1	4671.7	1386	10077

Tabel 2.2: Näide 2.4.

võlakirja lunastamis(kustutus) tähtajast, diskontovõlakirjade duratsioon on aga võrdne lunastamistähtajaga.

Näide 2.4. Leida 10 aastase võlakirja nominaaliga 1000 EUR ning kupon-
gimääraga 10% (kuponmaksed toimuvad üks kord aastas) Macaulay durat-
sioon, kui turul kehtivaks intressimääraks on a) 15%, b) 5% ning kasutatakse
liitintressi valemit.

Lahendus. Leiame võlakirja tulevikumaksete nüüdisväärtuse PV ning aja-
ga korrutatud nüüdisväärtuse (kaalutud PV) kõigi tulevikumaksete kohta (vt.
tabel 2.2). Seejärel leiame PV-de ning kaalutud PV-de summa. Nüüd saame lei-
da juhul a) $i = 0.15$:

$$D = 4671.7/749.1 = 6.24.$$

ning juhul b) $i = 0.05$

$$D = 10077/1386 = 7.27.$$

Võlakirja hinnatundlikkus turu intressimäära i muutuste suhtes.

Olgu võlakirja hind B . Siis võlakirja hinnatundlikkust intressimäära muu-
tuse suhtes iseloomustab suurus

$$S = \frac{dB/B}{di},$$

mis näitab (ligikaudselt), kui mitu protsenti muutub võlakirja hind, kui turul
valitsev intressimäär muutub ühe protsendipunkti võrra.

Kuna makseriskita võlakirjade hind on võrdne tulevikumaksete nüüdisväärtusega turul kehtiva intressimäära korral, siis pideva tulumäära korral saame, et

$$S = -\frac{1}{B} \sum_{j \geq 1} t_j C(t_j) e^{-it_j} = -D.$$

Seega, kui turul valitsev intressimäär suureneb 1 protsendipunkti võrra (näiteks 3 protsendilt 4 protsendini), siis võlakirja hind väheneb ligikaudselt D protsendi võrra. Või kui turul valitsev intressimäär suureneb 0.1 protsendipunkti võrra (näiteks 3.3 protsendilt 3.4 protsendini), siis võlakirja hind väheneb ligikaudselt $D/10$ protsendi võrra.

Näide 2.5. Vaatleme näites 2.4 toodud võlakirja, kuid duratsiooni arvutamisel kasutame pidevat tulumäära. Kui turul kehtiv intressimäär on 15%, siis võlakirja hind on 703.17 EUR ning duratsioon on $D = 6.11$ ja $S = -6.11$. Kui intressimäär langeb 0.1 protsendipunkti võrra (s.t. 14.9%), siis võlakirja hind on 707.49 EUR ehk võlakirja hind tõuseb 0.61%. Kui intressimäär langeb 1 protsendipunkti võrra, siis võlakirja hind on 747.95 EUR ehk võlakirja hind tõuseb 6.37%. Seega suurus S näitab ligikaudselt võlakirja hinna muutust protsentides.

2.2 Matemaatiline mudel riskivabade tuleviku rahavoogude hindamiseks.

2.2.1 Üldised eeldused finantsturu matemaatilistele mudelitele

Finantsmatemaatika mudeleid kasutatakse selleks, et hinnata finantseerimistegevuses tarvitataivate väärtpaberite hindu ja nendega seotud riske ning selgitada, kuidas oleks võimalik neid riske juhtida. Finantsmatemaatika mudelite korral tuleb silmas pidada, et nad on kaugel tegelikkusest ja nende tulemused vajavad kasutamiseks tervel mõistusel ja kogemustel põhinevat korrigeerimist. Nende mudelite korral on alati väga tähtsad kaks küsimust:

- 1) kui vale võib tulemus olla mudelis tehtud kuid reaalselt mittetäidetud eelduste tõttu ning
- 2) kui kasulik võib see mudel olla sellele vaatamata.

Matemaatilised mudelid on alati tegelikkuse lihtsustatud ja mingis mõttes idealiseeritud kujutised, ning reaalsete finantsturgude lähendina vaatleme selliseid turge-mudeleid, mis on järgmises mõttes **täiuslikud e. hõõrdevabad** (*frictionless*):

- Kõigile kauplejatele on kättesaadav ühesugune info, mis igal hetkel t sisaldab täieliku teadmise kõikide turul kaubeldavate varade hindadest hetkel t ja varem.
- Tehingud – ost, müük, igasugused varadega seotud maksed nagu dividendid või intressid või hoiukulud – toimuvad hetkeliselt, on tasuta ning tehingutest saadavat tulu ei maksustata.
- Iga kaupleja võib kaubeldavat vara nii osta kui müüa sama hinnaga igas

soovitavas koguses (näit. 10 ühikut, 109 ühikut, 0.0013 ühikut, e+1 ühikut jne.), kusjuures need ostu- ja müügi mahud ei mõjuta hindu (kõik kauplused on nn. hinnavõtjad).

- Igas kaubeldavas varas on kitsendusteta võimalik võtta ka mistahes lühikene positsioon ning selleks ei nõuta garantiivara olemasolu.

Lühike ja pikk positsioon

Finnatsturgude matemaatiliste mudelite korral lubatakse tavaliselt ka lühikese positsiooni võtmist. **Lühikeseks müümine** (*short selling*) ehk lühikese positsiooni võtmine on laenatud väärtpaberi müümine lootuses, et selle hind langeb, mille järel saab ta odavamalt tagasi osta ning omanikule tagastada. Lühikeseks müümine on väärtpaberi ostmisele vastupidine tehing. Lühikeseks müüja teenib kasumit siis, kui lühikeseks müüdud väärtpaberi hind langeb. Lühikeseks müüdud väärtpabereid nimetatakse lühikeseks positsiooniks. Vastupidiselt on omatavad väärtpaberid pikk positsioon. Pika positsiooni soetamiseks tuleb väärtpaberid kõigepealt osta ning tehingu lõpetamiseks müüa. Lühikeseks müümise puhul on tegevuste järjekord vastupidine. Lühikeseks müüdud väärtpaberid ei kuulu lühikese positsiooni omanikule, mistõttu võlgneb ta nende väärtuse väärtpaberite omanikule.

Lühikeseks müümise eelis seisneb selles, et nii on kauplejail võimalik teenida ka langeval turul. Lühikeseks müümine on aga paljudel juhtudel seotud suurema riskiga. Peamine oht kauplejale seisneb selles, et kaotused ei ole piiratud. Lisaks seisneb raskus veel selles, et pikaajalise keskmisena tõusevad aktsiaturud umbes 8...12 protsenti aastas. Seega lühikeseks müümine nagu toob kasu vaid siis, kui tehing hästi ajastada. Seetõttu ei saa lühikeste positsioonide omamist lugeda investeerimiseks. Lühikeseks müümine on lühiajaline finantsspekulatsioon. Märkime ka, et kõikidel börsidel ei ole lühikeseks müümine lubatud.

Mudelite korral me eeldame, et turuosalised on **majanduslikult ratsionaalsed** - kui on valida, siis sama hinna eest (või odavamalt) nad alati eelistavad saada suuremat tulu või omada suurema tulu saamise võimalust tulevikus. Muuhulgas eelistavad nad alati mittekauplemisele kauplemist, kui sellega kindlasti ei kaasne kulusid, kuid kaasneb võimalus saada tulu - sellise kauplemise võimalust turul nimetatakse **arbitraaživõimaluseks** (*arbitrage opportunity*).

On selge, et reaalsel turul ei saa ükski arbitraaživõimalus vähegi pikemaajaliselt püsida, sest sellest tekib nõudlus ühtede ja pakkumine teiste kaupade osas toob kaasa kaupade hindade korrigeerimise. Arbitraaživõimaluste avastamiseks ja nende likvideerimiseks nõudluse-pakkumise teel töötavad finantsurur ka eraldi spetsialistid, arbitraažöörid (*arbitrageurs*). Kuigi arbitraaživõimaluse avastamisel selle kiire ära kasutamine toob kindla tulu (või vähemalt

selle saamise võimaluse), ei saa ükski turul tegutseja loota sellele, et just temal õnnestub see tulu saada. Väärtpaberite hindade määramiseks loodavate turumudelite korral on loomulik eeldada, et need mudelid on mõistlikud ja majanduslikult sisukad siis, kui nendes puudub arbitraaživõimalus.

Hetkeliselt toimuvate tehingute korral on loomulik eeldada, et turg on igal hetkel tasakaalus, s.o., kõigi osalejate ostu-müügi soovid on rahuldatud (sest kõik saavad oma soovid hetkeliselt rahuldada) ja seega kehtivad turul igal hetkel nn. **dünaamilised tasakaaluhinnad** (hinnad, millega ost-müük pidevalt toimub, kuid mille korral nõudlus ja pakkumine on igal hetkel tasakaalus).

Loomulikult saavad investorid aja edenedes maailmast uut infot ja see muudab nende tuleviku hinnanguid ning ostu-müügi-tarbimise eelistusi ja soove, mis viib pidevalt uute tasakaaluhindade väljakujunemisele, nii et tegemist on igas mõttes dünaamilise tasakaaluga (pidevalt toimuv ost-müük, pidevalt muutuv nõudlus-pakkumine ja sellele vastavad pidevalt muutuvad hinnad).

Kui ratsionaalsete osalistega turg on tasakaalus, siis seal ei saa olla arbitraaživõimalust, sest arbitraaživõimalus tähendaks, et kauplejate ostu-müügi soovid ei ole rahuldatud - arbitraaživõimalus tooks kaasa lõpmatu ja seega mitterahuldatava nõudluse osade kaupade ostuks ja pakkumise teiste kaupade müügiks.

2.2.2 Ühe hinna seadus

Finantsvarade teoreetilise väärtuse määramisel on tunnustatud põhimõte, et vara väärtus ratsionaalsele investorile on määratud sellest varast saadavate tulevaste hüvedega. Sellest põhimõttest tuleneb, et kui üks turul kaubeldav vara on tulevaste rahaliste tulemuste mõttes mitte halvem kui teine, siis ei saa esimese vara hind olla väiksem kui teisel. (Vastasel juhul ei ostaks ükski ratsionaalne investor teist vara ja sellega tegelikult turul ei kaubeldaks. Täiuslikul turul tooks esimese vara väiksem hind kohe kaasa arbitraaživõimaluse – tuleks osta esimest vara ja müüa teist.)

Sellest põhimõttest lähtudes peab kehtima ka järgmine **Ühe Hinna Seadus** (*the Law of One Price*): **kui kaks turul kaubeldavat vara on tulevaste rahaliste tulemuste mõttes samaväärsed siis peavad olema võrdsed ka nende varade praegused hinnad.**

Sama põhimõte kehtib ka kauplemisstrateegiate korral: kui turul üks kauplemisstrateegia on tulevikus rahalises mõttes mitte halvem kui teine (nendega kaasnevad tulevased rahavood on esimese strateegia korral igal ajahetkel tulevikus mitte väiksemad kui teisel), siis ei saa esimese strateegia alustamiseks vajalik summa olla väiksem kui teise strateegia alustamiseks vajalik summa.

Ühe Hinna Seadus kauplemisstrateegiate korral ütleb, et **kui kaks kauplemisstrateegiat on tulevikus rahalises mõttes samaväärsed, siis peavad võrdsed olema ka nende alustamiseks vajalikud rahasummad.**

Ühe Hinna Seadus võimaldab leida tulevase (ka juhusest sõltuva) rahavooga iseloomustatud väärtpaberi hinna sel teel, et konstrueeritakse kauplemisstrateegia, millega kaasnev rahavoog igal hetkel tulevikus võrdub väärtpaberiga kaasneva rahavooga samal hetkel (väärtpaberit matkiv või imiteeriv kauplemisstrateegia). Vaadeldava väärtpaberi hind peab Ühe Hinna Seaduse järgi võrduma sellise kauplemisstrateegia alustamiseks vajaliku raha kogusega. Lisaks võimaldab sellise kauplemisstrateegia rakendamine täpselt tagada kõik väärtpaberi väljaandmisega võetavad võimalikud tulevased rahalised kohustused ehk teiste sõnadega täielikult maandada väärtpaberi väljaandmisega tekkivad riskid.

Juhul, kui väärtpaberit matkivat kauplemisstrateegiat konstrueerida ei õnnestu, võib püüda konstrueerida kauplemisstrateegiaid, mille tulevased rahavood ja portfelli väärtused pole väiksemad (või pole suuremad) kui hinnatava väärtpaberi korral ja selliselt saada ülalt (või alt) hinnanguid selle väärtpaberi õigustatud hinnale.

2.2.3 Riskivaba finantsturu mudel

Mudeli elemendid:

a) **Lõplik arv** $T + 1$ **ajahetke** $t \in \mathcal{T} = 0, 1, 2, \dots, T, T < \infty$, millal turu mudelis saab midagi toimuda. Sealjuures: $t = 0$ - olevik, modelleeritava perioodi algus hetk; $t > 0$ - tulevik, $t = T$ - modelleeritava perioodi lõpphetk, ajas kaugemale me selles mudelis ei vaatle. Kauplemine (portfelli moodustamine) toimub ainult hetkel $t = 0$. Kõik kaubeldavate varadega seotud tulevased maksed (võlakirja või laenulepingu korral intressimaksed ja võla tagasimaksed või ka täiendavad laenud) leiavad mudelis aset ainult hetkedel $t = 1, 2, \dots, T$. Ajahetke numbrit tuleb siin mõista kui ajahetke järjekorranumbrit, mitte kui ajahetke arvväärust (näit aastates).

b) **Lõplik arv** N **turul kaubeldavat vara** (*assets*) või **väärtpaberit** (*securities*). Iga vara $n, 1 \leq n \leq N$ on iseloomustatud hetke $t = 0$ **hinnaga** $B_n = B_n(0)$ ja vara omanikule laekuvate **tulevaste maksete vooga** (*payment stream, cash flow*) $c_n = \{c_n(1), c_n(2), \dots, c_n(T)\}$. Sisult olulisim on juht, kui kaubeldavateks varadeks on **võlakirjad** (*bonds*), s.o., sellised väärtpaberid, mille korral $B_n > 0$ ja $c_n(t) \geq 0, t > 0$.

Me eeldame, et vara ühiku hind ei sõltu sellest, kas vara tahetakse osta või müüa, ega ka tehingu mahust. Suurused $c_n(t)$ võivad üldiselt olla suvalised arvud – nulli tõlgendamise kui makse puudumist, positiivset arvu kui väärtpaberit omava investori poolt hetkel t saadavat makset ja negatiivset arvu kui tema

	Hind		Maksed	
Võlakiri	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
bond1	3	1	1	2
bond2	2	1	2	0

Tabel 2.3: Näite 2.6. mudel

poolt hetkel t tehtavat makset. Kuna me oma mudelis hakkame lubama ka lühikeseks müümist (negatiivse positsiooni võtmist), siis üldsust kitsendamata võib eeldada, et kõigi kaubeldavate varade korral $B_n \geq 0$.

Näide 2.6. Olgu 1. veebruaril 2011 turul kaubeldavad vaid kaks võlakirja, bond1 ja bond2. Olgu võlakiri bond1 hinnaga 3, lõpptähtajaga 1. veebruar 2014, nominaaliga 1 ja iga-aastase 1. veebruaril toimuva intressimaksega 1. Võlakiri bond2 olgu hinnaga 2, lõpptähtajaga 1. veebruar 2013, nominaaliga 1 ja iga-aastase 1. veebruaril toimuva intressimaksega 1. Sellele turule vastav mudel on kirjeldatav tabelina 2.3.

Kauplemisportfell

Olulised objektid, mida turu mudelites vaadeldakse on portfell ja kauplemisstrateegia. Portfell on investori käes olev turul kaubeldavate varade (või nendes võetud positsioonide) kogum, mis võib erinevatel ajahetkedel ja erinevates olukordades olla erinev. Kauplemisstrateegia on eeskiri, mis ütleb, milline portfell tuleb sõltuvalt ajahetkest ja olukorrast moodustada. Praktiliselt võib need mõisted samastada ja siin kursuses me nii teemegi. Kuna praegu vaadeldavas mudelis on kauplemine lubatud ainult hetkel $t = 0$, siis kõik lubatavad kauplemisstrateegiad seisnevad selles, et hetkel $t = 0$ moodustatakse mingi portfell ja tulevikus kogu aeg hoitakse sama portfelli, mis hetkel $t = 0$ moodustati. Seetõttu selles mudelis piisab kauplemisstrateegia kirjeldamiseks näidata ära hetkel $t = 0$ moodustatav portfell.

Def. Investori **portfelliks e. kauplemisstrateegiaks** nimetatakse vektorit $H = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ kus H_n sisuline tõlgendus on vara n kogus (positsioon) hetkel $t = 0$ moodustatud portfellis.

Seejuures, kui $H = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ ja $H' = \{H'_1, H'_2, \dots, H'_N\}$ on portfellid, siis on portfellid ka vektorid $\alpha H = \{\alpha H_1, \alpha H_2, \dots, \alpha H_N\}$ ja $H + H' = \{H_1 + H'_1, H_2 + H'_2, \dots, H_N + H'_N\}$.

Suurus H_n võib omandada ka negatiivseid väärtusi, mida tõlgendatakse kui vara n katteta ettemüüki või “lühikeseks müümist”. Seejuures toob vara n osas võetav positsioon H_n kaasa hetkel $t = 0$ summa $H_n B_n$ maksmise (ehk summa $-H_n B_n$ saamise, kui $H_n < 0$) ja tulevikus igal hetkel $t \in \mathcal{T}'$ summa $H_n c_n(t)$ saamise.

Olgu näiteks $B_n > 0$ ja $c_n(t) \geq 0$ iga $t > 0$ korral (vara n hind on positiivne ja vara omamisega kaasneb igal hetkel $t > 0$ makse $c_n(t)$ saamine). Siis negatiivse positsiooni $H_n < 0$ võtmise korral s.o. lühikeseks müümisega kaasneb hetkel

$t = 0$ summa $-H_n B_n \geq 0$ saamine ja igal hetkel $t > 0$ maksekohustus summas $-H_n c_n(t)$.

Portfelli $H = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ **hind (väärtus)** hetkel $t = 0$ on suurus

$$W_H = \sum_{n=1}^N H_n B_n.$$

Nii palju on hetkel $t = 0$ vaja raha, et portfelli H moodustada. Portfelli H moodustamisega kaasnev tulevane maksete voog on vektor $c_H = \{c_H(1), c_H(2), \dots, c_H(T)\}$,

$$\text{kus } c_H(t) = \sum_{n=1}^N H_n c_n(t).$$

Näide 2.7. Leida näites 2.6 vaadeldud mudeli korral portfelli $H = (2, -1)$ hind ja tulevane rahavoog. Portfelli hind on $W_H = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 4$ ja portfelliga kaasnev tulevane rahavoog on $c_H = \{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1, 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2, 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0\} = \{1, 0, 4\}$.

Arbitraažistrateegia

Def. Arbitraaživõimalus (*arbitrage opportunity*) või **arbitraažistrateegia** või **arbitraažiporfelli** on selline lubatav strateegia (portfelli) H , mille korral kas

a) $W_H < 0, c_H \geq 0$ (st. $c_H(t) \geq 0$ iga $t > 0$ korral), s.o., portfelli moodustamisel saadakse raha (portfelli hind on negatiivne) ning portfelli tulevaste maksete voog on mittenegatiivne (tulevikus ei tule kindlasti kunagi midagi maksta), või

b) $W_H = 0, c_H \geq 0, c_H \neq 0, (c_H(t) \geq 0$ iga $t > 0$ korral ja neist vähemalt üks $c_H(t) > 0$), s.o., portfelli moodustamiseks ei vajata raha ning tulevaste maksete voog on mittenegatiivne ja nullist erinev (seega vähemalt üks tulevane makse on positiivne).

Lihtne on näidata, et arbitraaživabas mudelis kehtib Ühe Hinna Seadus. Tõepoolest, kui kaks portfelli H' ja H'' omavad sama tuleviku rahavoogu $c_{H'} = c_{H''}$, kuid näiteks esimene portfelli hind on väiksem ($W_{H'} < W_{H''}$), siis strateegia $H = H' - H''$ on arbitraažistrateegia: $W_H < 0, c_H = 0$.

Sellest, et Ühe Hinna Seadus kehtib, ei järeldu aga see, et mudel on arbitraaživaba.

Näiteks mudelis (vt. tabel 2.4) strateegia $H = \{-1, 1\}$ on arbitraažistrateegia: $W_H = 0, c_H = (0, 1)$, kuid Ühe Hinna Seadus kehtib (ei ole võimalik konstrueerida kaht identset tuleviku rahavoogu, millede hind oleks erinev).

Saavutatav rahavoog

Def. Saavutatavaks (*attainable, reachable, synthesizable*) **tulevaseks rahavooks** nimetame mudelis sellist tulevast rahavoogu, mis on tekitatav mõne

	Hind Maksed		
Võlakiri	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
bond1	1	1	0
bond2	1	1	1

Tabel 2.4: Näide mudelist, mis ei ole arbitraaživaba, kuid ühe hinna seadus kehtib

lubatava portfelli ehk kauplemisstrateegia poolt, s.t. tulevane rahavoog $x = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ on saavutatav parajasti siis, kui leidub lubatav portfell H nii, et $x = c_H$; seejuures portfelli H nimetame tulevast rahavoogu x tekitavaks portfelliiks.

Def. Kui tulevane rahavoog x on saavutatav portfelliga H ja mudelis kehtib Ühe Hinna Seadus, siis nimetame **tulevase rahavoo** x **väärtuseks või hinnaks** (hetkel $t = 0$) portfelli H väärtust hetkel $t = 0$.

Tulevase saavutatava rahavoo x väärtust hetkel $t = 0$ tähistame tähisega W_x . Seega

$$x = c_H \implies W_x = W_H.$$

Selleks, et tulevane rahavoog x oleks saavutatav portfelliga H , peavad kehtima võrdsused

$$x_t = \sum_{n=1}^N H_n c_n(t), t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.3)$$

Tegemist on lineaarse võrrandisüsteemiga tundmatute $H_1, H_2, \dots, H_N$ leidmiseks. Süsteem omab T võrrandit ja N tundmatut ning ei pruugi alati omada ühest lahendit. Meenutame, et kui $N < T$, siis süsteem ei pruugi olla lahenduv; kui $N > T$, siis üldjuhul süsteem on lahenduv ning lahendeid on lõpmata palju; selleks et süsteem oleks üheselt lahenduv on tarvilik (kuid mitte piisav), et $N = T$.

Näide 2.8. Leida näites 2.6 vaadeldud mudeli korral, kas tuleviku rahavood $x = (3, 4, 5)$ ja $x = (3, 4, 4)$ on saavutatavad või mitte ning leida saavutatavat rahavoogu genereeriv portfell. Leida, millisel tingimustel on rahavoog $x = (x_1, x_2, x_3)$ saavutatav.

Lahendus

a) $x = (3, 4, 5)$.

Võrrandisüsteem:

$$H_1 + H_2 = 3,$$

$$H_1 + 2H_2 = 4,$$

$$2H_1 = 5.$$

Võrrandisüsteemil lahend puudub, rahavoog $x = (3, 4, 5)$ ei ole saavutatav.

b) $x = (3, 4, 4)$.

Võrrandisüsteem:

$$H_1 + H_2 = 3,$$

$$H_1 + 2H_2 = 4,$$

$$2H_1 = 4.$$

Võrrandisüsteemi lahendiks on $H = (2, 1)$. Seega, rahavoog $x = (3, 4, 4)$ on saavutatav ja seda genereeriv portfelli on $H = (2, 1)$. Rahavoo hind W_x on $W_x = 2 * 3 + 1 * 4 = 10$. c) Saavutava rahavoo $x = (x_1, x_2, x_3)$ üldkuju.

$$H_1 + H_2 = x_1,$$

$$H_1 + 2H_2 = x_2,$$

$$2H_1 = x_3.$$

Kolmandast võrrandist saame $H_1 = x_3/2$, esimesest võrrandist $H_2 = x_1 - x_3/2$. Pannes H_1, H_2 teise võrrandisse, saame tingimuse $2x_1 - x_3/2 = x_2$. Kokkuvõttes, suvaline tuleviku rahavoog kujul $x = (x_1, 2x_1 - x_3/2, x_3)$ on saavutatav.

Def. Mudel on täielik (*complete*), kui mudelis on saavutatavad kõik tulevased rahavood.

Diskontotegurid

Def. Diskontotegurite komplektiks nimetame iga sellist komplekti $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ positiivseid arve $\lambda_t > 0$, mille korral kõikide turul kaubeldavate väärtpaperite $n = 1, 2, \dots, N$ jaoks kehtivad võrdused

$$B_n = \sum_{t=1}^T \lambda_t c_n(t), n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

Arvu $\lambda_t > 0$ nimetame hetkele t vastavaks **diskontoteguriks**. Lineaarsel võrrandisüsteemil (2.4) on T tundmatut ja N võrrandi. Süsteem on üldjuhul lahenduv kui $N \leq T$.

Olgu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ diskontotegurite komplekt ja olgu x tulevane rahavoog, mille korral igal hetkel $t = 1, 2, \dots, T$ saadakse vastavalt makse x_t . Siis nimetame

- hetke t makse x_t korrutamist diskontoteguriga λ_t selle **makse diskonteerimiseks** (hetkele $t = 0$),

- korrutist $x_t \lambda_t$ hetkel t toimuva makse x_t **diskonteeritud väärtuseks** ehk **nüüdisväärtuseks**,

- summat $\sum_{t=1}^T \lambda_t x_t$ **tulevase rahavoo x nüüdisväärtuseks** (diskontotegurite komplekti λ järgi).

Näide 2.9. Leida näites 2.6 vaadeldud mudeli jaoks kõik diskontotegurite komplektid. Võrrandisüsteem diskontotegurite leidmiseks on järgmine:

$$1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 = 3,$$

$$1\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2.$$

Teisest võrrandist saame $\lambda_2 = 1 - \lambda_1/2$ ning asendades λ_2 esimeses võrrandis saame $1\lambda_1 + 1 - \lambda_1/2 + 2\lambda_3 = 3 \implies \lambda_3 = 1 - \lambda_1/4$. Seega võrrandisüsteemi üldlahend on kujul $\lambda = (\lambda_1, 1 - \lambda_1/2, 1 - \lambda_1/4)$. Kuid kõik need vektorid λ ei ole diskontotegurite komplektid, kuna diskontotegurite jaoks peab kehtima võrratused $\lambda_t > 0$.

Seega,

$$\lambda_1 > 0, 1 - \lambda_1/2 > 0 \quad (\lambda_1 < 2), 1 - \lambda_1/4 > 0 \quad (\lambda_1 < 4),$$

ning kõik diskontotegurite komplektid on esitavad kujul $\lambda = (\lambda_1, 1 - \lambda_1/2, 1 - \lambda_1/4), 0 < \lambda_1 < 2$.

Kui mudelis eksisteerib vähemalt üks komplekt diskontotegureid, siis
a) portfelli hind on võrdne portfelli tulevase rahavoo diskonteeritud väärtusega (nüüdisväärtusega) mistahes diskontotegurite komplekti suhtes:

$$\sum_{t=1}^T \lambda_t c_H(t) = \sum_{t=1}^T \lambda_t \sum_{n=1}^N H_n c_n(t) = \sum_{n=1}^N H_n \sum_{t=1}^T \lambda_t c_n(t) = \sum_{n=1}^N H_n B_n = W_H.$$

b) suvalise saavutatava rahavoo nüüdisväärtus mistahes diskontotegurite komplekti suhtes on võrdne selle rahavoo hinnaga, s.t. $W_x = \sum_{t=1}^T \lambda_t x_t$;

c) mudel on arbitraaživaba. Tõepoolest, kuna $W_H = \sum_{t=1}^T \lambda_t c_H(t)$, siis ükski strateegia ei saa olla arbitraažistrateegia. Kui $c_H \geq 0$, siis ka $W_H \geq 0$; kui aga $c_H \geq 0, c_H \neq 0$, siis $W_H > 0$.

Põhitulemused riskivaba mudeli kohta

Teoreem 1. Turu mudel on arbitraaživaba parajasti siis (s.o., siis ja ainult siis), kui selle mudeli jaoks on olemas vähemalt üks diskontotegurite komplekt.

Teoreem 2. Mudel on arbitraaživaba ja täielik parajasti siis, kui tema jaoks on olemas täpselt üks diskontotegurite komplekt.

Mittesaavutatava rahavoo (sel juhul on mudelis lõpmatu arv diskontotegurite komplekte) hinda ei õnnestu mudelis üheselt määrata, kuid saab anda hinnale ülalt ja alt hinnangud:

$$\overline{W}_x = \max_{\lambda_t > 0} \sum_{t=1}^T \lambda_t x_t, \quad \underline{W}_x = \min_{\lambda_t > 0} \sum_{t=1}^T \lambda_t x_t$$

Seos diskontotegurite ja nullkuponngvõlakirjade tulususe vahel.

Vaatleme nullkuponngvõlakirju nominaaliga 1. Lunastamistähtajaga τ (aeg on mõõdetud aastates) nullkuponngvõlakirja Z^τ tuleviku rahavoog on

$$c(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t = \tau \\ 0, & \text{kui } t \neq \tau. \end{cases}$$

Kui nullkuponngvõlakirja Z^τ rahavoog on mudelis saavutatav, siis selle võlakirja hind W^τ on võrdne ajahetkele τ vastava diskontoteguriga (kõikide diskontotegurite komplektide korral)

$$W^\tau = \sum_{t=1}^T \lambda_t c(t) = \lambda_\tau.$$

Teiselt poolt, võlakirja tulusus tähtajani y_τ on nullkuponngvõlakirja Z^τ korral leitav võrrandist

$$W^\tau = \sum_{t=1}^T \frac{c(t)}{(1 + y_\tau)^t} = \frac{1}{(1 + y_\tau)^\tau},$$

millest saame seosed

$$\lambda_\tau = \frac{1}{(1 + y_\tau)^\tau}, \quad y_\tau = (\lambda_\tau)^{-\frac{1}{\tau}} - 1.$$

Võlakirjade turu andmete kasutamine mudeli konstrueerimiseks.

Reaalsed finantsturud ei ole täielikud ning seetõttu võib juhtuda, et turumudel reaalse andmetega ei ole arbitraaživaba. Seetõttu konstrueeritakse arbitraaživaba mudel, kus võlakirjade hinnad on vaid ligilähedaselt samad, mis reaalsel turul. Selleks a) leitakse diskontotegurid nii, et võlakirjade nüüdisväärtused oleks võimalikult lähedased võlakirjade tegelikele hindadele (kasutatakse võlakirjade musti hindu). Selleks minimiseeritakse võlakirjade tegelike

hindade B_n ja nende nüüdisväärtuste $\sum_{t=1}^T \lambda_t c_n(t)$ vahede ruutude summat:

$$\sum_{n=1}^N (B_n - \sum_{t=1}^T \lambda_t c_n(t))^2 \longrightarrow_{\lambda_t > 0} \min.$$

Olgu $\bar{\lambda}$ selle minimiseerimisülesande lahend.

b) Konstrueeritakse arbitraaživaba mudel, kus võlakirjade hindadeks võetakse

$$\bar{B}_n = \sum_{t=1}^T \bar{\lambda}_t c_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

ning nende tuleviku rahavoogudeks on $c_n(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$.

	Hind	Maksed	
Võlakiri	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
bond1	1.5	1	1
bond2	2.4	1	2
bond3	2.6	2	1

Tabel 2.5: Näite 2.10 turumudel

	Hind	Maksed	
Võlakiri	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
bond1	1.636	1	1
bond2	2.355	1	2
bond3	2.555	2	1

Tabel 2.6: Näite 2.10. arbitraaživaba mudel

Näide 2.10. Vaatleme võlakirjade turgu (vt. tabel 2.5), kus kaubeldakse vaid kolme võlakirjaga: bond1, bond2 ja bond3. Olgu aeg t mõõdetud aastates.

See mudel ei ole arbitraaživaba. Näiteks portfelli $H = (3, -1, -1)$ on arbitraažiportfell: $W_H = -0.5$, $c_H = (0, 0)$.

Konstrueerime nüüd nende andmete põhjal arbitraaživaba mudeli. Selleks minimiseerime funktsiooni

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1.5)^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2.4)^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2 - 2.6)^2 \longrightarrow_{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0} \min.$$

Minimiseerimisülesande lahendiks on $\bar{\lambda}_1 = 0.918$, $\bar{\lambda}_2 = 0.718$ ning $F = 0.023$. Kasutades leitud diskontoteureid leiame võlakirjade hinnad arbitraaživabas mudelis (vt. tabel 2.6) kui võlakirjade tuleviku maksete nüüdisväärtused.

Lihtne on kontrollida, et see mudel on arbitraaživaba ja täielik (s.t. selle mudeli jaoks leidub vaid üks diskontoteurite komplekt).

Võime konstrueerida arbitraaživaba mudeli ka nii et minimiseeritakse võlakirjade tulumäärade erinevust. Olgu y_n , $n = 1, 2, \dots, N$ reaalse turu võlakirjade tulumäärad. Siis

a) leitakse diskontotegurid nii, et võlakirjade tulusused tähtajani oleks võimalikult lähedased võlakirjade tegelikele tulusustele. Selleks minimiseeritakse võlakirjade tegelike tulususte ja arbitraaživaba mudeli tulususte vahede ruutude summat:

$$\sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2 \longrightarrow_{\lambda_{t_k} > 0, \hat{y}_n > -1} \min.$$

tingimusel, et

$$\sum_{k=1}^T \lambda_{t_k} c_n(t_k) = \sum_{k=1}^T \frac{c_n(t_k)}{(1 + \hat{y}_n)^{t_k}}, n = 1, 2, \dots, N,$$

kus aeg t_k on mõõdetud aastates. Olgu $\bar{\lambda}$ selle minimiseerimisülesande lahend.

b) Konstrueeritakse arbitraaživaba mudel, kus võlakirjade hindadeks võetakse

$$\bar{B}_n = \sum_{k=1}^T \bar{\lambda}_{t_k} c_n(t_k), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

ning nende tuleviku rahavoogudeks on $c_n(t)$.

2.3 Intressimäära swap.

Swap on tuletistehing, mille korral tehingu osapooled vahetavad omavahel tuleviku rahavoogusid.

Intressimäära swap - kahe osapoole kokkulepe kus osapooled vahetavad tuleviku intressimaksete voogusid. Neid lepinguid kasutatakse tihtipeale selleks et vahetada ujuva intressimääraga maksete voog fikseeritud intressimääraga maksete voo vastu. Rahavood arvutatakse nominaali (*notional amount*) suhtes. Erinevalt võlakirjadest ei ole makset lepingu sõlmimise hetkel ning tehingu osapooled vahetavad vaid intressimakseid. Intressimäära swapi kasutatakse selleks, et kindlustada end intressimäära riski vastu. Suur osa swappe kasutavad ujuva intressimäära saamiseks kas LIBOR-it (London Interbank Offer-Rate) või EURIBORi (mõlemad määratakse pankadevahelise kauplemise tulemusel). Ujuva intressimäära saamiseks lisatakse EURBOR-ile või LIBOR-ile mingi kogus punkte, kus üks punkt lisab 0.01% intressimääradele. Näiteks kui ujuv intressimäär on EURIBOR+60 punkti ning EURIBORi väärtuseks on 2.5%, siis ujuvaks intressimääraks on 3.1%.

Valuutaswap. Valuutaswapi korral vahetatakse nii algsumma (ja osadel juhtudel ka intress) ühes valuutas algkapitali (ja osadel juhtudel ka intressi) vastu teises valuutas.

Vaatleme nüüd, kuidas leida intressimäära swap-tehingu korral fikseeritud intressimäära ehk swap-määra. Olgu meil arbitraaživaba ja täielik riskivaba turumudel diskontoteguritega λ_t . Vaatleme intressimäära swapi lõpptähtajaga τ ja nominaaliga 1.

Olgu $C_t, 0 < t \leq \tau$ - tuleviku intressimaksed ujuva intressimäära korral.

Olgu $c_t(w), 0 < t \leq \tau$ - tuleviku intressimaksed fikseeritud intressimäära korral.

Swap määr $w = w_\tau$ on fikseeritud intressimäär, mille korral

$$\sum_{t>0}^{\tau} C_t \lambda_t = \sum_{t>0}^{\tau} c_t(w) \lambda_t,$$

s.t. intressimaksete voogude nüüdisväärtused on samad. Tuletame nüüd võrrandi swap-määra leidmiseks efektiivse intressimäära korral. Olgu aeg t mõõdetud aastates.

Leiame kõigepealt maksete nüüdisväärtuse ujuva intressimäära korral. Leiame intressimakse $C_{t'}$ perioodi (t, t') eest. Kui me ajahetkel t investeerime riskivalt ühe ühiku, siis me saame ajahetkel t' tagasi summa $1 + C_{t'} = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t'}}$ (kuna $\lambda_t = (1 + C_{t'})\lambda_{t'}$). Kokkuvõttes saame

$$\sum_{t' > 0}^{\tau} C_{t'} \lambda_{t'} = \sum_{t' > 0}^{\tau} \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t'}} - 1 \right) \lambda_{t'} = \sum_{t' > 0}^{\tau} (\lambda_t - \lambda_{t'}) = 1 - \lambda_{\tau},$$

kuna $\lambda_0 = 1$.

Leiame nüüd fikseeritud intressimääraga maksete nüüdisväärtuse. Oletame, et intressi makstakse ajamomentidel $\Delta t' + j\Delta t, j = 0, 1, 2, \dots, k$, kus $\Delta t' + k\Delta t = \tau$ ning $\Delta t' \leq \Delta t$. Fikseeritud intressimäär $w = w_{\tau}$ (efektiivne intressimäär) korral on ajahetkedel $\Delta t' + j\Delta t, j = 1, 2, \dots, k$ intressimakse suurus $c_{\Delta t} = (1+w)^{\Delta t} - 1$ ning ajahetkel $\Delta t'$ on intressimakse suurus $c_{\Delta t'} = (1+w)^{\Delta t'} - 1$. Et $(1+w)^{\Delta t} - 1 \simeq w\Delta t$ ja $(1+w)^{\Delta t'} - 1 \simeq w\Delta t'$, siis $c_{\Delta t'} \simeq \frac{\Delta t'}{\Delta t} c_{\Delta t}$.

Kokkuvõttes saame fikseeritud intressimaksete nüüdisväärtuseks

$$\sum_{t > 0}^{\tau} c_t(w) \lambda_t = \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t} \lambda_{\Delta t'} + \sum_{t \geq \Delta t' + \Delta t}^{\tau} \lambda_t \right) c_{\Delta t}$$

ning me saame järgmise võrrandi swap-määra leidmiseks

$$\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t} \lambda_{\Delta t'} + \sum_{t \geq \Delta t' + \Delta t}^{\tau} \lambda_t \right) ((1+w)^{\Delta t} - 1) = 1 - \lambda_{\tau}.$$

Vaatleme nüüd erijuhtu kui $\Delta t' = \Delta t = 1$ (aeg t on mõõdetud aastates). Siis

$$\left(\sum_{t=1}^{\tau} \lambda_t \right) w_{\tau} = 1 - \lambda_{\tau}.$$

millest saame, et

$$w_{\tau} = \frac{1 - \lambda_{\tau}}{\sum_{t=1}^{\tau} \lambda_t}.$$

Kui meil on teada swap määrad w_t , siis saame diskontotegurid leida rekursiivselt

$$\begin{aligned} \tau = 1 : w_1 &= \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} \implies \lambda_1 = \frac{1}{1 + w_1}, \\ \tau = 2 : w_2 &= \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \implies \lambda_2 = \frac{1 - w_2 \lambda_1}{1 + w_2}, \end{aligned}$$

jne. Seega, teades swap-määrasid on võimalik leida diskontotegureid ja vastupidi. Seda asjaolu saab ära kasutada arbitraaživaba mudeli konstrueerimisel reaalse turu andmete põhjal. Paljudes riikides on swap-turg enam arenenud kui võlakirjade turg ning arbitraaživaba turumudeli konstrueerimiseks kasutatakse swap-turu andmeid.

2.4 Valuutaswap.

Valuutavahetuswap (*foreign exchange swap*) on kokkulepe kahe poole vahel kindla valuutasumma ostmiseks või müümiseks kindlaksmääratud kuupäeval ja kindlaksmääratud vahetuskursiga ning selle tagasimüümiseks või tagasiostmiseks kokkulepitud vahetuskursiga kindlal kuupäeval kaugemas tulevikus.

Pooled määratlevad mõlemad vahetuskursid tehingu sõlmimise hetkel. Seega koosneb valuutavahetuswap kahest tehingust, millest esimest nimetatakse välisvaluuta **spot-tehinguks** (sealjuures tehingu arvelduspäev vastavalt turustandardile on kas $T + 2$ või $T + 1$, kus T on lepingu sõlmimise päev) ja teist tehingut nimetatakse välisvaluuta **forward-tehinguks**. Esimese tehingu kurss on tavaliselt tehingu toimumise ajal fikseeritud valuuta turukurss. Põhimõtteliselt võib valuutavahetuswapi vaadata ka kui ühe valuuta laenamist teise vastu teatud perioodiks. Kui tavapärase laenamise korral tehakse intressimakse, siis valuutavahetuswapi korral kajastub intressimäär nn. forward-kursis.

Valuutavahetuswapi korral maandatakse valuuta vahetuskursi muutustest tulenevaid riske. Seda tehingut saab kasutada juhul, kui ettevõtjal on valuutat (näit. eurosid), mida ta ei vaja enne teatud tähtaja möödumist, kuid samas on lühiajaline vajadus teise valuuta (näit. USA dollarid) järele. Valuutavahetuswapiga saab katta kursiriski, sest müües eurosid hetkekursiga, saab samal ajal fikseerida dollari tagasiostu kursi. Vastasel korral tuleb eurosid kuu aja pärast tagasi osta siis kehtiva hetkekursiga. See võib aga oluliselt erineda kursist, millega eurosid müüdi.

Näide. Ettevõttel on kaupade eest tasumiseks vaja USA dollareid, kuid oodata on laekumist USA dollarites (näiteks ettevõtte ekspordib SRÜ riikidesse ja impordib Aasia riikidest). Selleks, et teha makse kohe oodatavate USA dollarite arvelt, saab ettevõtte teha valuutavahetuswapi oodatavate USA dollarite laekumiseni. Valuutavahetustehingu abil väldib ettevõtte valuutariski. Nimelt oleks teine võimalus osta standardse valuutakonverteerimise teel oma kontole USA dollareid, teha vajalik makse ja hiljem, kui oodatav müügitulu USA dollarites laekub, saaks ettevõtte müüa USA dollarid taas tavalise valuutakonverteerimise teel. Ent see tähendaks seda, et vahepeal oleks ettevõtte avatud valuutakursi kõikumise riskile ja võib valuutakursi muutumise tõttu kahju kanda.

Välisvaluuta forward-kurss ei sõltu mitte valuutakursi tulevikuprognosidest, vaid sellistest teguritest nagu valuuta turukurss, tehingu periood ja valuutapaari kuuluvate valuutade intressimäärad tehingu perioodile vastava tähtaja osas tehingu sõlmimise hetkel. Näiteks võib forward-tehingu kursi leida järgmise valemi abil

$$F = S \frac{1 + i_v T / P_v}{1 + i_b T / P_b}, \quad (2.5)$$

kus F – välisvaluuta forward-kurss

S – valuuta turukurss ehk spot-kurss (sõltuvalt valuutapaarist on professionaalsete turuosaliste vahel turustandardiks kas $T + 2$ või $T + 1$ tehingu arvelduspäev)

i_v – välisvaluuta aastane intressimäär

i_b – baasvaluuta aastane intressimäär

P_v – välisvaluuta arvestuslik päevade arv aastas vastavalt turustandardile (360 või 365)

P_b – baasvaluuta arvestuslik päevade arv aastas vastavalt turustandardile (360 või 365)

T – forward-tehingu periood päevades (aeg arvelduspäevani alates spot-tehingu arvelduspäevast).

Märgime, et kuna reeglina on valuutavahetusswapi kestus alla aasta, siis loetakse ka forward-tehingu kursi valemis tehingu kestust päevades.

Forward-kursi leidmise valem põhineb **intressimäärade pariteetsuse tingimusel**. Intressimäärade pariteetsuse tingimuse kohaselt ei ole võimalik teenida riskivaba tulu laenates raha ühe riigist ning hoiustades teises riigis, kus riikidel on erinev valuuta. Oletame, et laename koduriigist 1 ühiku raha ning vahetame selle kursiga S teise riigi valuuta vastu ning hoiustame saadud summa S üheks aastaks välisriigis. Aasta pärast vahetame hoiustamisel saadud raha $S(1 + i_v)$ tagasi kursiga F ning saame summa $S(1 + i_v)/F$. Samuti maksame tagasi laenu koos intressidega summas $1 + i_b$. Selleks, et arbitraaživõimalus puuduks peab kehtima võrdus

$$S(1 + i_v)/F = 1 + i_b$$

ehk

$$F = S \frac{1 + i_v}{1 + i_b},$$

Märgime, et sama valem järeldub ka valemist (2.5), kui eeldada et $P_v = P_b$ ning võtta tehingu kestuseks 1 aasta ($T = P_v = P_b$).

Valuutaswap (*cross-currency swap*).

Kui ettevõtte soovib investeerida välisriiki, millel on koduriigist erinev valuuta ning investeerimiseks soovitakse võtta laenu, siis on ettevõttel otstarbekas kasutada valuutaswapi. Kui ettevõtte võtab laenu oma riigist, siis on ta avatud valuutakursiriskile, kui ta aga võtab välisriigis laenu, siis üldjuhul pakutakse tal laenu kõrgema intressimääraga, kui kodumaistele firmadele. Selleks, et saada laenu madalama intressimääraga, on tal otstarbekas sõlmida valuutaswap. Valuutaswapi korral vahetavad lepingu osapooled omavahel nii tehingu põhisumma kui ka intressimaksed ühes valuutas teise valuuta vastu.

Vaatleme järgmist näidet. Oletame, et USA rahvusvaheline ettevõtte (ettevõtte A) soovib laiendada oma tegevust Brasiiliasse ja vajab selleks 160 miljonit Brasiilia reaali ning mingi Brasiilia ettevõtte (ettevõtte B) soovib siseneda

USA turule. Oma tegevuse laiendamiseks välisriigis vajavad mõlemad ettevõtted laenu. Kuid üldjuhul pakutakse välisfirmadele laenu kõrgema intressimääraga kui kodumaistele firmadele. Oletame, et ettevõttele A antakse Brasiilias laenu 10% -lise intressimääraga ning ettevõtte B saaks USA laenuturulult laenu 9% intressimääraga. Samal ajal võiks ettevõtte A võtta USA laenuturulult laenu 4% intressimääraga ning ja ettevõtte B võib Brasiilia laenuturulult võtta laenu 5% intressimääraga.

Seetõttu on mõistlik, et ettevõtte A laenab ettevõttele B vajamineva summa Ameerika pangast ning ettevõtte B laenab ettevõttele A vajamineva summa Brasiilia panga kaudu ning seejärel laenusummad vahetatakse. Kui eeldada, et Brasiilia reaali (BRL) ja USA dollari (USD) vaheline vahetuskurss on 1,60 BRL = 1,00 USD ja et mõlemad ettevõtted vajavad sama suurt summat raha, saab Brasiilia ettevõtte Ameerika firmalt 100 miljonit dollarit vastutasuks 160 miljoni Brasiilia reaali, mille ta annab USA firmale.

Nüüd on mõlemal firmal investeerimiseks vajalikud vahendid olemas, kuid mõlemad firmad peavad tasuma ka intressimakseid laenu eest, mille nad teisele firmale võtsid. Seega vahetavad mõlemad osapooled regulaarselt intressimakseid, mis võrduvad teise poole laenukuludega. Oletades, et intressimaksed toimuvad kord aastas, siis Ameerika firma peab iga aasta tasuma Brasiilia firmale $0.05 \cdot 160 = 8$ miljonit reaali ning Brasiilia firma Ameerika firmale $0.04 \cdot 100 = 4$ miljonit dollarit.

Lepingu lõppedes vahetavad osapooled laenu põhisummad sama valuutakursiga tagasi (kuid võib mingi muu vahetuskursi ka eelnevalt kokku leppida).

Eespool toodud näites sõlmisid kaks firmat lepingu omavahel, kuid saab kasutada ka vahendajat. Sel juhul on ettevõtete laenuintressid mõnevõrra suuremad, näiteks eespool toodud näites võib firmade A ja B laenude tegelik intressimäär olla vastavalt 5.1% ja 4.1%.

Peatükk 3

Markowitzi portfelliteooria. CAPM.

3.1 Investeeringutega seonduvad riskid

Investeerides riskantsetesse varadesse on investoril alati võimalik saada kahju ehk investeerimine on alati seotud riskiga. Märgime, et riski mõistel ei ole ühest definitsiooni, seda võib defineerida kui ohtude kombinatsiooni, kahju saamise tõenäosust või kahju suuruse ebaselgust. Selleks, et riske juhtida, on mitmeid võimalusi. Kõige lihtsam võimalus investeerimisel oleks riskist hoidumine, kuid see tähendab tavaliselt väga madala tulususega leppimist. Enamasti seisnebki nii ettevõtlus kui ka investeerimine teadlikus riskide võtmises.

Riske võib jagada kaheks – **puhasteks riskideks** ehk sellisteks riskideks, mille puhul puudub kasu saamise võimalus (nt tulekahju) ning **spekulatiivseteks riskideks**, mille puhul esineb võimalus saada nii kasu kui ka kahju (nt valuutakursi muutus).

Puhaste riskide juhtimisel kasutatakse enamasti **riskide kindlustamist** (*insurance*), kuid spekulatiivsete riskide puhul seda võimalust üldjuhul ei pakuta. Spekulatiivsete riskide juhtimisel (siia kuulub enamik finantsriskidest) kasutatakse kas **riskide maandamist** (*hedging*), mida teostatakse tavaliselt läbi erinevate tuletisinstrumentide (derivatiivide) või **riskide hajutamist ehk diversifeerimist** (*diversification*).

Riski mõõtmiseks on mitmeid võimalusi, näiteks tõenäosus kahju saada või kahju suurus 5% tõenäosusega. Üheks enamlevinud võimaluseks riski mõõta on investeeringu tulumäära standardhälbe või dispersiooni kasutamine. Näiteks, kui samade tõenäosuste korral ühe investeeringu tulusus võib olla kas 11% ja 13% ning teisel 2% ja 22%, siis ilmselt on esimene investeering vähem riskantne. Kuid risk sõltub ka stsenaariumide tõenäosusest. Näiteks, kui ühel juhul on

Stsenaarium	Tõenäosus	1.projekti tulusus	2. projekti tulusus	3. projekti tulusus
ω_1	0.25	12%	11%	2%
ω_2	0.75	12%	13%	22%
$E(R)$		12%	12.5%	17%
$Var(R) (\%^2)$		0	0.75	75
$\sigma_R (\%)$		0	0.866	8.66

Tabel 3.1: Näite 3.2 investeerimisprojektid

tõenäosus saada tulususeks 2% vaid 0.02 ning teisel juhul 0.5, siis on esimesel juhul risk väiksem kui teisel juhul.

Investeeringu tulusus (tulumäär) $R = \frac{V_t - V_0}{V_0}$ on riskantse investeeringu korral juhuslik suurus ning seetõttu me saame rääkida tulususe dispersioonist

$$Var(R) = E(R - E(R))^2$$

või standardhälbest

$$\sigma_R = \sqrt{Var(R)}.$$

Suurus $E(R)$ on investeeringu keskmine ehk **oodatav tulusus**. Kui $p_1, \dots, p_n$ on stsenaariumide tõenäosused ning $R_1, \dots, R_n$ investeeringu tulusused nende stsenaariumide korral, siis investeeringu oodatav tulusus leitakse vastavalt valemile

$$E(R) = \sum_{i=1}^n p_i R_i.$$

Näide 3.1. Olgu investeerimisprojekti tulusus esimese stsenaariumi korral 10%, teise stsenaariumi korral -6% ning kolmanda stsenaariumi korral 20%. Stsenaariumide tõenäosused on vastavalt 0.5, 0.3 ja 0.2. Leida investeerimisprojekti oodatav tulusus ning tulususe standardhälve.

Lahendus. Oodatav tulusus 7.2%, tulususe standardhälve 9.432%.

Näide 3.2. Vaatleme kolme erinevat investeerimisprojekti, millede kohta on andmed toodud tabelis 3.1 (ülemine osa). Milline neist projektidest on kõige vähem riskantne ning milline kõige rohkem riskantne?

Lahendus. Leiame projektide keskmise tulususe ning tulususe dispersiooni ja standardhälbe ülaltoodud valemite järgi. Tulemused on esitatud tabelis 3.1 (alumine osa). Kõige väiksema riskiga (tegelikult, riskivaba) on esimene projekt, kuid tal on kõige väiksem oodatav tulusus. Kõige riskantsem kuid ka kõige suurema oodatava tulususega on kolmas projekt.

Kui kasutada investeeringu tulususe hindamisel logaritmilist tulusust $R_{ln} = \ln \frac{V_t}{V_0}$, siis saame riski mõõta suuruste $Var(R_{ln})$ ja $\sigma_{R_{ln}} = \sqrt{Var(R_{ln})}$ abil.

Kui meil on tegemist ajas järjestikuste investeeringutega, siis on logaritmilise tulususe standardhälve ja dispersioon sobivamad riski mõõtmise näitajad tänu riskide aditiivsuse omadusele. Nimelt, kui $R_{ln}(i)$ on logaritmiline tulusus aja-perioodil $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ ja $R_{ln}(0, n)$ on kogu perioodi $[t_0, t_n]$ tulusus ning

Stsenaarium	Tõenäosus	1. aktsia tulusus	2. aktsia tulusus
ω_1	0.5	10%	-5%
ω_2	0.5	-5%	10%

Tabel 3.2: Näite 3.3 aktsiate tulusused

erinevate ajaperioodide tulusused on sõltumatud juhuslikud suurused, siis

$$Var(R_{ln}(0, n)) = \sum_{i=1}^n Var(R_{ln}(i)).$$

3.2 Markowitzi portfelliteooria kahe väärtpabe-ri korral

Investeeringutega seotud riskide vähendamiseks on mõistlik mitte paigutada kogu summa ühte riskantsetesse investeeringusse, vaid moodustada sobiv portfelli erinevatest riskantsetest investeeringutest. Riskide hajutamiseks kombineeritakse erinevaid aktiivaid ehk moodustatakse investeeringute portfelli. Riski hajutamise tähtsust mõisteti juba sajandeid tagasi, kuid kuna puudus matemaatiline riski mõõt, polnud võimalik välja töötada ka matemaatilistelt formuleeritud mudelit optimaalse portfelli koostamiseks. Harry Markowitz otsustas väärtpaberitega seotud riski mõõtmiseks kasutada statistikas ammutuntud näitajat – dispersiooni (esimene. artikkel 1952.a). Ta oli kaasaegse portfelliteooria (MPT) väljatöötajaks ning sai hiljem selle teooria väljatöötamise eest Nobeli majanduspreemia. MPT eeldab, et investorid on riski vältivad, mis tähendab, et kui sama oodatava tulumääraga on võimalik moodustada kaks portfelli, siis investorid eelistavad väiksema riskiga portfelli ning investorid on nõus riski suurendama vaid siis, kui sellega kaasneb suurem oodatav tulu.

Näide 3.3. Vaatleme väärtpaberiporfelli kahe riskantse aktsiaga ja oletame, et aktsiate tulusused käituvad vastavalt tabelile 3.2.

Kui me jaotame oma raha võrdselt nende kahe investeeringu vahel, siis mõlema stsenaariumi korral koguinvesteeringu tulusus on 2.5% ning koguinvesteeringuga seotud risk on null. Kui me aga investeeriksime kogu raha vaid ühte aktsiasse, siis investeeringu keskmine tulusus oleks endiselt 2.5%, kuid investeeringu risk oleks 7.5%. Seega me näeme, et hajutades koguinvesteeringu mitme aktsia vahel on võimalik koguinvesteeringu riski vähendada võrreldes juhuga, kui paigutaksime kogu raha ühe ettevõtte aktsiatesse.

Vaatleme investori portfelli, mis koosneb kahest riskantsest investeeringust (aktsia, väärtpaber). Olgu $S_1(0), S_2(0)$ nende väärtpaberite hinnad ajahetkel $t = 0$ ning x_1, x_2 väärtpaberite kogused (arvuliselt) portfellis. Siis portfelli rahaline

maksumus hetkel $t = 0$ on leitav valemiga

$$V(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0).$$

Olgu $w_i, i = 1, 2$ nende väärtpaberite osakaalud portfellis, s.t.

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, i = 1, 2.$$

On lihtne näha, et osakaalude summa on võrdne ühega: $w_1 + w_2 = 1$. Kui $x_i > 0$ (ja $w_i > 0$), siis me võtame pika positsiooni väärtpaberi i korral; kui $x_i < 0$ (ja $w_i < 0$), siis me võtame lühikese positsiooni i -nda väärtpaberi korral.

Olgu $R_i, i = 1, 2$, i -nda väärtpaberi tulusus. Siis portfelli väärtus ajahetkel $t > 0$ on

$$\begin{aligned} V &= x_1 S_1(0)(1 + R_1) + x_2 S_2(0)(1 + R_2) = V(0)(w_1(1 + R_1) + w_2(1 + R_2)) = \\ &= V(0)(w_1 + w_2 + w_1 R_1 + w_2 R_2) = V(0)(1 + w_1 R_1 + w_2 R_2) \end{aligned}$$

ning portfelli tulusus on

$$R_V = \frac{V - V(0)}{V(0)} = w_1 R_1 + w_2 R_2.$$

Portfelli oodatav tulusus on leitav valemiga

$$\mu_V = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2,$$

kus $\mu_1 = E(R_1), \mu_2 = E(R_2)$ on üksikute väärtpaberite oodatavad tulusused.

Märkus. Logaritmiliste tulususte korral kehtib järgmine võrdus:

$$\exp(R_{l,V}) = w_1 \exp(R_{l,1}) + w_2 \exp(R_{l,2}). \quad (3.1)$$

Tõepoolest, kuna

$$R_{l,i} = \ln\left(\frac{V_i}{x_i S_i(0)}\right), i = 1, 2,$$

siis

$$V = x_1 S_1(0) \exp(R_{l,1}) + x_2 S_2(0) \exp(R_{l,2}) = V(0)(w_1 \exp(R_{l,1}) + w_2 \exp(R_{l,2})).$$

Portfelli logaritmiline tulusus on

$$R_{l,V} = \ln\left(\frac{V}{V(0)}\right) = \ln(w_1 \exp(R_{l,1}) + w_2 \exp(R_{l,2})),$$

millest järeldub (3.1).

Olgu σ_1^2, σ_2^2 üksikute väärtpaberite tulususte dispersioonid. Siis portfelli tulususe dispersioon (edaspidi lühidalt portfelli dispersioon) avaldub kujul

$$\sigma_V^2 := \text{Var}(R_V) = \text{Var}(w_1 R_1 + w_2 R_2) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \text{Cov}(R_1, R_2).$$

Olgu ρ_{12} tulususte R_1 ja R_2 vaheline korrelatsioonikordaja. Kuna

$$\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2},$$

siis

$$\sigma_V^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}.$$

Kui lühikeseks müümine ei ole lubatud ($w_1, w_2 \geq 0$), siis portfelli oodatava tulususe ja dispersiooni kohta kehtivad järgmised võrratused:

$$\min \{\mu_1, \mu_2\} \leq \mu_V \leq \max \{\mu_1, \mu_2\},$$

$$\sigma_V^2 \leq \max \{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \leq \\ & (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2 \leq ((w_1 + w_2) \max \{\sigma_1, \sigma_2\})^2 = \max \{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}. \end{aligned}$$

Leiame nüüd minimaalse riskiga (minimaalse dispersiooniga) portfelli. Vaatleme esmalt erijuhtusid, kus $\rho_{12} = \pm 1$.

Olgu $\rho_{12} = -1$. Siis

$$\sigma_V^2 = (w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2)^2$$

ja $\sigma_V = 0$, kui

$$w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2 = 0,$$

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Viimase võrrandisüsteemi lahendiks on

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Kuna $w_1, w_2 > 0$, siis näeme, et juhul $\rho_{12} = -1$ on võimalik konstrueerida riskivaba portfelli ilma lühikeseks müümist kasutamata. Sealjuures minimaalse riskiga portfelli tulususe kohta kehtib võrratus

$$\min \{\mu_1, \mu_2\} \leq \mu_V \leq \max \{\mu_1, \mu_2\}.$$

Olgu $\rho_{12} = 1$. Siis

$$\sigma_V^2 = (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2)^2$$

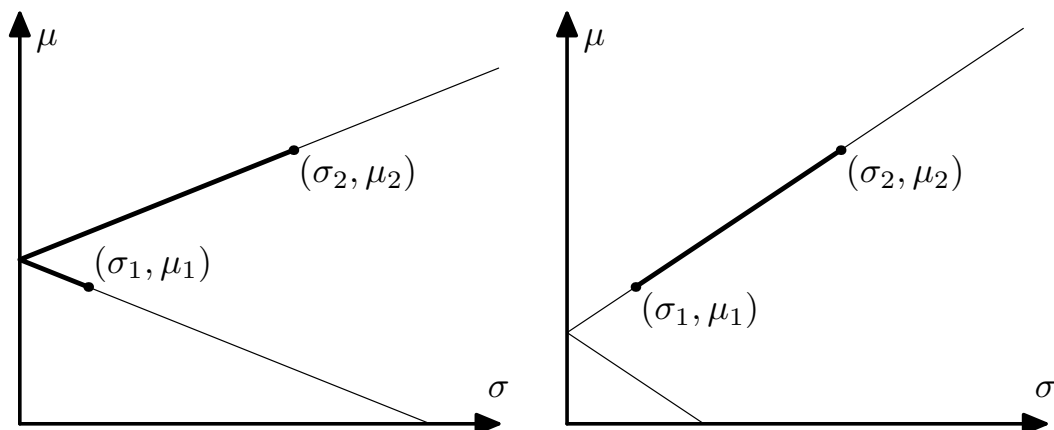
ja $\sigma_V = 0$, kui

$$w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2 = 0,$$

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Kui $\sigma_1 \neq \sigma_2$, siis viimase võrrandisüsteemi lahendiks on

$$w_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (3.2)$$



Joonis 3.1: Portfelli oodatav tulu ja standardhälve erinevate osakaalude korral $\rho_{12} = -1$ (vasakul) and $\rho_{12} = 1$ (paremal) korral. Rasvane joon - portfelliid juhul kui lühikeseks müümine ei ole lubatud.

Lihtne on veenduda, et üks kaaludest on alati negatiivne. See tähendab, et riskivaba portfelli on võimalik koostada vaid lühikeseks müümise korral. Kaalude (3.2) korral on portfelli oodatav tulu kujul

$$\mu_V = \frac{\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

ning me näeme, et minimaalse riskiga portfelli oodatav tulu võib olla negatiivne isegi siis, kui üksikute väärtpaperite oodatavad tulused on positiivsed.

Vaatleme nüüd juhtu $-1 < \rho_{12} < 1$. Tähistame $x = w_2$ ning vaatleme portfelli dispersiooni funktsioonina argumentist x :

$$\sigma_V^2 = f(x) := (1-x)^2\sigma_1^2 + x^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}.$$

Kuna

$$f'(x) = 2x(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2\sigma_1^2$$

ja $f''(x) \geq 0$, siis funktsiooni $f(x)$ miinimumkoht on

$$w_2 = x_0 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}. \quad (3.3)$$

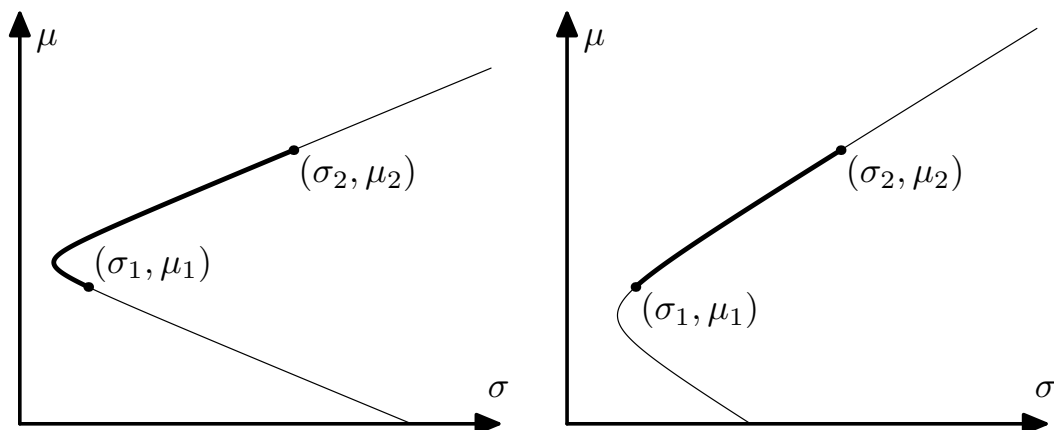
ning funktsioon $f(x)$ on kasvav, kui $x > x_0$ ning kahanev, kui $x < x_0$. Minimaalse riskiga portfelli dispersioon lühikeseks müümise lubamise korral on

$$\sigma_V^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}},$$

mis on positiivne kui $-1 < \rho_{12} < 1$.

Kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis minimaalse riskiga portfelli saadakse kaalu w_2 korral, mis on kujul

$$x_{min} = \begin{cases} 0, & x_0 < 0, \\ x_0, & 0 \leq x_0 \leq 1, \\ 1, & x_0 > 1. \end{cases}$$



Joonis 3.2: Tüüpiliste portfelli oodatav tulusused ja standardhälbed erinevate osakaalude korral $-1 < \rho_{12} < 1$ korral. Rasvane joon - portfelli juhul kui lühikeseks müümine ei ole lubatud.

Järgmine lemma näitab, millal on võimalik konstrueerida portfelli, mille risk on väiksem, kui portfelli kuuluvate väärtpaberite riskid:

$$\sigma_V < \min \{\sigma_1, \sigma_2\}.$$

Lemma 3.1. Olgu $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Siis

1) Kui $-1 \leq \rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis saab lühikeseks müümist kasutamata konstrueerida portfelli, mille korral $\sigma_V < \sigma_1$.

2) Kui $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis $\sigma_V \geq \sigma_1$ iga portfelli korral.

3) Kui $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, siis saab lühikeseks müümist kasutades konstrueerida portfelli, mille korral $\sigma_V < \sigma_1$. Kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis iga lubatava portfelli korral kehtib $\sigma_V \geq \sigma_1$.

Tõestus. Vaatleme minimaalse riskiga portfelli kaalu x_0 (vt.(3.3)) kui funktsiooni korrelatsioonikordajast ρ_{12} :

$$x_0 = g(x) := \frac{a - bx}{c - 2bx},$$

kus $a = \sigma_1^2$, $b = \sigma_1\sigma_2$, $c = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Kuna

$$g'(x) = \frac{b(2a - c)}{(c - 2bx)^2} \leq 0,$$

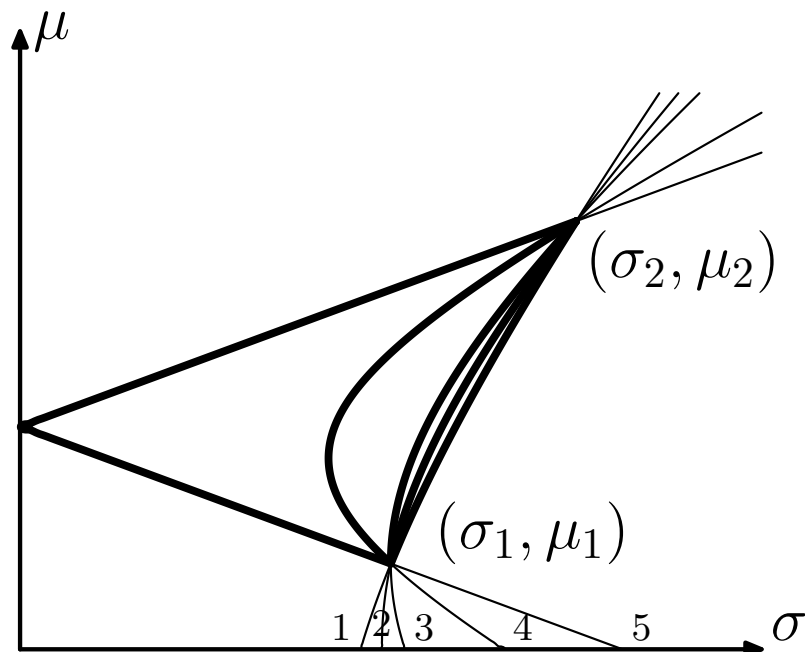
siis funktsioon $g(x)$ on kahanev.

Kui $-1 \leq \rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis

$$x_0 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \geq 0$$

ja

$$x_0 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq 1.$$



Joonis 3.3: Portfellide oodatav tulusused ja standardhälbed sõltuvalt ρ_{12} väärtusest. Jooned 1 ja 2: $\rho_{12} > \sigma_1/\sigma_2$, jooned 4 ja 5: $\rho_{12} < \sigma_1/\sigma_2$, joon 3: $\rho_{12} = \sigma_1/\sigma_2$.

Kuna funktsioon $f(x) = \sigma_V^2$ on ruutfunktsioon, siis $\sigma_V < \sigma_1$ juhul $w_2 = x_0$.

Kui $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, siis $x_0 = 0$ ja $\sigma_V \geq \sigma_1$ iga portfelli korral.

Kui $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, siis $x_0 < 0$ ja $\sigma_V < \sigma_1$ juhul $w_2 = x_0$. Kui aga lühikeseks müümine ei ole lubatud, siis $w_2 = 0$ ja $\sigma_V \geq \sigma_1$ iga portfelli korral.

Näide 3.4. Kahe investeeringu oodatavad tulusused on vastavalt 10% ning 15%; investeeringute tulususte standardhälbed on vastavalt 2% ning 4%. Tulususte vaheline korrelatsioonikordaja on 0.75. Leida investeeringute osakaalud portfellis nii, et portfelli risk oleks väikseim juhul kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud. Leida minimaalse riskiga portfellis investeeringute osakaalud juhul kui lühikese positsiooni võtmine on lubatud. Leida mõlemal juhul portfelli tulususe standardhälve ning oodatav tulusus.

Lahendus. Kui lühikese positsiooni võtmine ei ole lubatud, siis investeeringute osakaalud on vastavalt 1 ja 0 ning portfelli oodatav tulusus on 10% ning tulususe standardhälve 2%. Kui lühikese positsiooni võtmine on lubatud, siis investeeringute osakaalud vastavalt $\frac{5}{4}$ ja $-\frac{1}{4}$ ning portfelli oodatav tulusus on 8.75% ning tulususe standardhälve 1.871%.

Ülesanne 3.5. Kahe aktsia oodatavad tulusused on vastavalt 12% ning 20% ning nende aktsiate tulususte standardhälbed aga 3% ja 6% ning tulususte vaheline korrelatsioonikordaja on 0.5. Kui palju peab investor ostma esimest ja teist aktsiat, selleks et moodustada neist aktsiatest minimaalse riskiga väärt-

paberportfell maksumusega 10000 EUR, kui aktsiate hinnad on vastavalt 50 ja 40 EUR. (Märkus: on lubatud osta murdarvuline kogus aktsiaid).

Vastus. Minimaalse riskiga portfell koosneb ainult esimesest aktsiast. Seega investor peab ostma vaid esimest aktsiat 200 tükki.

3.3 Portfelliteooria n väärtpaberi korral.

Olgu x_i i -nda väärtpaberi arv portfellis ning $S_i(0)$ i -nda väärtpaberi hind. Siis väärtpaberite osakaalud portfellis leitakse valemiga

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, i = 1, 2, \dots, n,$$

kus $V(0)$ on portfelli investeeritud raha kogus (portfelli hind). Esitame osakaalud vektorina kujul $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. ning eeldame, et kaalude summa on võrdne ühega. Olgu u n -mõõtmeline ühikvektor kujul $u = (1, 1, \dots, 1)$. Siis tingimuse, et kaalude summa on võrdne ühega, saame esitada kujul

$$1 = uw^T. \quad (3.4)$$

Kõigi lubatavate portfelli hulgaks nimetatakse portfelli hulka, millede kaalud w rahuldavad tingimust (3.4). Olgu üksikute väärtpaberite tulusused $R_1, \dots, R_n$ ning oodatavad tulusused $\mu_i = E(R_i), i = 1, \dots, n$. Tähistame

$$m = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n).$$

Olgu C tulususte vaheline kovariatsioonimaatriks:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

kus $c_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ ja $c_{ii} = Var(R_i)$. On teada, et kovariatsioonimaatriks on sümmeetriline ning positiivselt määratud ja seega maatriksi C korral leidub pöördmaatriks C^{-1} .

Portfelli oodatav tulusus $\mu_V = E(R_V)$ ja dispersioon $\sigma_V^2 = Var(R_V)$ kaalude w korral on antud valemitega

$$\mu_V = E(R_V) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = mw^T$$

ja

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 &= Var\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i, \sum_{j=1}^n w_j R_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij} = wCw^T. \end{aligned}$$

Teoreem 3.1. (Minimaalse dispersiooniga portfell). Kui $uC^{-1}u^T \neq 0$, siis minimaalse dispersiooniga portfell on saavutatav kaalude

$$w = \frac{uC^{-1}}{uC^{-1}u^T}. \quad (3.5)$$

korral.

Enne teoreemi tõestamist vaatame üldist mitme muutuja funktsiooni tingliku ekstreemumi leidmise ülesannet kujul

$$\min \{F(x) : d_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Sellise ülesande lahendamiseks kasutatakse Lagrange'i kordajate meetodit. Konstrueeritakse Lagrange'i funktsioon kujul

$$G(x, \lambda) = F(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j d_j(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m). \quad (3.6)$$

Saab näidata, et ülesande (3.6) miinimumkoht kuulub Lagrange'i funktsiooni statsionaarsete punktide hulka. Lagrange'i funktsiooni statsionaarsed punktid saab leida kui võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, \lambda)}{\partial x_j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial G(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} &= d_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

lahendid.

Kui meil on tingliku ekstreemumi leidmise ülesanne kujul

$$\min \{F(x) : d_i(x) = c_i, i = 1, 2, \dots, m, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad (3.7)$$

siis on lihtne veenduda, et me võime vaadelda Lagrange'i funktsiooni ka kujul

$$G_1(x, \lambda) = F(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j d_j(x)$$

ning sel juhul ülesande (3.7) miinimumpunkt kuulub võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(x, \lambda)}{\partial x_j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ d_i(x) &= c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

lahendite hulka.

Teoreemi 3.1. tõestus. Meil on vaja leida kaaludest w sõltuva funktsiooni $F(w) = wCw^T$ miinimumkoht tingimusel $uw^T = 1$. Vastav Lagrange'i funktsioon omab kuju

$$G_1(w, \lambda) = wCw^T - \lambda uw^T,$$

kus λ on Lagrange'i kordaja. Võrdsustades funktsiooni G_1 osatuletised nulliga, saame $2Cw^T - \lambda u^T = 0$, millest järeldub, et

$$w^T = 0.5\lambda C^{-1}u^T, \quad w = 0.5\lambda u C^{-1}. \quad (3.8)$$

Asendades w^T võrdusesse $uw^T = 1$ ning arvestades, et ka maatriks C^{-1} on sümmeetriline maatriks, saame

$$1 = 0.5\lambda u C^{-1}u^T.$$

Lahendades viimase võrrandi λ suhtes ning asendades selle seosesse (3.8), saame teoreemi väite (3.5).

Märgime, et teoreem 3.1 annab meile minimaalse dispersiooniga portfelli kaalud juhul, kui lühikeseks müümine on lubatud. Selleks, et leida optimaalsed kaalud juhul, kui lühikeseks müümine ei ole lubatud, peame lahendama mittelineaarse planeerimise (täpsemalt, ruutplaneerimise) ülesande kujul

$$wCw^T \longrightarrow \min, \quad w^T = 1, w \geq 0.$$

Vaatleme nüüd, kuidas leida minimaalse dispersiooniga portfelli kaalusid juhul, kui portfelli oodatav tulusus on etteantud arv μ_V . Selliste portfelli hulka (parametriseeritud μ_V järgi) nimetatakse **portfelli minimaalse dispersiooni jooneks**.

Teoreem 3.2 (Portfelli minimaalse dispersiooni joon). Vähima dispersiooniga portfelli kaalud etteantud portfelli oodatava tulususe μ_V korral on leitavad valemiga

$$w = a\mu_V + b,$$

kus $a = a(m, C)$, $b = b(m, C)$ on n -mõõtmelised vektorid:

$$\begin{aligned} a &= (uC^{-1}u^T m C^{-1} - uC^{-1}m^T u C^{-1})/c, \\ b &= (mC^{-1}m^T u C^{-1} - mC^{-1}u^T m C^{-1})/c, \\ c &= uC^{-1}u^T m C^{-1}m^T - mC^{-1}u^T u C^{-1}m^T. \end{aligned}$$

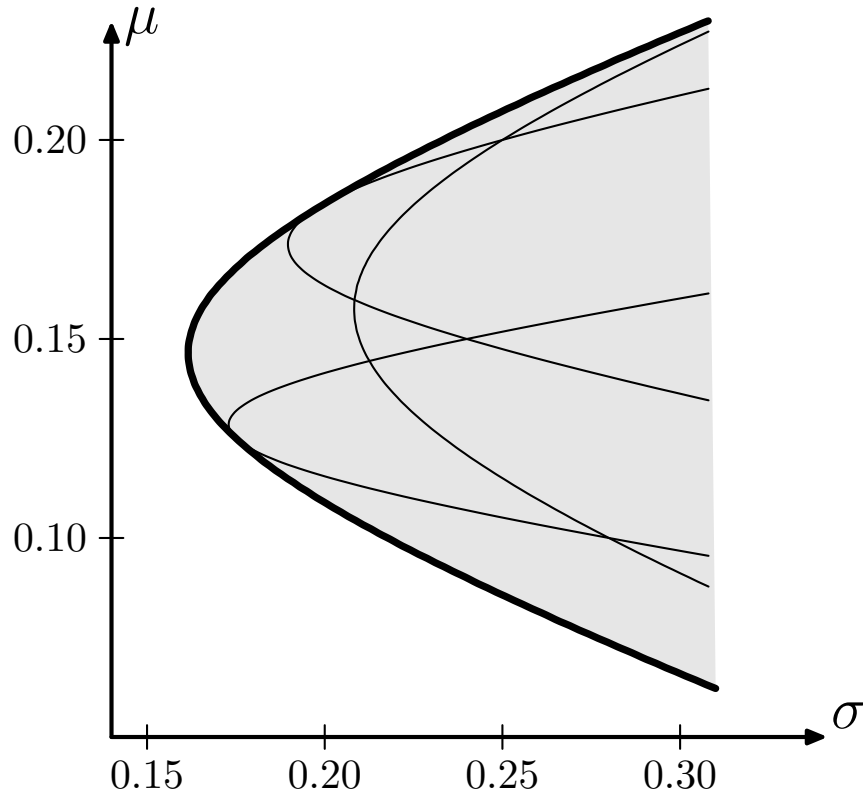
eelsusel, et $c \neq 0$.

Tõestus. Lagrange'i funktsioon on kujul

$$G_1(w, \lambda_1, \lambda_2) = wCw^T - \lambda_1 uw^T - \lambda_2 mw^T,$$

kus λ_1, λ_2 on Lagrange'i kordajad. Võrdsustades funktsiooni G_1 osatuletised kaalude w_i suhtes saame võrrandid

$$2wC - \lambda_1 u - \lambda_2 m = 0,$$



Joonis 3.4: Lubatavate portfelli hulk ja portfelli minimaalse dispersiooni joon (rasvane) $n > 2$ väärtpaberi korral σ, μ tasandil.

millest järeldub, et

$$w = 0.5\lambda_1 u C^{-1} + 0.5\lambda_2 m C^{-1}. \quad (3.9)$$

Asendades kaalud võrdustesse $uw^T = 1$ ja $mw^T = \mu_V$, saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda_1 u C^{-1} u^T + \lambda_2 u C^{-1} m^T, \\ \mu_V &= \lambda_1 m C^{-1} u^T + \lambda_2 m C^{-1} m^T \end{aligned}$$

tundmatute λ_1 ja λ_2 suhtes. Leides λ_1 ja λ_2 ning asendades need avaldisse (3.9) (teha iseseisvalt läbi), saamegi teoreemi väite.

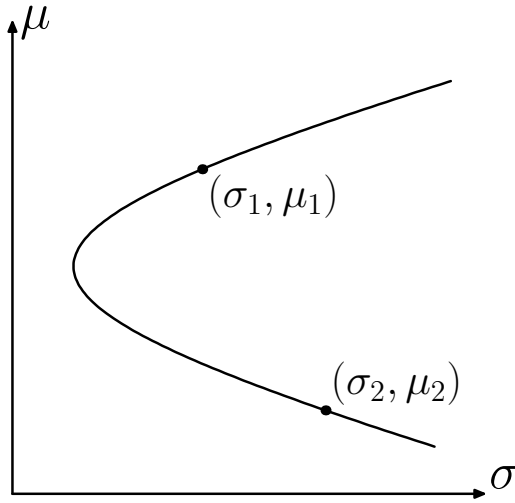
Definitsioon. Me ütleme, et väärtpaber oodatava tulususega μ_1 ja standardhälbega σ_1 **domineerib** väärtpaberi, mille oodatav tulusus on μ_2 ning standardhälve σ_2 , üle juhul kui

$$\mu_1 \geq \mu_2 \text{ ja } \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

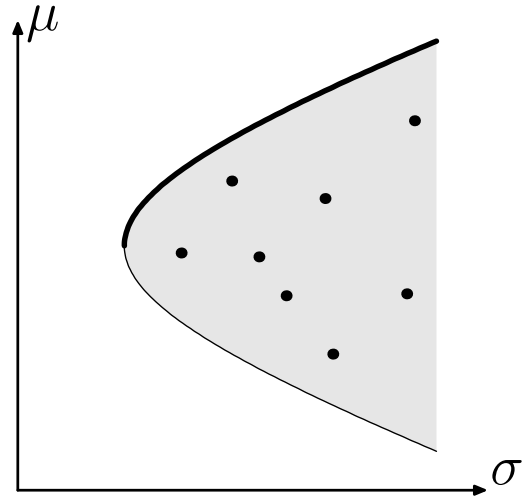
Väärtpaberit parameetritega μ_1, σ_1 nimetatakse domineerivaks ja väärtpaberit parameetritega μ_2, σ_2 nimetatakse domineeritavaks väärtpaberiks.

Seda definitsiooni saab laiendada ka portfelli kohta ning rääkida ühe portfelli domineerimisest teise üle.

Esimesel pilgul võib paista, et domineeritavad väärtpaberid on kasutud selles



Joonis 3.5: Riski vähendamine kasutades domineeritavat väärtipaberit.



Joonis 3.6: Efektiivsuse kõver (rasvane joon)

mõttes, et ratsionaalsed investorid eelistavad alati domineerivat väärtipaberit domineeritavale. Siiski saab domineeritavaid väärtipabereid kasutada portfelli moodustamisel portfelli riski minimiseerimiseks (vt. joonis 3.5).

Definitsioon. Portfelli nimetatakse **efektiivseks** (*efficient*), kui ei ole ühtki teist portfelli peale tema enda, mis domineeriks tema üle.

Definitsioon. Kõigi efektiivsete portfellide hulka kõigi lubatavate portfellide seas nimetatakse **efektiivsuse kõveraks** (*efficient frontier*) või ka Markowitzi kõveraks.

Iga ratsionaalne investor valib alati efektiivse portfelli, kuna ta eelistab domineerivat portfelli domineeritavale. Kuid erinevad investorid võivad valida erineva portfelli efektiivsuse kõveralt sõltuvalt nende suhtumisest riski. Kui on antud kaks efektiivset portfelli oodatavate tulususte $\mu_1 \leq \mu_2$ ja standardhälvetega $\sigma_1 \leq \sigma_2$, siis riskikartlik investor eelistab madalama riski σ_1 ja madalama oodatava tulususega μ_1 portfelli, kuid riskialtim investor võib valida suurema riski σ_2 ja suurema oodatava tulususega μ_2 portfelli.

Efektiivsuse kõver on portfellide minimaalse dispersiooni joone alamhulk (vt. joonist 3.6).

Lemma 3.2. Kuulugu portfellid kaaludega $w', w'', w' \neq w''$ portfellide minimaalse dispersiooni joonele. Siis minimaalse dispersiooni joonele kuuluvate portfellide kaalud on esitatavad kujul $w = cw' + (1 - c)w''$, kus $c \in \mathbb{R}$.

Tõestus. Kehtivad võrdused (vt. Teoreem 3.2)

$$w' = a\mu' + b,$$

$$w'' = a\mu'' + b,$$

millest saame, et

$$a = \frac{w' - w''}{\mu' - \mu''}, \quad b = w' - \mu' \frac{w' - w''}{\mu' - \mu''}.$$

Kui me valime minimaalse dispersiooni joonelt portfelli oodatava tulumääraga $\mu \in \mathbb{R}$, siis selle portfelli kaalud w avalduvad samuti kujul

$$\begin{aligned} w &= a\mu + b = \mu \frac{w' - w''}{\mu' - \mu''} + w' - \mu' \frac{w' - w''}{\mu' - \mu''} = \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu' - \mu''} + 1 - \frac{\mu'}{\mu' - \mu''} \right) w' + \left(\frac{\mu'}{\mu' - \mu''} - \frac{\mu}{\mu' - \mu''} \right) w'' = \\ &= \frac{\mu - \mu''}{\mu' - \mu''} w' + \left(1 - \frac{\mu - \mu''}{\mu' - \mu''} \right) w'' = cw' + (1 - c)w'', \end{aligned}$$

kus $c = \frac{\mu - \mu''}{\mu' - \mu''} \in \mathbb{R}$.

Seega, portfelli minimaalse dispersiooni joon on kumer hulk.

3.4 Finantsvarade hindamise mudel (CAPM).

Finantsvarade hindamise mudelit (*Capital asset pricing model*, *CAPM*) kasutakse selleks, et teoreetiliselt määrata vara sobivat oodatavat tulumäära selleks, et teha otsuseid tema sobivuse kohta diversifitseeritud portfellis. CAPM töötati välja 1960-ndatel aastatel (Treynor, Sharpe, Lintner, Mossin).

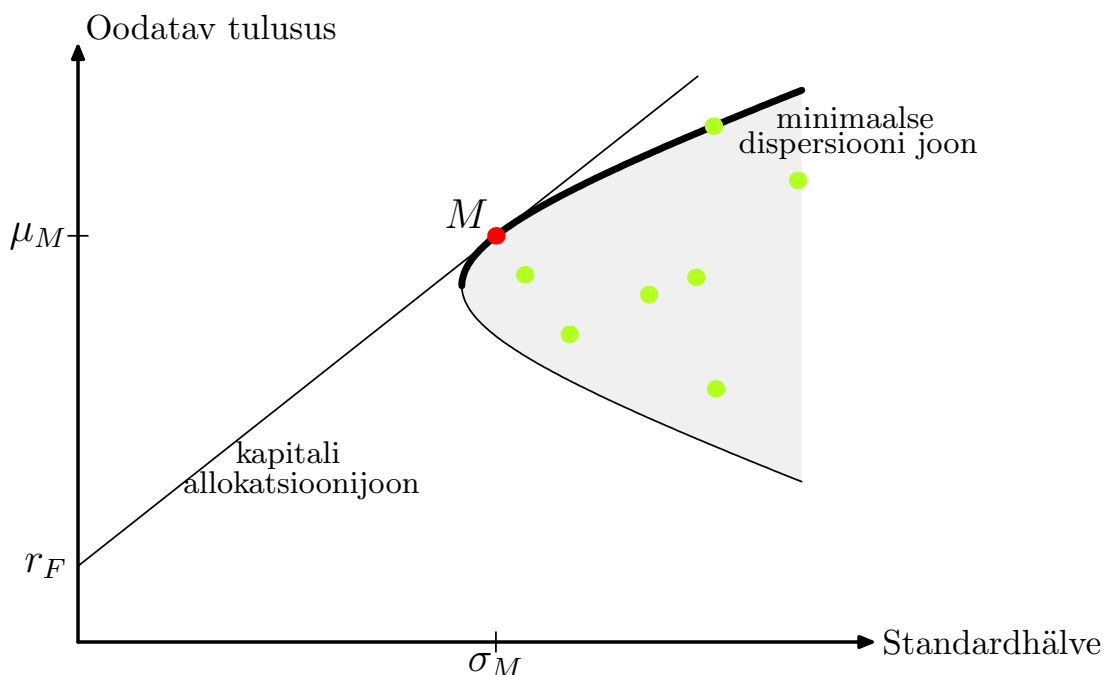
Oletame nüüd, et lisaks riskantsetesse väärtpaberitesse investeerimisse on investoril võimalik paigutada raha ka riskivabalt. Olgu r_F riskivaba vara poolt teenitav intress (tulumäär). Vaatleme (σ, μ) -tasandil puutujat efektiivsuse kõverale mis läbib punkti $(0, r_F)$ (vt. joonis 3.7). Olgu puutepunkti koordinaadid μ_M, σ_M .

Definitsioon. Portfelli oodatava tulususega μ_M ning standardhällbega σ_M nimetatakse **turuportfelliks** (*market portfolio*, *tangency portfolio*.)

Puutuja joonel, mida nimetatakse ka **kapitali allokatsioonijooneks** (*capital market line*) asuvad portfellid, mis on kombinatsioonid riskivabast varast ning turuportfelist. CAPM mudeli korral valib iga ratsionaalne investor portfelli kapitali allokatsioonijoonelt. Kapitali allokatsioonijoon võrrand on esitatav kujul

$$\mu = r_F + \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M} \sigma.$$

Suurust $\frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M}$ nimetatakse **riskipreemiaks** (*risk premium*) ning see iseloomustab täiendavat tulusust lisaks riskivaba vara tulususele ühe ühiku riski kohta, mida saadakse vara paigutamisel riskantsetesse varadesse.



Joonis 3.7: Kapitali allokatsioonijoon (CAL). Tangency portfolio = turuportfell

Vaatleme nüüd, kuidas leida turuportfelli kaalusid. Paneme tähele, et kapitali allokatsioonijoon tõus

$$\frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M} = \frac{mw^T - r_F}{\sqrt{wCw^T}}$$

on suurim kõigi sirgete tõusudest, mis läbivad punkti $(0, r_F)$ ning lõikuvad lubatavate portfelli hulgaga. Seetõttu saame turuportfelli kaalud leida järgmise maksimeerimisülesande lahendina

$$F(w) = \frac{mw^T - r_F}{\sqrt{wCw^T}} \rightarrow \max \quad (3.10)$$

tingimusel, et kaalude summa on üks: $w^T = 1$ (ning $w \geq 0$ kui lühikeseks müümine ei ole lubatud).

Näitame nüüd, et turuportfelli kaalud rahuldavad võrdust

$$\gamma w_M C = m - r_F u, \quad (3.11)$$

kus $\gamma > 0$ on konstant ning w_M on turuportfelli kaalud. Ülesande (3.10) Lagrange'i funktsioon on kujul

$$G_1(w, \lambda) = \frac{mw^T - r_F}{\sqrt{wCw^T}} - \lambda w^T$$

ning maksimumkoha korral peavad kehtima võrdsused

$$\frac{\partial G_1(w, \lambda)}{\partial w} = \frac{m^T \sqrt{wCw^T} - (mw^T - r_F) \frac{2Cw^T}{2\sqrt{wCw^T}}}{wCw^T} - \lambda u^T =$$

$$\frac{m^T}{\sigma_M} - \frac{(\mu_M - r_F)\mathbf{C}w_M^T}{\sigma_M^3} - \lambda u^T = 0,$$

millest saame, et

$$m^T - \lambda \sigma_M u^T = \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M^2} \mathbf{C}w_M^T.$$

Transponeerides viimase võrduse mõlemaid pooli saame

$$m - \lambda \sigma_M u = \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M^2} w_M \mathbf{C}. \quad (3.12)$$

Korrutades viimase võrduse mõlemaid pooli teguriga w_M^T saame

$$mw_M^T - \lambda \sigma_M u w_M^T = \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M^2} w_M \mathbf{C}w_M^T,$$

ehk

$$\mu_M - \lambda \sigma_M = \mu_M - r_F,$$

millest järeldub, et $\lambda = \frac{r_F}{\sigma_M}$. Asendades viimase võrduse seosesse (3.12) ning tähistades $\gamma = \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M^2}$ saame tingimuse (3.11).

Iga portfelli kapitali allokatsioonijoone saame konstrueerida, kasutades riskivaba vara ning turuportfelli. Kuna kõik ratsionaalsed investorid valivad portfelli sellelt joonelt, siis see tähendab, et nad valivad riskantseid varasid samas proportsioonis (s.t. näiteks iga ühiku aktsia 1 kohta valivad aktsiat 2 kindla ühiku). See aga tähendab, et turuportfell peab sisaldama kõiki aktsiaid sellistes osakaaludes, mis vastab nende aktsiate osakaalule aktsiaturul. Praktikas lähendatakse turuportfelli sageli vastava aktsiaturu indeksiga.

Olgu R_V mingi kindla väärtpaberi või portfelli tulusus ning vaatleme lineaarset regressioonimudelit selle väärtpaberi tulususe ja turuportfelli tulususe R_M vahel:

$$R_V = \alpha_V + \beta_V R_M + \epsilon, \quad (3.13)$$

kus ϵ on juhuslik viga keskväärtusega 0 ning α_V, β_V on regressioonisirge kordajad, mida saab leida vähimruutude meetodil ning mis avalduvad kujul

$$\beta_V = \frac{\text{Cov}(R_V, R_M)}{\text{Var}(R_M)} = \frac{\text{Cov}(R_V, R_M)}{\sigma_M^2},$$

$$\alpha_V = E(R_V) - \beta_V E(R_M) = \mu_V - \beta_V \mu_M.$$

Definitsioon. Me nimetame suurust

$$\beta_V = \frac{\text{Cov}(R_V, R_M)}{\sigma_M^2}$$

antud väärtpaberi või portfelli (tulususega R_V) **beetakordajaks** .

Aksia või portfelli beetakordaja näitab selle aksia või portfelli tulususe käitumist aktsiaturu kui terviku käitumise suhtes. Kuna $\mu_V = \alpha_V + \beta_V \mu_M$, siis aksia või portfelli tulumäär positiivse beetakordajaga suure tõenäosusega kasvab kui turuportfelli tulumäär kasvab, kuid aksia või portfelli tulumäär negatiivse beetakordajaga kahaneb.

Kuna $Cov(R_M, \epsilon) = 0$ vähimruutude meetodi korral, siis saame aksia või portfelli riski σ_V^2 esitada kujul

$$\sigma_V^2 = Var(\epsilon_V) + \beta_V^2 \sigma_M^2.$$

Viimase võrduse esimest liidetavat $Var(\epsilon_V)$ nimetatakse **hajutatavaks riskiks** (*diversifiable risk*) ning turuportfelli korral on see null: $Var(\epsilon_M) = 0$. Selle osa riskist saame hajutada, investeerides turuportfelli. Teist liidetavat $\beta_V^2 \sigma_M^2$ nimetatakse **süsteemaatiliseks riskiks** (*systematic or undiversifiable risk*) ning turuportfell sisaldab vaid seda tüüpi riski. Beetakordajat β_V võib vaadelda kui antud aksia või portfelliga seotud süsteemaatilise riski mõõtu.

Vastavalt CAPM mudelile on aksia või portfelli süsteemaatiline risk β_V seotud tema oodatava tulususega μ_V ning aksia või portfelli hinnaga: mida suurem on süsteemaatiline risk, seda kõrgemat oodatavat tulusust (ehk kõrgemat riskipreemiat) nõuavad investorid sellelt aksialt või portfellilt. Samal ajal hajutatava riski suurus ei mõjuta oodatavat tulusust μ_V , kuna selle saab elimineerida turuportfelli investeerides.

Saame leida ka seose süsteemaatilise riski β_V ja oodatava tulususe μ_V vahel, kasutades selleks võrdust (vt. (3.11))

$$\gamma w_M \mathbf{C} = m - r_F u.$$

Siis portfelli kaaludega w_V beetakordaja saame esitada kujul

$$\beta_V = \frac{Cov(R_V, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{w_M \mathbf{C} w_V^T}{w_M \mathbf{C} w_M^T} = \frac{(m - r_F u) w_V^T}{(m - r_F u) w_M^T} = \frac{\mu_V - r_F}{\mu_M - r_F},$$

millest saame, et

$$\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F) \beta_V. \quad (3.14)$$

Viimane võrdus näitab, et portfelli või aksia oodatav tulusus μ_V on lineaarselt seotud vastava portfelli/aksia beetakordajaga β_V .

CAPM mudel kirjeldab turu tasakaaluseisundit. Kõik investorid investeerivad portfellidesse, kus riskantsed väärtpaberid on samades proportsioonides nagu turuportfellis. Need portfellid erinevad vaid riskivaba väärtpaberite ja riskantsete väärtpaberite osakaalu suhtes. Riskantsete väärtpaberite nõudlus ja pakkumine on tasakaalus senikaua, kui kõigi väärtpaberi korral võrdus (3.14) kehtib. Uus informatsioon aktsiate kohta võib muuta investorite hinnanguid oodatavale tulule ja beetakordajale ning siis ei pruugi võrdus (3.14) enam täidetud olla.

Oletame näiteks, et mingi aktsia korral

$$\mu_V > r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V.$$

Sel juhul investorid soovivad suurendada selle aktsia osakaalu portfellis, kuna see pakub suuremat oodatavat tulusust, kui süstemaatilise riski kompenseerimiseks on nõutav. Aktsia nõudlus on suurem kui pakkumine ning see viib aktsia hinna tõusule ning oodatava tulususe vähenemisele kuni võrdus (3.14) jällegi kehtib.

Analoogiliselt, kui

$$\mu_V < r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V.$$

siis investorid soovivad aktsiat müüa ning pakkumine ületab nõudluse. See viib aktsia hinna langemiseni ning oodatava tulususe tõusuni, kuni võrdus (3.14) taas kehtima hakkab ning turu tasakaal taastatakse.

Need võrratused on praktikas olulised ning annavad investoritele selge signaali, millel mingi väärtpaber või aktsia on ala- või ülehinnatud, s.t., millal seda väärtpaberit või aktsia osta või müüa.

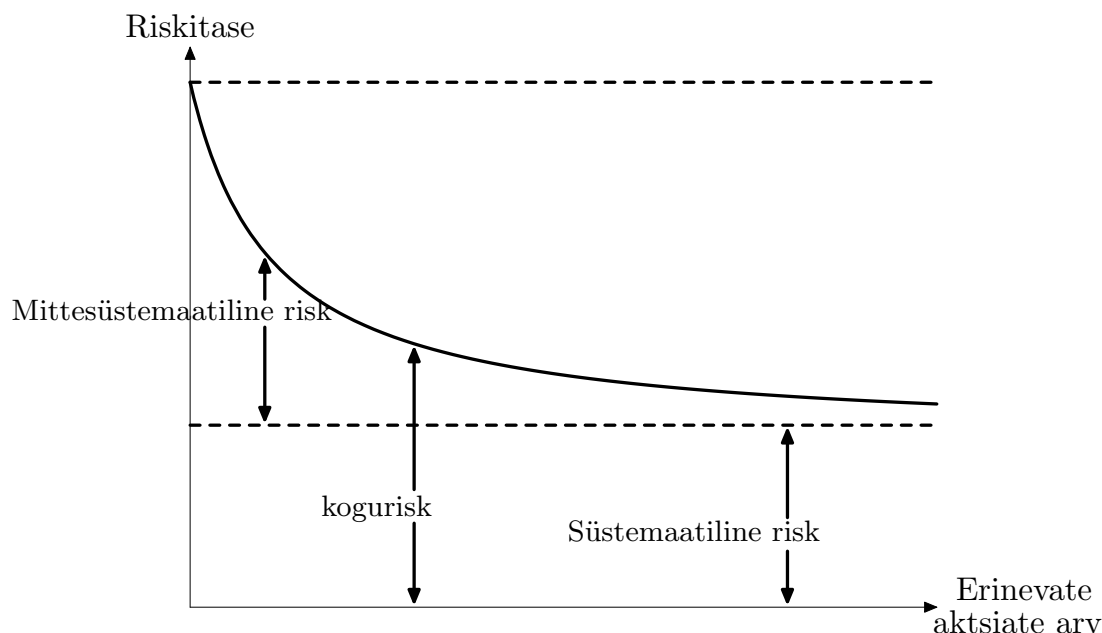
Iga riskantse väärtpaberiga seotud riski võime jagada süstemaatiliseks ehk tururiskiks ning mittesüstemaatiliseks ehk spetsiifiliseks riskiks. Mittesüstemaatiliseks riskiks nimetame seda osa riskist, millest on võimalik vabaneda portfelli diversifitseerimise abil. Empiirilised uurimused on näidanud, et kuna erinevate väärtpaberite (investeeringuprojektide) omavahelised korrelatsioonikordajad on väiksemad ühest, on võimalik portfelli diversifitseerimise abil summaarset riski oluliselt vähendada nii, et sellega ei kaasne tulususe vähenemine. Fabozzi ja Modigliani toovad välja järgmised üldistused diversifitseerimise mõju kohta:

- USA-s koosneb keskmise aktsia risk 30% ulatuses süstemaatilisest riskist ja 70% ulatuses mittesüstemaatilisest riskist.
- Portfell, mis koosneb üle kahekümne juhuslikult valitud ettevõtte aktsiast, sisaldab üksnes süstemaatilist riski.

Riski hajutamise edukus sõltub otseselt portfelli kuuluvate erinevate ettevõtete arvust (vt joonis 3.8).

Mitmete kapitaliturgusid käsitlevate teooriate kohaselt kompenseeritakse investoritele üksnes süstemaatilise riski kandmine. Juhul, kui väärtpaberiturul on palju diversifitseeritud väärtpaberiportfelle omavaid investoreid, kujuneb aktsia turuhind nii kõrgeks, et sellelt saadav oodatav tulumäär kompenseerib üksnes selle osa riskist, mida pole võimalik portfelli koostamise abil hajutada.

Finantsvarade hindamise mudel väidab, et mingi aktiva oodatav tulumäär on leitav riskivaba tulumäära ja tururiskipreemia summana, kusjuures investorile kompenseeritakse üksnes sellise riski võtmine, mida pole võimalik diver-



Joonis 3.8: Portfelli risk sõltuvalt portfelli kuuluvate erinevate väärtpaberite arvust.

siftseerida väärtpaberiportfelli koostamise teel (süsteemaaatiline risk). Finantsvarade hindamise mudeli väljatöötamine 1960-ndatel mõjutas oluliselt ka majanduspraktikat. Üheks väljundiks oli täiendava tõuke andmine indeksfondide levikule – mudel väitis, et teatud spetsiifiliste eelduste täidetuse korral peaksid kõik investorid eelistama riskantse portfelli turuportfelli. Teiseks oluliseks väljundiks oli beetakordajate ulatuslik kasutamine aktiva riskitaset iseloomustava näitajana.

3.4.1 Arbitraažihindade mudel

Arbitraažihindade mudel (*arbitrage pricing theory, APT*) on samuti välja töötatud riskantsete varade hindamiseks. Oodatavat tulumäära vaadeldakse lineaarse funktsioonina mitmetest makroökonomilistest faktoritest, kusjuures iga faktori mõju antud varale iseloomustab faktorile vastav beetakordaja. Mudeli baasil tuletatud tulumäära saab kasutada vara hindamiseks.

APT on mudel, kus tulumäärade erinevust erinevate varade vahel modelleeritakse mitmete faktorite abil. Faktoritena kasutatakse enamasti võlakirjaturu näitajaid, inflatsiooni, majandusproгноosidega seotud faktoreid, väärtpaberituruindeksit jne. Faktorite valikul lähtutakse nende empiirilisest sobivusest. Mudeli üldkuju on

$$E(R) = r_F + \beta_1 RF_1 + \beta_2 RF_2 + \dots + \beta_K RF_K,$$

kus $RF_k, k = 1, 2, \dots, K$, on k -nda faktori riskipreemia ning β_k on k -ndale faktorile vastav beetakordaja.

Peatükk 4

Riskantsed väärtpaberid

4.1 Aktsiad. Turgude efektiivsus.

4.1.1 Aktsiad

Aktsia (*stock*) on väärtpaber, mis näitab omaniku (aktsionäri) õigust osale ettevõtte varast ja kasumist. Kasumiosa, mis aktsiate arvu alusel investeerijale välja makstakse, nimetatakse **dividendiks**.

Aktsiate liigitus sõltuvalt hääletusõigusest ja dividendidest

- **Eelisaktsia**

Dividendide suurus on fikseeritud, üldjuhul puudub hääleõigus aktsionäride üldkoosolekul, Eelisaktsionärid on eelisseisus võrreldes lihtaktsionäridega ettevõtte pankroti korral – nende nõuded rahuldatakse esmalt;

- **Lihtaktsia**

Enamus kaubeldavaid aktsiaid on lihtaktsiad. Eesti turul on avalikult kaubeldavad vaid lihtaktsiad. Turul kaubeldavad aktsiad on tundlikud kõikide põhiliste finantsturgude riskide suhtes. Aktsiate väärtuse muutus võib olla suur võrreldes teiste väärtpaberitega.

Aktsia väärtuse hindamine

Nagu enamiku finantsinvesteeringute väärtus, sõltub ka aktsiate väärtus tulevikus laekuvate rahavoogude nüüdisväärtusest. Seega aktsiate korral dividendide nüüdisväärtusest.

Eelisaktsia väärtus ehk hind P

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

kus D_t - dividendid ajahetkel $t = 0$, k - investeerija nõutav tulunorm.

Kui dividendid kõigil perioodidel võrdsed ($D_t = D$) ning $t = 1, 2, \dots$ on aastad, siis vastavalt geomeetrilise progressiooni summa valemile:

$$P = \frac{D}{k}.$$

Kui aga dividendid kasvavad konstantses tempos, s.t. $D_t = (1 + c)D_{t-1}$, $c < k$, siis

$$P = \frac{D}{k - c}.$$

Viimast valemit nimetatakse **Gordoni kasvumudeliks**.

Lihtaktsiate korral dividende suurus ei ole kindlaksmääratud ning neid võidakse ka mitte maksta. Kui aktsionär kavatseb hoida aktsiat oma käes T aastat ning dividendide suurus aastani T on teada, siis

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{P_T}{(1+k)^T}$$

kus P_T on aktsia turuhind ajahetkel T .

Välja on pakutud ka kaheperioodiline muutuva dividendide kasvumääraga mudel, mille korral eeldatakse, et dividendide suurus aastani T on teada ning edasi kasvavad aga dividendid konstantses tempos, s.t. $D_t = (1 + c)D_{t-1}$, $c < k$. Siis

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{D_T}{(k-c)(1+k)^T}.$$

Praktikas on nende teoreetiliste valemite rakendamine keeruline, kuna see eeldab väga stabiilset majanduskeskkonda, et dividendide suurus tulevikus oleks ligilähedaseltki teada.

Üheks võimaluseks aktsiate hindamisel on lähtuda nende bilansilisest väärtusest. Aktsia bilansiline väärtus ehk (**aktsia raamatupidamisväärtus** (*book value*)) on firma bilansiline omakapital ühe aktsia kohta. Aktsia hinna ja raamatupidamisväärtuse suhe (*price-to-book-ratio*) P/B :

$$P/B = \frac{P}{BV},$$

P - aktsia turuhind; BV - aktsia raamatupidamisväärtus.

Aktsia väärtuse hindamise üheks võimaluseks on ka ettevõtte kasumi prognoosimine tulevikus ning selle põhjal aktsia õiglase hinna leidmine. Selleks leitakse suhtarv P/E :

$$P/E = \frac{P}{EPS},$$

P - aktsia turuhind; EPS - puhaskasum aktsia kohta.

Aksia hinda mõjutavad tegurid:

- Turul valitsev hinnang ettevõtte kasumipotentsiaalile
- Turul kehtivad intressimäärad
- Konkreetse ettevõttega seotud muudatused
- Tootmisharu arengupotentsiaal
- Üldine majandusareng.

4.1.2 Finantsturgude efektiivsus

Arbitraaži all mõistetakse reeglina kahte korraga tehtavat tehingut (ost ja müük), mille eesmärgiks on teenida hindade erinevuse pealt riskivaba kasumit.

1950-ndate aastate lõpus püstitasid majandusteadlased hüpoteesi, mille kohaselt aktsiate hinnad ekslevad, s.t. nende muudatused on ajas ettearvamatud (*Random walk hypothesis*). Selle baasil kujunes välja efektiivse turu hüpotees, mis väidab, et efektiivne turg reageerib kohe uuele infole ning seega ei õnnestu sama riskitaseme puhul ühelgi investoril teenida rohkem kui teistel. Et efektiivsel turul peegeldavad finantsvarade hinnad kogu olulist infot, siis võivad investorid olla kindlad, et nad maksavad varade eest alati õiglast hinda.

Mitte iga turg ei pruugi automaatselt olla efektiivne. Efektiivse turu toimimiseks on vajalik, et täidetud oleks järgmised eeldused:

- Turul piisav hulk investoreid, kelle eesmärk on teenida spetsiaalset ekstrakasumit;
- Piisavalt suur käive;
- Informatsioon liigub kindlaid kanaleid pidi (börsi infosüsteem);
- Investorid on ratsionaalsed;
- Täieliku konkurentsi eeldus – maksumäärade ja tehingukulude erinevuste puudumine turuosaliste vahel.

Turu nõrk efektiivsus. Aktsiaturg on nõrgalt efektiivne, kui

- Aktsiahind peegeldab kogu informatsiooni varasema aktsiahinna liikumise kohta;
- Investor ei saa prognoosida aktsiahinna muutust tulevikus varasemate hindade põhjal;

- Aktsiahind järgib juhuslikku arengutrendi, see võib sama tõenäosusega tõusta või langeda.

Turu keskmine efektiivsus. Turg on keskmiselt efektiivne, kui avalik-kusele kättesaadavat, sh ka ajaloolist infot (varasemad aktsiahinnad, ettevõtte aastaaruanded, ajaleheartiklid) kasutades ei saa teenida lisakasumit.

Turu tugev efektiivsus. Turg on tugevalt efektiivne, kui kogu ettevõtte kohta kättesaadavat infot (sealhulgas ka ettevõtte siseinfo) arvesse võttes ei saa teenida lisakasumit.

Siseinfo kasutamist tehingute sooritamisel nimetatakse *insider trading*'uks; paljudes riikides on see seadusega keelatud ning firmajuhid peavad avalikult teatama oma kavatsusest sooritada tehinguid oma ettevõtte väärtpaberitega. Tavaliselt kõik arenenud turud on vähemalt nõrgalt efektiivsed.

Börsikrahhid on nähtus, mille seletamiseks ei piisa efektiivse turu teooriast (aktsia hinnad peegeldavad alati aktsia tegelikku väärtust). Kiirete hinnaliikumiste seletamiseks sobib rohkem **mulliteooria**. Selle järgi ei väljenda väärt-paberite hinnad mitte alati nende tegelikku väärtust. **Hinnamull** on olukord turul, kus väärtpaberite hinnad ületavad nende fundamentaalselt põhjendatud väärtuse.

Hinnamullide tekkimise peamisteks põhjusteks on:

- Investorid võtavad soovitud tegelikkuse pähe, investorite usk mingi uudse olukorra või reaalsuse tekkesse;
- Keskpankade ekspansiivne rahapoliitika;
- Finantsvõimenduse (nt. pangalaen) laialdane kättesaadavus.

Ajaloos tuntuimad hinnamullid:

- Hollandi tulbisibulate maania 17.saj, Tipp 1637, märts; 1 sibul=10 käsitöölise aastapalka; 1636.nov.- 1637.mai hinnaindeks suurenes 10-lt kuni 200-ni ja siis kukkus tagasi alla 10-ni;
- USA börsibuum 1920-ndatel, krahh 29.oktoober 1929 (must teisipäev), kus New Yorgi aktsiabörs kukkus 11,7%. (24.oktoober – must neljapäev). 28.okt. 1929 Dow Jones indeks kukkus 12.82% ja 29.oktoobril 11.73%. Dow Jones indeksi liikumine: aastatel 1922-1929 indeks tõusis 60-lt 330-ni ja sealt kukkus nelja aastaga 30 peale;
- Kinnisvaramull USA-s 2007.a. ja sellega kaasnenud finantskriis 2007-2009. Dow Jones indeks kukkus vähem kui kahe aastaga 14000-lt kuni 6700-ni.

4.1.3 Aktsia tulusus. Aktsia hinna käitumine

Vaatleme aktsia hinda võrdsete ajavahemike $t = n\tau$ järel, kus $n = 1, 2, \dots$ ning τ on fikseeritud ajasamm. Tähistame aktsia hinna hetkel $n\tau$ (ehk edaspidi lühidalt ajahetkel n) suurusega $S(n)$. Oletame, et hetkel $t = 0$ on aktsia hind teada ning võrdne suurusega $S(0)$. Tuleviku aktsiahinnad ei ole teada ning need on vaadeldavad juhuslikena. Aktsia hinna $S(n)$ käitumist on sobiv kirjeldada aktsia tulususe kaudu. Kui aktsia kohta ei maksta dividende ajaperioodil $[n, m]$, siis aktsia tulumäär (lühidalt tulusus) $R(n, m)$ defineeritakse analoogiliselt investeeingu tulususega kui juhuslik suurus

$$R(n, m) = \frac{S(m) - S(n)}{S(n)}.$$

Tulusus $R(n)$ ajaperioodil $[n - 1, n]$ on seega

$$R(n) = \frac{S(n) - S(n - 1)}{S(n - 1)}.$$

Kui aktsia kohta makstakse dividende ajahetkel n , siis aktsia hind pärast dividendide väljamaksmist langeb ning see mõjutab aktsiahinda $S(n)$. Sel juhul aktsia tulusus ajaperioodil $[n - 1, n]$ on

$$R(n) = \frac{S(n) - S(n - 1) + D(n)}{S(n - 1)},$$

kus $D(n)$ on ajahetkel n väljamakstud dividendid. Kui meil on antud järjestikused üheperioodilised tulusused $R(n + 1), R(n + 2), \dots, R(m)$, siis perioodi $[n, m]$ tulusus $R(n, m)$ avaldub üheperioodiliste tulususte kaudu valemiga

$$1 + R(n, m) = (1 + R(n + 1))(1 + R(n + 2)) \dots (1 + R(m)).$$

Näeme, et selliselt defineeritud tulususe korral ei kehti nn. aditiivsuse omadus, s.t. kogutulusus ei võrdu üksikute perioodide tulususte summaga. Viimane omadus kehtib aga juhul kui vaatleme **logaritmilist ehk pidevat tulusust**. Kui aktsia pealt ei maksta dividende ajaperioodil $[n, m]$, siis **aktsia pidev (logaritmiline) tulumäär** (lühidalt tulusus) defineeritakse kui juhuslik suurus

$$r(n, m) = \ln \frac{S(m)}{S(n)}$$

ning üheperioodiline pidev tulusus $r(n)$ kui

$$r(n) = \ln \frac{S(n)}{S(n - 1)},$$

millest järeldub, et

$$S(n) = S(n - 1)e^{r(n)}.$$

Kui aktsia pealt makstakse dividende ajahetkel n , siis pidev üheperioodiline tulusus leitakse valemiga

$$r(n) = \ln \left(\frac{S(n) + D(n)}{S(n-1)} \right).$$

Kui meil on antud järjestikused üheperioodilised pidevad tulusused $r(n+1), r(n+2), \dots, r(m)$, siis perioodi $[n, m]$ pidev tulusus $r(n, m)$ avaldub üheperioodiliste tulususte kaudu valemiga

$$r(n, m) = r(n+1) + r(n+2) + \dots + r(m) = \sum_{j=n+1}^m r(j).$$

Kui eeldada, et aktsiaturg on nõrgalt efektiivne, siis aktsiahinna pidevad üheperioodilised tulusused peaks olema sõltumatud juhuslikud suurused. Eeldus, mis aktsiahinna käitumise kohta tehakse, on järgmine

$$r(n) = c + \omega(n) \quad (4.1)$$

kus c on konstant ning $\omega(n), n = 1, 2, \dots$ on järgmiste omadustega juhuslikud suurused:

- a) $E(\omega(n)) = 0$, s.t. juhuslike suuruste $\omega(n)$ keskväärtused on nullid.
- b) Juhuslikud suurused $\omega(n)$ on sõltumatud, millest järeldub, et $\text{corr}(\omega(n), \omega(m)) = 0$ suvaliste $m, n, m \neq n$ korral.

Valemist (4.1) järeldub, et

$$\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + c + \omega(n) \quad (4.2)$$

ning

$$\ln(S(n)) = \ln(S(0)) + nc + \sum_{j=1}^n \omega(j).$$

Aktsiahindade empiiriline uurimine on näidanud, et aktsiahinnad käituvad ligikaudselt vastavalt valemile (4.2), kus $\omega(n)$ on normaaljaotusega sõltumatud juhuslikud suurused keskväärtusega 0 ning konstantse dispersiooniga σ^2 , s.t. $\omega(n) \sim NID(0, \sigma^2)$.

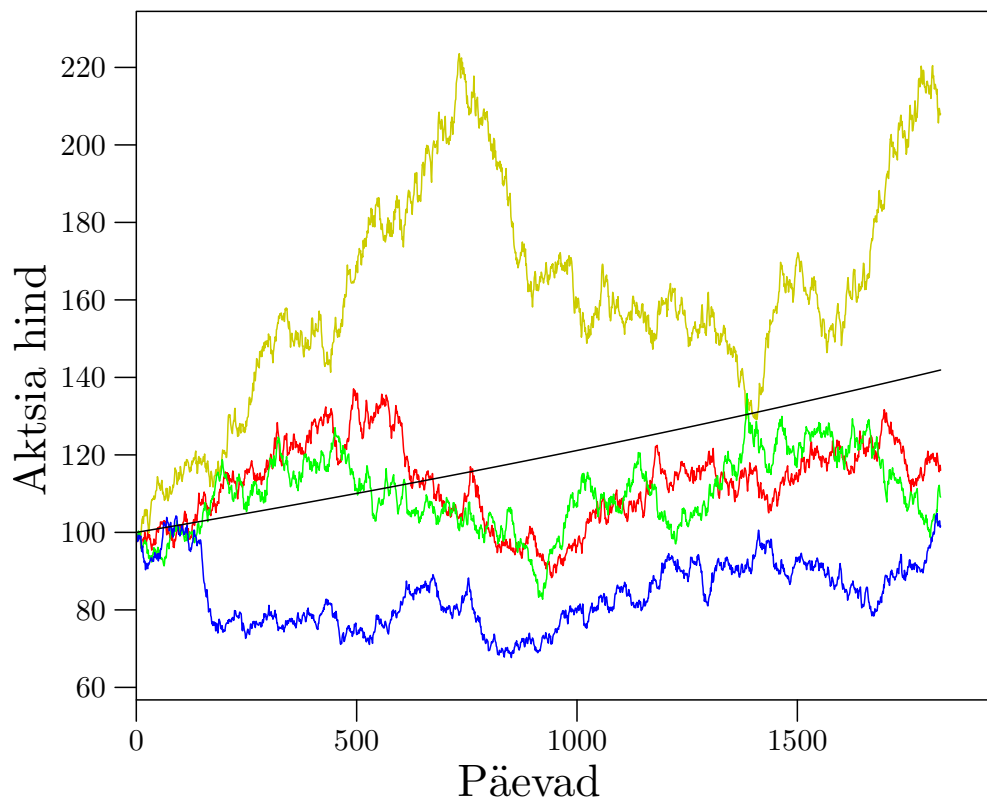
Näiteid aktsiahinna käitumise kohta.

Vaatleme päevaseid aktsiahindu viie aasta jooksul, kui päevaste aktsiahindade käitumist kirjeldab võrrand

$$\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + (0.07/365) + \omega(n), \quad n = 1, 2, \dots, 1825, \quad S(0) = 100.$$

kus $\omega(n)$ on normaaljaotusega sõltumatud juhuslikud muutujad keskväärtusega 0 ning dispersiooniga σ^2 .

- a) Kui $\ln(S(n)) = \ln(S(n-1)) + (0.07/365) + \omega(n), \quad n = 1, 2, \dots, 1825, \quad S(0) =$



Joonis 4.1: Aktsia hinna käitumine

100, $\sigma^2 = 0.01$, siis aktsiahinna käitumine võib olla selline (neli korda genereeritud juhuslikke suursusi) nagu joonisel 4.1 (joonise korral on genereeritud 4 võimalikku aegrida)

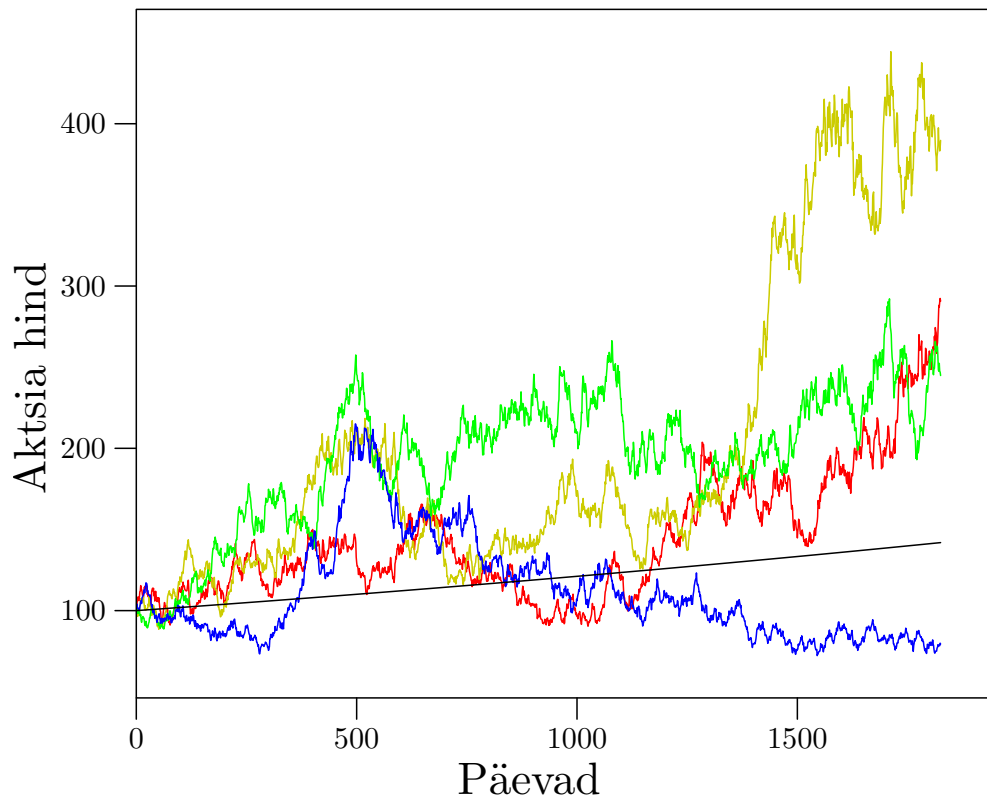
b) Kui aga $\sigma^2 = 0.02$, siis aktsiahinna käitumine võib olla selline (neli korda genereeritud juhuslikke suursusi): nagu toodud joonisel 4.2. Näeme, et võrreldes juhuga $\sigma^2 = 0.01$ ulatub aktsiahinna maksimaalne väärtus 450-ni võrreldes 220-ga esimesel juhul.

Miks peavad aktsiahinna liikumist kirjeldavad juhuslikud suursused olema sõltumatud? Oletame, et juhuslikud suursused $\omega(n)$ ja $\omega(n-1)$ on samasuunaliselt korreleeritud, s.t. $\text{Corr}(\omega(n), \omega(n-1)) = \rho > 0$. Siis võime välja pakkuda järgmise strateegia aktsiate ostmiseks-müümiseks: ostame aktsia siis, kui $\ln(S(n)) > \ln(S(n-1)) + (0.07/365)$ ning müüme aktsia siis, kui $\ln(S(n)) < \ln(S(n-1)) + (0.07/365)$. Kui $\rho = 0.1$, siis ühe aktsia ostmisel-müümisel on võimalik teenida puhastulu on keskmiselt 121 EUR, sealjuures keskmine tehingute arv ligikaudu 854;

Kui $\rho = 0.3$ siis puhastulu on keskmiselt 335 EUR ja keskmine tehingute arv on ligikaudu 737;

Kui $\rho = 0.01$ siis puhastulu on keskmiselt 27 EUR ja keskmine tehingute arv ligikaudu 913;

Siin ei ole arvestatud sellega, et praktikas tuleb aktsiatega kauplemisel maksta ka mingit tehingutasu. Näiteks, kui tehingutasu on 0.1 % tehingu summast,



Joonis 4.2: Aktsia hinna käitumine

siis juhul $\rho = 0.1$ on ühe aktsia ostmisel-müümisel on võimalik teenida puhastulu on keskmiselt vaid 15 EUR (mis on madalam sellest kui ostaksime perioodi algul aktsia ning perioodi lõpus müüksime). Kui aga $\rho = 0.3$, siis puhastulu on keskmiselt 245 EUR.

4.1.4 Oodatav tulusus. Riskineutraalsus

Riskantsete investeeringute korral ei ole tuleviku rahavood determineeritud, vaid on juhuslikud. Kui meil on teada erinevate tulevikustsenaariumide tõenäosused, siis on võimalik rääkida investeeringu keskmisest ehk **oodatavast tulust ja tulususest** (*expexted return*). Oletame näiteks, et aktsia hind hetkel on 100 EUR ning aktsia hinnaks on majanduslanguse, stagnatsiooni ja buumi korral vastavalt 90 EUR, 104 EUR ning 110 EUR. Olgu nende stsenaariumide tõenäosused on vastavalt 0.25, 0.5 ja 0.25.

Siis oodatav tulu on leitav valemiga $0.25 \cdot 90 + 0.5 \cdot 104 + 0.25 \cdot 110 = 102$.

Saame leida ka tulusused iga stsenaariumi korral ning rääkida oodatavast tulususest. Tulusused $R = \frac{S - S(0)}{S(0)}$ on erinevate stsenaariumide korral vastavalt

-10%, 4% ja 10% ning oodatav tulusus on $-10\% \cdot (1/4) + 4\% \cdot (1/2) + 10\% \cdot (1/4) = 2\%$.

Seega, kui on teada erinevate stsenaariumite $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$ tõenäosused $p_1, p_2, \dots, p_K$ ning investeeringu tulu $S_1, S_2, \dots, S_K$ erinevate stsenaariumide korral, siis ooda-

tav tulu $E(S)$ leitakse vastavalt valemile

$$E(S) = \sum_{k=1}^K p_k S_k$$

Kui on antud investeeringu tulusused $R_1, R_2, \dots, R_K$ erinevate stsenaariumide korral, siis oodatav tulu leitakse vastavalt valemile

$$E(R) = \sum_{k=1}^K p_k R_k = \frac{E(S) - S(0)}{S(0)}.$$

Kui meil on antud järjestikused sõltumatud üheperioodilised oodatavad tulusused $E(R(n+1)), E(R(n+2)), \dots, E(R(m))$, siis perioodi $[n, m]$ oodatav tulu $E(R(n, m))$ avaldub üheperioodiliste oodatavate tulususte kaudu valemiga

$$1 + E(R(n, m)) = (1 + E(R(n+1)))(1 + E(R(n+2))) \dots (1 + E(R(m))).$$

Kui meil on antud järjestikused üheperioodilised oodatavad pidevad tulusused $E(r(n+1)), E(r(n+2)), \dots, E(r(m))$ (pidev tulu $r = \ln\left(\frac{S}{S(0)}\right)$), siis perioodi $[n, m]$ oodatav pidev tulu $E(r(n, m))$ avaldub üheperioodiliste oodatavate pidevate tulususte kaudu valemiga

$$E(r(n, m)) = \sum_{j=n+1}^m E(r(j)).$$

Viimane valem kehtib ka juhul, kui üheperioodilised tulusused ei ole sõltumatud, kuna keskvärtus juhuslike suuruste summast on alati võrdne keskvärtuste summaga.

Võrdleme riskantse investeeringu keskmist oodatavat tulu riskivaba investeeringu tuluga kasutades viimasel juhul pidevat tulumäära. Kui me investeerime riskivabalt summa $S(0)$ ajahetkel $t = 0$ pideva tulumääraga r , siis aja $t = T$ pärast on investeeringu suurus

$$S(0)e^{rT}.$$

Tekib küsimus, et kui investor investeerib sama summa riskantsesse investeeringusse, siis milline peab olema sellise investeeringu oodatav tulu, et ta valiks riskantse investeerimisviisi riskivabalt investeerimise asemel. See sõltub investori suhtumisest riski. Tüüpiliselt on investorid riskikartlikud ning nende jaoks peab kehtima võrratus

$$E(S) > S(0)e^{rT}$$

ehk $e^{-rT}E(S) > S(0)$, s.t. diskonteeritud oodatav tulu peab olema suurem investeeritud summast $S(0)$.

Riskialtude investorite korral võib kehtida ka võrratus

$$E(S) < S(0)e^{rT}$$

(riskialtid investorid on näiteks loteriil osalejad).

Riskineutraalsete investorite korral aga

$$E(S) = S(0)e^{rT}$$

ehk $e^{-rT}E(S) = S(0)$, s.t. nad on valmis valima riskantse investeringu juhul kui diskonteeritud oodatav tulusus on võrdne (või suurem) kui investeeritud summa.

Kui meil on antud stsenaariumite tõenäosused $p_1, p_2, \dots, p_K$, siis üldjuhul ei kehti võrdus

$$e^{-rT}E(S) = S(0).$$

Tõenäosusi $p_*(\omega_1), p_*(\omega_2), \dots, p_*(\omega_K)$, millede korral

$$p_*(\omega_k) > 0, 1 \leq k \leq K \text{ ja } \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) = 1$$

ning kehtib võrdus $e^{-rT}E_*(S) = e^{-rT} \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k)S_k = S(0)$, , nimetatakse **riski-neutraalseteks tõenäosusteks**.

Osutub, et tuletisväärtpaberite (optsioonid, forwardid) õiglase hinna leidmisel on riskineutraalsed tõenäosused olulisemad, kui stsenaariumide algsed tõenäosused.

4.2 Üldine matemaatiline mudel derivatiivide hinna leidmiseks

Matemaatilise mudeli elemendid:

a) Lõplik arv $T + 1$ ajahetke $t \in \mathbb{T}_0 = \{0, 1, 2, \dots, T\}$, $T < \infty$, millal turu mudelis saab midagi toimuda. Sealjuures: $t = 0$ - olevik, modelleeritava perioodi algus; $t > 0$ - tulevik, $t = T$ - modelleeritava perioodi lõpphetk, ajas kaugemale me selles mudelis ei vaatle.

Kauplemine (portfelli moodustamine ja realiseerimine) võib mudelis toimuda kõikidel ajahetkedel. Ajahetke numbrit tuleb siin mõista kui ajahetke järjekorranumbrit, mitte kui ajahetke arvvaartust.

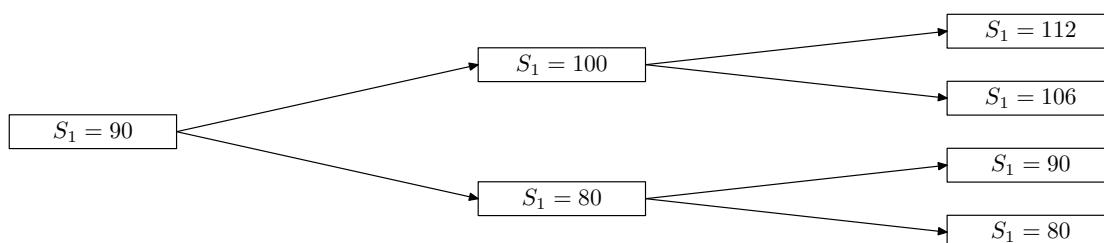
b) Riskivaba vara, mida iseloomustatakse vara hinnaga $S_0(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots, T$.

c) Riskantsete varade hindade kujunemise võimalike stsenaariumide hulk $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$, kus K on lõplik täisarv.

d) Lõplik arv N turul kaubeldavat riskantset vara (*assets*). Iga vara n , $1 \leq n \leq N$, on iseloomustatud vara hinnaga kõikidel ajahetkedel ja kõigi võimalike arengustsenaariumide korral, s.t. on antud hinnad $S_n(t, \omega)$, $t = 0, 1, 2, \dots, T$, $\omega \in \Omega$, $n =$

Vara	Stsenaarium	Hind $t = 0$	Hind $t = 1$	Hind $t = 2$
Aktsia	ω_1	90	100	112
	ω_2	90	100	106
	ω_3	90	80	90
	ω_4	90	80	80
Riskivaba vara		100	110	121

Tabel 4.1: Näite 4.1 mudel



Joonis 4.3: Aktsia hinna esitamine hinnapuu kaudu

$1, 2, \dots, N$. Sealjuures eeldame, et vara hind hetkel $t = 0$ (olevik) on kõigi stsenaariumide korral sama:

$$S_n(0) = S_n(0, \omega), \omega \in \Omega, n = 1, 2, \dots, N.$$

Samuti eeldame, et kõigi varade hinnad on positiivsed:

$$S_0(t) > 0, S_n(t, \omega) > 0, t = 0, 1, 2, \dots, T, \omega \in \Omega, n = 1, 2, \dots, N.$$

Näide 4.1. Tabeliga 4.1 on antud mudel, kus kaubeldakse ühe aktsiaga ja riskivaba varaga. Ajahetkede arv on 3 ning erinevate stsenaariumide arv on 4: ($T = 2$), $N = 1$, $K = 4$.

Aktsia hinna võimalikud arengud saab esitada ka hinnapuuna (vt. joonis 4.3).

Def. 4.1. Investori **portfell** on vektor $H(t) = (H_0(t), H_1(t), \dots, H_N(t))$, mis näitab varade hulka investori portfellis ajahetkede $t - 1$ ja t vahel, s.t portfell moodustatakse ajahetkel $t - 1$ ning hoitakse kuni ajahetkeni t .

Erinevate arengustsenaariumide korral võib investor moodustada erineva portfelli, s.t. $H(t)$ võib olla erinevate stsenaariumide korral erinev. Portfellide jada $H(1), H(2), \dots, H(T)$ nimetatakse investeerimisstrateegiaks. Me eeldame, et suurused $H_n(t)$ võivad olla suvalised reaalarvud.

Portfelli väärtus ajahetkel t leitakse vastavalt valemile

$$V(t) = \sum_{n=0}^N H_n(t) S_n(t)$$

ja selle portfelli moodustamise **hind** ajahetkel $t - 1$ on

$$W(t - 1) = \sum_{n=0}^N H_n(t) S_n(t - 1).$$

Portfelli hind näitab rahasummat, mis portfelli moodustamiseks on vaja ning portfelli väärtus näitab rahasummat, mis me saame selle portfelli maha müümisel. Märgime ka, et kõigi suuruste $V(t)$, $W(t)$, $H_n(t)$ ja $S_n(t)$ väärtused sõltuvad ka stsenaariumist ning näiteks portfelli väärtus $V(t)$ võib olla erinevate stsenaariumide korral erinev.

Investor võib oma portfelli muuta igal ajahetkel, müües mingeid varasid ning ostes teisi. Investor teeb oma otsused selle kohta, milliseid varasid müüa ja milliseid osta, talle tollel ajahetkel teadaoleva informatsiooni põhjal. Eeldame, et selleks informatsiooniks on varade hinnad kuni antud ajahetkeni (ja mingi muu info põhjal investorid oma otsuseid ei tee) ning info varasemate hindade kohta on kättesaadav kõigile. See tähendab seda, et kui varade hinnad kuni ajahetkeni t on kõigi varade korral kahe stsenaariumi korral samad, siis nende kahe stsenaariumi korral hetkel t moodustatud portfellid peavad ka samad olema.

Näide 4.2. Leiame näites 4.1 vaadeldud mudeli korral ajahetkel $t = 1$ moodustatud portfelli $H(2) = (2, 3)$ hinna hetkel $t = 1$ ja väärtuse hetkel $t = 2$ erinevate stsenaariumide korral.

$W(1) = 3 * 100 + 2 * 110 = 520$ stsenaariumide ω_1 ja ω_2 korral;

$V(2) = 3 * 112 + 2 * 121 = 578$ stsenaariumi ω_1 korral;

$V(2) = 3 * 106 + 2 * 121 = 560$ stsenaariumi ω_2 korral ;

$W(1) = 3 * 80 + 2 * 110 = 460$ stsenaariumide ω_3 ja ω_4 korral;

$V(2) = 3 * 90 + 2 * 121 = 512$ stsenaariumi ω_3 korral;

$V(2) = 3 * 80 + 2 * 121 = 482$ stsenaariumi ω_4 korral.

Üldiselt ei pea me stsenaariumide ω_3 ja ω_4 korral moodustama sama portfelli, mis stsenaariumide ω_1 ja ω_2 korral. Kuna stsenaariumide ω_3 ja ω_4 korral riskantse vara hind langes ajahetkel $t = 1$ võrreldes ajahetkega $t = 0$, siis võime nende stsenaariumide korral moodustada 460 rahaühiku eest ka näiteks portfelli $H(2) = (460/110, 0)$, mille väärtuseks ajahetkel $t = 2$ on 508,2 ühikut.

Def. 4.2. Investeerimisstrateegiat nimetatakse **isefinantseerivaks**, kui ajahetkel $t, 0 \leq t \leq T$, moodustatud portfelli hind on võrdne ajahetkel $t - 1$ moodustatud portfelli väärtusega, s.t.

$$\sum_{n=0}^N H_n(t) S_n(t) = \sum_{n=0}^N H_n(t+1) S_n(t).$$

Näide 4.3. Näites 4.1 vaadeldud mudelis on isefinantseerivaks strateegiaks näiteks strateegia $H(1) = (-2, 3)$, $H(2, \omega_1) = H(2, \omega_2) = (-12/11, 2)$, $H(2, \omega_3) = H(2, \omega_4) = (-6/11, 1)$, kuna

$$V_{H(1)}(1, \omega_1) = V_{H(1)}(1, \omega_2) = -2 * 110 + 3 * 100 = 80$$

ja

$$W_{H(2, \omega_1)}(1, \omega_1) = W_{H(2, \omega_2)}(1, \omega_2) = (-12/11) * 110 + 2 * 100 = 80$$

Vara	Stsenaarium	Hind $t = 0$	Hind $t = 1$	Hind $t = 2$
Aktsia	ω_1	90	100	112
	ω_2	90	100	120
	ω_3	90	80	90
	ω_4	90	80	80
Riskivaba vara		100	110	121

Tabel 4.2: Näite 4.4 mudel

ning

$$V_{H(1)}(1, \omega_3) = V_{H(1)}(1, \omega_4) = -2 * 110 + 3 * 80 = 20$$

ja

$$W_{H(2, \omega_3)}(1, \omega_3) = W_{H(2, \omega_4)}(1, \omega_4) = (-6/11) * 110 + 1 * 80 = 20.$$

Def. 4.3. Strateegia on **ennustatav** (*predictable*) kui portfelliid $H(t)$ mis moodustatakse ajahetkel $t - 1$, sõltuvad vaid varade hindadest kuni ajani $t - 1$.

Lause 4.1. Etteantud algvara $V(0)$ ning riskantsete varade portfelliid $H_1(t), \dots, H_N(t), t = 1, 2, \dots, T$ korral on alati võimalik leida riskivaba vara positsioonid $H_0(t)$ nii, et strateegia $H(t), t = 1, 2, \dots, T$ on ennustatav isefinantseeriv strateegia.

Tõestus: Leiame riskivaba vara positsioonid $H_0(t), t = 1, 2, \dots, T$ järgmiselt:

$$H_0(1) = \frac{V(0) - \sum_{n=1}^N H_n(1)S_n(0)}{S_0(0)},$$

$$V(1) = \sum_{n=0}^N H_n(1)S_n(1),$$

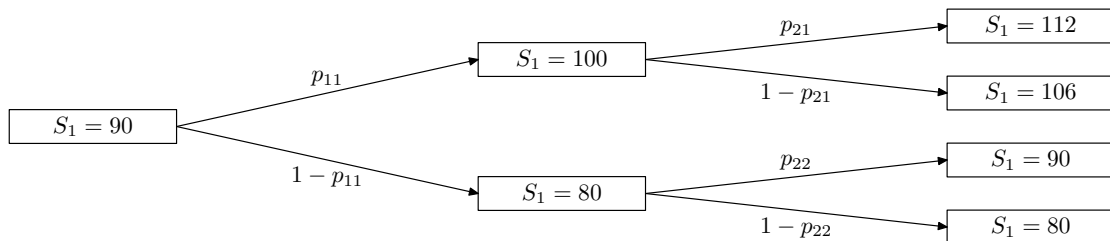
$$H_0(2) = \frac{V(1) - \sum_{n=1}^N H_n(2)S_n(1)}{S_0(1)},$$

$$V(2) = \sum_{n=0}^N H_n(2)S_n(2),$$

jne. Selline strateegia on isefinantseeriv ning samuti ennustatav, kuna positsioonid $H_0(t), t = 1, 2, \dots, T$ avalduvad varade hindade kaudu ajahetkeni $t - 1$.

Def. 4.4. Mudel on arbitraaživaba, kui mudelis ei leidu sellist isefinantseerivat ennustatavat strateegiat H , et $V_H(0) = 0$ ning leidub $t, 1 \leq t \leq T$, selline, et $V_H(t) \geq 0$ kõigi stsenaariumide korral ja $V_H(t) > 0$ mingi stsenaariumi korral.

Näide 4.4. Vaatleme mudelit, mis on esitatud tabeliga 4.2 (võrreldes näites 4.1 toodud mudeliga on muudetud vaid aktsia hinda hetkel $t = 2$ ja stsenaariumi ω_2 korral).



Joonis 4.4: Aktsia hind hinnapuuna ning hargnemistõenäosused.

See mudel ei ole arbitraaživaba, kuna vaadeldes investeerimisstrateegiat $H(1) = (0, 0)$, $H(2, \omega_1) = H(2, \omega_2) = (-10, 11)$, $H(2, \omega_3) = H(2, \omega_4) = (0, 0)$, saame investeringu väärtuseks sõltuvalt stsenaariumist $V(2, \omega_1) = 22$, $V(2, \omega_2) = 110$, $V(2, \omega_3) = V(2, \omega_4) = 0$. Selline investeerimisstrateegia on isefinantseeriv ning $V(0) = 0$, kuid stsenaariumide ω_1, ω_2 korral saame positiivse tulu.

Põhiteoreem. Mudel on arbitraaživaba siis ja ainult siis, kui leiduvad tõenäosused $p_*(\omega)$ (neid tõenäosusi nimetatakse **riskineutraalseteks tõenäosusteks**) nii, et

- a) $p_*(\omega) > 0$ iga stsenaariumi $\omega \in \Omega$ korral
- b)

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_*(\omega) = 1$$

ning

- c) suhteliste aktsia hindade $\tilde{S}_n(t) = \frac{S_n(t)}{S_0(t)}$ korral kehtivad võrdused

$$E_*(\tilde{S}_n(t+1) \mid S(t)) = \tilde{S}_n(t) \quad (4.3)$$

iga $n = 1, 2, \dots, N$ ja $t = 0, 1, \dots, T-1$ korral, kus $E_*(\cdot \mid S(t))$ tähistab tinglikku keskvaartust tõenäosuste $p_*(\omega)$ korral ning teadaolevate varade hindade $S(t)$ korral kuni ajahetkeni t .

Paneme tähele, et võrdus (4.3) on automaatselt täidetud $n = 0$ korral, kuna $\tilde{S}_0(t) = 1$ iga t korral ning $\sum_{\omega \in \Omega} p_*(\omega) = 1$.

Näide 4.5. Leiame riskineutraalsed tõenäosused näites 4.1 toodud mudeli korral. Riskineutraalsed tõenäosused saame leida hargnemistõenäosuste (tinglike tõenäosuste) p_{11}, p_{21}, p_{22} kaudu (vt. joonis 4.4).

Võrrandid (vt. valem (4.3)) hargnemistõenäosuste leidmiseks on järgmised:

$$\begin{aligned} \frac{100}{110}p_{11} + \frac{80}{110}(1 - p_{11}) &= \frac{90}{100}, \\ \frac{112}{121}p_{21} + \frac{106}{121}(1 - p_{21}) &= \frac{100}{110}, \\ \frac{90}{121}p_{22} + \frac{80}{121}(1 - p_{22}) &= \frac{80}{110}. \end{aligned}$$

Nende võrrandite lahenditeks on vastavalt

$$p_{11} = \frac{19}{20}, \quad p_{21} = \frac{2}{3}, \quad p_{22} = \frac{4}{5}$$

ning riskineutraalsed tõenäosused on vastavalt

$$p_*(\omega_1) = p_{11}p_{21} = \frac{19}{30}, \quad p_*(\omega_2) = p_{11}(1 - p_{21}) = \frac{19}{60},$$

$$p_*(\omega_3) = (1 - p_{11})p_{22} = \frac{1}{25},$$

$$p_*(\omega_4) = (1 - p_{11})(1 - p_{22}) = \frac{1}{100}.$$

Lihtne on veenduda, et leitud riskineutraalsete tõenäosuste summa on 1:

$$p_*(\omega_1) + p_*(\omega_2) + p_*(\omega_3) + p_*(\omega_4) = \frac{19}{30} + \frac{19}{60} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = 1.$$

Seega näites 4.1 vaadeldud mudel on arbitraaživaba.

Vaatleme tuleviku juhuslikku rahavoogu $X(\omega)$ hetkel $t = T$. Tuleviku rahavoog on saavutatav, kui leidub selline isefinantseeriv investeerimisstrateegia (rahavoogu X replikeeriv strateegia) $H = (H(1), H(2), \dots, H(T))$, et

$$V_H(T, \omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Arbitraaživabas mudelis on saavutatava tuleviku juhusliku rahavoo $X(\omega)$ hinnaks strateegia H hind hetkel $t = 0$, s.t. $W_X(0) = W_H(0)$. Saavutatava tuleviku rahavoo hinna saab arbitraaživabas mudelis leida ka riskineutraalsete tõenäosuste kaudu. Kehtib võrdus

$$\tilde{W}_X(0) = E_*(\tilde{X}(\omega)), \quad (4.4)$$

s.t.

$$\frac{W_X(0)}{S_0(0)} = \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) \frac{X(\omega)}{S_0(T)},$$

kus $p_*(\omega_k)$ on riskineutraalsed tõenäosused. Viimasest võrdusest saame

$$W_X(0) = \frac{S_0(0)}{S_0(T)} \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) X(\omega). \quad (4.5)$$

Näitame võrduse (4.4) kehtivust juhul $T = 1$. Sel juhul riskineutraalsed tõenäosused rahuldavad võrrandit

$$E_*(\tilde{S}_n(1) \mid S(0)) = \tilde{S}_n(0), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

ehk

$$\sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) \frac{S_n(1, \omega_k)}{S_0(1)} = \frac{S_n(0)}{S_0(0)}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Vara	Stsenaarium	Hind $t = 0$	Hind $t = 1$	Hind $t = 2$
Aktsia	ω_1	13.5	16	25
	ω_2	13.5	16	15
	ω_3	13.5	20	15
	ω_4	13.5	20	30
Riskivaba vara		3	4	5

Tabel 4.3: Ülesande 4.1 mudel

Nüüd saame saavutatava tuleviku rahavoo hinna esitada järgmiselt

$$\begin{aligned}
W_X(0) &= W_H(0) = \sum_{n=0}^N H_n(1) S_n(0) = \frac{S_0(0)}{S_0(1)} \sum_{n=0}^N H_n(1) \left(\sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) S_n(1, \omega_k) \right) = \\
&= \frac{S_0(0)}{S_0(1)} \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) \left(\sum_{n=0}^N H_n(1) S_n(1, \omega_k) \right) = \frac{S_0(0)}{S_0(1)} \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) V_H(1, \omega_k) = \\
&= \frac{S_0(0)}{S_0(1)} \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) X(\omega_k) = S_0(0) \sum_{k=1}^K p_*(\omega_k) \tilde{X}(\omega_k) = S_0(0) E_*(\tilde{X}(\omega)),
\end{aligned}$$

millest järeldub, et $\tilde{W}_X(0) = \frac{W_X(0)}{S_0(0)} = E_*(\tilde{X}(\omega))$.

Saab näidata, et kui riskineutraalsed tõenäosused on üheselt määratud, siis kõik tuleviku juhuslikud rahavood on saavutatavad.

Näide 4.6. Leiame näites 4.1 vaadeldud mudeli korral tuleviku juhusliku rahavoo $X(2, \omega_1) = 33/10$, $X(2, \omega_2) = 0$, $X(2, \omega_3) = 55/10$, $X(2, \omega_4) = 0$ hinna.

Kuna näite 4.1. mudeli korral riskineutraalsed tõenäosused on üheselt määratud, siis kõik tuleviku rahavood on saavutatavad ning valemi (4.5) põhjal saame

$$W_X(0) = \frac{100}{121} \left(\frac{19}{30} * \frac{33}{10} + 0 * \frac{19}{60} + \frac{1}{25} * \frac{55}{10} + 0 * \frac{1}{100} \right) = \frac{21}{11} = 1 \frac{10}{11}.$$

Ülesanne 4.1. Vaatleme mudelit, mis on antud tabeliga 4.3.

1. Leida riskineutraalsed tõenäosused
2. Leida tuleviku rahavoo $X(2) = (10, 0, 0, 15)$ hind, kasutades
 - a) riskineutraalseid tõenäosusi;
 - b) rahavoogu replikeerivat portfelli.
3. Leida tuleviku rahavoo $X(2) = (10, 5, 10, 5)$ hind, kasutades
 - a) riskineutraalseid tõenäosusi;
 - b) rahavoogu replikeerivat portfelli.

Vastused:

1. $p_*(\omega_1) = 1/4$, $p_*(\omega_2) = 1/4$, $p_*(\omega_3) = 1/6$, $p_*(\omega_4) = 1/3$
2. $W_x = 9/2$
3. $W_x = 17/4$.

4.3 Optsioonid. Optsiooni hind

4.3.1 Optsiooni mõiste

Euroopa ostuoptsioon (*European call option*) annab optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) osta mingit vara, edaspidi alusvara (*underlying asset*) optsiooni ostmisel fikseeritud hinnaga X ning kindlaksmääratud ajal T . Fikseeritud hinda X nimetatakse **optsiooni täitmishinnaks** (*exercise price, strike price*) ning aega T nimetatakse **täitmisajaks (realiseerimisajaks, optsiooni elueaks)** (*exercise time, expiry time*).

Euroopa müügioptsioon (*European put option*) annab optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) müüa mingit vara, edaspidi alusvara optsiooni ostmisel fikseeritud hinnaga X ning kindlaksmääratud ajal T .

Ameerika ostu- ja müügioptsioon annavad optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) vastavalt osta ja müüa mingit vara optsiooni ostmisel fikseeritud hinnaga X mistahes ajal alates optsiooni ostmisest kuni kindlaksmääratud ajani T .

Alusvara võib olla erinevate optsioonide korral olla väga erinev. Alusvaraks võib olla aktsiad, mingi kaup (näiteks tooraine), välisvaluuta, kuid alusvaraks võib olla ka aktsiaturu indeks, intressimäär või isegi lumekatte paksus. Näiteks Euroopa ostuoptsioon Standard ja Poor indeksi kohta. Lepitakse kokku, et $X = 815$ (815 indeksi väärtus täitmisajal) ning see, et ühe ühiku võrra indeksi muutust vastab näiteks 100 eurole.

Opsioone kasutatakse riskide maandamiseks ja spekulatsioonideks.

Tähistame alusvara hinna tähisega $S(t)$ ning olgu optsiooni ostmise hetk $t = 0$. Optsiooniga seotud **väljamakse** P optsiooni omanikule optsiooni täitmisajal T :

Euroopa ostuoptsiooni väljamakse on leitav vastavalt valemile

$$P_C = \begin{cases} S(T) - X, & \text{kui } S(T) > X; \\ 0, & \text{kui } S(T) \leq X. \end{cases}$$

Euroopa müügioptsiooni korral on väljamakse kujul

$$P_P = \begin{cases} X - S(T), & \text{kui } X > S(T); \\ 0, & \text{kui } X \leq S(T). \end{cases}$$

Tähistades

$$[x]_+ = \begin{cases} x, & \text{kui } x > 0; \\ 0, & \text{kui } x \leq 0. \end{cases}$$

saame Euroopa ostu- ja müügioptsiooni väljamaksed esitada kujul

$$P_C = [S(T) - X]_+, \quad P_P = [X - S(T)]_+.$$

Ameerika ostu- ja müügioptsiooniga seotud väljamaksed, kui optsioon realiseeritakse ajal $t, 0 \leq t \leq T$, on vastavalt

$$P_C = [S(t) - X]_+, \quad P_P = [X - S(t)]_+.$$

Tähistame Euroopa tüüpi ostu- ja müügioptsiooni hinna vastavalt V_C ja V_P . Kui riskivaba pidev intressimäär on r , siis kasum Euroopa ostuoptsiooni realiseerimisel on

$$P_C - V_C e^{rT} = [S(T) - X]_+ - V_C e^{rT}$$

ning Euroopa müügioptsiooni korral

$$P_P - V_P e^{rT} = [X - S(T)]_+ - V_P e^{rT}.$$

Seega näiteks ostuoptsiooni omamine on kasumlikum võrreldes raha paigutamisega riskivabasse varasse juhul kui alusvara hind

$$S(T) > X + V_C e^{rT}.$$

4.3.2 Put-call parity

Kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende, siis sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral on Euroopa ostu- ja müügioptsioonide hinnad seotud järgmise võrdusega

$$V_C - V_P = S(0) - X e^{-rT}. \quad (4.6)$$

Tõestame selle võrduse vastuväiteliselt, lähtudes arbitraaživabaduse nõudest. 1. Esmalt oletame vastuväiteliselt, et $V_C - V_P > S(0) - X e^{-rT}$ ning näitame, et siis eksisteerib arbitraažistrateegia. Arbitraažistrateegia konstrueerime järgmiselt.

Hetkel $t = 0$:

- Ostame ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- Ostame ühe müügioptsiooni hinnaga V_P ;
- Kirjutame välja ning müüme ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C ;
- Eelnevatest tegevustest saadav rahahulk on $V_C - V_P - S(0)$. Kui see summa on positiivne, siis paigutame raha rahaturule pideva intressimääraga r ; kui negatiivne, siis laename selle rahaturult.

Hetkel $t = T$:

- Lõpetame rahaturu positsiooni, mille hind on $(V_C - V_P - S(0))e^{rT}$. Kui see on positiivne, siis saame selle summa; kui negatiivne, siis peame sellise summa maksma;

- Kui $S(T) - X \geq 0$, siis jätame müügioptsiooni realiseerimata, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$ ning maksame välja ostuoptsiooniga seotud väljamakse $S(T) - X$. Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + S(T) - (S(T) - X) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab, et konstrueeritud strateegia on sel juhul arbitraažistrateegia.

- Kui $S(T) - X < 0$, siis realiseerime müügioptsiooni ning saame summa $X - S(T)$, müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$; ostuoptsiooniga seotud kulud on 0. Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + (X - S(T)) + S(T) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab, et konstrueeritud strateegia on ka sel juhul arbitraažistrateegia.

2. Oletame nüüd, et $V_C - V_P < S(0) - Xe^{-rT}$ ning näitame, et ka siis õnnestub konstrueerida arbitraažistrateegia.

Hetkel $t = 0$:

- Müüme (võtame lühikese positsiooni) ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- Ostame ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C ;
- Kirjutame välja ning müüme ühe müügioptsiooni hinnaga V_P ;
- Eelnevateks tegevusteks vajaminev rahahulk on $V_P + S(0) - V_C$. Kui see summa on positiivne, siis paigutame raha rahaturule pideva intressimääraga r ; kui negatiivne, siis laename selle rahaturult. Kokkuvõttes on kõigi tegevuste bilanss nullis.

Hetkel $t = T$:

- Lõpetame rahaturu positsiooni, mille hind on $(V_P + S(0) - V_C)e^{rT}$. Kui see on positiivne, siis saame sellisse summa raha; kui negatiivne, siis peame sellise summa maksma;
- Kui $S(T) - X \geq 0$, siis realiseerime ostuoptsiooni ja sulgeme lühikese positsiooni, makstes alusvara aktsia eest $S(T)$; müügioptsiooniga seotud kulud puuduvad. Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - S(T) + (S(T) - X) = (V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

- Kui $S(T) - X < 0$, siis jätame ostuoptsiooni realiseerimata, sulgeme lühikese positsiooni, makstes alusvara aktsia eest $S(T)$ ning maksame välja müügioptsiooniga seotud kulud $X - S(T)$. Kokkuvõttes on tegevuste bilanss

$$(V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - S(T) - (X - S(T)) = (V_P + S(0) - V_C)e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab taas, et selline strateegia on arbitraažistrateegia.

Märkus. Võrdus (4.6) ei kehti üldjuhul Ameerika optsiooni korral. Kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende, siis sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral on Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hindade vahet hinnata järgmiste võrratustega

$$S(0) - X \leq V_c^A - V_p^A \leq S(0) - Xe^{-rT},$$

kus V_c^A, V_p^A on vastavalt Ameerika ostu- ja müügioptsioonide hinnad. Tõestada saab jällegi vastuväiteliselt.

Ameerika ja Euroopa optsioonide hindade korral kehtivad võrratused

$$V_c \leq V_c^A, \quad V_p \leq V_p^A.$$

Kasutades arbitraaživabaduse nõuet, saab näidata, et Euroopa ostu- ja müügioptsiooni hinnad peavad rahuldama järgmisi võrratusi:

$$\max\{0, S(0) - Xe^{-rT}\} \leq V_c < S(0),$$

$$\max\{0, -S(0) + Xe^{-rT}\} \leq V_p < Xe^{-rT}.$$

Lähtudes arbitraaživabaduse nõudest ning arvestades optsiooniga seotud väljamakse kuju on lihtne näidata, et alusvara hinna S suurenemine suurendab ostuoptsiooni hinda ning vähendab müügioptsiooni hinda ja täitmishinna X suurendamine vähendab ostuoptsiooni hinda ning suurendab müügioptsiooni hinda.

Ameerika optsiooni korral suureneb optsiooni hind kui optsiooni täitmisaeg T suureneb.

Opsioonide korral kasutatakse ka mõisted *in the money*, *at the money* ning *out of the money*. Hetkel t on optsioon *in the money*, kui optsiooni kohesel realiseerimisel saab optsiooni omanik positiivse rahavoo (nt. ostuoptsioon on hetkel t *in the money* juhul, kui $S(t) > X$). Opsioon on *at the money*, kui $S(t) = X$. Ostuoptsioon on *out the money*, kui $S(t) < X$ ning müügioptsioon juhul, kui $S(t) > X$.

4.3.3 Opsiooni hind Black-Scholes mudeli eeldustel

Opsiooni hinna leidmiseks tuletasid Fisher Black, Myron Scholes ja Robert C. Merton 1970-ndatel aastatel (esimene artikkel 1973, Black&Scholes) nn. Black-Scholesi võrrandi. Eeldused Black-Scholesi võrrandi tuletamisel.

1. Alusvara hinna käitumine. Eeldame et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (4.7)$$

kus μ, σ iseloomustavad vastavalt alusvara hinna keskmist kasvu ajas ning alusvara hinna volatiilsust ning $W(t)$ on **Wieneri protsess**.

Wieneri protsessi $W(t)$ defineeritakse järgmiste omaduste kaudu:

- a) $W(0) = 0$ tõenäosusega 1.
- b) Wieneri protsessi mittelõikuvad juurdekasvud (increments) on sõltumatud, s.t. juhuslikud suurused $W(t+u) - W(t)$ ja $W(s+v) - W(s)$ on sõltumatud, kui lõikude $[t, t+u]$ ja $[s, s+v]$ ühisosa on null.
- c) Wieneri protsessi juurdekasvud $W(t+u) - W(t)$ on normaaljaotusega kesk-
väärtusega 0 ning dispersiooniga u : $W(t+u) - W(t) \sim N(0, u)$.
- d) Wieneri protsessi $W(t)$ on pidev aja t järgi tõenäosusega 1.

Märgime, et Wieneri protsessi saab vaadelda kui juhusliku ekslemise protsessi piirprotsessina. Lihtne on näha, et alusvara hinna liikumist kirjeldava võrrandi (4.7) saab esitada ka kujul

$$d \ln(S(t)) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

2. Lubatud on lühikese positsiooni võtmine turul (s.t on võimalus müüa laenatud aktsiat ning hiljem selle aktsia tagasiostmine ning omanikule tagasiandmine)

3. Puuduvad tehingukulud.

4. Alusvaralt ei maksta dividende optsiooni eluea jooksul.

5. Osta ja müüa võib suvalise reaalarvu väärtipabereid.

6. Arbitraaživõimaluse puudumine turul, s.t. puudub võimalus riskivabalt rohkem tulu teenida, kui riskivaba intressimääraga rahaturule paigutades.

7. Väärtipaberitega kauplemine toimub pidevalt.

8. Riskivaba intressimäär $r = r(t)$ ja alusvara volatiilsus $\sigma = \sigma(t)$ on hetkel $t = 0$ teadaolevad ajast sõltuvad funktsioonid.

Sellistel eeldustel on võimalik tõestada, et optsiooni hind $V = V(S(t), t)$ rahuldab järgmist teist järku osatuletistega (paraboolset tüüpi) diferentsiaalvõrrandit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S(t) \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0.$$

Selleks et sellel diferentsiaalvõrrandil oleks ühene lahend, tuleb ette anda ka lõputingimus.

Euroopa ostuoptsiooni korral teame optsiooni hinda hetkel $t = T$, kus optsiooni hind võrdub optsiooniga seotud maksega, s.t.

$$V_c(S(T), T) = \max\{S(T) - X, 0\}.$$

Müügioptsiooni korral on lõputingimuseks

$$V_P(S(T), T) = \max\{X - S(T), 0\}.$$

Kui riskivaba intressimäär ja alusvara volatiilsus on ajast sõltuvad funktsioonid (või konstandid): $r = r(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, siis Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi

lahendi saab Euroopa optsioonide korral analüütiliselt välja kirjutada ning ostuoptsiooni hind hetkel $t = 0$ on leitav valemiga

$$V_C(0) = S(0)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2),$$

kus

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-0.5y^2) dy$$

on standardiseeritud normaalkaotuse $N(0,1)$ kaotusfunktsioon ning

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S(0)/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Euroopa müügioptsiooni hind on leitav valemiga

$$V_P(0) = Xe^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1).$$

Black-Scholesi mudeli eeldustel kasvab optsiooni hind, kui alusvara volatiilsus suureneb. Riskivaba intressimäär suurenemine suurendab ostuoptsiooni hinda ning vähendab müügioptsiooni hinda.

4.3.4 Eksootilised optsioonid

Lisaks Euroopa ja Ameerika optsioonidele kaubeldakse finantsturgudel ka nn. eksootiliste optsioonidega (*exotic option*), millede korral optsioonidega seotud väljamaksed defineeritakse erinevalt võrreldes tavaliste optsioonidega. Eksootiliste optsioonide üheks alaliigiks on nn. **teest sõltuvad optsioonid** (*path dependent option*), millede korral optsiooniga seotud väljamakse sõltub ka alusvara hinnast optsiooni eluajal. Teest sõltuvate optsioonide hulka kuuluvad barjääriga optsioonid, Aasia optsioonid ja tagasivaatavad optsioonid.

Barjääriga optsioon (*barrier option*).

Barjääriga optsioonide korral toimub optsiooniga seotud väljamakse alles siis, kui alusvara hind jõuab mingi väärtuseni (barjäärini) või siis muutub optsioon väärtusetuks kui jõutakse mingi barjäärini. Barjääriga optsioone võime jagada kaheks: *knock-out* ja *knock-in*. Kui tegemist on *knock-out* optsiooniga, siis optsioon kaotab kehtivuse, kui alusvara hind jõuab etteantud hinnatasemeni enne realiseerimisaega. *Knock-in* optsioon hakkab kehtima, kui vara hind ületab etteantud hinnabarjääri enne täitmisaega. Barjääriga optsiooni korral võib ette anda alumise barjääri $L < S(0)$, ülemise barjääri $H > S(0)$ või mõlemad. Kui etteantud barjäär asub ülalpool alusvara alghinda, on meil tegemist *up*-optsiooniga. Kui aga barjäär asub alusvara alghinnast allpool, nimetame optsiooni *down*-optsiooniks. Selle põhjal võime nii *knock-out* kui ka *knock-in* optsiooni jagada omakorda kaheks:

Up-and-in optsiooni saab realiseerida vaid juhul, kui alusvara hind ületab ülemist barjääri.

Down-and-in optsiooni saab realiseerida ainult siis, kui alusvara hind langeb allapoole alumist barjääri.

Up-and-out optsioon kaotab kehtivuse, kui ülemisest barjäärist jõutakse ülespoole enne eluea lõppu.

Down-and-out optsioon kaotab kehtivuse, kui alumisest barjäärist jõutakse allapoole enne eluea lõppu.

Aasia optsioon (*Asian option*)

Aasia optsiooni puhul sõltub optsiooni väljamakse alusvara keskmisest hinnast (võib olla aritmeetiline või geomeetriline keskmine, võib olla kaalutud või kaalumata keskmine). Aasia optsioonid jagunevad

-Fixed strike Asian option. Seda tüüpi ostuoptsiooniga seotud väljamakse on kujul $\max\{S_{kesk} - X, 0\}$, kus S_{kesk} on alusvara hinna keskmine optsiooni eluea jooksul (perioodil $[0, T]$); analoogilise müügioptsiooni korral on väljamakse kujul $\max\{X - S_{kesk}, 0\}$.

-Floated strike Asian option. Seda tüüpi ostuoptsiooniga seotud väljamakse on kujul $\max\{S_{kesk} - S(T), 0\}$, kus S_{kesk} on alusvara hinna keskmine optsiooni eluea jooksul (perioodil $[0, T]$); analoogilise müügioptsiooni korral on väljamakse kujul $\max\{S(T) - S_{kesk}, 0\}$. Seega vastava optsioonilepingu korral täitmishinda X kokku ei lepita.

Tagasivaatav optsioon (*Lookback option*)

Tagasivaatavate optsioonide korral sõltub väljamakse mitte ainult alusvara hinnast täitmisajal, vaid ka alusvara suurimast või vähimast hinnast optsiooni elueal. Nii nagu Aasia optsiooni korral, on võimalik vaadata 2 tüüpi optsioone.

-Lookback option with fixed strike. Seda tüüpi ostuoptsiooniga seotud väljamakse on kujul $\max\{S_{max} - X, 0\}$, kus S_{max} on alusvara suurim hind optsiooni eluea jooksul; analoogilise müügioptsiooni korral on väljamakse kujul $\max\{X - S_{min}, 0\}$, kus S_{min} on alusvara väikseim hind optsiooni eluea jooksul.

-Lookback option with floated strike. Seda tüüpi ostuoptsiooniga seotud väljamakse on kujul $\max\{S_{max} - S(T), 0\}$; analoogilise müügioptsiooni korral on väljamakse kujul $\max\{S(T) - S_{min}, 0\}$.

Binaarne ehk digitaalne optsioon (*binary or digital option*).

Binaarne optsioon erineb tavalisest optsioonist selle poolest, et väljamakse võib üldjuhul olla suvaline mittenegatiivne funktsioon alusvara hinnast.

cash-or-nothing call: Kui $S > X$, siis väljamakse on $B > 0$ (lepingus kokkulepitud summa); vastasel juhul 0.

asset-or-nothing call: Kui $S > X$, siis väljamakse on S ; vastasel juhul 0.

Valikuoptsioon. (*Chooser option*) annab optsiooni omanikule võimaluse ka-

sutada optsiooni kas ostuoptsioonina täitmishinnaga X_1 täitmisajal T_1 või müü-
giptsioonina täitmishinnaga X_2 täitmisajal T_2 .

4.4 Binoommeetod optsiooni hinna arvutamiseks

Analüütiliselt õnnestub Black-Scholesi võrrand lahendada ning optsiooni hin-
da leida vaid lihtsamate optsioonide korral (Euroopa optsiooni korral, kui riski-
vaba intressimäär ja alusvara volatiilsus on ajast sõltuvad funktsioonid) ning
üldjuhul tuleb optsiooni hinna leidmiseks kasutada erinevaid numbrilisi mee-
todeid. Need meetodid võime jagada kolmeks:

- Võrgumeetodid (ilmutatud ja ilmutamata diferentsmeetod), mis seisnevad
Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi numbrilises lahendamises.
- Binoom- ja trinoommeetoditel põhinevad meetodid
- Monte-Carlo meetod. Monte-Carlo meetodi korral simuleeritakse vasta-
valt eeldustele alusvara hinna käitumise kohta palju erinevaid alusvara
hinna liikumisteid ning optsiooni hind leitakse kui diskonteeritud kesk-
mine optsiooni väljamakse.

Alljärgnevalt vaatleme lähemalt binoom- ja trinoommeetodit. Binoommee-
tod töötati välja Cox, Ross ja Rubinstein poolt 1979.a. ja seetõttu nimetatakse
seda kirjanduses ka CRR-mudeliks. Kui optsiooniga seotud väljamakse sõltub
vaid ühest alusvarast, siis on mõistlik optsiooni hinna leidmiseks vaadelda mu-
delit, kus kaubeldakse vaid selle alusvara ning riskivaba varaga.

4.4.1 Üheperioodiline mudel. Riskineutraalne tõenäosus.

Vaatleme esmalt üheperioodilist mudelit, kus ajahetkedeks on t ja $t + \Delta t$ ning
olgu aeg t mõõdetud aastates. Olgu hetkel t alusvara hind $S = S(t)$ ning riski-
vaba vara hind 1. Siis riskivaba vara hind hetkel $t + \Delta t$ on $e^{r\Delta t}$, kus r on pidev
annualiseeritud intressimäär.

Alusvara hinna kohta eeldame, et hetkel $t + \Delta t$ saab alusvara hind omada vaid
kahte väärtust, kas alusvara hind on US või DS , kus U, D on mingit konstan-
did ning üldsust kitsendamata eeldame, et $U > D$. Eespool nägime, et mudel
on arbitraaživaba siis ja ainult siis, kui leiduvad riskineutraalsed tõenäosused.
Uurime, millistel tingimustel meie mudelis riskineutraalsed tõenäosused ek-
sisteerivad. Riskineutraalsed tõenäosused leitakse tingimusest (vt valem (4.3))

$$E_*(\tilde{S}(t + \Delta t) \mid S(t)) = \tilde{S}(t), \quad (4.8)$$

kus $\tilde{S}(t), \tilde{S}(t + \Delta t)$ on alusvara suhtelised hinnad:

$$\tilde{S}(t) = S(t), \quad \tilde{S}(t + \Delta t) = e^{-r\Delta t} S(t + \Delta t).$$

Tähistame riskineutraalse tõenäosuse tähisega p ning olgu alusvara hind $t + \Delta t$ US tõenäosusega p ning DS tõenäosusega $(1 - p)$. Siis tingimuse (4.8) põhjal saame võrrandi p määramiseks :

$$pUSe^{-r\Delta t} + (1 - p)DSe^{-r\Delta t} = S$$

ehk

$$pU + (1 - p)D = e^{r\Delta t}, \quad (4.9)$$

millest

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - D}{U - D}, \quad 1 - p = \frac{U - e^{r\Delta t}}{U - D}. \quad (4.10)$$

. Selleks, et p oleks riskineutraalne tõenäosus, on vaja veel et kehtiksid võrratused $0 < p < 1$. Need tingimused on täidetud (kontrolli valemi (4.10) põhjal), kui

$$D < e^{r\Delta t} < U \quad \text{ehk} \quad \ln(D) < r\Delta t < \ln(U). \quad (4.11)$$

Seega kui valida U, D nii, et on täidetud võrratused (4.11), siis mudel on arbitraaživaba. Et riskineutraalne tõenäosus on üheselt määratud, siis ka kõigi juhuslike tulevaste rahavoogude hind on üheselt määratud. Olgu $V(t, S)$ opt-siooni hind hetkel t ning alusvara hinna S korral. Siis kehtib valem

$$V(t, S) = e^{-r\Delta t}(pV(t + \Delta t, US) + (1 - p)V(t + \Delta t, DS)).$$

Tingimus parameetrite määramiseks.

Konstandid U ja D määrame nii, et alusvara hinna volatiilsus mudelis vastaks tegelikule alusvara hinna volatiilsusele. Kui eeldada, et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (4.12)$$

ehk $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$, siis saab näidata et mudelis peab alusvara hinna dispersioon rahuldama järgmist tingimust:

$$\text{Var}\left(\frac{S(t + \Delta t) - S}{S}\right) = \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t).$$

kus $\text{Var}(X)$ on juhusliku suuruse X dispersioon ning $o(\Delta t)$ on lõpmata väike suurus Δt suhtes, s.t

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0, \quad \text{kui} \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Arvestades, et

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X),$$

kus a, b on konstandid ning valemit

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2,$$

siis saame teisendada:

$$\text{Var}\left(\frac{S(t + \Delta t) - S}{S}\right) = \frac{1}{S^2} \text{Var}(S(t + \Delta t)) =$$

$$\frac{1}{S^2}(p(US)^2 + (1-p)(DS)^2 - (pUS + (1-p)DS)^2) =$$

$$pU^2 + (1-p)D^2 - (pU + (1-p)D)^2 = pU^2 + (1-p)D^2 - e^{2r\Delta t},$$

s.t. parameetrid U, D tuleb mudelis valida nii, et kehtiks võrdus

$$pU^2 + (1-p)D^2 - e^{2r\Delta t} = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t). \quad (4.13)$$

Näitame nüüd, et kui valida parameetrid U, D vastavalt valemitele (CRR valemid)

$$U = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad D = 1/U = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (4.14)$$

siis võrdus (4.13) kehtib. Esmalt paneme tähele, et

$$pU^2 + (1-p)D^2 = p(U^2 - D^2) + D^2 = \frac{e^{r\Delta t} - D}{U - D}(U^2 - D^2) + D^2 =$$

$$(e^{r\Delta t} - D)(U + D) + D^2 = e^{r\Delta t}(U + D) - DU - D^2 + D^2 = e^{r\Delta t}(U + D) - 1.$$

Kasutame nüüd Taylori valemit

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2!} + o(h^2).$$

Siis kasutades võrdusi

$$U + D = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + 0.5\sigma^2\Delta t + o(\Delta t) + 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + 0.5\sigma^2\Delta t + o(\Delta t) =$$

$$2 + \sigma^2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + o(\Delta t), \quad e^{2r\Delta t} = 1 + 2r\Delta t + o(\Delta t)$$

ning asendades need avaldisse (4.13) (sealjuures arvestades, et $o(\Delta t) \pm o(\Delta t) = o(\Delta t)$), saame

$$pU^2 + (1-p)D^2 - e^{2r\Delta t} = e^{r\Delta t}(U + D) - 1 - e^{2r\Delta t} =$$

$$(1 + r\Delta t + o(\Delta t))(2 + \sigma^2\Delta t + o(\Delta t)) - 1 - (1 + 2r\Delta t + o(\Delta t)) =$$

$$2 + \sigma^2\Delta t + 2r\Delta t + o(\Delta t) - 1 - 1 - 2r\Delta t + o(\Delta t) = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t),$$

mis näitab, et võrdus (4.13) kehtib. Märgime, et kui valida parameetrid U, D vastavalt valemile (4.14) ning kuna

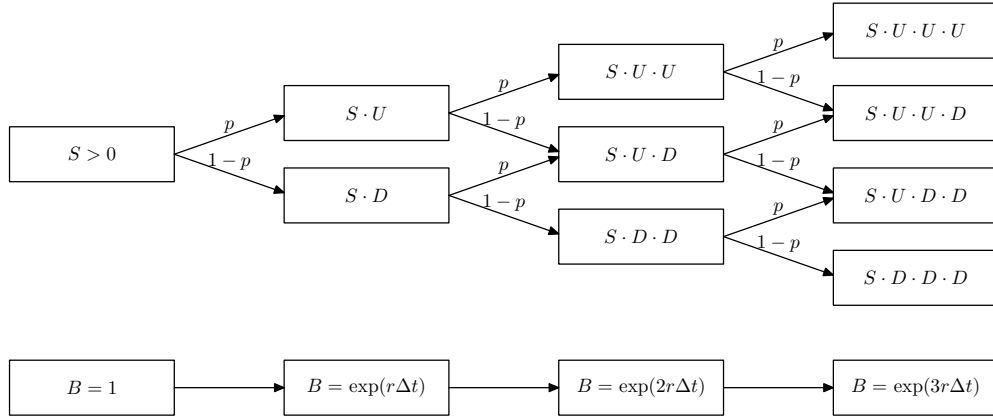
$$-\sigma\sqrt{\Delta t} < r\Delta t < \sigma\sqrt{\Delta t},$$

kui Δt on piisavalt väike, siis on võrratused (4.11) piisavalt väikse Δt korral alati täidetud. Seega kokkuvõttes saime, et kui valida parameetrid U, D vastavalt valemile (4.14), siis mudel on arbitraaživaba ja alusvara hinna käitumine mudelis vastab eeldusele (4.12).

Märgime veel, et tingimus (4.13) ei määra parameetreid U, D üheselt; näiteks võib U, D valida ka vastavalt valemitele (Jarrow-Rudd valemid)

$$U = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad D = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

ning ka sel juhul on tingimus (4.13) täidetud.



Joonis 4.5: Binoommeetod

4.4.2 Binoommeetod

Binoommudel koosneb identsetest eelnevalt vaadeldud üheperioodilistest mudelitest. Olgu optsiooni eluiga $[0, T]$ ning alusvara hind S hetkel $t = 0$. Anna me ette täisarvu N ning jagame optsiooni eluea N võrdseks osaks. Tähistame $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Paneme tähele et hetkel $T = N\Delta t$ saab alusvara hind omada väärtusi $U^j D^{N-j} S, j = 0, 1, 2, \dots, N$ ning hetkel $t = m\Delta t$ saab alusvara hind omada väärtusi $U^j D^{m-j} S, j = 0, 1, 2, \dots, m, 0 \leq m \leq N$. Olgu $V_{m,j}$ optsiooni hind hetkel $t = \Delta t$ ning alusvara hinna $U^j D^{m-j} S$ korral. Optsiooni hind hetkel $T = N\Delta t$ on võrdne optsiooniga seotud väljamaksega, s.t.

$$V_{N,j} = \max\{U^j D^{N-j} S - X, 0\}$$

ostuoptsiooni korral ning

$$V_{N,j} = \max\{X - U^j D^{N-j} S, 0\}$$

müügioptsiooni korral.

Teades optsiooni hinda hetkel T , on võimalik leida Euroopa optsiooni hinda rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes vastavalt valemile

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}), \quad 0 \leq j \leq m, m = N-1, N-2, \dots, 1, 0,$$

Opsiooni hind $V_{0,0}$ ongi optsiooni hind hetkel $t = 0$.

Saab tõestada, et kui $N \rightarrow \infty$, siis binoommeetodiga leitud optsiooni hind $V_{0,0}^{(N)}$ koondub Black-Scholesi valemite põhjal leitud optsiooni hinnale, s.t. Euroopa ostuoptsiooni korral

$$V_{0,0}^{(N)} \rightarrow V_C(0) = S(0)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \quad \text{kui } N \rightarrow \infty$$

ning Euroopa müügioptsiooni korral

$$V_{0,0}^{(N)} \rightarrow V_P(0) = Xe^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1), \quad \text{kui } N \rightarrow \infty$$

Ameerika optsiooni hinna leidmine

Vaatleme nüüd Ameerika optsiooni hinna leidmist binoommeetodiga. Kas sel juhul leitakse optsiooni hind rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes. Kuid Ameerika optsiooni korral on optsiooni hind $V_{m,j}$, $0 < m < N$ võrdne maksimumiga kahest suurusest: a) Optsiooni hinnast $W_{m,j}$ juhul, kui optsiooni hoitakse vähemalt ajahetkeni $(m+1)\Delta t$. Selle saame leida vastavalt valemile

$$W_{m,j} = e^{-r\Delta t}(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j})$$

b) Optsiooni hinnast ehk väljamaksest $P_{m,j}$ juhul, kui realiseerime optsiooni hetkel $m\Delta t$, kus

$$P_{m,j} = \max\{U^j D^{m-j} S - X, 0\}$$

ostuoptsiooni korral ning

$$P_{m,j} = \max\{X - U^j D^{m-j} S, 0\}$$

müügioptsiooni korral. Kokkuvõttes saame Ameerika optsiooni hinna ajas rekursiivselt tagant ettepoole liikudes hinna vastavalt valemitele:

$$V_{m,j} = \max\{P_{m,j}, W_{m,j}\} = \max\{P_{m,j}, e^{-r\Delta t}(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j})\},$$

$$0 \leq j \leq m, m = N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

Trinoommeetod

Trinoommeetod koosneb samuti identsetest üheperioodilistest mudelitest, kuid alusvara hind võib igal järgmisel sammul omada kolme erinevat väärtust, kas US , S või DS . Kui valida $D = 1/U$, siis hetkel $T = N\Delta t$ saab alusvara hind omada $2N+1$ erinevat väärtust $U^j S$, $j = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N$ (meenutame, et binoommeetodi korral saab alusvara hind hetkel $T = N\Delta t$ omada $N+1$ erinevat väärtust). Trinoommeetodi parameetriteks saab võtta näiteks

$$U = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad D = 1/U = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

ning sel juhul riskineutraalsed tõenäosused on kujul

$$p_U = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - \sqrt{D}}{\sqrt{U} - \sqrt{D}} \right)^2.$$

$$p_D = \left(\frac{\sqrt{U} - e^{r\Delta t/2}}{\sqrt{U} - \sqrt{D}} \right)^2, \quad p_M = 1 - p_U - p_D$$

Siin p_U, p_D, p_M on vastavalt hinna üles- ja allaliikumise ning hinna samaks jäämise tõenäosused.

4.5 Forwardid ja futuurid.

4.5.1 Forwardlepingud

Forward (*forward contract*) on kokkuleppe osta või müüa mingit vara fikseeritud kuupäeval, edaspidi **tarneaajal** (*delivery time*) tulevikus kokkulepitud hinnaga (*forward price*). Lepingu osapool, kes nõustub müüma vara, võtab nn. lühikese positsiooni (*short forward position*) ning osapool, kes ostab vara, võtab nn. pika positsiooni (*long forward position*). Forwardlepingute kasutamise mõtte seisneb selles, et maandada riskantse vara ostu-müügiga seotud hinnariski. Tavaliselt on tegemist mingi toorainega või põllumajandustootega, aga samuti võib olla tegu näiteks aktsiatega või valuutaga.

Olgu forwardlepingu sõlmimise aeg $t = 0$, tarneaeg $t = T$ ning tähistame hetkel $t = 0$ kokkulepitud forwardhinna tähisega $F(0, T)$. Olgu hetkel t alusvara hind $S(t)$. Forwardlepingu pika positsiooni omanik saab lepingust tulu juhul, kui $F(0, T) < S(T)$ ning kahju, kui $F(0, T) > S(T)$, lühikese positsiooni omanik aga saab tulu, kui $F(0, T) > S(T)$ ning kannab rahalist kahju kui $F(0, T) < S(T)$. Oletame, et forwardlepingu sõlmimise hetkel lepingu osapooled rahavoogusid ei vaheta (forwardlepingu väärtus ajal $t = 0$ on null) ning uurime, milline peaks sel juhul olema forwardhind. Olgu r pidev annualiseeritud riskivaba intressimäär. Siis juhul, kui vara pealt ei maksta dividende, on forwardhind esitatav kujul

$$F(0, T) = S(0)e^{rT} \quad (4.15)$$

Üldjuhul, kui leping sõlmitakse ajahetkel $t \leq T$, siis forwardhind on kujul

$$F(t, T) = S(0)e^{r(T-t)}$$

Valemi (4.15) saab tõestada arbitraaživabaduse nõudest lähtuvalt.

Oletame esmalt, et $F(0, T) > S(0)e^{rT}$.

Siis hetkel $t = 0$:

- Laenama rahasumma $S(0)$ kuni ajani T ;
- Ostame ühe ühiku alusvara hinnaga $S(0)$;
- Võtame lühikese positsiooni forwardlepingus, s.t. kohustume müüma hetkel $t = T$ alusvara hinnaga $F(0, T)$.

Ajahetkel $t = T$:

- Müüme forwardlepingu kohaselt alusvara hinnaga $F(0, T)$;
- Maksame tagasi laenu koos intressidega summas $S(0)e^{rT}$;
- Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas $F(0, T) - S(0)e^{rT} > 0$ ning strateegia on arbitraažistrateegia.

Oletame nüüd, et $F(0, T) < S(0)e^{rT}$. Siis hetkel $t = 0$:

- Müüme ühe ühiku alusvara hinnaga $S(0)$ (s.t. võtame lühikese positsiooni);
- Hoiustame müügist saadud raha $S(0)$ panka kuni ajani T ;
- Võtame pika positsiooni forwardlepingus, s.t. kohustume ostma hetkel $t = T$ alusvara hinnaga $F(0, T)$.

Ajahetkel $t = T$:

- Saame pangast summa (koos intressidega) $S(0)e^{rT}$;
- Ostame forwardlepingu kohaselt alusvara hinnaga $F(0, T)$;
- Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas $S(0)e^{rT} - F(0, T) > 0$.

Märkus 1. Kui lühikeseks müümine on kitsendatud, siis võrratus $F(0, T) < S(0)e^{rT}$ ei pruugi arbitraaživõimalust tekitada.

Märkus 2. Kui pideva intressimäära asemel kasutada aastast liitintressimäära r ning kapitalisatsiooniperioodide arv aastas on m , siis

$$F(0, T) = S(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}.$$

Kui alusvara pealt makstakse ajahetkel t , $0 < t < T$, dividende summas D , siis arbitraaživaba forwardhind on esitatav kujul

$$F(0, T) = (S(0) - e^{-rt}D)e^{rT}.$$

Näitame, et võrratuse $F(0, T) > (S(0) - e^{-rt}D)e^{rT}$ korral saame leida arbitraažistrateegia.

Siis hetkel $t = 0$:

- Laename rahasumma $S(0)$ kuni ajani T ;
- Ostame ühe ühiku alusvara hinnaga $S(0)$;
- Võtame lühikese positsiooni forwardlepingus, s.t. kohustume müüma hetkel $t = T$ alusvara hinnaga $F(0, T)$;

Ajahetkel t saame dividende summas D ning hoiustame summa panka ajani T .

Ajahetkel $t = T$:

- Müüme forwardlepingu kohaselt alusvara hinnaga $F(0, T)$;
- Maksame tagasi laenu koos intressidega summas $S(0)e^{rT}$;

- Saame dividendide eest summa $De^{r(T-t)}$;
- Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas

$$F(0, T) - S(0)e^{rT} + De^{r(T-t)} = F(0, T) - (S(0) - De^{-rt})e^{rT} > 0.$$

Ülesanne 1. Konstrueerida arbitraažistrateegia juhul $F(0, T) < (S(0) - e^{-rt}D)e^{rT}$.

Kui alusvaralt makstakse pidevalt dividende määraga r_{div} , siis

$$F(0, T) = S(0)e^{(r-r_{div})T}.$$

Forwardlepingu sõlmimisel on lepingu väärtus null. Kuid aja möödudes, kui alusvara hind muutub, ei pruugi forwardlepingu (kus forwardhinnaks on $F(0, T)$) väärtus enam null olla. Olgu $V(t)$ sellise forwardlepingu väärtus pika positsiooni võtja jaoks. Siis forwardlepingu väärtus ajahetkel t on esitatav valemiga

$$V(t) = (F(t, T) - F(0, T))e^{-r(T-t)}.$$

Näitame, et juhul $V(t) < (F(t, T) - F(0, T))e^{-r(T-t)}$ saame konstrueerida arbitraažistrateegia:

Ajahetkel t :

- Laenama rahasumma $V(t)$ kuni ajani T ;
- Saadud rahaga võtame pika positsiooni forwardhinnaga $F(0, T)$;
- Võtame lühikese positsiooni forwardhinnaga $F(t, T)$; selle lepingu korral kulusid ei ole.

Ajahetkel $t = T$:

- Ostame alusvara hinnaga $F(0, T)$;
- Müüme alusvara hinnaga $F(t, T)$;
- Maksame tagasi laenu koos intressidega summas $V(t)e^{r(T-t)}$;
- Kokkuvõttes saame riskivaba tulu summas

$$F(t, T) - F(0, T) - V(t)e^{r(T-t)} > 0.$$

Ülesanne 2. Konstrueerida arbitraažistrateegia juhul $V(t) > (F(t, T) - F(0, T))e^{-r(T-t)}$.

Märkus 3. Kui sõlmitakse forwardleping, kus forwardhinnaks on $F(0, T)$ asemel X , siis sellise lepingu väärtus ajal t on

$$V(t) = (F(t, T) - X)e^{-r(T-t)}$$

ja erijuhul $t = 0$ on väärtuseks $V(0) = (F(0, T) - X)e^{-rT}$.

4.5.2 Futuurid

Üks forwardlepingu osalistest saab alati kahju ning seetõttu on võimalus, et see osapool, kes kahju kannab, ei suuda oma kohustust täita. Futuurlepingud on nn. standardiseeritud forwardlepingud, mis elimineerivad sellise riski. Vaatame ajahetki $t = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N$, tavaliselt τ on võrdne ühe päevaga. Olgu $T = N\tau$. Nii nagu forwardlepingud nii ka futuurlepingud sõlmitakse mingi vara ostmiseks-müümiseks kindlaksmääratud ajal ja kindlaksmääratud hinnaga. Olgu $f(n, T)$ futuuri hind ajahetkel $t = n\tau$. Need hinnad ei ole teada ajahetkel $t = 0$ (v.a. hind $f(0, T)$) ning me saame neid hindu käsitleda kui juhuslikke suurusi. Forwardlepingute (forwardhinnaga $F(0, T)$) puhul ei maksa nende sõlmimine midagi (lepingu osapooled ei vaheta rahavoogusid) ning rahavoogusid ei vahetata ka enne forwardtehingu lõppu. Futuurlepinguga kaasneb aga iga päevane nn. **turumärkimise protseduur** (*marking to market*) ning juhuslik rahavoog igal ajahetkel $t = n\tau, n = 1, 2, \dots, N$. Futuurlepingu pika positsiooni omanik saab igal ajahetkel $t = n\tau$ rahasumma $f(n, T) - f(n-1, T)$, kui see on positiivne ning peab maksma sellise summa, kui $f(n, T) - f(n-1, T)$ on negatiivne. Sealjuures:

- Futuuri hind $f(T, T)$ tarneajal on võrdne alusvara hinnaga $S(T)$.
- Igal ajahetkel $t = n\tau, n = 1, 2, \dots, N$ on futuuri väärtus null.

Selleks, et kohustused, mis on seotud futuuride omamisega, oleks täidetud, kasutatakse teatavaid regulatsioone. Iga investor, kes siseneb futuuride turule, peab maksma deposiidi (*initial margin*), mida kasutatakse summade-ga $f(n, T) - f(n-1, T)$ arveldamiseks igal perioodil. Pika positsiooni korral $f(n, T) - f(n-1, T)$ lisatakse deposiidile, kui $f(n, T) - f(n-1, T) > 0$ ning vastasel juhul võetakse deposiidist maha. Kui deposiit langeb alla mingisuguse taseme (*maintenance margin*), siis tehakse investorile nn. *margin call* ning investor peab tegema deponeerima täiendava summa. Deposiidi algtaset ületava summa võib aga investor välja võtta. Futuuriga seotud positsiooni võib investor sulgeda igal ajahetkel ning sel juhul deposiit tagastatakse investorile. Eriju-hul lõpetatakse futuurleping automaatselt, kui investor ei vasta *margin call*-ile ning ei deponeeri täiendavat summat.

Näide 1. Oletame, et *initial margin* on 10% ning *maintenance margin* on 5% futuurhinnast. Järgmine tabel kujutab üht võimalikku stsenaariumi futuur-hindade kujunemisest

Futuuride turu oluline omadus on likviidsus. See on võimalik tänu stan-dardiseerimisele ja nn. **arvelduskoja** (*clearing house*) olemasolule, kes tege-leb deposiitide hoidmisega. Reeglina on võimalik sõlmida vaid kindlate tarne-aegadega futuurlepinguid. Samuti arvestatakse standardiseeritult ka alusvara hoidmise ja tarnimisega seotud kulusid.

Teatavatel tingimustel on forvardi ja futuuride hinnad samad. Nimelt, kui int-ressimäär on ajas konstantne, siis saab tõestada, et

$$f(0, T) = F(0, T)$$

n	$f(n, T)$	Rahavoog	Deposiit perioodi algul enne makset	Makse investori (pikk positsioon) seisukohalt	Deposiit perioodi lõpul
0	140	Avamine	0	-14	14
1	138	-2	12	0	12
2	130	-8	4	-9	13
3	140	+10	23	+9	14
4	150	+10	24	+9	15
sulgemine			15	+15	0
			Kokku	+10	

ning $f(t, T) = F(t, T) = S(t)e^{r(T-t)}$ ajahetkel $t > 0$. Turul noteeritud futuuride hinnad võivad sellest erineda, kuna investorite ootused tuleviku intressimäärade kohta muutuvad ajas.

Investor, kes oletab, et alusvara hind tõuseb riskivabast intressimäärast kiiremini, peab kasumi saamiseks võtma futuuride turul pika positsiooni, kes aga panustab alusvara hinna langusele, peaks võtma lühikese positsiooni.

4.6 Riskide maandamine

4.6.1 Optsioonide väljaandmisega seotud riskide maandamine

Euroopa ostuoptsiooni väljaandmisel (müümisel) on müüja kasum/kahjum

$$V_C e^{rT} - (S(T) - X)_+$$

ning näeme, et kahjum võib olla kuitahes suur kui alusvara hind $S(T)$ kasvab; Euroopa müügioptsiooni väljaandja kasum/kahjum

$$V_P e^{rT} - (X - S(T))_+$$

ei saa küll olla lõpmatu suur, kuid võib olla ikkagi väga suur võrreldes võimaliku tuluga. Seega optsioonide väljaandmisel on oluline riske maandada. Osutub, et optsioonide väljaandmisega seotud riske ei ole võimalik maandada ühe konkreetse väärtpaberiportfelliga, mida hoiame kogu optsiooni eluea, vaid portfelli on vaja muuta pidevalt, kui alusvara hind muutub. Vaatleme portfelli, mis koosneb mingist derivatiivist, võlakirjadest (riskivaba rahapaigutus) ning aktsiast, mis on antud derivatiivi alusvara. Üldsust kitsendamata eeldame, et võlakirja hind on 1. Siis portfelli väärtus on leitav valemiga

$$V(S) = xS + y + zD(S),$$

kus $D(S)$ on derivatiivi hind, S on alusvara hind ning x, y, z on vastavalt aktsiate, võlakirjade ning derivatiivide kogus portfellis. Kui me anname ühe derivatiivi välja (võtame lühikese positsiooni), siis $z = -1$ ning

$$V(S) = xS + y - D(S). \quad (4.16)$$

Kokkuvõttes sõltub selle portfelli väärtus aktsia hinnast. Aktsia hinna väikeste muutuste (ΔS võrra) korral kasutame ligikaudset võrdust

$$\Delta V(S) \approx \Delta S \frac{dV(S)}{dS}.$$

Suurust $\frac{dV(S)}{dS}$ nimetatakse portfelli **deltaks** ning strateegiat, kus portfelli muudetakse kogu aeg nii, et $\frac{dV(S)}{dS} = 0$, nimetatakse riskide **delta-maandamiseks** (*delta hedging*). Võrdusest (4.16) saame

$$\frac{dV(S)}{dS} = x - \frac{dD(S)}{dS}$$

ning seega delta-maandamise korral tuleb aktsia kogus x portfellis hoida võrdse suurusena $\frac{dD(S)}{dS}$. Euroopa optsioonide hind on leitav Black-Scholesi valemitega ning saab näidata, et ostuoptsiooni korral

$$\frac{dD(S)}{dS} = \frac{dV_C(S)}{dS} = N(d_1)$$

ning müügioptsiooni korral

$$\frac{dD(S)}{dS} = \frac{dV_P(S)}{dS} = -N(-d_1).$$

Seega Euroopa ostuoptsiooni korral $x = N(d_1)$ ning aktsia hinna tõustes tuleb suurendada ka vastava aktsia kogust portfellis, müügioptsiooni korral aga tuleb aktsia hinna tõustes vähendada aktsia kogust portfellis. Võlakirjade kogus portfellis võime valida nii, et portfelli hind on null, seega ostuoptsiooni korral

$$y = D(S) - xS = V_C(S) - N(d_1)S = -Xe^{-rT}N(d_2).$$

Teame, et optsiooni hind ning seega ka riski maandava portfelli hind võib sõltuda ka muudest parameetritest: üldjuhul $V = V(S, t, \sigma, r)$. Finantsmatemaatikas kasutatakse vastavate osatuletiste tähistamiseks järgnevaid tähiseid:

$$\text{Delta} = \frac{\partial V}{\partial S};$$

$$\text{Gamma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2};$$

$$\text{Theta} = \frac{\partial V}{\partial t};$$

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma};$$

$$\text{Rho} = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Kasutades Tayloriga valemiga, saame portfelli väärtuse muutuse esitada ligikaudse võrdusena kujul

$$\Delta V \approx \text{Delta} * \Delta S + \text{Theta} * \Delta t + \text{Vega} * \Delta \sigma + \text{Rho} * \Delta r + 0.5 \text{Gamma} * (\Delta S)^2.$$

Kõigi nende riskide puhul on portfelli maandatud, kui muudame ajas portfelli nii, kõik vastavad osatuletised on nullid. See on aga praktikas liiga keeruline, kuid praktikas võime vaadelda näiteks delta-gamma riskide maandamist või delta-vega riskide maandamist.

4.6.2 Spekuleerimine derivatiividega

Vaatleme nüüd mõningaid strateegiaid kasumi saamiseks derivatiividega spekulatsioonil, kui investoril on mingi kindel veendumus aktsia hinna käitumise kohta tulevikus.

A. Investor usub, et aktsia hind kasvab mõõdukalt. Sellisel juhul on mõistlik teha järgmised tehingud (nimetus – *bull-spread*):

- a) Osta ostuoptsioon täitmishinnaga X' ;
- b) Müüa ostuoptsioon täitmishinnaga $X'' > X'$.

Siis investori kasumifunktsioon on kujul

$$K = [S(T) - X']_+ - V_{C'}e^{rT} - ([S(T) - X'']_+ - V_{C''}e^{rT}),$$

kus $V_{C''} < V_{C'}$. Seega juhul $S(T) \geq X''$ saame

$$K = X'' - X' + (V_{C''} - V_{C'})e^{rT};$$

juhul $X' < S(T) < X''$ saame

$$K = S(T) - X' + (V_{C''} - V_{C'})e^{rT};$$

ning juhul $S(T) \leq X'$ saame

$$K = (V_{C''} - V_{C'})e^{rT}.$$

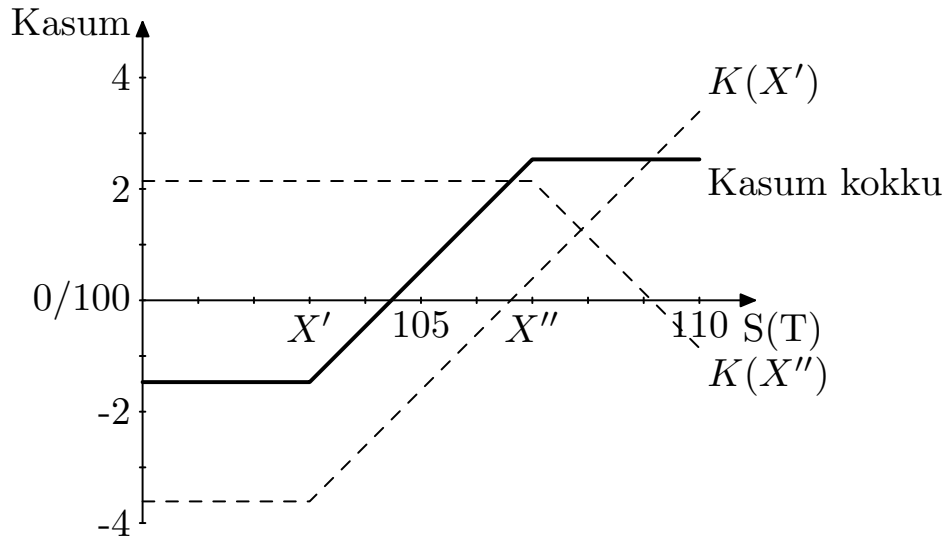
Üksikute tehingute ning kogutehingu kasumifunktsioonid sõltuvalt hinnast $S(T)$ ($S(T)$ on kujutatud x-teljel) on toodud joonisel 4.6.

B. Investor usub, et aktsia hind langeb mõõdukalt. Sellisel juhul on mõistlik teha järgmised tehingud (nimetus – *bear-spread*).

- a) Müüa ostuoptsioon täitmishinnaga X' ;
- b) Osta ostuoptsioon täitmishinnaga $X'' > X'$.

Siis investori kasumifunktsioon on kujul

$$K = -([S(T) - X']_+ - V_{C'}e^{rT}) + ([S(T) - X'']_+ - V_{C''}e^{rT}),$$



Joonis 4.6: *Bull-spread*

kus $V_{C''} < V_{C'}$. Seega juhul $S(T) \geq X''$ saame

$$K = X'' - X' + (V_{C'} - V_{C''})e^{rT};$$

juhul $X' < S(T) < X''$ saame

$$K = X' - S(T) + (V_{C'} - V_{C''})e^{rT};$$

ning juhul $S(T) \leq X'$ saame

$$K = (V_{C'} - V_{C''})e^{rT}.$$

Üksikute tehingute ning kogutehingu kasumifunktsioonid sõltuvalt hinnast $S(T)$ ($S(T)$ on kujutatud x-teljel) on toodud joonisel 4.7.

C. Investor usub, et aktsia hind jääb enam-vähem samaks. Sellisel juhul on mõistlik teha järgmised tehingud (nimetus – *butterfly*):

- Osta kaks ostuoptsiooni vastavalt täitmishindadega X' ja $X''' > X'$;
- Müüa kaks ostuoptsiooni täitmishinnaga X'' , kusjuures $X' < X'' < X'''$.

Siis investori kasumifunktsioon on kujul

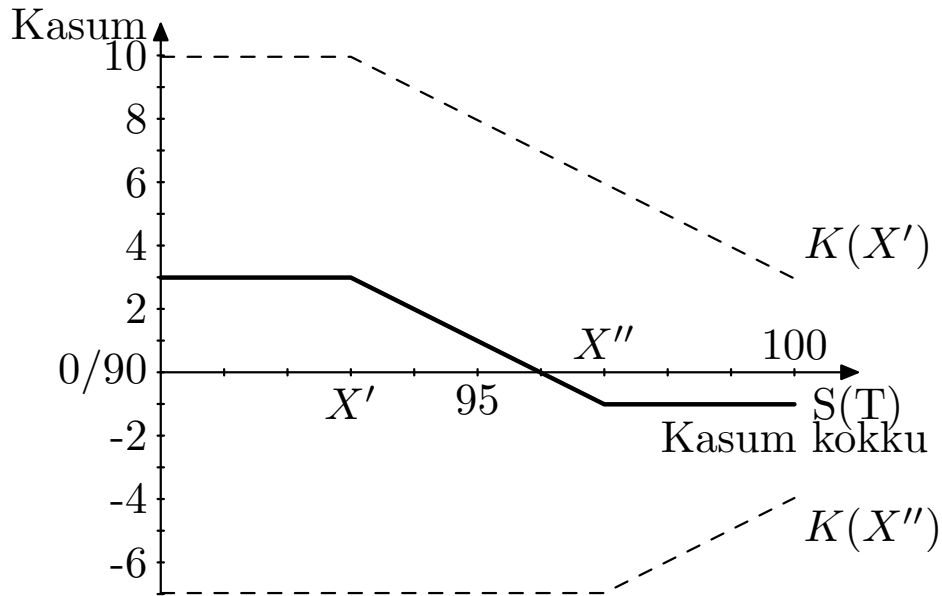
$$K = ([S(T) - X']_+ - V_{C'}e^{rT}) + ([S(T) - X''']_+ - V_{C'''}e^{rT}) - 2([S(T) - X'']_+ - V_{C''}e^{rT}),$$

kus $V_{C'''} < V_{C''} < V_{C'}$. Vaatleme kasumifunktsiooni lähemalt kui $X'' = (X' + X''')/2$. Seega juhul $S(T) \geq X'''$ saame

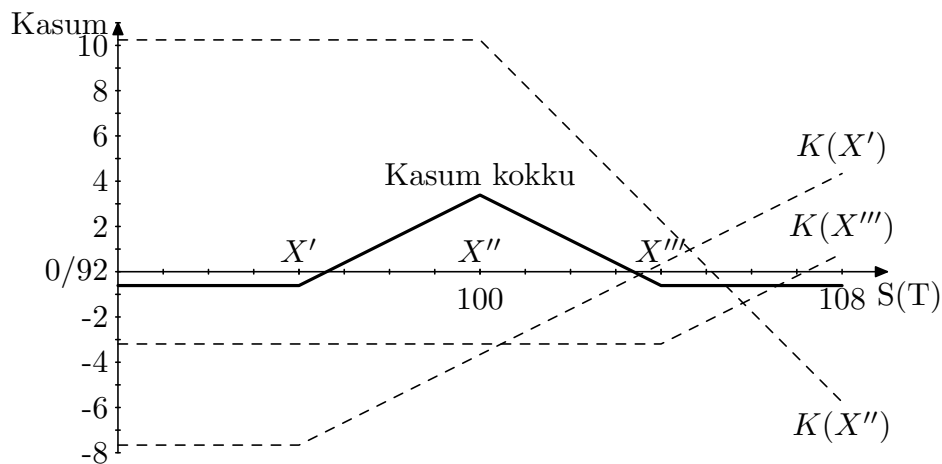
$$K = (2V_{C''} - V_{C'} - V_{C'''})e^{rT};$$

juhul $X'' \leq S(T) < X'''$ saame

$$K = 2X'' - X' - S(T) + (2V_{C''} - V_{C'} - V_{C'''})e^{rT};$$



Joonis 4.7: *Bear-spread*



Joonis 4.8: *Butterfly*

juhul $X' < S(T) < X''$ saame

$$K = S(T) - X' + (2V_{C''} - V_{C'} - V_{C'''})e^{rT};$$

juhul $S(T) \leq X'$ saame

$$K = (2V_{C''} - V_{C'} - V_{C'''})e^{rT}.$$

Üksikute tehingute ning kogutehingu kasumifunktsioonid sõltuvalt hinnast $S(T)$ ($S(T)$ on kujutatud x-teljel) on toodud joonisel 4.8.

Reverse butterfly - saame panustada sellele, et aktsia hind ei jää enam-vähem samaks.

Kasutatud kirjandus

1. Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering. Marek Capinski, Tomasz Zastawniak, Springer-Verlag London Limited, 2003.
2. Financial Engineering and Computation Principles, Mathematics, Algorithms. Yuh-Dauh Lyuu, Cambridge University Press, 2001.
3. Finantsmatemaatika elemendid. Ants Aasma, Jüri Kurvits.
4. Finantsturud ja -institutsioonid. Andro Roos, Priit Sander, Maire Nurmet, Nadežda Ivanova. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2014.
5. Investeeringute matemaatika alused. Ants Aasma, Jüri Kurvits, Maria Zeltser, Tallinn, Argo, 2015.