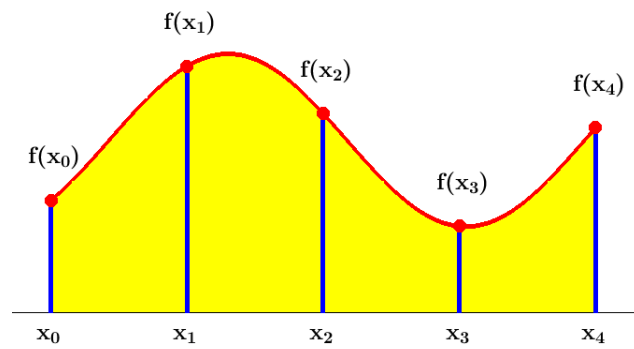


MTMM.00.340
Kõrgem matemaatika I



2022/2023 õa
sügissemester

Ülesannete kogu

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{array}{lll} (Const)' = 0 & (\sin x)' = \cos x & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' = -\sin x & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (e^x)' = e^x & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' = a^x \ln a & (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\ (\ln |x|)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & \end{array}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{array}{ll} (1) \int 0 \, dx = C & (7) \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ (2) \int dx = x + C & (8) \int \cos x \, dx = \sin x + C \\ (3) \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & (9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\ (4) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & (10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \\ (5) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & (11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ (6) \int e^x \, dx = e^x + C & (12) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \end{array}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1	Absoluutväärtus. Vektorite skalaarkorrutus. Vektorite vaheline nurk	2
1.1	Reaalarvu absoluutväärtus	2
1.2	Summa sümbol	2
1.3	Vektorite skalaarkorrutus	3
1.4	Vektorite vaheline nurk, ristprojektsioon	4
2	Vektorkorrutus ja segakorrutus	5
2.1	Vektorkorrutus	5
2.2	Segakorrutus	6
3	Sirge ja tasandi võrrandid	8
3.1	Tasandi võrrand	8
3.2	Sirge võrrand ruumis	9
4	Kompleksarvu algebraline kuju	10
4.1	Kompleksarvu algebraline kuju	10
4.2	Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul	11
5	Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju	12
5.1	Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju	12
5.2	Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul	13
5.3	Rakenduslikud ülesanded	14
6	Kompleksarvu astendamine ja juurimine	15
6.1	Kompleksarvu astendamine ja juurimine	15
6.2	Algebraaliste võrrandite lahendamine	16
7	Funktsioonid	17
7.1	Funktsionaalsed sõltuvused	17
7.2	Funktsioonide graafikud	17
7.3	Funktsioonid ja nende omadused	19
8	Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmfunksioon	20
8.1	Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon	20
8.2	Eksponentfunksioon	20
8.3	Logaritmfunksioon	21
8.4	Logistiline kõver	22
9	Funktsiooni piirväärtus	23
9.1	Piirväärtuse omadused	24
9.2	Piirväärtuse arvutamine	24
9.3	Mõned erilised piirväärtused	25
9.4	Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded	26

9.5 Rakenduslikud ülesanded	26
10 Pidevus. Tuletis	27
10.1 Pidevad ja katkevad funktsioonid	27
10.2 Funktsiooni tuletis	28
10.3 Liitfunktsiooni tuletis	29
10.4 Kõrgemat järku tuletis	31
10.5 Logaritmiline diferentseerimine	31
11 Diferentsiaal	32
11.1 L'Hospitali reegel	32
11.2 Funktsiooni diferentsiaal	32
11.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine	33
11.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	33
12 Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine	34
12.1 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus	34
12.2 Joone puutuja ja normaal	34
12.3 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõguspiirkonnad	35
12.4 Ekstreemumid	36
12.5 Optimeerimine	37
12.6 Graafiku asümptootid	38
13 Määramata integraal	39
13.1 Määramata integraali mõiste	39
13.2 Määramata integraali leidmine	39
13.3 Diferentsiaali märgi alla viimine	40
13.4 Muutujavahetus	41
14 Kontrolltöö nr. 1	42
15 Ositi integreerimine	43
15.1 Ositi integreerimine	43
15.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	44
16 Diferentsiaalvõrrandid	45
16.1 Harilikud diferentsiaalvõrrandid	45
16.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend	45
16.3 Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	46
16.4 Rakenduslikud ülesanded	47
17 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	49
17.1 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	49
17.2 Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine	49
17.3 Rakenduslikud ülesanded	50
18 Maatriksid	51
18.1 Maatriksid	51
18.2 Tehted maatriksitega	51
18.3 Maatriksite korrutamine	52
18.4 Maatrikstehete omadused	53
18.5 Rakenduslikud ülesanded	54

19 Determinandid	55
19.1 Determinandi arvutamine	55
19.2 Determinantide omadused	56
19.3 Determinantide arendamine	57
19.4 Rakenduslikud ülesanded	58
20 Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine	59
20.1 Pöördmaatriks	59
20.2 Pöördmaatriksi leidmine	60
20.3 Maatriksvõrrandite lahendamine	61
20.4 Rakenduslikud ülesanded	62
21 Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid	63
21.1 Maatriksi astak	63
21.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend	63
21.3 Gaussi elimineerimismeetod	64
21.4 Crameri valemid	66
21.5 Rakenduslikud ülesanded	66
22 Kontrolltöö 2	67
23 Riemanni summad ja numbriline integreerimine	68
23.1 Riemanni summad	68
23.2 Numbriline integreerimine	69
24 Määratud integraali arvutamine	71
24.1 Newton-Leibnizi valem	71
24.2 Määratud integraali omadused	71
24.3 Muutujavahetus määratud integraalis	72
25 Määratud integraali ositi integreerimine	73
25.1 Ositi integreerimine	73
25.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	73
26 Pindala arvutamine	74
26.1 Kõvertrapetsi pindala	74
26.2 Kõversektori pindala	74
26.3 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral	75
27 Joone pikkuse ja keha ruumala arvutamine	76
27.1 Joone pikkus	76
27.2 Keha ruumala ristlõikepindala kaudu	76
27.3 Pöördkeha ruumala	77
28 Määratud integraali füüsikalised rakendused	78
28.1 Teepikkuse arvutamine	78
28.2 Kiirus ja kiirendus	79
28.3 Töö	80
28.4 Vedelike pumpamisel tehtav töö	80
29 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	81
29.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	81
29.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine	82

30 Kontrolltöö nr. 3	83
31 Päratud integraalid 1	84
31.1 Lõpmatute rajadega integraalid	84
32 Päratud integraalid 2	85
32.1 Integraal tõkestamata funktsioonist	85
32.2 Päratute integraalide rakendusi	86

Praktikum 1

Absoluutväärtus. Vektorite skalaarkorrutus. Vektorite vaheline nurk

1.1 Reaalarvu absoluutväärtus

Definitsioon 1.1

Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust $|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$

Ülesanne 1.1. Leidke järgmised väärtused.

(a) $|-3-5|$ (b) $|-|-8||$ (c) $\sqrt{9}$

Ülesanne 1.2. Lahendage järgmised võrrandid ja võrratused.

(a) $|x| = 3$ (c) $|2x+6| = 4$ (e) $|x| < 2$ (g) $x^2 < 2$
(b) $|2x-3| = 7$ (d) $|8-3x| = 9$ (f) $|1-x| > 1$

1.2 Summa sümbol

Järjestikuste indeksitega suuruste $a_1, a_2, \dots, a_n$ summa märkimiseks kasutatakse sümbolit Σ järgmiselt:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

kus a_i on summa üldliige, i on summeerimisindeks ($i = 1, \dots, n$).

Ülesanne 1.3. Kirjutage summa sümboli Σ abil järgmised summad.

(a) $1+2+3+4+5$ (c) $1+1+1+1+1+1$ (e) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7$
(b) $1-1+1-1+1-1$ (d) $1-4+9-16+25$ (f) $1+q+q^2+\dots+q^k$

Ülesanne 1.4. Kirjutage ilma summa sümbolita järgmised summad.

(a) $\sum_{k=1}^6 b_k$ (b) $\sum_{j=2}^5 3^j$ (c) $\sum_{n=1}^1 (-1)^{n+1} 5^n$ (d) $\sum_{k=0}^n 3$

1.3 Vektorite skalaarkorrutis

Definitsioon 1.2

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse reaalarvu, mis võrdub nende vektorite pikkuste ja nendevahelise nurga koosinuse korrutisega, s.t

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Vektori $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ **pikkus** $|\mathbf{a}|$ avaldub võrdusega

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Omadus 1.1

Vektorite $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ skalaarkorrutis avaldub võrdusena

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Kui $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, siis

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Ülesanne 1.5. Arvutage vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaarkorrutis.

(a) $|\mathbf{a}| = 8, |\mathbf{b}| = 6, \varphi = 2\pi/3$

(d) $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 135^\circ$

(b) $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 3, |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 4$

(e) $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 1, \mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$

(c) $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 12, |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 10$

(f) $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 1, \mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$

Ülesanne 1.6. Arvutage vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaarkorrutis.

(a) $\mathbf{a} = (2, -3), \mathbf{b} = (4, 2)$

(c) $\mathbf{a} = (7, -4, 2), \mathbf{b} = (3, 1, 0)$

(b) $\mathbf{a} = (2, -3, 1), \mathbf{b} = (4, 2, -5)$

(d) $\mathbf{a} = (0, 0, 0), \mathbf{b} = (-2, 6, 0)$

Ülesanne 1.7. Arvutage vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaarkorrutis.

(a) $\mathbf{a} = (\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1), \mathbf{b} = (\beta + 1, \gamma + 1, \alpha + 1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(b) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, kus $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid

Ülesanne 1.8. Vektorid $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad 60° . Leidke vektori $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ pikkus, kui $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 2$ ja $|\mathbf{c}| = 6$.

Ülesanne 1.9. Leidke koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest $A(1, 1)$ ja $B(3, 7)$ võrdsel kaugusel.

Ülesanne 1.10. Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x, y)$ koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsel kaugusel punktidest $A(7, -3)$ ja $B(-2, 1)$?

Ülesanne 1.11. Näidake, et vektorid $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = \sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$ sobivad mingi ruudu külgedeks, kui $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 1.12. (F) Jõud $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{Q}$, mis mõjuvad 120° nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leidke resultantjõu $\mathbf{R}$ arvväärtsus $|\mathbf{R}|$, kui $|\mathbf{P}| = 7$ ja $|\mathbf{Q}| = 4$.

1.4 Vektorite vaheline nurk, ristprojektsioon

Vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vaheline nurk leitakse võrdusest

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Ülesanne 1.13. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke vektorite $\mathbf{CA}$ ja $\mathbf{CB}$ vaheline nurk.

- (a) $A(5, 3), B(4, 8), C(2, 4)$ (c) $A(2, -1, 4), B(1, -6, 8), C(0, -2, 6)$
(b) $A(-2, 6, 7), B(-4, 5, 5), C(-3, 0, 2)$ (d) $A(0, 4, -3), B(2, 5, 3), C(5, 1, 1)$

Ülesanne 1.14. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke, millised kahest antud vektorist on risti, kollineaarsed, moodustavad teravnurga või nürinurga.

- (a) $\mathbf{a} = (2, -7), \mathbf{b} = (5, 2)$ (c) $\mathbf{a} = (2, 1, -8), \mathbf{b} = (7, 2, 2)$
(b) $\mathbf{a} = (4, 16, -12), \mathbf{b} = (-6, -24, 18)$ (d) $\mathbf{a} = (5, -3, 2), \mathbf{b} = (1, 3, 4)$

Vektori $\mathbf{a}$ ristprojektsioon vektori $\mathbf{b}$ sihile avaldub

$$\text{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{b}|}.$$

Ülesanne 1.15. Leidke vektori $\mathbf{a}$ ristprojektsioon vektori $\mathbf{b}$ sihile.

- (a) $\mathbf{a} = (2, -5), \mathbf{b} = (3, 4)$ (c) $\mathbf{a} = (2, 1, -3), \mathbf{b} = (7, -2, 4)$
(b) $\mathbf{a} = (4, -5, 7), \mathbf{b} = (-3, -2, 4)$ (d) $\mathbf{a} = (2, -3, 2), \mathbf{b} = (4, 3, 2)$

Ülesanne 1.16. Milline on ühikvektorite $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{n}$ vaheline nurk, kui vektorid $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ on risti?

Ülesanne 1.17. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0)$ ja $C(3, -2, 1)$. Leidke tipu B juures olev sisenurk.

Ülesanne 1.18. Leidke kuubi diagonaali ja kuubi ühe tahu diagonaali vaheline nurk.

Praktikum 2

Vektorkorrutis ja segakorrutis

2.1 Vektorkorrutis

Definitsioon 2.1

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}_3$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, mis rahuldab järgmist kolme tingimust:

- 1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
- 2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, s.t $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ on risti vektoriga $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- 3) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ on parema käe kolmik.

Vektorkorrutise arvutamine koordinaatkujul

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$
$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

kus $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Vektoritele $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ehitatud rööpküliku pindala $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Ülesanne 2.1. Arvutage $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

(a) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 60^\circ$

(c) $|\mathbf{a}| = 3$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}$

(b) $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -21$

(d) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ülesanne 2.2. Olgu $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (5, 1, -2)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 0)$. Leidke vektorid $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$, $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$.

Ülesanne 2.3. Millisel arvu α väärtusel on vektorid $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ ja $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ kollineaarsed, kui $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ei ole kollineaarsed?

Vektoritele $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ehitatud kolmnurga ABC pindala on võrdne poolega küljevektorite vektorkorrutise pikkusest

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|,$$

Ülesanne 2.4. Leidke vektorkorrutise abil kolmnurga ABC pindala, kui see on võimalik.

(a) $A(4, 1, -4), B(6, 3, 7), C(2, 3, 1)$

(c) $A(2, 3, 1), B(4, 5, 1), C(3, 4, 1)$

(b) $A(0, 5, -1), B(1, 2, 1), C(-3, 4, -5)$

(d) $A(-1, 2), B(2, -1), C(-3, 1)$

Ülesanne 2.5. Leidke vektoreile $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ ehitatud kolmnurga pindala, kui $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 6$ ja $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 45^\circ$.

Ülesanne 2.6. Näidake, et vektorid $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ sobivad mingi kuubi servadeks ning leidke selle kuubi kolmandat serva määrav vektor, kui $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ on ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 2.7. Vektor $\mathbf{x}$ on risti vektoritega $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ ja $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$ ning moodustab esimese baasivektoriga $\mathbf{i}$ nürinurga. Leidke vektori $\mathbf{x}$ koordinaadid teades, et $|\mathbf{x}| = \sqrt{138}$.

Ülesanne 2.8. On antud vektorid $\mathbf{a} = (11, 10, 2)$ ja $\mathbf{b} = (4, 0, 3)$. Leidke ühikvektor $\mathbf{c}$, mis on risti vektoritega $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ning on suunatud nii, et kolmik $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ on parema käe kolmik.

Ülesanne 2.9. Näidake, et et suvalise kolme vektori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{E}_3$ korral

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y}.$$

2.2 Segakorrutis

Definitsioon 2.2

Vektorite $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$ **segakorrutiseks** nimetatakse arvu $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

Omadus 2.1

Segakorrutise omadused.

1. Kolme vektori segakorrutist saab esitusel loomuliku baasi kaudu arvutada valemiga

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

kus $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

2. Kolme vektori segakorrutise absoluutväärtus võrdub neile vektoritele $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ehitatud **rööptahuka ruumalaga**

$$V_{rt} = |\mathbf{abc}|.$$

Kolmele vektorile ehitatud **tetraeedri ruumala** on

$$V_{tetr} = \frac{1}{6} |\mathbf{abc}|.$$

3. Kolm nullvektorist erinevat vektorit on **komplanaarsed** (asuavad ühel ja samal tasandil) parajasti siis, kui nende segakorrutis võrdub nulliga ehk

$$\mathbf{abc} = 0.$$

4. Kolm nullvektorist erinevat vektorit moodustavad parema käe kolmiku, kui $\mathbf{abc} > 0$, ja vasaku käe kolmiku, kui $\mathbf{abc} < 0$.

Ülesanne 2.10. Vektorite kolmik $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ on vasaku käe kolmik. Arvutage $\mathbf{abc}$.

(a) $\mathbf{a} = (-3, 4, -7)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 5)$, $\mathbf{c} = (1, -4, 5)$

(b) $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 5$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{5\pi}{6}$

(c) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 3$ ning vektorid $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ on paarikaupa risti

Ülesanne 2.11. Tetraeedri tipud on $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ ja $D(4, 1, 3)$. Leidke selle tetraeedri ruumala ja tipust D tõmmatud kõrgus.

Ülesanne 2.12. Tetraeedri ruumala $V = 5$ ja kolm tippu on $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ ja $C(2, -1, 3)$. Leidke y -teljel asuva neljanda tipu D koordinaadid.

Ülesanne 2.13. Tõestage, et punktid $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ ja $D(2, 1, 3)$ asetsevad samal tasandil.

Praktikum 3

Sirge ja tasandi võrrandid

3.1 Tasandi võrrand

Definitsioon 3.1

Tasandi võrrandiks üldkujul ehk tasandi üldkujuliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

vektorit $\mathbf{n} = (A, B, C)$ nimetatakse **tasandi normaalvektoriks**.

Vektorkujul $\langle \mathbf{n}, \mathbf{AX} \rangle = 0$, kus $\mathbf{AX} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$ on tasandil asuv vektor.

Tasandit määravat mittekollineaarset vektorite süsteemi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_3$ nimetatakse **tasandi rihiks**, vektoreid $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **tasandi rihivektoriteks**.

Kui on antud kaks rihivektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ tasandil, siis **tasandi normaalvektoriks** sobib

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Tasandite π_1 ja π_2 vahelise nurga koosinus leitakse valemiga

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|},$$

kus $\mathbf{n}_1$ on tasandi π_1 ja $\mathbf{n}_2$ on tasandi π_2 normaalvektor.

Punkti $P(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}_3$ **kaugus tasandist $\pi \subset \mathbb{E}_3$** arvutatakse valemiga

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \mathbf{AP}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

kus A on suvaline punkt tasandil π ja $\mathbf{n}$ on tasandi normaalvektor.

Ülesanne 3.1. Koostage tasandi π võrrand, kui

- (a) tasand π on paralleelne x -teljega ning läbib punkte $A(3, -1, 1)$ ja $B(4, -6, -1)$
- (b) tasand π on paralleelne y -teljega ning läbib punkte $C(3, 4, 0)$ ja $D(7, 5, -3)$
- (c) tasand π on paralleelne z -teljega ning läbib punkte $E(-1, -2, -3)$ ja $F(1, 3, 4)$

Ülesanne 3.2. Koostage punkte A , B , ja C läbiva tasandi võrrand, kui

- (a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 4, 0)$, $C(3, -2, 1)$
- (b) $A(-3, 6, -7)$, $B(-1, 7, -6)$, $C(-7, 3, -8)$
- (c) $A(3, -1, 2)$, $B(4, -1, -1)$, $C(2, 0, 2)$

Ülesanne 3.3. Koostage tasandi π võrrand, kui

- (a) tasand π on risti vektoriga $\mathbf{n} = (2, 3, -5)$ ning tema aplikaatlõik on 6
- (b) tasand π on risti vektoriga $\mathbf{n} = (-1, 4, 7)$ ning tema ordinaatlõik on 3
- (c) tasand π on risti vektoriga $\mathbf{n} = (4, -1, -3)$ ning tema abstsisslõik on -5

Ülesanne 3.4. Kontrollige, kas tasanditel $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$ ja $3x + 4y + 5z - 3 = 0$ on ühiseid punkte.

Ülesanne 3.5. Leidke tasand, mis on paralleelne tasandiga $x - 2y + 3z - 7 = 0$ ning läbib punkti $A(1, -2, 1)$.

Ülesanne 3.6. Leidke tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ ja koordinaattasandite vahelised nurgad.

Ülesanne 3.7. Arvutage järgmiste tasandite vahelised nurgad.

- (a) $\pi_1: -2x+4y-z+5=0$, $\pi_2: 7x+3y-2z+1=0$ (c) $\pi_1: 6x-3y+12z-23=0$, $\pi_2: 10x-5y+20z-1=0$
 (b) xz -tasand ja $\pi: 3y-3z+5=0$

Ülesanne 3.8. Leidke tasand, mis läbib tasandite $3x-2y+z-3=0$ ja $x-2z=0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $x-2y+z+5=0$.

Ülesanne 3.9. Leidke tasand, mis läbib tasandite $x+5y+z=0$ ja $x-z+4=0$ lõikesirget ning moodustab tasandiga $x-4y-8z+12=0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

Ülesanne 3.10. Arvutage punkti P kaugus tasandist π .

- (a) $P(1,2,1)$ ja $\pi: x+2y+2z-10=0$ (c) P on koordinaatide alguspunkt ja $\pi: 15x-10y+6z-190=0$
 (b) $P(2,8,5)$ ja $\pi: x-2y-2z=1$

3.2 Sirge võrrand ruumis

Definitsioon 3.2

Sirge kanoonilisteks võrranditeks ruumis $\mathbb{E}_3$ nimetatakse võrrandeid

$$\frac{x-a_1}{s_1} = \frac{y-a_2}{s_2} = \frac{z-a_3}{s_3},$$

kus sirge läbib punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ ja sirge sihivektor on $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Sirge l ja tasandi π vahelise nurga siinus leitakse valemiga

$$\sin \angle(l, \pi) = \frac{|\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{n}\|},$$

kus $\mathbf{s}$ on sirge l sihivektor ja $\mathbf{n}$ on tasandi π normaalvektor.

Sirge võrranditeks üldkujul ehk üldkujulisteks võrranditeks nimetatakse süsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

kus sirge sihivektor $\mathbf{s}$ avaldub: antud kahe tasandi normaalvektori vektorkorrutisena: $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

Ülesanne 3.11. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, -5)$, $C(0, 4, -5)$. Koostage selle kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid.

Ülesanne 3.12. Koostage punkti $P(-3, 4, -7)$ läbiva sirge s kanoonilised võrrandid.

- (a) sirge s on paralleelne x -teljega (c) sirge s on paralleelne z -teljega
 (b) sirge s sihivektor on $\mathbf{s} = (3, -2, 4)$ (d) sirge s on paralleelne sirgega
 $t: \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{8}$

Ülesanne 3.13. Koostage sirge s kanoonilised võrrandid, kui sirge s läbib punkti $P(2, 3, 4)$ ja on paralleelne sirgega $t: \begin{cases} 3x+7y-2z+4=0 \\ 2x-6y+7z-13=0. \end{cases}$

Ülesanne 3.14. Leidke tasandi $2x-3y+4z-5=0$ ja xz -tasandi lõikesirgel kõik need punktid, mis asuvad tasandist $2x+y-z+3=0$ kaugusel $\sqrt{6}$ ühikut.

Ülesanne 3.15. Leidke sirge ja tasandi vaheline nurk. Juhul, kui sirge ja tasand lõikuvad, leidke nende lõikepunkt.

- (a) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $3x+5y-z-2=0$ (c) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0 \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$, $5x-z-4=0$
 (b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $3x-3y+2z-5=0$

Praktikum 4

Kompleksarvu algebraline kuju

4.1 Kompleksarvu algebraline kuju

Definitsioon 4.1

Kompleksarvuks nimetatakse avaldist

$$z = a + bi, \quad (4.1)$$

kus a ja b on reaalarvud ning i on **imaginaarühik** (kompleksarv i , mille korral kehtib $i^2 = -1$).

Kompleksarvu **reaalosaks** nimetatakse arvu $a = \operatorname{Re} z$, kompleksarvu **imaginaarosaks** nimetatakse arvu bi , kus $b = \operatorname{Im} z$ on **imaginaarosa kordaja**.

Definitsioon 4.2

Kompleksarvu z esitusviisi $z = a + bi$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, nimetatakse kompleksarvu z **algebraliseks** (ka Descartes'i) **kujuks**.

Kompleksarvu $z = a + bi$ **kaaskompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu $\bar{z} = a - bi$.

Kompleksarvu $z = a + bi$ **mooduliks** nimetatakse reaalarvu $|z|$, mis on määratud võrdusega $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ülesanne 4.1. Kujutage komplekstasandil järgmised kompleksarvud.

- | | | | |
|--------------|---------------|-----------------------|----------------------------------|
| (a) $3 - 2i$ | (c) $-1 - i$ | (e) $-7j, j^2 = -1$ | (g) $ \overline{3 + \sqrt{6}i} $ |
| (b) $1 + i$ | (d) $-3 + 4i$ | (f) $ 3 + \sqrt{6}i $ | (h) $1 - i\sqrt{3}$ |

Ülesanne 4.2. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| (a) $2ix + 3 = y - i$ | (b) $x^2 - y^2 + ixy = 1 + ix$ |
|-----------------------|--------------------------------|

Ülesanne 4.3. Leidke kompleksarvu moodul.

- | | | | |
|-------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| (a) -42 | (c) $2i + 2$ | (e) $4 + 3i$ | (g) $6\sqrt{3} - 6i$ |
| (b) $i + 1$ | (d) $1 + i\sqrt{3}$ | (f) $-1 - i\sqrt{3}$ | (h) $1 - i\sqrt{3}$ |

Ülesanne 4.4. Kujutage komplekstasandil kõik kompleksarvud, mis rahuldavad antud tingimusi.

- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| (a) $ z = 3$ | (b) $\frac{1}{2} \leq z \leq 3$ | (c) $ z - 1 = 1$ | (d) $\operatorname{Re} z^2 = 4$ |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|

Kuna $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \dots$, siis

$i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, kus $k = 0, 1, 2, \dots$

Ülesanne 4.5. Kirjutage algebralisel kujul $z = a + bi$

(a) $z = i^{20}$

(f) $z = (2 + 2i)^8$

(b) $z = i^5 + i + 1$

(g) $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{3-i}{1+i} + 3i$

(c) $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

(d) $z = i^{43} + (-1)^7 - (-i)^{77}$

(h) $z = \frac{(2-i^3)^4}{(i^8-i^6)^3} + i$

(e) $z = i^{2017} - i$

4.2 Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

Olgu antud kompleksarvud $z_1 = a_1 + b_1i$ ja $z_2 = a_2 + b_2i$. Siis nende võrdumine, summa, vahe, korrutis ja jagatis defineeritakse järgnevalt:

Võrdumine. $z_1 = z_2$ parajasti siis, kui $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$.

Summa ja vahe.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Korrutis.

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Jagatis.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \text{ kui } z_2 \neq 0.$$

Ülesanne 4.6. Leidke arvude z_1 ja z_2 summa, vahe, korrutis, jagatis, moodulid ja kaaskompleksid.

(a) $z_1 = 3$, $z_2 = -4i$

(e) $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 3 + 4i$

(b) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$

(f) $z_1 = -4 - i$, $z_2 = -7 - 4i$

(c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 + 2i$

(g) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = \frac{1}{1 + 3i}$

(d) $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + i$

(h) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $z_2 = i$

Praktikum 5

Kompleksarvu trigonomeetiline ja eksponentkuju

5.1 Kompleksarvu trigonomeetiline ja eksponentkuju

Definitsioon 5.1

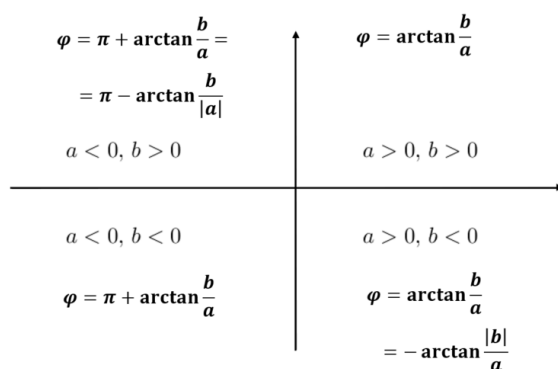
Avaldist

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5.1)$$

nimetatakse kompleksarvu z **trigonomeetriliseks kujuks**, kus reaalarv r on kompleksarvu z moodul $|z|$ ja reaalarv φ on kompleksarvu z argument, mida tähistatakse $\varphi = \arg z$.

Definitsioon 5.2

Kompleksarvu $z = a + bi$ argumenti φ leidmisel võib kasutada järgmist eeskirja



Valem 5.1

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob **Euleri valem**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (5.2)$$

kus φ on reaalarvuline muutuja ja $e \approx 2,71828$ on naturaallogaritm alus.

Definitsioon 5.3

Kompleksarvu z eksponentkujuks nimetatakse esitust

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (5.3)$$

kus r on kompleksarvu z moodul ja φ on argument.

Ülesanne 5.1. Teisendage kompleksarv z algebralisele kujule $z = a + bi$ ning eksponentkujule.

(a) $z = \cos 16\pi + i \sin 16\pi$

(c) $z = 8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

(b) $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(d) $z = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{2} - i \sin \frac{5\pi}{2} \right)$

Ülesanne 5.2. Kirjutage nii trigonomeetrilisel kui ka algebralisel kujul $a + bi$.

(a) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c) e^{-i}

(e) $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(g) $e^{(i+1)i}$

(b) $64e^{i0}$

(d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(f) $\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

(h) $\frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}}$

Ülesanne 5.3. Viige kompleksarv z üle trigonomeetrilisele kujule.

- | | | |
|------------------|--|--------------------------|
| (a) $z = 8$ | (e) $z = -\sqrt{3} + i$ | (i) $z = 7 - 2i$ |
| (b) $z = 6i$ | (f) $z = -3 - \sqrt{3}i$ | (j) $z = 1.8 + 0.52i$ |
| (c) $z = 1 + i$ | (g) $z = 2 + 2i$ | (k) $z = 6 - 6i\sqrt{3}$ |
| (d) $z = -1 - i$ | (h) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | (l) $z = 6 + 6i\sqrt{3}$ |

5.2 Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul

Omadus 5.1

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul ja eksponentkujul

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Siis kahe kompleksarvu korrutamise ja jagamise kohta kehtivad järgmised reeglid: **korrutamisel** moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad r_2 \neq 0.$$

Ülesanne 5.4. Leidke $z_1 \cdot z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$ kõigil kolmel erineval esitusviisil.

- | | |
|--|--|
| (a) $\begin{cases} z_1 = 4 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\ z_2 = 2 \left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi \right) \end{cases}$ | (b) $\begin{cases} z_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ z_2 = 3 (\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases}$ |
|--|--|

Ülesanne 5.5. Arvutage järgmised avaldised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4$ | (c) $\frac{(1+i)^2}{2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}$ |
| (b) $\frac{(5+3i)(5-3i)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}$ | (d) $\frac{\cos 69.5^\circ + i \sin 69.5^\circ}{\cos(-17.5^\circ) + i \sin(-17.5^\circ)}$ |

Ülesanne 5.6. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral $z^2 = \bar{z}^2$, $z = x + iy$.

Ülesanne 5.7. Millise reaalse kordajatega ruutvõrrandi lahenditeks on kompleksarvud $z_1 = 2 + i$ ja $z_2 = 2 - i$?

Ülesanne 5.8. Näidake, et kompleksarv $z = 1 - \sqrt{3}i$ on ruutvõrrandi $x^2 + 4 = 2x$ lahend.

Ülesanne 5.9. Tõestage järgmised väited.

- | | |
|---|---|
| (a) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ja $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ | (c) $z \bar{z} = z ^2$ |
| (b) Kui $ z = 1$, siis $\bar{z} = z^{-1}$ | (d) $ z_1 + z_2 ^2 + z_1 - z_2 ^2 = 2(z_1 ^2 + z_2 ^2)$ iga $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ korral |

Ülesanne 5.10. (F) Kaks köit hoiavad sadamas paati nii, et pingejõud on vastavalt $80 + 20i$ kg ja $100 - 50i$ kg. Arvutage kogupinge.

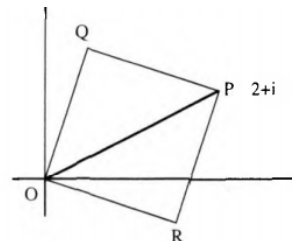
5.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 5.11. (F) Vahelduvvoolu ahelas leitakse kahe paralleelühenduses oleva elemendi näivtakistus (vt. lähemalt konspekti lisas) valemiga

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Arvutage näivtakistus Z , kui $Z_1 = 3 + 5i \, \Omega$ ja $Z_2 = 5 - 6i \, \Omega$.

Ülesanne 5.12. Ruudu diagonaal asub punktide 0 ja $2 + i$ vahel. Leidke ruudu kaks ülejäänud tippu Q ja R . NB! Lahenduse saab läbi viia puhtalt kompleksarve kasutades ja ilma kooli geometriata.



Ülesanne 5.13. (F) Kahe vedruga varustatud süsteem vajub raskuse mõjul

$$d = 6.03(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ) + 3.26(\cos 76.0^\circ + i \sin 76.0^\circ) \text{ cm.}$$

Teostage liitmine ning esitage vastus trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 5.14. (F) Teatud induktioonipoolis on pinget

$$V = \frac{8.66(\cos 90.0^\circ + i \sin 90.0^\circ) \cdot 50.0(\cos 135.0^\circ + i \sin 135.0^\circ)}{10.0(\cos 60.0^\circ + i \sin 60.0^\circ)} \text{ volti.}$$

Lihtsustage avaldis ning leidke pinget moodul.

Ülesanne 5.15. (F) Kaks kaablit tõstavad portselani täis kasti. Pingejõude kaablites saab esitada avaldistega $2100 - 1200i \text{ N}$ ja $1200 + 5600i \text{ N}$. Esitage kogupinge trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 5.16. Kasutades eksponentkuju, tuletage trigonomeetrilised valemid $\cos(\alpha \pm \beta)$ ja $\sin(\alpha \pm \beta)$ kohta.

Ülesanne 5.17. (F) Radari mikrolaine signaali intensiivsus on $37(\cos 65.3^\circ - i \sin 65.3^\circ) \text{ V/m}$. Esitage see eksponentkujul.

Ülesanne 5.18. (F) Lainete liitumisel on kasutusel avaldis

$$E_1 E_2 (e^{i(\alpha - \beta)} + e^{-i(\alpha - \beta)}).$$

Näidake, et see võrdub lihtsama avaldisega $2E_1 E_2 \cos(\alpha - \beta)$.

Praktikum 6

Kompleksarvu astendamine ja juurimine

6.1 Kompleksarvu astendamine ja juurimine

Valem 6.1

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib **de Moivre'i valem**

$$z^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.1)$$

kus $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ja iga kompleksarvu z korral on defineeritud $z^0 = 1$.

EkspONENTKujul $z^k = (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ülesanne 6.1. Kasutades de Moivre'i valemit, astendage kompleksarvud.

(a) $(\sqrt{3} - i)^{-12}$

(b) $(3 + \sqrt{3}i)^5$

(c) $[2(\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ)]^5$

(d) $[\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]^{10}$

(e) $2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^{36}$

(f) $[3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)]^4$

(g) $[0.2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)]^3$

(h) $\left(6e^{\frac{137\pi}{180}i}\right)^2$

(i) $\left(2e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^8$

(j) $\left(e^{\frac{71\pi}{90}i}\right)^{10}$

(k) z^{273} , $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$

(l) z^{614} , $z = e^{\frac{3i\pi}{307}}$

Definitsioon 6.1

Kompleksarvu z **n -astme juureks** nimetatakse iga kompleksarvu w , mille korral $w^n = z$.

Valem 6.2

Igal kompleksarvul $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ on **n erinevat n -astme juurt**, mis avalduvad kujul

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.2)$$

EkspONENTKujul

$$\sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.3)$$

Ülesanne 6.2. Leidke arvu -1 seitsmenda juure $\sqrt[7]{-1}$ kõik väärtused.

Ülesanne 6.3. Leidke arvu $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}$ kõik väärtused.

Ülesanne 6.4. Leidke ja kujutage komplekstasandil arvu $\sqrt[4]{-64}$ kõik väärtused.

Ülesanne 6.5. Leidke $\sqrt[5]{z}$, kui $z = 32\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ja kujutage tulemus komplekstasandil.

Ülesanne 6.6. Kirjutage kompleksarvud eksponentkujul ja algebralisel kujul. Leidke erinevatel viisidel esitatud kompleksarvude z_1 ja z_4 korral nende summa, korrutis ja jagatis.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) & \text{(c)} \quad z_3 = 4\left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \\ \text{(b)} \quad z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) & \text{(d)} \quad z_4 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

Ülesanne 6.7. Olgu

$$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - i, \quad w_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right), \quad w_2 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

Arvutage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z_1^5 + w_2^8 & \text{(d)} \quad \sqrt[3]{z_1 + w_1^2} \text{ kõik väärtused} & \text{(g)} \quad \overline{w_1 + w_2} \\ \text{(b)} \quad z_1^6 z_2 & \text{(e)} \quad \frac{z_1 + w_2}{w_1} & \text{(h)} \quad |z_1^3 + z_2^2| \\ \text{(c)} \quad (z_2 w_1)^5 & \text{(f)} \quad \frac{\sqrt[4]{w_1}}{w_2} \text{ kõik väärtused} & \text{(i)} \quad \left| \frac{\overline{w_1}}{w_2} \right| \end{array}$$

6.2 Algebraliste võrrandite lahendamine

Definitsioon 6.2

Võrrandit $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ nimetatakse n **astme algebraliseks võrrandiks**. Kordajad $a_0, \dots, a_n$ võivad olla nii reaalsed kui kompleksed, kusjuures $a_0 \neq 0$.

Teoreem 6.1

Algebra põhiteoreem. Igal n astme algebralisel võrrandil on kompleksarvude hulgas n lahendit (kui arvestada kordseid lahendeid vastavalt kordsusele).

Ülesanne 6.8. Lahendage võrrandid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z^4 - 1 = 0 & \text{(f)} \quad z^3 + i = 0 & \text{(l)} \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 28 = 0 \\ \text{(b)} \quad z^2 - 1 - i = 0 & \text{(g)} \quad z^3 + 27 = 0 & \text{(m)} \quad x^4 + 6x^2 + 8 = 0 \\ \text{(c)} \quad z^2 - i = 0 & \text{(h)} \quad z^4 - i = 0 & \text{(n)} \quad x^6 - 2x^3 + 5 = 0 \\ \text{(d)} \quad z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0 & \text{(i)} \quad z^4 - \sqrt{3} - i = 0 & \text{(o)} \quad (x+1)^8 = 256(x-1)^8 \\ \text{(e)} \quad z^2 + 2(1 + \sqrt{3}i) = 0 & \text{(j)} \quad z^4 = -4i & \text{(p)} \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \\ & \text{(k)} \quad x^2 - 6x + 10 = 0 & \text{(q)} \quad (x^4 + 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 8) = 0 \end{array}$$

Ülesanne 6.9. Lahendage w suhtes järgmine võrrand:

$$w^{\frac{4}{3}} + 2i = 0.$$

Ülesanne 6.10. (IT) Programmeerijal tuleb oma programmis leida reaalarvu a jaoks n erinevat n -astme juurt. Programmi ühe osana tuleb välja selgitada, mitu nendest on reaalarvud ja mitu kompleksarvud. Selgitage, kuidas seda kindlaks teha ilma juuri endid leidmata.

7.1 Funktsionaalsed sõltuvused

Definitsioon 7.1

Olgu antud hulk $X \subset \mathbb{R}$. Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv y , siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud **funktsioon** f , mida märgitakse $y = f(x)$.

Kui suurus y on võrdeline (proportsionaalne) suurusega $f(x)$, siis seda sõltuvust iseloomustab funktsioon $y = kf(x)$, kus k on mingi konstant (võrdetegur).

Ülesanne 7.1. Kirjutage välja järgmised funktsionaalsed sõltuvused.

- (a) Ümara lati tugevus S on võrdeline tema jämeduse h neljanda astmega
- (b) Delfiini energiakulu E ujudes on proportsionaalne tema liikumiskiiruse v kuubiga
- (c) Teekonna keskmine kiirus v on pöördvõrdeline kulutatud ajaga t
- (d) Kahe keha vaheline gravitatsioonijõud G on pöördvõrdeline nende kehade vahelise kauguse ruuduga

Ülesanne 7.2. (K) Keemilise elemendi erisoojus s on energia hulk kalorites, mida on vaja 1 grammi elemendi 1 kraadiliseks soojendamiseks.

Otsustage järgmise tabeli põhjal, kas erisoojus s on võrdeline või pöördvõrdeline aatommassiga w . Kui seos kehtib, leidke vastav võrdetegur k .

element	Li	Mg	Al	Fe	Ag	Pb	Hg
w	6,9	24,3	27,0	55,8	107,9	207,2	200,6
s	0,92	0,25	0,21	0,11	0,056	0,031	0,033

7.2 Funktsioonide graafikud

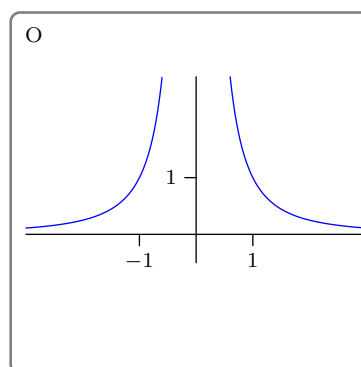
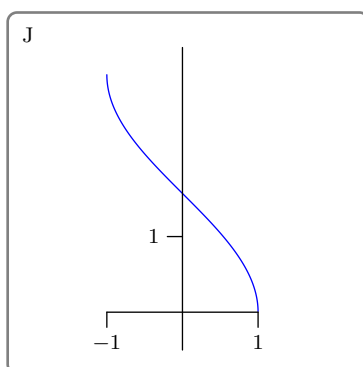
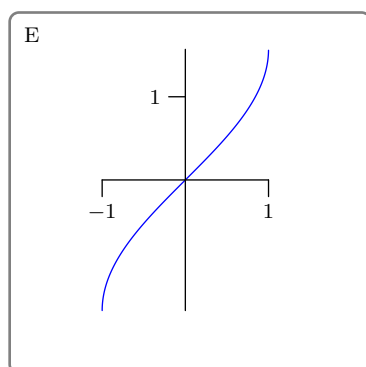
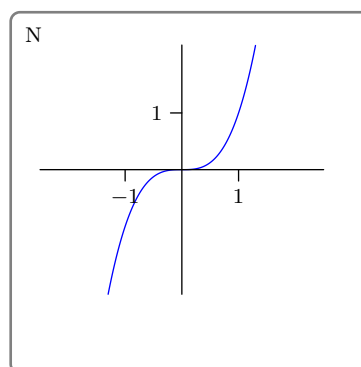
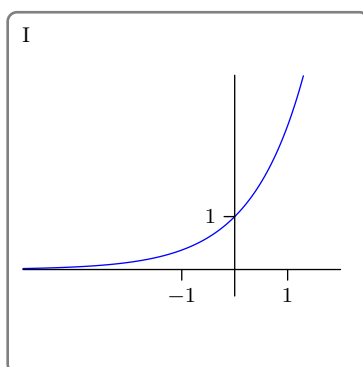
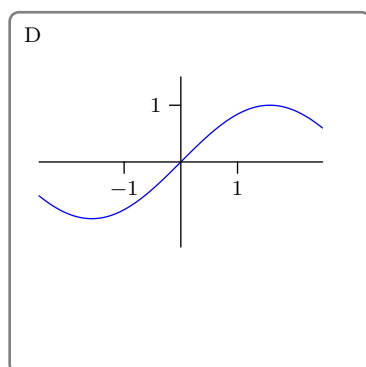
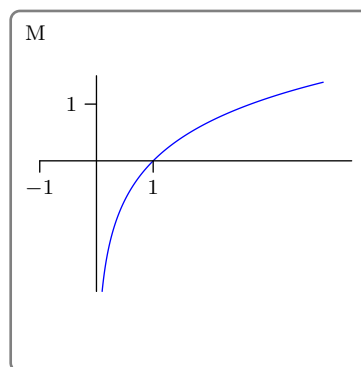
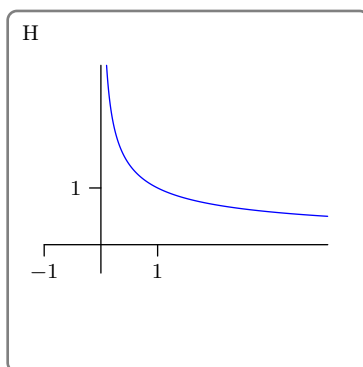
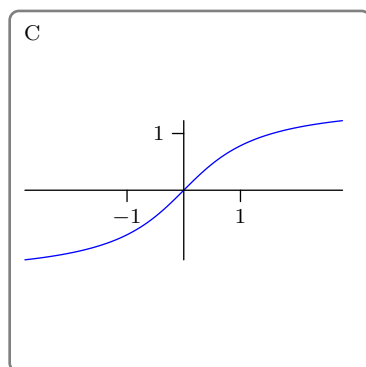
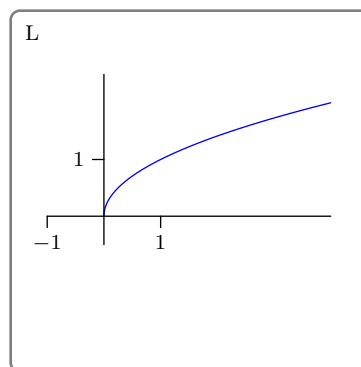
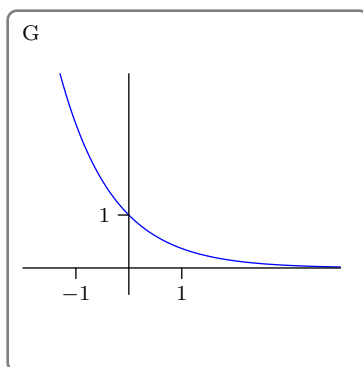
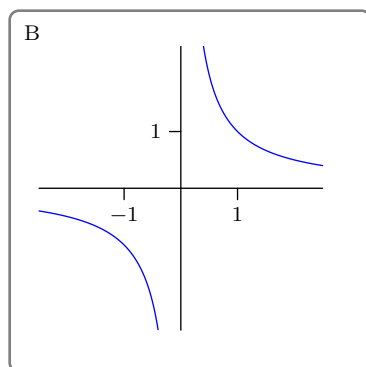
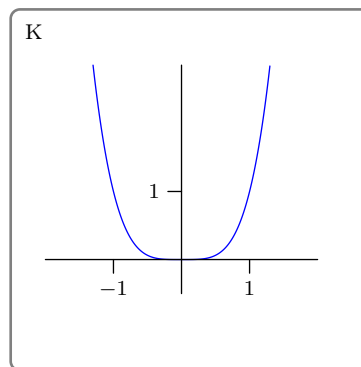
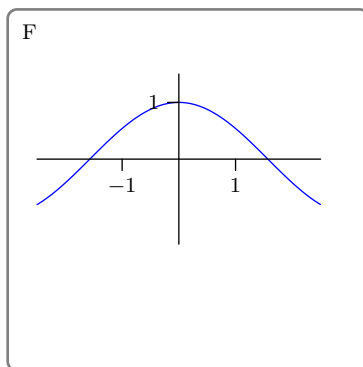
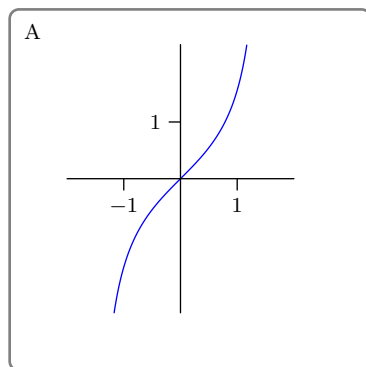
Ülesanne 7.3. Selgitage, kas funktsioonide $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ korral kehtib võrdus $f = g$? Skitseerige nende funktsioonide graafikud.

Ülesanne 7.4. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud.

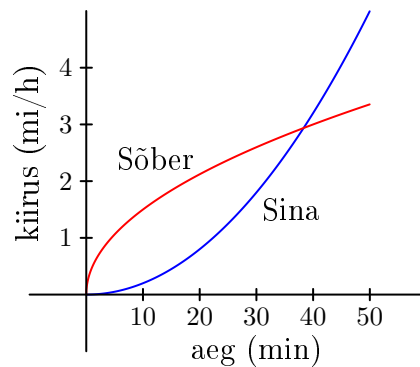
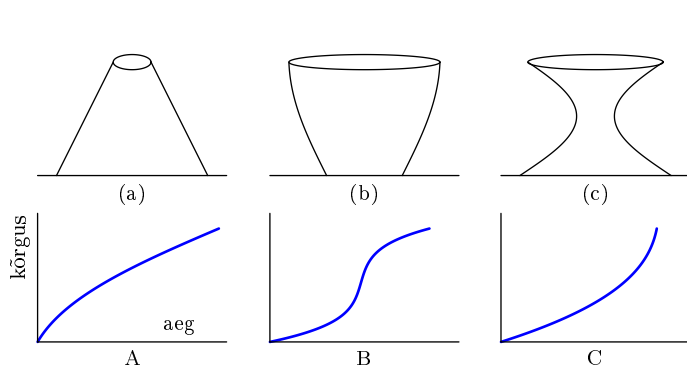
- (a) $f(x) = -x^2 + 1$
- (b) $f(x) = \log(-x)$
- (c) $f(x) = \sin(x - \pi)$
- (d) $f(x) = \arcsin x + \pi/2$
- (e) $f(x) = e^{-2x}$
- (f) $f(x) = \cos x$
- (g) $f(x) = \cos 2x$
- (h) $f(x) = \cos 3x$
- (i) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$
- (j) $f(x) = \sin \frac{x}{4}$
- (k) $f(x) = \tan 2x$
- (l) $f(x) = \tan(x - 2\pi)$

Ülesanne 7.5. (IT) Multiprotsessoriga arvuti suudab töötada S korda kiiremini, kui ühe protsessoriga arvuti. Skitseerige S graafik protsessorite arvu n järgi, kui $S = \frac{5n}{4+n}$.

Ülesanne 7.6. Milliste põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud on kujutatud järgmistel joonistel?



Ülesanne 7.7. Kolmel graafikul on toodud anuma veega täitumise kõrgus, kui veevool on ühtlane. Milline anum vastab millisele graafikule?



Ülesanne 7.8. Graafikul (ülal paremal) on toodud teie ja sõbra liikumise kiirus ajas. Liikumist alustatakse samast punktist ja liigutakse samas sihis.

- (a) Kes liigub kiiremini hetkel $t = 20$? (c) Millal on teie vahemaa suurim?
 (b) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 20$? (d) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 50$?

7.3 Funktsioonid ja nende omadused

Definitsioon 7.2

Kõikide elementide X hulka, mille puhul elemendile $x \in X$ seatakse funktsiooniga f vastavusse $f(x)$, nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Funktsiooni f kõikide väärtuste hulka $\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ nimetatakse funktsiooni f **muutumispiirkonnaks** ehk väärtuste hulaks ja seda tähistatakse $f(X)$.

Definitsioon 7.3

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse

1. **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas X , kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral;
2. **paarituks funktsiooniks**, kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral;
3. **perioodiliseks**, kui leidub arv $T > 0$ nii, et $f(x + T) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 7.9. Leidke järgmiste funktsioonide määramis- ja muutumispiirkonnad.

- (a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (d) $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$ (f) $f(x) = \arcsin(2x-1)$
 (b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ (e) $f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$ (g) $f(x) = \arccos \frac{2}{1+x}$
 (c) $f(x) = \log(x-6)$

Ülesanne 7.10. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised on paaritud funktsioonid.

- (a) $f(x) = \frac{3}{x} - x^3$ (b) $f(x) = x(5^{2x} - 5^{-2x})$ (d) $f(x) = \sin x - x \cos x$
 (c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arctan x}$ (e) $f(x) = \sin x - \cos x$

Ülesanne 7.11. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on perioodilised, leidke vähim periood T .

- (a) $f(x) = \sin 2x$ (b) $f(x) = \cos 3x$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = \tan \frac{x}{2} + 3$

Praktikum 8

Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmfunksioon

8.1 Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon

Definitsioon 8.1

Funktsiooni $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks** funktsiooniks, kui iga $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral ka funktsiooni väärtused on erinevad hulgas Y , s.t $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Üksühese vastavuse $f: X \rightarrow Y$ **pöördfunktsioon** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ määratakse võrdusega $f^{-1}(y) = x$, kus $f(x) = y$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 8.1. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$ | (d) $f(x) = 1 + \log x - 2 $, $x \in (-\infty, 2)$ |
| (b) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ | (e) $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3}$, $x \in [-3, 0]$ |
| (c) $f(x) = 10^x + 1$ | (f) $f(x) = 1 + \arccos(1 - x)$ |

Ülesanne 8.2. Määrake, kas funktsioon f on üksühene.

- | | |
|---------------------|--|
| (a) $f(x) = 3x - 2$ | (d) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$ |
| (b) $f(x) = 2^x$ | (e) $f(x) = x^3$ |
| (c) $f(x) = x^2$ | (f) $f(x) = \sin x$ |

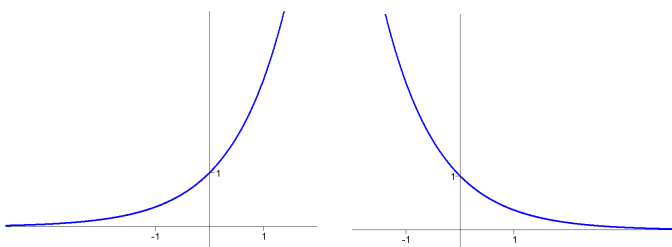
Ülesanne 8.3. Järgmised parameetrilisel kujul antud funktsioonid kirjutage ilmutatud kujul $y = f(x)$ või $x = g(y)$.

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (a) $x = t + 5$, $y = t + \ln t$ | (b) $x = t^5 + t$, $y = e^t$ |
|-----------------------------------|-------------------------------|

Ülesanne 8.4. Esitage järgmised ilmutamata kujul antud joonte võrrandid ilmutatud kujul.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| (a) $\ln(y - \sin x) = x$ | (b) $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$ |
|---------------------------|-------------------------------|

8.2 Eksponentfunktsioon



Eksponentfunktsioon on $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Funktsiooni $y = e^x$ korral räägitakse eksponentsiaalsest kasvust ja $y = e^{-x}$ korral eksponentsiaalsest langusest.

Omadus 8.1

Eksponentfunktsioonil on järgmised omadused:

(a) $a^0 = 1$

(c) $a^{x+y} = a^x a^y$

(e) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

(g) $(ab)^x = a^x b^x$

(b) $a^x > 0$

(d) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(f) $(a^x)^y = a^{xy}$

Ülesanne 8.5. Lihtsustage avaldis $\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$, kui $f(x) = Ae^{kx}$.

Ülesanne 8.6. Turule investeeritakse 300 eurot intressiga 3 % aastas. Leidke investeeringu suurus 10 aasta pärast.

Ülesanne 8.7. (K) Mõõteseade registreerib jões 1 km eemal kemikaali lekkekohast 620 osakest miljoni (ppm) ning seadme näitajad vähenevad 12,5 % iga kilomeetri kohta lekkekohast eemal. Kui kaugel on seadme näit 100 ppm?

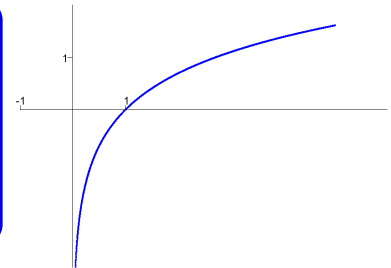
8.3 Logaritmifunktsioon

Definitsioon 8.2

Positiivse arvu x **logaritmiks alusel** a ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse arvu c , millega alust a astendades saadakse arv x , s.t.

$$\log_a x = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = x.$$

Logaritm- ja eksponentfunktsioon on teineteise pöördfunktsioonid.

**Omadus 8.2**

Logaritmifunktsioonil on järgmised omadused:

(a) $\log xy = \log |x| + \log |y|$,
($xy > 0$)

(c) $\log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y|$

(f) $e^{\ln x} = x$

(b) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

(d) $\log x^a = a \log x$

(g) $\log 1 = 0$

(e) $x = a^{\log_a x}$, ($x > 0$)

(h) $\ln e = 1$

Ülesanne 8.8. Lihtsustage järgmised avaldised.

(a) $e^{5 \ln x}$

(b) $\ln \frac{1}{e^{3x}}$

(c) $e^{(3 \ln 9)/2}$

(d) $4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln x^{1/3}$

(e) $16^{\log_2 \sqrt[4]{48} - 1}$

(f) $\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}}$

(g) $-\log_8 \log_4 \log_2 16$

(h) $e^{2 \ln \cos x} + (\ln e^{\sin x})^2$

Ülesanne 8.9. Lihtsustage järgmised avaldised.

(a) $5 \log_5 25 + 8 \log_2 64 - 4 \log_3 27 + \log_2 2 + \log_5 1$

(b) $3^{1 - \log_3 7} + 5^{\log_5 8 + 1} - 2,4^{\log_{2,4} 10 + 1}$

(c) $\log_2 12 + \log_2 25/3 + 2 \log_2 4/5 - \log_2 2^7$

(d) $4 \cdot (81^{1/4 - 1/2 \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8})$

Ülesanne 8.10. Vesi kuumutatakse nõus 90 kraadini ja asetatakse ruumi, mille temperatuur on 0 kraadi. Newtoni jahtumisseadusest tuletatakse võrrand $\ln T = \ln 90 - 0,23t$, kus T on vee temperatuur ja t on aeg minutites. Esitage T ajast t sõltuva funktsioonina.

Ülesanne 8.11. (F) Kahe tähe näivheledused m_1 ja m_2 on seotud nende tegelike heledustega b_1 ja b_2 järgmise logaritmilise seose abil:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log_{10} \frac{b_2}{b_1}.$$

Avaldage b_2 .

Siiriuse näivheledus on $-1,4$ ning veel silmaga nähtavate tähtede näivheledus on u. 6,0. Mitu korda on Siiriuse tegelik heledus suurem, kui veel silmaga nähtavatel tähtedel?



Ülesanne 8.12. (K) Putukamürk DDT keelati USA-s 1972. aastal. Olgu A_0 alghetkel piirkonda pritsitud DDT kogus ning A hetkel t (aastat) veel lagundamata DDT kogus. Neid kahte suurust seob võrrand

$$\log_{10} A = \log_{10} A_0 + 0,1t \log_{10} 0,8.$$

Avaldage A kui aja t -funktsioon.

Ülesanne 8.13. (M) Näidake, et kehtib võrdus $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

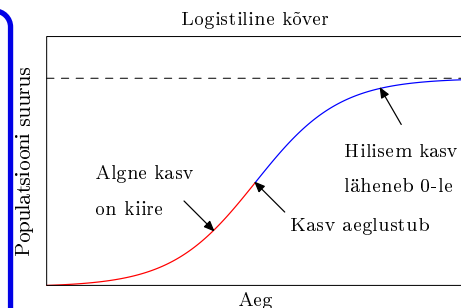
Ülesanne 8.14. (M) Arvutage b^b , kui $a^b = 8$, $b^c = 10$ ja $a^c = 2$.

8.4 Logistiline kõver

Logistiline S-kõver

$$y = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} = \frac{L}{1 + b e^{-kx}}$$

on laialt kasutusel populatsiooni modelleerimisel. Siin L on kõvera maksimaalne väärtus, k iseloomustab kasvu kiirust ja x_0 on keskpunkti asukoht. Logistilist kõverat kasutatakse palju ka statistikas ja IT-s masinõppes, kuna lubab modelleerida 0 ja 1 tüüpi väärtusi.



Joonis: <http://www.math.andyou.com/161>

Ülesanne 8.15. Ülikoolilinnakus on 5000 tudengit. Üks tudeng naaseb puhkuselt linnakusse kaua kestva gripiviirusega. Viiruse levikut modelleeritakse parajasti logistilise mudeliga $y = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}}$, kus t on aeg päevades ja y näitab nakatunud tudengite arvu. Mitme päeva pärast tuleb õppetöö lõpetada, kui eeskirja järgi tehakse seda olukorras, kus on vähemalt 40 % nakatunuid.

Praktikum 9

Funktsiooni piirväärtus

Definitsioon 9.1

Hulga $X \subset \mathbb{R}$ **kuhjumispunktiks** nimetatakse punkti $a \in \mathbb{R}$, kui punkti a iga ümbrus (vahemikud $(a - \delta, a + \delta)$, kus $\delta > 0$) sisaldab vähemalt ühte temast erinevat hulga X punkti.

Definitsioon 9.2

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

kui punktide a piisavalt lähedastes määramispiirkonna X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kui tahes vähe.

Teoreem 9.1

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, siis (nn. kahepoolne) piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ eksisteerib parajasti siis, kui

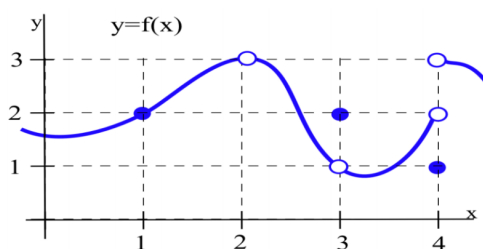
$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Kui piirväärtuse arvutamisel tekivad määramatused:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

siis tuleb avaldist, millest leitakse piirväärtust, teisendada nii, et see määramatus saaks kõrvaldatud.

Ülesanne 9.1. Leidke joonise põhjal järgmised piirväärtused.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Ülesanne 9.2. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b .

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \end{matrix}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix}$

9.1 Piirväärtuse omadused

Teoreem 9.2

Kui on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

siis kehtivad järgmised tehete seotud omadused:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{kui } B \neq 0.$$

Teoreem 9.3

Kui funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, siis $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$.

Teoreem 9.4

Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ülesanne 9.3. Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning olgu $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -5$. Millistele piirväärtuse omadustele tuginedes on tehtud järgmised teisendused?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)\right)^{2/3}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7\right)^{2/3}} = \frac{7}{4}.$$

Ülesanne 9.4. Kas kehtib võrdus $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{1/x}$? Põhjendage!

Ülesanne 9.5. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - 5)$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos 2x$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 7}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x}{x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4 + x}{2 + e^{\frac{-1}{\sin x}}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right)$

9.2 Piirväärtuse arvutamine

Ülesanne 9.6. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - 1}{2x-2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(2x^2 - 8)x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

(i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

(k) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{(x+4)^2}$

(h) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{x-4}$

Ülesanne 9.7. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3}-1}{\sqrt{x}-1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$

(c) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{y+16}}{y}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2+5x}}$

Ülesanne 9.8. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log 2x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-7x+1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{x^2-x+1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{(4x+3)^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

9.3 Mõned erilised piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

Ülesanne 9.9. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 4x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 5x}{(x-x^3)^2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{3/x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{3x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x-2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$

9.4 Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded

Ülesanne 9.10. Leidke järgmised piirväärtused.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 + x - 2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} + x)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 6x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1 - \sqrt{x+3}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x}{(x+1)^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 5x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x - 1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2}{x} - 1 \right)$$

9.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 9.11. (B) Loomade õppimisvõime uurimiseks teostas üliõpilane eksperimendi, kus rotid lasti korduvalt läbida labürinti. Mõõtmistulemused näitasid, et n -dal korral läbis rott labürindi ajaga $T(n) = (5n + 17)/n$ minutit. Mis juhtub labürindi läbimiseks kuluva ajaga, kui katsete arv tõkestamatult kasvab?

Ülesanne 9.12. (B) Teatud inimese silma pupilli pindala avaldub seosega $S = \frac{36 + 24y^3}{1 + 4y^3}$ (mm^2), kus y on valguse heledus luumenites. Milliste väärtuste vahel võib pupilli pindala teoreetiliselt muuttuda?

Ülesanne 9.13. (F) Einsteini erirelatiivsusteooria järgi on liikuva keha mass leitav valemiga $M(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, kus c on valguse kiirus, $m > 0$ on seisumass ja v on keha liikumise kiirus. Arvutage järgmiste avaldiste väärtused. Mis on vastavate tulemuste füüsikaline sisu?

$$(a) M(0)$$

$$(b) M\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$(c) \lim_{v \rightarrow c-} M(v)$$

$$(d) \lim_{v \rightarrow c+} M(v)$$

Ülesanne 9.14. (F) Punktmassi liikumist aja t järgi kirjeldab seos $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$. Leidke punktmassi liikumise kiirus hetkel $t = 2$, s.t leidke piirväärtus $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$.

Ülesanne 9.15. On ennustatud, et t aasta pärast on eeslinna populatsioon $p = p(t)$ tuhat inimest, kus $p(t) = 20 - \frac{7}{t+2}$. Keskkonnaameti uuring näitas, et keskmine süsihappegaasi tase on c osakest miljoni osakese kohta, kus $c(p) = \frac{2\sqrt{p^2 + p + 21}}{5}$. Mis juhtub süsihappegaasi tasemega pikas perspektiivis, kui $t \rightarrow \infty$?

Ülesanne 9.16. (K) Analüüsige vesiniku aatomi $3s$ -orbiidi lainefunktsiooni radiaalse osa $R_{3s}(r)$ väärtusi protsessides $r \rightarrow 0+$ ja $r \rightarrow \infty$. Siin N ja a_0 on konstandid, r on elektroni kaugus tuumast:

$$R_{3s}(r) = N \cdot \left(27 - \frac{18}{a_0}r + \frac{2}{a_0^2}r^2 \right) \cdot e^{-\frac{r}{3a_0}}.$$

10.1 Pidevad ja katkevad funktsioonid

Definitsioon 10.1

Vaatleme reaalmuutuja funktsioone $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$. Olgu $a \in X$.

Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks punktis** a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Selleks, et funktsioon oleks pidev punktis a , peavad olema täidetud kõik järgmised kolm tingimust:

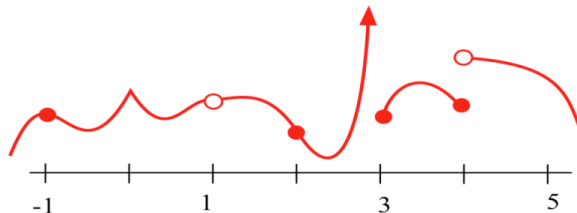
1. funktsioonil on olemas väärtus $f(a)$;
2. funktsioonil on olemas piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ protsessis $x \rightarrow a$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis a , kuid on määratud tema ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon f on **katkev punktis** a (punkti a nimetatakse funktsiooni f **katkevuspunktiks**). Katkevuspunktist a räägitakse ka siis, kui funktsioon f ei ole määratud punktis a , kuid eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Teoreem 10.1

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Ülesanne 10.1. Leidke joonise põhjal intervallid, kus funktsioon on pidev ja punktid, kus ta ei ole pidev.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

Ülesanne 10.2. Joonestage ühe funktsiooni f graafik, mis rahuldab järgmisi tingimusi.

- | | |
|--|--|
| (a) funktsioon f on määratud lõigul $[0, 5]$ | (c) $f(1) = 0$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ | (d) funktsioon f on tõkestatud lõigul $[4, 5]$ |
| | (e) funktsioon f ei ole pidev punktis $x = 3$ |

Ülesanne 10.3. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $f(x) = \frac{ x-3 }{x-3}$ | (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ | (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ |
| (d) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 4x, & x > 2 \end{cases}$ | (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{2x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ | |

Ülesanne 10.4. Leidke parameetrite a ja b väärtused, mille korral järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 7x-2, & x \leq 1 \\ ax^2, & x > 1 \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} 3+ax^2, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases} & \text{(e)} \quad f(x) &= \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} bx^2, & x \leq 2 \\ 2x+b, & x > 2 \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x) &= \begin{cases} x-a, & x < 1 \\ \cos \pi x, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ülesanne 10.5. Töötaja leping näeb ette, et tema esialgne palk on 1000 € ning eduka töö korral ootab teda iga poole aasta tagant palgatõus 3%. Joonistage töötaja palga graafik järgmise 5 aasta jaoks ning uurige palgafunktsiooni pidevust.

10.2 Funktsiooni tuletis

Definitsioon 10.2

Olgu antud funktsioon $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Anname argumendile $a \in X$ muudu Δx nii, et $a + \Delta x \in X$, vastav funktsiooni muut olgu $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks punktis** a ja tähistatakse $f'(a)$.

Ülesanne 10.6. Lähtudes definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= 6x - 1 & \text{(c)} \quad f(x) &= x^3 & \text{(e)} \quad f(x) &= \cos x \\ \text{(b)} \quad f(x) &= 2x^2 - 5 & \text{(d)} \quad f(x) &= \sqrt{3x} & \text{(f)} \quad f(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ülesanne 10.7. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= 3x^5 & \text{(d)} \quad f(x) &= 2^x - e^x & \text{(g)} \quad f(x) &= 21x^{-7} - \frac{\arcsin x}{2} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= x + 6x^{\frac{1}{3}} & \text{(e)} \quad f(x) &= \log_2 |x| + \sin x & \text{(h)} \quad f(x) &= -\ln |x| + \frac{x^3}{6} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2e & \text{(f)} \quad f(x) &= \frac{1}{2x} - 3 \arccos x & \text{(i)} \quad f(x) &= 3\pi^2 + 6\sqrt[3]{x^4} \end{aligned}$$

Teoreem 10.2

Tehetega seotud diferentseerimise reeglid

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad tuletised punktis x , siis ka funktsioonidel $u + v, u - v, uv, \frac{u}{v}$ (lisatingimusel) eksisteerivad tuletised punktis x , kusjuures

$$1. \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2. \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$3. \quad (cu)' = cu', \quad c = \text{const}$$

$$4. \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \text{kui } v \neq 0$$

Ülesanne 10.8. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a , b ja α on konstandid).

(a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

(f) $f(x) = -\frac{5x}{x - 6}$

(b) $f(x) = x^a b^x$

(g) $f(x) = \frac{e^x a^x}{1 + \ln a}$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

(h) $f(x) = \frac{x \tan \alpha}{1 + x^2} + x \ln x$

(d) $f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$

(i) $f(x) = \arccos x \arcsin x$

(e) $f(u) = \frac{\sin u}{u} - \ln u \cdot \cos u$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sin x} + a^2 \arctan x$

Ülesanne 10.9. Leidke funktsiooni $f(x) = (3x - 1)(3x + 1)(x^2 - 4)$ tuletis

(a) kasutades korrutise tuletise valemit

(b) korrutades sulud läbi

Ülesanne 10.10. Arvutage järgmiste funktsioonide tuletised punktis t .

(a) $f(t) = 15t^3 e^t$ ja $t = 1$

(b) $f(t) = \frac{t^2(1 - 2t)}{3t - 7}$ ja $t = -1$

Ülesanne 10.11. (F) Laserite teoorias avaldub kiirgusvõimsus valemiga

$$P = \frac{k f^2}{\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2},$$

kus f on sagedus ning a , k ja ω on teatud konstandid. Leidke $\frac{dP}{df}$.

Ülesanne 10.12. (IT) Arvutisüsteem töötleb N bitti andmeid ajaga t , mis on võrdeline arvuga $N \ln(N)$. Leidke aja muutumise kiirus bittide arvu suhtes $\frac{dt}{dN}$.

Ülesanne 10.13. (K) Termodünaamikas seob temperatuuri T , rõhku p ja gaasi ruumala V valem, kus a , b ja R on konstandid. Leidke $\frac{dT}{dV}$, kui rõhk on konstantne ja

$$T = \left(p + \frac{a}{V^2}\right) \left(\frac{V - b}{R}\right).$$

10.3 Liitfunktsiooni tuletis

Teoreem 10.3

Teoreem liitfunktsiooni diferentseerimisest. Kui $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in X$, $f(X) \subset Y$ ja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $y = f(x)$, siis $h = g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x ja

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Ülesanne 10.14. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = (4x - 3)^5 + (-3x)^2$

(d) $y = x\sqrt{1 - x^2}$

(g) $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right)$

(b) $y = 5(3x^6 - 4)^{\frac{2}{3}}$

(e) $y = \ln(x + \ln x)$

(h) $y = \frac{e^{0,5x}}{2x}$

(c) $y = (\sin x)^{-1}$

(f) $y = 6^{\sqrt{x}} + 4^{6x}$

Ülesanne 10.15. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$(a) \quad y = \left(\frac{2x+1}{3x-2} \right)^2$$

$$(f) \quad y = \frac{\cos^2 3x}{1 + 2 \sin^2 2x}$$

$$(b) \quad y = \sqrt{\frac{2x+1}{4x+1}}$$

$$(g) \quad y = \ln \tan 2x + \ln \cot 2x$$

$$(c) \quad y = \ln(4x-3)^3$$

$$(h) \quad y = 6 \arcsin \sqrt{2-x}$$

$$(d) \quad y = \cos(-9x+2) + \sin^3 4x^5$$

$$(i) \quad y = \arctan \frac{1-x}{1+x}$$

$$(e) \quad y = \frac{1}{\cos(-7x)} + \frac{1}{\sin(-7x)}$$

$$(j) \quad y = \arccos x \cdot \ln \arctan x$$

Ülesanne 10.16. Tabelis on antud funktsioonide f ja g ning nende tuletiste väärtused kohal $x = 3$. Leidke funktsiooni $u(x) = \sqrt{f(x)^2 + 2 \cdot g(x)^2}$ tuletise väärtus punktis $x = 3$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	3	4	6	-5

Ülesanne 10.17. (F) Laine kiirus sügavas vees on arvutatav seaduse $v = k \cdot \sqrt{\frac{L}{m} + \frac{a}{L}}$ alusel (a , k ja m on konstandid, L laine pikkus). Leidke L väärtused, mille korral $v'(L) = 0$.

Ülesanne 10.18. (B) Näidaku funktsioon $y = y(t)$ mingi liigi isendite, taime osade, rakkude arvu vms ajahetkel t . Sel juhul tuletist $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ nimetatakse ka absoluutseks kasvukiiruseks hetkel t . Absoluutne kasvukiirus võib erisuurustes organismide vahel palju erineda ja see ei anna meile infot nn efektiivsuse kohta. Olgu kasvukiirus $y'(t) = G(t)$, s.t. ajast sõltuv funktsioon. Sel juhul jagades mõlemat poolt suurusega y saame

$$\frac{y'(t)}{y} = \frac{G(t)}{y}.$$

Jagatist $R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ nimetatakse suhteliseks kasvukiiruseks ja see iseloomustab nn materjali efektiivsust toota uut materjali (näiteks metsa kasv). Sookase (*Betula pubescens*) ja mägivahtra (*Acer pseudoplatanus*) seemned istuti maha ja kasvanud taimed kärbiti iga kahe nädala tagant. Esimese 18 nädalaga selgus mõõtetulemustest, et puud kasvasid seaduste

$$W_{kask}(t) = 0,0441 e^{0,3041 t}, \quad W_{vahter}(t) = 0,3837 e^{0,2243 t}$$

alusel, kus t ühikuks olid nädalad ja W ühikuks grammid. Kirjutage välja mõlema liigi suhtelised kasvukiirused $R(t)$. Milline liik taastoodab ennast efektiivsemalt?

Ülesanne 10.19. (K) Kui gaasi ruumala muutub väga kiiresti, siis rõhk P muutub ligikaudu pöördvõrdeliselt ruumala $3/2$ -astmega. On teada mõõtmistulemus, et 300 kPa rõhuga $V = 100 \text{ cm}^3$. Leidke rõhu P muutumise kiirus ruumala V järgi hetkel, mil $V = 100 \text{ cm}^3$.

10.4 Kõrgemat järku tuletis

Kui eksisteerib $(f')'(x)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) tuletiseks punktis x , seega

$$(f')'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Analoogiliselt defineeritakse n -järku tuletis

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Ülesanne 10.20. Leidke järgmised kõrgemat järku tuletised.

(a) $f(x) = \ln x$, leidke f''

(c) $f(x) = 2x^5 + 6x^2$, leidke $f^{(10)}$

(b) $f(x) = \sin x$, leidke $f^{(13)}$

(d) $f(x) = \tan x$, leidke f''

Ülesanne 10.21. Leidke nõutud kõrgemat järku tuletised, kui funktsioon $u = u(x)$ on vajalik arv kordi diferentseeruv.

(a) $f(x) = u(x^2)$, leidke f''

(c) $f(x) = u(x)^2$, leidke f'''

(b) $f(x) = u(e^x)$, leidke f'''

(d) $f(x) = \frac{u(x^2)}{x}$, leidke f''

Ülesanne 10.22. Arvutage nõutud kõrgemat järku tuletise väärtus.

(a) $f''' \left(\frac{\pi}{4} \right)$, kui $f(x) = \cos^2 x$

(b) $f^{(4)}(2)$, kui $f(x) = \frac{1}{x - x^2}$

Ülesanne 10.23. Leidke

(a) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, kui $y = \frac{\ln x}{x}$

(b) $\frac{d^2 p}{dq^2}$, kui $p = qe^{q^2}$

(c) $\frac{d^3 s}{dt^3}$, kui $s = \frac{t}{2 + 3t}$

10.5 Logaritmiline diferentseerimine

Logaritmilise diferentseerimise võtte on vältimatu $u(x)^{v(x)}$ tüüpi funktsioonide korral, kuid see on abiks ka siis, kui f sisaldab palju korrutisi ja jagatisi.

1. Kirjutame

$$|y| = |f(x)|$$

2. Võtame logaritmi võrrandi mõlemast poolest

$$\ln |y| = \ln |f(x)|$$

3. Võtame tuletise

$$\frac{1}{y} y' = (\ln |f(x)|)'$$

4. Saadud seosest avaldame y'

$$y' = y (\ln |f(x)|)'$$

Ülesanne 10.24. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $f(x) = x^x$, kui $x > 0$

(d) $f(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x$

(b) $f(x) = x^{\sin x}$, kui $x > 0$

(e) $f(x) = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

(c) $f(x) = (\ln x)^x$, kui $x > 1$

11.1 L'Hospitali reegel

Teoreem 11.1

L'Hospitali reegel. Kui mingis protsessis $x \rightarrow a$ (siin $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

siis selles protsessis kehtib võrdus $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Ülesanne 11.1. Leidke l'Hospitali reegli abil järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9}{5x^2 - x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5}{x^4 + 5x^3 - 6}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 6x}{\ln \sin 3x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$,

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

Ülesanne 11.2. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{(\pi - x)^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$

(g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (1 - \sin x) \tan x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$

11.2 Funktsiooni diferentsiaal

Definitsioon 11.1

Olgu antud punktis x diferentseeruv funktsioon f . Anname argumendile x muudu Δx . Korrutist $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni f **diferentsiaaliks** punktis x . Tähistame dy või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{ehk} \quad dy = f'(x)dx. \quad (11.1)$$

Ülesanne 11.3. Leidke funktsioonide diferentsiaalid.

(a) $y = x^5 + 4x$

(d) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{8x}$

(g) $y = 6x\sqrt{1 - 4x}$

(b) $y = 3x^2 + 6$

(e) $y = xe^x$

(h) $y = \frac{x}{5x + 2}$

(c) $T = \frac{2}{r^5} + 3\pi^2$

(f) $R = \sqrt{\frac{6u}{1 + 2u}}$

(i) $y = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x - 1}}$

Ülesanne 11.4. Arvutage funktsioonide diferentsiaalid ette antud väärtustel.

(a) $y = 7x^2 + 4x$, $x = 4$, $\Delta x = 0,2$

(d) $f(x) = x\sqrt{1+4x}$, $x = 12$, $\Delta x = 0,06$

(b) $y = (x^2 + 2x)^3$, $x = 7$, $\Delta x = 0,02$

(e) $y = \frac{x}{\sqrt{6x-1}}$, $x = 3,5$, $\Delta x = 0,025$

(c) $y = (x^2 + 1)^2$, $x = 1$

(f) $f(x) = \tan x$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

11.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis võime funktsiooni f muudu Δf asemel leida funktsiooni f diferentsiaali df ,

$$\Delta f \approx df \quad \text{ehk} \quad f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Ülesanne 11.5. Avaldage ringi pindala S raadiuse funktsioonina. Leidke selle funktsiooni muut ΔS ning diferentsiaali definitsiooni põhjal funktsiooni diferentsiaal dS . Leidke suurus, mille võrra erinevad funktsiooni muut ja diferentsiaal.

Ülesanne 11.6. Arvutage, kui palju ligikaudu suureneb kera pinna pindala, kui raadiust pikendada 50 sentimeetrit 51 sentimeetrini.

Ülesanne 11.7. Arvutage ligikaudu, kui palju on vaja värvi, et katta 55 m raadiusega poolkera-kujuline klaasist kuppel 0,5 mm paksuse värvikihiga.

Ülesanne 11.8. Ilmajaam ripub raadiusega 3,5 m kerakujulise õhupalli otsas. Õhupall kattub ühtlase jää kihiga, mille paksus on 1,2 mm. Leidke jää ligikaudne ruumala.

11.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ülesanne 11.9. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $\sqrt{1,08}$

(d) $\sin 46^\circ$

(g) $\sqrt[3]{1,02}$

(i) $\arctan 1,05$

(b) $\sqrt{15,93}$

(e) $\log 11$

(h) $\sqrt{\frac{2,92^2 - 5}{2,92^2 + 7}}$

(c) $(3,02)^5$

(f) $e^{0,1}$

Ülesanne 11.10. Esitage ligikaudne valem funktsiooni väärtuse arvutamiseks etteantud punkti a ümbruses ning arvutage saadud valemi põhjal funktsiooni väärtus kohal b .

(a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 8}$, $a = 2$, $b = 1.92$

(b) $f(x) = x^2(x+1)^4$, $a = -2$, $b = -1.87$

Ülesanne 11.11. (B) Inimese ellujäämise tõenäosus y põletushaavade korral $x\%$ kehist on ligikaudselt esitatav valemiga $y = \frac{300}{0,0005x^2 + 2} - 50$. Esitage y ligikaudse arvutamise valem kohal $x = 50\%$. Arvutage saadud valemi põhjal inimese ellujäämise tõenäosus y , kui kehal on põletushaavu 45%.

Praktikum 12

Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine

12.1 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus

Ülesanne 12.1. Naftatankeris tekib ringikujuline leke, kus vee pinnal olev õliringi raadius r suureneb kiirusega 10 m minutis. Kui kiiresti suureneb reostatud ala (ringi pindala) hetkel, kui $r = 25$ m?

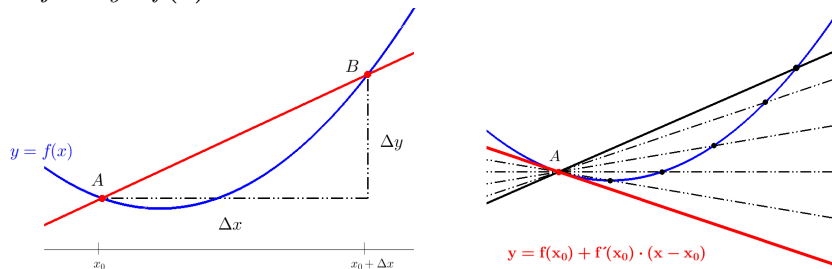
Ülesanne 12.2. Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega 20 cm³/min. Kui kiiresti suureneb kera raadius r , kui enne õhu juurde pumpamist $r = 6$ cm?

Ülesanne 12.3. Silindri kõrgus h suureneb kiirusega 7 m/sek ja aluse raadius r suureneb 3 m/sek. Kui kiiresti suureneb silindri ruumala, kui $h(0) = 5$ m ja $r(0) = 6$ m?

12.2 Joone puutuja ja normaal

Definitsioon 12.1

Joone **puutujaks** punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$.



Funktsiooni f tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (12.1)$$

Definitsioon 12.2

Joone $y = f(x)$ **normaaliks** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand punktis $(x_0, f(x_0))$ avaldub järgmiselt

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (12.2)$$

Ülesanne 12.4. Leidke funktsiooni graafiku puutuja ja normaal nõutud punktis $(x_0, f(x_0))$.

(a) $y = x^2 + 2x$ punktis $(2, 8)$

(c) $y = 4 - x^2$ punktis $(3, -5)$

(b) $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x$ punktis $(3, -6)$

(d) $y = \frac{1}{x^2+1}$ punktis $(-1, \frac{1}{2})$

Ülesanne 12.5. Leidke funktsiooni graafiku puutuja või normaal etteantud tõusuga.

(a) $y = x^2 - 2x$ puutuja, tõusuga 2

(c) $y = (2x - 1)^3$ normaal, tõusuga $-\frac{1}{24}$, $x > 0$

(b) $y = \sqrt{2x - 9}$ puutuja, tõusuga 1

(d) $y = \frac{x^4}{2} + 1$ normaal, tõusuga 4

Ülesanne 12.6. Arvutimängus liiguvad lennukid ekraanil vasakult paremale eeskirja $y = 2 + \frac{1}{x}$ järgi. Lennukite relvadeks on raketid, mida tulistatakse ainult liikumise suunas. Sihtmärgid asuvad x -teljel: $x = 1, 2, 3, 4$. Kas punktist $(1, 3)$ lastud rakett tabab ühte sihtmärkidest?

Ülesanne 12.7. Näidake, et joone $y = x + 2x^2 - x^4$ puutuja punktis $(1, 2)$ on selle joone puutujaks ka punktis $(-1, 0)$.

Ülesanne 12.8. Käiaga terariistu teritades lendavad sädemed mööda käia välispinna puutujat. Leidke punktist $(3, 4)$ lenduva sädeme trajektoor (sirge), kui käi on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ kujuga.

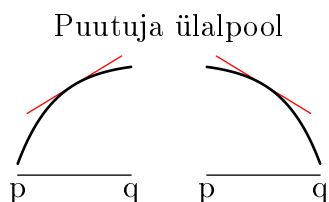
12.3 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõgususpiirkonnad

Teoreem 12.1

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f'(x) > 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kasvav** selles vahemikus, ja kui $f'(x) < 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kahanev** selles vahemikus.

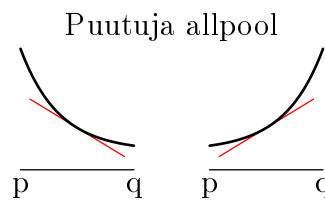
Definitsioon 12.3

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni graafiku puutuja asub ülalpool graafikut.



Definitsioon 12.4

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni graafiku puutuja asub allpool graafikut.

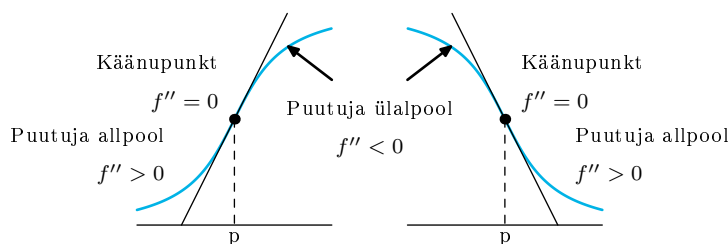


Teoreem 12.2

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f''(x) < 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **kumer** selles vahemikus. Kui $f''(x) > 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **nõgus** selles vahemikus.

Definitsioon 12.5

Olgu funktsioon f diferentseeruv vähemalt vahemikes (a, c) ja (c, b) ning pidev punktis c . Kui funktsioon f on kumer vahemikus (a, c) ja nõgus vahemikus (c, b) (või nõgus vahemikus (a, c) ja kumer vahemikus (c, b)), siis punkti c nimetatakse **käänupunktiks**.



Ülesanne 12.9. Leidke järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (c) $f(x) = x - \sin x$ (e) $f(x) = \arccos(1 + x)$
 (b) $f(x) = 8x^2 - x^4$ (d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (f) $f(x) = xe^{-x}$, kus $x > 0$

Ülesanne 12.10. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute $y = f(x)$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

- (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ (c) $f(x) = \arctan x - x$ (f) $f(x) = x^3 - 6x^2$
 (b) $f(x) = \frac{3}{x-4}$ (d) $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$ (g) $f(x) = \ln(1 + x^2)$
 (e) $f(x) = e^{-x^2}$ (h) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

Ülesanne 12.11. Skitseerige pidevate funktsioonide $y = f(x)$ graafikud, millel on nimetatud omadused.

- (a) $f(0) = -1$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) > 0$, kui $x > 0$ (c) $f(0) = 1$; $f'(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral; $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f''(x) > 0$, kui $x > 0$
 (b) $f(1) = 0$; $f'(x) > 0$ ja $f''(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (d) $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$; $f'(x) < 0$, kui $x < -1$; $f'(x) > 0$, kui $x > -1$; $f''(x) < 0$, kui $0 < x < 2$; $f''(x) > 0$, kui $x < 0$ või $x > 2$

12.4 Ekstreemumid

Definitsioon 12.6

Öeldakse, et funktsioonil $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, on punktis (kohal) $a \in X$ **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis (kohal) a **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Definitsioon 12.7

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**. Punkte c , kus $f'(c) = 0$, nimetatakse **statsionaarseteks punktideks**.

Lause 12.1

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv punktis c . Siis funktsioonil f on argumenti väärtusel c **lokaalne maksimum**, kui

$$f'(c) = 0 \text{ ja } f''(c) < 0,$$

funktsioonil f on argumenti väärtusel c **lokaalne miinimum**, kui

$$f'(c) = 0 \text{ ja } f''(c) > 0.$$

Ülesanne 12.12. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$

(e) $f(x) = x \ln^2 x$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(f) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

(c) $f(x) = x \ln x$

(g) $f(x) = x - \arctan x$

(d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$

Funktsiooni **globaalsed ekstreemumid** on funktsiooni suurim ja vähim väärtus mingis piirkonnas.

Globaalsete ekstreemumite leidmine:

1. Leiame kõik lokaalsed ekstreemumid.
2. Arvutame funktsiooni väärtused piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga).
3. Saadud funktsiooni väärtustest suurim on globaalne maksimum ja väiksem on globaalne miinimum.

Ülesanne 12.13. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3, x \in [0, 5]$

(d) $f(x) = \arccos x$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1, x \in [-2, 3]$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$

(c) $f(x) = x - \ln x, x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

(f) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

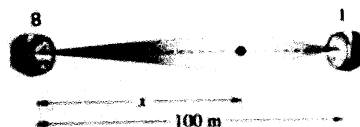
12.5 Optimeerimine

Ülesanne 12.14. Risttahukakujuline karp on tehtud nii, et on võetud 12×8 mõõtmetega papist ristkülik, lõigatud igast nurgast välja $x \times x$ ruut ning keeratud vastavad servad üles. Koostage karbi ruumala arvutamiseks funktsioon, mis sõltub argumentist x . Skitseerige ruumala $V = V(x)$ graafik. Leidke x väärtus nii, et sellise karbi ruumala oleks suurim.

Ülesanne 12.15. Lennukompanii lubab pardale käsipagasi, mille laiuse, kõrguse ja pikkuse summa ei ületa 1,2 meetrit. Kui koti laiuse ja pikkuse suhe on 2,5, siis mis mõõdus koti ruumala oleks suurim?

Ülesanne 12.16. (B) Katsed näitavad, et kui inimene köhib, siis õhu kiirus kõris on $v = kr^2(a-r)$, kus a on kõri raadius normaalasendis ja k on konstant. Leidke r väärtus, mille korral kiirus v on suurim.

Ülesanne 12.17. (F) Valgusallika valgustihedus mingis punktis võrdub valgusallika tugevusega jagatud kauguse (valgusallikast) ruuduga.



Kui 8 ja 1 valgustugevuse ühikuga valgusallikad asuvad üksteisest 100 m kaugusel, siis millises punktis nende vahel on valgustihedus kõige väiksem? Näpunäide: valgustihedused liidetakse.

Ülesanne 12.18. (K) Teatud kemikaali reageerimiskiirus R mg/s sõltub kemikaali hulgast m mg. Leidke kogus m , et reageerimiskiirus R oleks maksimaalne, kui $R = 12\sqrt{m}(27 - m)$.

12.6 Graafiku asümptoodid

Definitsioon 12.8

Sirget $x = a$ nimetatakse funktsiooni f graafiku **püstasümptoodiks**, kui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Definitsioon 12.9

Sirget

$$y = ax + b, \quad a \neq 0 \quad (12.3)$$

nimetatakse funktsiooni f graafiku parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, mis tähendab, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right). \quad (12.4)$$

Parempoolse (vasakpoolse) **kaldasümptoodi** $y = ax + b$ võrrandi saamiseks leitakse piirväärtused

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right), \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \right). \end{aligned}$$

Kaldasümptoot puudub, kui piirväärtus on lõpmatus.

Ülesanne 12.19. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$

(f) $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$

Ülesanne 12.20. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

(b) $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2}$

(d) $f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2}$

(f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$

(g) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Ülesanne 12.21. (F) Eeldades lihtsustatult, et vihmapiisk on kerakujuline ja langedes piisa raadius väheneb ühest kuni r_0 millimeetrini, siis piisa kiirus avaldub valemiga

$$v = k \left(r - \frac{1}{r^3} \right) \quad \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Skitseerige kiiruse graafik juhul, kui $k = 1$.

Praktikum 13

Määramata integraal

13.1 Määramata integraali mõiste

Definitsioon 13.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **alg-funktsiooniks** vahemikus (a, b) , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 13.2

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$, kus $C \in \mathbb{R}$ on suvalise konstandi tähis, nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ülesanne 13.1. Veenduge, et järgmised valemid kehtivad.

(a) $(\int f(x) dx)' = f(x)$

(b) $\int f'(x) dx = f(x) + C$

(c) $\int d f(x) = f(x) + C$

Ülesanne 13.2. Leidke järgmiste funktsioonide algfunktsioonid.

(a) $12x^5 + 6x$

(b) $4\sqrt{x} + 3$

(c) $\frac{5}{2}x^{3/2}$

(d) $3(R^2 + 1)^2(2R)$

Ülesanne 13.3. Miks on nii, et $(x + 5)^3$ on funktsiooni $3(x + 5)^2$ algfunktsiooniks, aga $(2x + 5)^3$ ei ole funktsiooni $3(2x + 5)^2$ algfunktsiooniks?

13.2 Määramata integraali leidmine

Valem 13.1

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0 dx = C$

(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(2) $\int dx = x + C$

(6) $\int e^x dx = e^x + C$

(10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$
 $a \neq -1$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Valem 13.2

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Ülesanne 13.4. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (2)-(4)

(a) $\int \frac{y^3}{3} dy$	(d) $\int \sqrt{x}(x^2 - 5x) dx$	(g) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx$
(b) $\int \frac{4}{\sqrt{x}} dx$	(e) $\int (2x^{-2/3} + 3^{-2}) dx$	(h) $\int \frac{3x^2 - 4x + 5\sqrt{x}}{x^2} dx$
(c) $\int 5x\sqrt{x} dx$	(f) $\int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2}{t^2} \right) dt$	(i) $\int \frac{x^2 - 2x + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

Ülesanne 13.5. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (5) ja (6)

(a) $\int (2^x 5^x + e) dx$	(b) $\int (e^x + \ln 2)^2 dx$	(c) $\int \frac{dx}{e^x}$	(d) $\int \frac{2^x}{4^x} dx$
-----------------------------	-------------------------------	---------------------------	-------------------------------

Ülesanne 13.6. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (11) ja (12)

(a) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$	(c) $\int \sqrt{1 + \frac{x^2 + x^4}{1 - x^4}} dx$	(d) $\int \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2 - 2x^2}} dx$
(b) $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$		

Ülesanne 13.7. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int (2 \cos^2 x - \cos 2x) dx$	(c) $\int \tan^2 x dx$	(e) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
(b) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$	(d) $\int (\sin \alpha + 3 \cos(\pi + x)) dx$	

13.3 Diferentsiaali märgi alla viimine

Valem 13.3

(12.1) $f'(x) dx = d f(x)$	(12.4) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$	(12.6) $\frac{dx}{x} = d \ln x $
(12.2) $dx = d(x + b)$	(12.5) $x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1},$ $n \neq -1$	(12.7) $\cos x dx = d \sin x$
(12.3) $dx = \frac{1}{a} d(ax)$		(12.8) $\sin x dx = -d \cos x$

Ülesanne 13.8. On antud funktsiooni diferentsiaal. Leidke see funktsioon.

(a) $3 dx$	(c) $2\sqrt{x} dx$	(e) $-\frac{3}{x} dx$	(g) $e^2 x dx$
(b) $x dx$	(d) $\frac{dx}{x^3}$	(f) $\frac{dx}{\cos^2 x}$	(h) $\frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

Ülesanne 13.9. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (12.2)-(12.4).

(a) $\int \cos(x + 2) dx$	(c) $\int (3x - 2)^7 dx$	(e) $\int e^{-2x+8} dx$	(g) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x - 5)}$
(b) $\int \sin 3x dx$	(d) $\int \sqrt[3]{7 - 2x} dx$	(f) $\int \frac{dx}{3x + 5}$	(h) $\int \sin^2 x dx$

Ülesanne 13.10. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (12.5) ja (12.6).

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}} & \text{(c)} \int x^2 e^{x^3} dx & \text{(e)} \int \frac{\ln x^3}{2x} dx \\ \text{(b)} \int \frac{3\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}} & \text{(d)} \int \frac{2x+7}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{(f)} \int \frac{dx}{x \ln x} \end{array}$$

Ülesanne 13.11. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (12.7) ja (12.8).

$$\text{(a)} \int \cos^2 x \sin x dx \quad \text{(b)} \int \tan x dx \quad \text{(c)} \int \cos^3 x dx \quad \text{(d)} \int \tan^3 x dx$$

13.4 Muutujavahetus

Lause 13.1

Kui $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv funktsioon muutumiskiirkonnaga U ja f on pidev määramispiirkonnas U , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (13.1)$$

Ülesanne 13.12. Leidke integraalid muutujavahetuse või diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx & \text{(e)} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} & \text{(i)} \int \frac{4z - 4}{\sqrt{z^2 - 2z}} dz \\ \text{(b)} \int \frac{2x}{x^4 + 3} dx & \text{(f)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} dx & \text{(j)} \int (x^2 + 4x + 4)^{1/3} dx \\ \text{(c)} \int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx & \text{(g)} \int x \cos x^2 \sin^2 x^2 dx & \text{(k)} \int (x^2 - x) \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right)^8 dx \\ \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} & \text{(h)} \int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x)} & \end{array}$$

Ülesanne 13.13. (IT) Karpe kokkupaneev robot peab avaldama jõudu $F = 6 \int e^{\sin(\pi t)} \cos(\pi t) dt$ N, kus t on aeg sekundites. Milline funktsioon $F = F(t)$ tuleb lisada arvuti programmi, kui $t = 1.5$ s korral peab jõud $F = 0$?

Ülesanne 13.14. (Maj) Ettevõtte andmed näitavad, et x generaatori tootmisel muutub päevase kasumi p (eurodes) kiirus ligikaudu seaduse $\frac{dp}{dx} = \frac{600(30-x)}{\sqrt{60x-x^2}}$ alusel. Leidke x generaatori tootmise kasum p , kui null generaatori tootmisel saadakse 5000 eurot kahjumit.

Ülesanne 13.15. Leidke järgmised integraalid märgitud muutujavahetusega.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int x\sqrt{1-x} dx, \quad t = \sqrt{1-x} & \text{(d)} \int \frac{dx}{\sin 2x}, \quad t = \tan x \\ \text{(b)} \int x^3\sqrt{1-x^2} dx, \quad t = \sqrt{1-x^2} & \text{(e)} \int \tan^3 x dx, \quad t = \cos x \\ \text{(c)} \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \text{(f)} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, \quad x = t - \frac{1}{t}, \quad t > 0 \end{array}$$

Ülesanne 13.16. Leidke sobiva muutujavahetusega järgmised integraalid.

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \quad \text{(c)} \int \frac{3\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx \quad \text{(d)} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1 + e^x}} dx$$

1. Absoluutväärtus, arvuhulkade rajad.

1. Reaalarvu absoluutväärtus.
2. Newtoni binoomvalem.
3. Arvuhulkade rajad.

2. Arvjada piirväärtus, funktsiooni piirväärtus

1. Jada tõkestatus.
2. Jada piirväärtuse definitsioon (sh lõpmatu piirväärtus).
3. Jada piirväärtuse arvutamine, piirväärtused $\lim a^n$, $\lim \sqrt[n]{a}$, $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
4. Sändvitš-teoreem.
5. Funktsiooni piirväärtuse definitsioon (sh lõpmatu piirväärtus, piirväärtus lõpmatuspunktides).
6. Heine kriteerium.

3. Funktsioonid

1. Määramispiirkond, muutumispiirkond, paaris- ja paaritu funktsioon, üksühene funktsioon.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, elementaarfunktsioonide graafikute skitseerimine.
3. Pöördfunktsiooni leidmine.

4. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

1. Piirväärtuse arvutamine, piirväärtuse omadused, määramatuste $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty\right)$ avamine (tegurdamine).
2. Piirväärtused $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.
3. Funktsiooni pidevuse uurimine.

5. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal, rakendused

1. Tuletise leidmine definitsiooni põhjal.
2. Tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
3. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
4. L'Hospitali reegel. Funktsiooni diferentsiaali leidmine. Funktsiooni muudu või funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.
5. Funktsiooni uurimine ja graafiku skitseerimine. Kasvamise ja kahanemise piirkonnad, lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.

Praktikum 15

Ositi integreerimine

15.1 Ositi integreerimine

Lause 15.1

Olgu funktsioonid u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad ja eksisteerigu integraal

$$\int u'(x)v(x) dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x)v'(x) dx$$

ja kehtib võrdus

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx. \quad (15.1)$$

Võrdust (15.1) nimetatakse **määramata integraali ositi integreerimise valemiks**.

Kuna $u'(x)dx = du$ ja $v'(x)dx = dv$, siis esitatakse see võrdus sageli kujul

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (15.2)$$

Ülesanne 15.1. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int xe^x dx$

(d) $\int x3^{-x} dx$

(g) $\int \ln x dx$

(b) $\int x \cos x dx$

(e) $\int \arctan x dx$

(h) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

(c) $\int x \sin(2x + 1) dx$

(f) $\int \arcsin x dx$

(i) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

Ülesanne 15.2. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise valemi mitmekordsel rakendamisel.

(a) $\int x^2 \sin x dx$

(c) $\int x^3 e^{-2x} dx$

(e) $\int e^{2x} \cos x dx$

(b) $\int x^3 e^x dx$

(d) $\int e^x \sin x dx$

(f) $\int \sin \ln x dx$

Ülesanne 15.3. (K) Et leida teatud tüüpi molekulide keskmine läbimõõt, tuleb leida integraal

$$\int x^3 e^{-x^2/8} dx.$$

Leidke antud integraal.

Ülesanne 15.4. Leidke viga järgmises lahenduskäigus. Et $e^{-x}e^x = 1$, siis $\int dx$ on võimalik integreerida ositi, võttes $u = e^{-x}$ ja $dv = e^x dx$. Siis $du = -e^{-x} dx$ ja $v = e^x$ ning ositi integreerimise valemist saame

$$\int dx = e^{-x}e^x + \int e^{-x}e^x dx \quad \text{ehk} \quad \int dx = 1 + \int dx.$$

Pärast ühesuguste integraalide koondamist saame vastuolu: $0 = 1$.

15.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Definitsioon 15.1

Kui polünoomi $P(x)$ aste on väiksem polünoomi $Q(x)$ astmest, siis ratsionaalfunktsiooni $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

Valem 15.1

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise eeskiri.

Olgu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lihtmurd. Kui

$$Q(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + px + q)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole reaalseid nullkohti), siis kehtib võrdus

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + px + q)^m} + \dots,$$

kus konstandid $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, \dots, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m, \dots$ on mingid reaalarvud.

Ülesanne 15.5. Lahutage ratsionaalmurrud osamurdude summaks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} dx$

(e) $\int \frac{dt}{t^3 - t^2}$

(i) $\int \frac{2}{x^4 - x^2} dx$

(b) $\int \frac{x-2}{x(x+1)} dx$

(f) $\int \frac{2}{x^2(x^2-1)} dx$

(j) $\int \frac{(x-2)(x+2)}{x^3(x-1)} dx$

(c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

(g) $\int \frac{y-9}{2y^2-3y+1} dy$

(k) $\int \frac{x+4}{x(x^2+2x+2)} dx$

(d) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$

(h) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

(l) $\int \frac{16x+32}{x^4-16} dx$

Ülesanne 15.6. Miks ei saa integraali $\int \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} dx$ leidmisel kirjutada

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}?$$

Ülesanne 15.7. Eraldage murru täisosad, lahutage lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x^2+3}{x^2+3x} dx$

(b) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$

(c) $\int \frac{x^3+x+2}{(x-1)(x+1)} dx$ (d) $\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+3x+2} dx$

Ülesanne 15.8. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int \frac{\sin 2x}{(3-\sin x)^3} dx$

(d) $\int \frac{2r^3}{r^4+2r^2+1} dr$

(g) $\int \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^3} dx$

(b) $\int \frac{2x^3+3x-5}{(x^2+x-2)^2} dx$

(e) $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$

(h) $\int \frac{3x+4}{x^2+2} dx$

(c) $\int \frac{2x^3+x^2+8x+10}{(x^2+1)(x^2+6x+10)} dx$ (f) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2-1)} dx$

(i) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+2} dx$

Praktikum 16

Diferentsiaalvõrrandid

16.1 Harilikud diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 16.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon ning see võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 16.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Ülesanne 16.1. (B) Olgu mingis levialas küülikute arv hetkel t aastat märgitud funktsiooniga $R = R(t)$. Ühendage vastav diferentsiaalvõrrand vastava kirjeldusega (igale olukorrale vastab ainult üks diferentsiaalvõrrand).

- | | |
|---|--------------------------|
| (a) Küülikute arv on konstantne | (a) $R = 0$ |
| (b) Igal aastal sünnib 10 uut küülikut | (b) $dR/dt = 10 R$ |
| (c) Keskmiselt toodab iga küülik 10 uut küülikut aastas | (c) $dR/dt = 10$ |
| (d) Igal aastal toodab iga küülik 10 küülikut juurde, kuid 100 saab surma | (d) $dR/dt = 0$ |
| (e) Levialas küülikuid ei ole | (e) $dR/dt = 10 R - 100$ |

16.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 16.3

Hariliku diferentsiaalvõrrandi lahendiks intervallis (a, b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, mis on selles intervallis diferentseeruv ning mille asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles intervallis.

Ülesanne 16.2. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x$ lahendid?

- | | | | |
|---------------|-------------------|---------------------|------------------|
| (a) $y = x^2$ | (b) $y = x^2 + 1$ | (c) $y = x^2 - 0.5$ | (d) $y = (5x)^2$ |
|---------------|-------------------|---------------------|------------------|

Ülesanne 16.3. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y'' - 3y' + 2y = 0$ lahendid?

- | | | |
|--------------------|------------------|-------------------------|
| (a) $y = e^x$ | (d) $y = 4e^x$ | (g) $y = e^{2x} - 3$ |
| (b) $y = e^{-x}$ | (e) $y = -7e^x$ | (h) $y = e^x + e^{2x}$ |
| (c) $y = e^{0.5x}$ | (f) $y = e^{2x}$ | (i) $y = 2e^x - e^{2x}$ |

Ülesanne 16.4. Näidake, et antud diferentsiaalvõrrandi lahend on vastav funktsioon. Siin C, C_1, C_2, C_3 on suvalised reaalarvud.

(a) $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2, y = (Cx)^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

(f) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$

(b) $y'' = x + \sin x, y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

(g) $(y')^2 - y' - xy' + y = 0, y = Cx + C - C^2$

(c) $y'' - y' = x, y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$

(h) $y''' + \frac{3}{x} y'' = 0, y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$

(d) $y' \tan x - y = 1, y = C \sin x - 1$

(i) $xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}, y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1 + C}$

(e) $xy' = y \ln \frac{y}{x}, y = x e^{Cx+1}$

16.3 Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 16.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb leida määramata integraalid ja lahendid saadakse (üldjuhul ilmutamata kujul) võrdusega

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

millest määratakse funktsioonid $y = y(x)$ või $x = x(y)$.

Ülesanne 16.5. Leidke antud eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandite üldlahendid. Joonistage mõned integraaljooned.

(a) $dy = 2dx$

(c) $dy = \frac{dx}{x}$

(e) $y' = x^4$

(b) $dy = \cos x dx$

(d) $dy = e^x dx$

(f) $yy' - x = 5$

Definitsioon 16.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamiseks teisendatakse see eraldatud muutujatega võrrandiks

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0.$$

Eraldi tuleb analüüsida punktihulki, kus $f_2(x) = 0$ või $g_1(y) = 0$. Need võivad anda lisalahendeid.

Ülesanne 16.6. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandite üldlahendid.

(a) $xy' = x + 1$

(e) $x(yy' - x + 1) = -1$

(i) $x(x + 1)y' + y = y^2$

(b) $y' = \frac{1}{y}$

(f) $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$

(j) $(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(c) $y' = 2\sqrt{y}$

(g) $y(x - 1)y' - 1/(y + 1) = 0$

(k) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(d) $xy' = y + 1$

(h) $xy' = y(y - 1)$

(l) $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$

Definitsioon 16.6

Ülesannet, milles otsitakse võrrandi $y' = f(x, y)$ sellist lahendit $y = y(x)$, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, nimetatakse **Cauchy ülesandeks** või ka **algtingimusega ülesandeks**.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ **erilahendiks** nimetatakse mistahes funktsiooni $y = y(x, C_0)$, mis saadakse üldlahendist $y = y(x, C)$, kui anda selles parameetrile C konkreetne väärtus C_0 . Selleks asendatakse algtingimus üldlahendisse.

Ülesanne 16.7. Leidke algtingimusega ülesande lahend.

(a) $y(x^2 - 1)y' = xy^2 + x, y(2) = -1$

(d) $yx dy + (x^2 - 1)dx = 0, y(1) = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, y(0) = 0$

(e) $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)/(1 + x^2), y(0) = 1$

(c) $y^2 y' + 2x = 1, y(2) = -1$

16.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 16.8. (Maj) Pangaarvel olev raha teenib intresse. Eeldades, et raha hulga R kasvamise kiirus on võrdeline raha hulgaga pangaarvel antud ajamomendil t , väljendage see seos diferentsiaalvõrrandi abil. Leidke selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

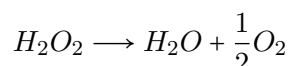
Ülesanne 16.9. (B) Olgu $y(t)$ teatud bakterite arv ajamomendil t . Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k y,$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne. Leidke bakterite arvu $y(t)$ üldavaldis, kui ajahetkel $t = 0$ on meil u. 10^7 bakterit.

Ülesanne 16.10. (B) Katseklaasis oli esialgselt N_0 bakterit. Ühe tunni pärast ($t = 1$) oli bakterite hulk $\frac{3}{2}N_0$. Eeldades, et bakterite kasvamise kiirus on võrdeline bakterite arvuga antud ajahetkel, leidke, kui kaua võtab aega, et bakterite arv kolmekordistuks.

Ülesanne 16.11. (K) Esimest järku reaktsiooni integraalne kiirusevõrrand. Vesinikperoksiidi lagunemine



on esimest järku reaktsioon, st vastav kineetiline võrrand on kujul

$$\text{lagunemise kiirus} = -\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k[H_2O_2] \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{min}},$$

kus $[H_2O_2] = [H_2O_2]_t$ on aine molaarne kontsentratsioon ajahetkel t ning k on kiiruskonstant. Olgu $k = 0,51 \text{ min}^{-1}$ ja aine algkontsentratsioon $[H_2O_2]_0 = 10 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. Leidke H_2O_2 kontsentratsioon aja t funktsioonina ja poolestusaeg $t_{1/2}$ (aeg, mille jooksul kontsentratsioon väheneb pooleni esialgsest).

Ülesanne 16.12. (F) Hubble'i seaduse kohaselt paisub universum kiirusega

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3c^2}} \cdot a,$$

kus a on kaugus kahe vaadeldava objekti vahel ja ρ on universumi energiatihedus. Kasutades erinevaid stsenaariume, lahendage võrrand ning analüüsige lahendi käitumist.

- (a) Eeldades, et universum koosneb enamasti ainest, siis $\rho = \frac{k}{a^3}$.
- (b) Kui universum koosneb enamasti kiirgusest, siis $\rho = \frac{k}{a^4}$.
- (c) Kui universum koosneb enamasti tumedast energiast (Einstein), siis $\rho = \text{Const}$.

Ülesanne 16.13. (M) Sotsioloogid kasutavad informatsiooni levimise kohta populatsiooni sees väljendit "sotsiaalne difusioon". Informatsioon ise võib olla kuulujutt, pärimus või uudis uuest tehnilisest leiutisest. Olgu piisavalt suure populatsioonis informatsiooni kuulnud inimeste arv x (hetkel t). Uudise levimise kiirus on võrdeline uudist kuulnud inimeste arvuga korda uudist veel mitte kuulnud inimeste arvuga:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

kus N on inimeste arv populatsioonis. Olgu t päevade arv, $k = 1/250$ ja kaks inimest on kuulnud kuulujuttu ajahetkel $t = 0$ ning $N = 1000$. Leidke x ajast t sõltuva funktsioonina. Mis hetkeks on mudeli järgi pool elanikkonnast seda kuulujuttu kuulnud?

Ülesanne 16.14. (K) Leidke n -ndat järku keemilise reaktsiooni toimumisel ühe lähteainega antud algtingimusel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = -kx^n, \quad x(0) = a, \quad n > 1.$$

Ülesanne 16.15. (K) Leidke kolmandat järku keemilise reaktsiooni $A + 2B$ toimumisel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - 2x)^2,$$

kus a ja b on vastavalt lähteainete A ja B algkogused. Algtingimuseks on $x(0) = 0$.

Ülesanne 16.16. (B) Kahe liigi kooslus (kiskjad ja saakloomad). Olgu $x(t)$ jäneste ja $y(t)$ huntide arv ajamomendil t . Modelleerime nende kahe populatsiooni kooseksisteerimise lihtsustatud kujul, kus jäneseid on huntide ainsaks toiduks ja neil pole teisi looduslikke vaenlasi, jäneste toidulaual ei ole piiranguid, kuna hundid ei lase neil liialt paljuneda. Jäneste ja huntide kooseksisteerimist saab kirjeldada diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + b_1xy}{ax - a_1xy},$$

kus a, a_1, b, b_1 on mingid positiivsed konstandid. Leidke diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Praktikum 17

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

17.1 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 17.1

Esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x),$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Kui $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis saab esimest järku lineaarse võrrandi esitada kujul

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad (17.1)$$

kus p ja f on antud funktsioonid ning lahend y on otsitav.

Ülesanne 17.1. Millised on esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid?

(a) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $y' = 3x^2 + 1$

(e) $y \ln xy' + y^2 = xy$

(b) $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(d) $y' - \sin x = xy^2$

(f) $y'' - xy' = \frac{1}{x}$

17.2 Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod).

1. Lahendame lineaarsele võrrandile (17.1) vastav homogeense võrrandi $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Vastava homogeense võrrandi lahend on

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Võrrandi (17.1) lahenditeks on on

$$y = y_h + y_*,$$

kus y_* on võrrandi üks konkreetne lahend.

2. Konkreetse lahendi y_* leiame kujul

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $C(x)$ on otsitav funktsioon. Asetame y_* ja y'_* võrrandisse (17.1) ja leiame $C(x)$.

Ülesanne 17.2. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - 3\frac{y}{x} = x$

(c) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

(e) $(1+x^2)y' = 2xy$

(b) $\frac{dy}{dx} - y = x^2$

(d) $y' - y \cos x = x^2 e^{\sin x}$

(f) $xy' + x^2 - y = 0$

(g) $y' - y = x - 1$

(k) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(o) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(h) $xe^x y' + ye^x = 1$

(l) $y' + y = x$

(p) $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$

(i) $y' = \frac{y+1}{x}$

(m) $x^2 y' + xy = -1$

(q) $xy' + \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0$

(j) $y' + 2y = 4x$

(n) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

17.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 17.3. (F) **Newtoni jahtumisseadus.** Esimene seadus keha jahtumise kohta konvektsiooni teel avaldati Isaac Newtoni poolt 28. mail 1701, mis lihtsustatult kõlas “keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnaühiku kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega.”

Matemaatiliselt kirjeldatuna tähendab see järgmist. Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T . Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_0 . Aega tähistame nagu ikka t -ga. Sel juhul

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0),$$

kus k on mingi konstant. Hetkel, kui kook ahjust võeti oli tema temperatuur 150°C . Kolm minutit hiljem oli koogi temperatuur 93°C . Kui kaua võtab aega koogi jahtumine toatemperatuurini 21°C ?

Ülesanne 17.4. (F) Kraadiklaas viiakse soojast 20°C toast õue, kus temperatuur on 5°C . Ühe minuti pärast näitab kraadiklaas 12°C . Kasutades Newtoni jahtumisseadust, vastake järgmistele küsimustele:

(a) Palju näitab kraadiklaas kaks minutit pärast õueviimist?

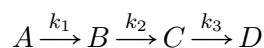
(b) Millal näitab kraadiklaas 6°C ?

Ülesanne 17.5. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktioonipool induktiivsusega L . Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktioonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a \sin(\omega t)$.

Ülesanne 17.6. (K) Esimest järku keemiliste reaktsioonide protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:



ja modelleeritakse järgmiste võrranditega

$$\frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x), \quad \frac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2y, \quad \frac{dz}{dt} = k_2y - k_3z.$$

Leidke aine C kontsentratsioon sõltuvalt ajast t .

Aine A kontsentratsioon alghetkel $t = 0$ on a ja ajahetkel t on $a - x$. Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on y . Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on z . Alustada tuleks esimese võrrandi lahendamisest, saadud lahend asendada teise võrrandisse, seejärel lahendada teine võrrand ja saadud lahend asendada kolmandasse.

18.1 Maatriksid

Definitsioon 18.1

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi elementideks, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse $m \times n$ maatriksist.

Ülesanne 18.1. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n . Tähistage lühidalt maatriksi tema ütlelemendi kaudu.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(j) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(k) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{30} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{30} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{30} \end{pmatrix}$

(l) $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(h) $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(m) $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 18.2

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdsedeks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$ korral.

Maatriksi $A = (a_{ij})$, ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude äravahetamisel, s.t

$A^T = (a_{ji})$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ülesanne 18.2. Leidke ülesandes 18.1: 1) võrdsed maatriksid, 2) antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

Ülesanne 18.3. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & b & -1 \\ -2 & c & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leidke a , b ja c väärtused nii, et kehtiks võrdus $A = B^T$.

Definitsioon 18.3

Kui matriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ matriksid, siis matriksite A ja B **summaks** (vaheks) nimetatakse $m \times n$ matriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed), s.t $C = A \pm B$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Matriksi A **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga λ nimetatakse matriksit $\lambda A = B$, mille elemendid saadakse matriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ , s.t $\lambda A = B = (b_{ij})$, kui $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ülesanne 18.4. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 18.1 antud matriksite korral? Teostage lubatud tehted.

- | | | | |
|-----------------|--------------------------|---------------|---------------|
| (a) $2A - 3A$ | (d) $-H + 2I^T$ | (g) $A^T - B$ | (j) $F - E$ |
| (b) $3B + 2B^T$ | (e) $A + B$ | (h) $B^T + A$ | (k) $C + D$ |
| (c) $4E^T$ | (f) $C + \frac{1}{2}E^T$ | (i) $E + G$ | (l) $D^T - C$ |

18.3 Matriksite korrutamine**Definitsioon 18.4**

Kui matriksi A veergude arv n võrdub matriksi B ridade arvuga, siis matriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse matriksit C , mille i -nda rea ja j -nda veeru elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse matriksi A i -nda rea elemendid matriksi B j -nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

kus $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, A on $m \times n$ matriks, B on $n \times p$ matriks, siis C on $m \times p$ matriks.

Ülesanne 18.5. Millised alljärgnevatest korrutistest on defineeritud ülesandes 18.1 antud matriksite korral? Leidke defineeritud korrutised ning esitage vastavad korrutamise valemid.

- | | | | | | |
|----------|-------------|----------|-------------|-------------|------------------|
| (a) AB | (c) $A^T B$ | (e) DC | (g) FE | (i) $B^T C$ | (k) $O^T B$ |
| (b) BA | (d) CD | (f) EF | (h) $F^T E$ | (j) $D^T B$ | (l) $A^T \theta$ |

Ülesanne 18.6. Leidke matriksite korrutised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ | (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |

Ülesanne 18.7. Olgu antud matriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke

(a) AB

(b) BA

(c) $B^2 - A^2$

(d) $(B - A)^2$

Ülesanne 18.8. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

(a) $A^2 = A$

(b) $B^3 = B$

(c) $C^2 - 4C - 5E = O$

Ülesanne 18.9. Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

näidake, et võrdusest $AB = AC$ ei järeldu maatriksite B ja C võrdsus.

18.4 Maatrikstehete omadused

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O kõik samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul **maatrikstehete jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$A + O = A$$

Sel juhul **transponeeritud maatriksite jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Maatriksite korrutamise omadused. Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis kehtivad järgmised omadused:

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$AO = O, OA = O$$

Ülesanne 18.10. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 18.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

(a) $\frac{1}{2}EB^T D - 2A$

(b) $AEB + 4E^T$

(c) $CA^T - DA^T$

(d) $A^T E^6 A - \frac{1}{2}BE^4 B^T + D^2$

(e) $CBA - CDA$

(f) $2BEAC - BE^2 AC$

(g) $\frac{3}{2}H^T EAC - \frac{1}{2}H^T AC$

(h) $2CBEH + DBH$

(i) $A^T F I^T - A^T E H$

(j) $I F^T H + H^T E^2 H$

(k) $(\frac{1}{2}I)I^T - (9H)^T H$

(l) $AB + F I^T H^T$

(m) $F I^T H^T - E^T H H^T$

(n) $\theta B - A^T O$

(o) $0(CA + AD)$

(p) $0(DB + 10CA^T)$

Ülesanne 18.11. Kontrollige järgnevate võrduste kehtivust ülesandes 18.1 antud maatriksite korral.

(a) $C(D^T)^T = (D^T)^T C$

(g) $(2D)^T - D = 2D^T - D$

(m) $(CD)^T = C^T D^T$

(b) $(C^T)^T D = D(C^T)^T C$

(h) $3B^T - A = (3B - A^T)^T$

(n) $(CD)^T = D^T C^T$

(c) $C^T + D^T = (C + D)^T$

(i) $(BA)^T = A^T B^T$

(d) $(C^T + D)^T = D^T + C$

(j) $ABA = B^T A^T B^T$

(o) $2A(D - C)^T = A(2D)^T - 2AC^T$

(e) $(D^T - C^T)^T = D - C$

(k) $(C + D)A^T = CA^T + DA^T$

(f) $(A^T - B)^T = A - B^T$

(l) $B^T(D - C) = B^T D - B^T C$

(p) $(2I)^T H^T = 2H^T I^T$

18.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 18.12. Maatriksite kasutamine andmete hoidmiseks. Ravimifirma hoiab laos C-vitamiini järgmistes kogustes: 25 kasti 100 mg pudelites, 10 kasti 250 mg pudelites ja 32 kasti 500 mg pudelites. Lisaks B₃-vitamiini kogustes: 30 kasti 100 mg pudelites, 18 kasti 250 mg pudelites ja 40 kasti 500 mg pudelites. Neid koguseid kirjeldatakse maatriksiga A . Ühe vastava kasti müügihinda hoitakse maatriksis C . Laost viiakse välja kaks korda sama kogust kaste B . Leidke maatriks, mis kirjeldab allesjäänud vitamiinide kogust. Millist infot annab maatriks BC^T ?

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 32 \\ 30 & 18 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 18.13. (B) Olgu ajahetkel t maatriksi

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} \end{pmatrix}^T$$

igas reas toodud ühe ökosüsteemi kolme liigi isendite arv vastavalt N_{1t}, N_{2t}, N_{3t} .

Teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}$$

seob liigi isendite arvu ajahetkel t ja $t+1$ valemiga $N_{t+1} = P \cdot N_t$. Teostage viimane tehe ja analüüsige kolme liigi isendite arvukuse mõju üksteise suhtes. Millise struktuuriga peaks olema maatriks P , et isendite arv oleks üksteisest sõltumatu?

Ülesanne 18.14. (F) Satelliidi teekonda ümber Maa võib tasandil kujutada võrrandiga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.76 & -1 \\ 1 & 2.81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (7.76 \cdot 10^7),$$

kus ühikuteks on miilid. Millist joont on kujutatud?

Ülesanne 18.15. (IT) Roboti liikumise programmeerimiseks kasutatakse korrutist

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teostage toodud korrutamine ning kujutage graafikul algset vektorit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ning lõpptulemust.

19.1 Determinandi arvutamine

Definitsioon 19.1

Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$.

Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant.

Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse maatriksi A **determinandi arendamiseks i -nda rea järgi**.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j -nda veeru järgi. Tähistatakse ka $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Kolmandat järku ruutmaatriksi determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definitsioon 19.2

Ruutmaatriksi A elemendile a_{ij} vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti M_{ij} , mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Definitsioon 19.3

Elemendi a_{ij} **alamdeterminandiks** A_{ij} nimetatakse sellele elemendile vastava miinori M_{ij} korrutist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ülesanne 19.1. Kirjutage välja: 1) maatriksi A teise rea elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid, 2) maatriksi B esimese veeru elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid. Arvutage iga maatriksi determinant.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $J = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$.

19.2 Determinantide omadused

Omadus 19.1

1. Maatriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda maatriksi determinandi väärtust: $|A| = |A^T|$.
2. Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.
4. Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.
5. Mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k , korrutub determinandi väärtus arvuga k .
6. Kui determinandi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summasid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.
7. Determinandi väärtus ei muutu, kui mingile reale (või veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (või veerg).
8. Sama järku ruutmaatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega, s.t $|AB| = |A||B|$.

Ülesanne 19.2. Kasutades determinantide omadusi, selgitage, kas võrdus kehtib.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 19.3. Kasutades determinantide omadusi, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} -12 & -24 & -24 & 15 \\ 12 & 32 & 32 & -35 \\ -22 & 18 & 18 & 18 \\ 44 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 19.4. Kasutades determinantide omadusi ja teadmist, et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 40$, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 19.5. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $|B|$, kui $|A| = -3$.

19.3 Determinantide arendamine

Ülesanne 19.6. Leidke determinantide väärtused: 1) arendades teise rea järgi, 2) arendades kolmanda veeru järgi, 3) arendades vabalt valitud rea või veeru järgi, mis on eelnevalt teisendatud nii, et selles reas või veerus oleks vaid üks nullist erinev element.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 19.7. Arvutage determinant kasutades arendamist rea või veeru järgi.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 19.8. Arvutage determinandi väärtus.

$$(a) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} x^3+1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3+1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^\pi \\ 9999 & -e^\pi & 0 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 1 \\ e^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(l) \begin{vmatrix} 15 & 0,2 & 0,1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (m) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

19.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 19.9. Leidke järgmiste koordinaatidega antud kolmnurkade pindalad S , kui

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(-1, 4), B(3, 1), C(2, 6)$

(c) $A(1, 0), B(2, 2), C(4, 3)$

(b) $A(-2, 2), B(1, 5), C(6, -1)$

(d) $A(3, 6), B(10, 1), C(-2, -3)$

Ülesanne 19.10. Leidke järgmistele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad V , kui

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $\vec{a} = (4, 0, 0), \vec{b} = (5, 2, 2), \vec{c} = (2, 6, 0)$

(c) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (0, 4, 5), \vec{c} = (6, 0, 7)$

(b) $\vec{a} = (2, 0, 0), \vec{b} = (0, 4, 0), \vec{c} = (0, 0, 3)$

Ülesanne 19.11. (B) Olgu meil mingis liigis neli erinevat vanuseklassi. Kui liik on jõudnud stabiilsesse seisusse, siis tema arvukus erinevates vanuseklassides ei tohiks enam oluliselt muutuda. Vastavas teoorias tuleb lahendada näiteks võrrand

$$|P - \lambda E| = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kus teisendusmaatriks P kirjeldab nelja erineva vanuseklassi arengut pikemal ajaperioodil (ellujäämistõenäosuste ja järeltulijate kohta), E on ühikmaatriks ja positiivne reaalne λ on stabiilse liigi jaoks vajalik juurdekasvu kiirus (isendit ajaühikus). Kui see juurdekasvu kiirus ei võrdu arvuga λ , siis liik ei ole stabiilse arvukusega erinevate vanuseklasside suhtes. Leidke λ väärtus. Leitud λ korral lahendage maatriksvõrrand $(P - \lambda E)x = 0$, kus lahend $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ näitab stabiilse oleku jaoks iga vastava vanuseklassi proportsioone kogu liigi populatsiooni $N = \sum_{i=1}^4 x_i$ suhtes.

Ülesanne 19.12. (K) Füüsikalises keemias kasutatakse molekulaarorbitaalide energiatasemete leidmiseks Hückeli meetodit, kus tuleb leida järgmist tüüpi determinandid. Leidke need.

$$(a) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix}$$

Praktikum 20

Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine

20.1 Pöördmaatriks

Definitsioon 20.1

Ruutmaatriksit E nimetatakse (n -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Suvalise n -järku ruutmaatriksi A korral kehtib $AE = A$, $EA = A$, kus E on n -järku ühikmaatriks.

Definitsioon 20.2

Ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse sellist maatriksit A^{-1} , millega antud maatriksit A korrutades saadakse ühikmaatriks E , s.t

$$AA^{-1} = E.$$

Maatriksi korrutamine pöördmaatriksiga on kommutatiivne $AA^{-1} = A^{-1}A$.

Omadus 20.1

Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, millel leiduvad pöördmaatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Ülesanne 20.1. Milline järgmistest on maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

$$(a) \quad B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad C = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c) \quad D = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 20.2. Näidake ilma determinanti leidmata, et maatriksil $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puudub pöördmaatriks.

Ülesanne 20.3. Olgu A n -järku ruutmaatriks ja E n -järku ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis $(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}$?

Ülesanne 20.4. Olgu A , B ja C pööratavad n -järku ruutmaatriksid. Lihtsustage avaldis $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ülesanne 20.5. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui $A^2 - 4A + E = O$.

20.2 Pöördmaatriksi leidmine

Definitsioon 20.3

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, so kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A on olemas pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ on maatriksi A determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant.

Definitsioon 20.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt uuele maatriksile järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis saab selle leida Gauss-Jordani meetodiga, teisendades maatriksi A ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks E ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks A^{-1}

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Ülesanne 20.6. Millise k korral ei leidu antud maatriksil pöördmaatriksit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Ülesanne 20.7. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid valemi abil.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 20.8. Leidke pöördmaatriks nii valemi abil kui ka elementaarteisenduste abil. Kontrollige saadud tulemust.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ülesanne 20.9. Leidke pöördmaatriksid.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 20.10. Leidke seos $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ja tema pöördmaatriksi elementide vahel.

20.3 Maatriksvõrrandite lahendamine

Olgu maatriksid A ja B on teada ning ruutmaatriks A on regulaarne. Maatriks X on tundmatu, mis tuleb leida.

Maatriksvõrrandi $AX = B$ lahend on

$$X = A^{-1}B.$$

Maatriksvõrrandi $XA = B$ lahend on

$$X = BA^{-1}.$$

Ülesanne 20.11. Lahendage võrrandisüsteemid maatrikskujul.

$$(a) \begin{cases} 4x + 2y + 6z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1.5 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y - z - 2u - 3 = 0 \\ 2x - 3y + u - 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - u - 2 = 0 \\ 2x + y + 4z + u - 4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 20.12. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(b) X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -10 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (g) X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 20.13. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad XR = PQ, \text{ kui } R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad KXL = M, \text{ kui } K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

20.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 20.14. (F) Teatud elektriskeemis on Kirchoff'i seaduse põhjal võimalik voolutugevused amprites leida võrrandiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Leidke voolutugevuste vektor, korrutades võrrandit (vasakult) vastava pöördmaatriksiga.

Ülesanne 20.15. (IT) Teile saadeti kodeeritud sõnum. On teada, et igale 32 tähega tähestiku tähele on seatud vastavusse number nii, et tühik = 1, A=2, B=3, ..., Y=33 (vt. nt. <https://goo.gl/zOXm14>).

Lisaks on teada, et seda sõnumit korrutati vasakult maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dekodeerige järgmised sõnumid.

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 33 & 87 & 52 & 89 & 108 & 97 & 26 \\ 26 & 54 & 21 & 69 & 84 & 88 & 5 \\ 67 & 229 & 177 & 180 & 220 & 149 & 111 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} 142 & 66 & 90 & 21 & 91 & 112 & 50 & 39 & 84 \\ 124 & 34 & 90 & 10 & 95 & 118 & 45 & 24 & 89 \\ 240 & 200 & 109 & 66 & 95 & 116 & 81 & 101 & 84 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} 120 & 65 & 28 & 87 & 42 & 66 & 111 & 54 & 38 & 78 & 27 & 60 & 74 \\ 137 & 33 & 18 & 69 & 30 & 53 & 118 & 49 & 26 & 44 & 18 & 61 & 44 \\ 83 & 198 & 70 & 173 & 96 & 131 & 112 & 83 & 92 & 219 & 65 & 71 & 200 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} 86 & 100 & 59 & 89 & 29 & 34 & 20 & 27 & 96 & 32 & 44 & 84 & 101 & 82 \\ 81 & 107 & 29 & 94 & 10 & 21 & 13 & 15 & 98 & 9 & 24 & 74 & 91 & 65 \\ 126 & 96 & 180 & 89 & 107 & 88 & 51 & 76 & 112 & 126 & 125 & 140 & 160 & 160 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 20.16. (K) Uue sulami tegemiseks segatakse kokku neli erinevat sulamit, mis sisaldavad muuhulgas vaske (Cu), niklit (Ni), tsinki (Zn) ja rauda (Fe).

Esimene sulam sisaldab 80% Cu ja 20% Ni, teine sulam sisaldab 60% Cu, 20% Ni ja 20% Zn.

Kolmas sulam sisaldab 30% Cu, 60% Ni ja 10% Fe, neljas sulam sisaldab 20% Ni, 40% Zn ja 40% Fe. Kui palju on igat sulamit vaja, et lõppsulamis oleks 56 g vaske, 28 g niklit, 10 g tsinki ja 6 g rauda? Koostage ning lahendage lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul $Ax = B$.

Praktikum 21

Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid

21.1 Maatriksi astak

Definitsioon 21.1

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse maatriksi A **k -järku miinoriks**.

Ülesanne 21.1. Millised alljärgnevatest on (4×4) -maatriksi $A = (a_{ij})$ miinorid? Milline neist on maatriksi A esimese rea ja teise veeru elemendile vastav miinor?

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} b_{14} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} c_{42} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$

(k) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Definitsioon 21.2

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, seejuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse rank A või $r(A)$.

Maatriksi astaku leidmiseks kasutame ridade elementaarteisendusi eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks. Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.

Ülesanne 21.2. Leidke maatriksi astak.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

21.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \quad (21.1)$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, \dots, x_n$.

Lineaarvõrrandisüsteem on esitatav maatrikskujul $Ax = b$.

Teoreem 21.1

Kronecker-Capelli teoreem. Lineaarvõrrandisüsteem $Ax = b$ on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi A astak $\text{rank } A$ võrdub laiendatud maatriksi $L = (A|b)$ astakuga $\text{rank } L$. Teisiti öeldes, süsteem $Ax = b$ on lahenduv parajasti siis, kui $\text{rank } A = \text{rank } L$.

Lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = b$ leidub lahend, kui kehtib $\text{rank } A = \text{rank } L = r$, kus $L = (A|b)$. Lahendite arv sõltub tundmatute arvust n , astakust r ja võrrandite arvust m .

1. $r = n$ korral on süsteemil täpselt üks lahend
 $r = n = m$ korral on Crameri peajuht; $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).
2. $r < n$ korral on süsteemil lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)
 $r < m \leq n$ korral on astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust; $r = m < n$ korral on võrrandeid tundmatutest vähem.

Ülesanne 21.3. Lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ laiendatud maatriks $L = (A|b)$ on elementaarteisendustega viidud allpool antud kujule. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas süsteem on lahenduv. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$

(f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

(i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(g) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

(d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$

21.3 Gaussi elimineerimismeetod

Gaussi elimineerimismeetod. 1. Võrrandisüsteem $Ax = b$ esitatakse laiendatud maatriksina $(A|b)$. 2. Laiendatud maatriks $(A|b)$ teisendatakse **ridade elementaarteisenduste** abil kolmnurksele kujule, s.t maatriksi A peadiagonaalil allpool (või ülalpool) olevad elemendid teisendatakse nullideks. Viimasest võrrandist saab avaldada tundmatu x_n . Asendades selle eelviimasesse võrrandisse, saab avaldada x_{n-1} jne. Kui ridade teisendamisega saadakse nullid mõlemale poole peadiagonaali, siis räägitakse nn Gaussi täielikust elimineerimismeetodist või **Gauss-Jordani elimineerimismeetodist**.

Ülesanne 21.4. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas antud süsteem on lahenduv või mitte. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend.

(a)
$$\begin{cases} x - y + 2z + 2v = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 3y + v = -1 \\ 3z - 2v = -2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y + 5z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + z + 2u - v = 4 \\ y + z + u + v = 3 \\ x - 2y - z + u - 3v = 0 \\ 2x + y + 3z + 2u - v = 5 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 4y + z = 13 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$$

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = 0$ on alati lahend olemas. Selleks on null-lahend $x = 0$ (nullvektor), mida nimetatakse **triviaalseks lahendiks**. Null-lahend aga ei pruugi olla ainuke lahend. Kui võrrandisüsteemi maatriksi A determinant $|A| = 0$ (juhul $n = m$), siis maatriksi A astak r on väiksem kui tundmatute arv n . Sellisel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid ning vabu tundmatuid on $n - r$.

Ülesanne 21.5. Tehke kindlaks, kas homogeensel võrrandisüsteemil on triviaalne lahend või lõpmata palju lahendeid. Leidke mittetriviaalne lahend.

$$(a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 3y - 26z + 22v = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19v = 0 \\ x + 2y + 4z - 3v = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4v = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 21.6. Leidke milliste parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtuste korral süsteemil: 1) on üks lahend, 2) on lõpmata palju lahendeid, 3) lahendid puuduvad. Leidke võimalikud lahendid.

$$(a) \begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -2 \\ 2x + y + az = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x + y + az = 5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 3x + 6y + z = 3 \end{cases} \quad (g) \begin{cases} 6x + 2y + 3w = 16 \\ 3x + y + 2z + aw = 14 \\ x - y - z + 3w = 1 \\ -x + y + 2z - w = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 5 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y + 2z - w = 4 \\ ay + z + 2w = 0 \\ -x + 2y + z + w = -4 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} ax + 3y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + y + 7z = 14 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - ay + z = 0 \\ 4x - 2y + az = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ 2x + 2y + az = -1 \end{cases} \quad (i) \begin{cases} 2x + 3y + 2w = 3 \\ x + y + az - 2w = -6 \\ -y + 2z + w = 9 \\ x + 3z + w = 6 \end{cases}$$

Ülesanne 21.7. Leidke millise parameetri $a \in \mathbb{R}$ väärtuste korral on süsteemil: 1) ainult triviaalne lahend, 2) mittetriviaalsed lahendid. Leidke mittetriviaalne lahend.

$$(a) \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - 9y + z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ -8x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + az = 0 \end{cases}$$

21.4 Crameri valemid

Lause 21.1

Kui lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ korral on tegemist **Crameri peajuhuga** (s.t tundmatute arv n on võrdne võrrandite arvuga m ja $|A| \neq 0$), siis on sellel süsteemil **täpselt üks lahend**.

Igat lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$, mille korral on tegemist Crameri peajuhuga, on võimalik lahendada **Crameri valemite** abil

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

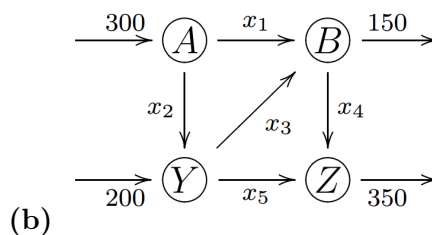
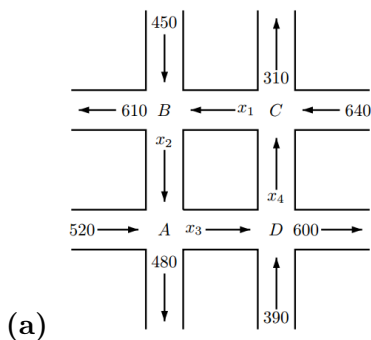
kus A on süsteemi maatriks ning A_i on maatriks, mis saadakse maatriksist A tema i -nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga b .

Ülesanne 21.8. Lahendage võrrandisüsteemid Crameri valemite abil.

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = -8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2u = 3 \\ x + -5z + u = 0 \\ 3y - 2z + u = 4 \\ y - 4z = 4 \end{cases}$$

21.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 21.9. Joonisel on toodud tänavaliikluse keskmised sõidukite arvud (ühes tunnis). Leidke arvud x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5 .



Ülesanne 21.10. (B) Mäletseja päevategevuse võib jagada jämedalt kolmeks tegevuseks: söömine, liikumine (uude söögikohta või kiskja eest põgenemine) ja puhkamine. Olgu söömisest saadav puhasenergia 200 kalorit tunnis. Liikumisel kaotatakse 150 cal/h ja puhkamisel 50 cal/h. Kuidas tuleks ööpäev jaotada nende kolme tegevuse vahel, et energiat kuluks sama palju, kui energiat saadakse? Kas selline jaotus on ühene? Kui loom peab ööpäevas puhkama vähemalt 6 tundi, kuidas peaks siis tegevused olema jaotunud? Kui ülesöömise vastu peaks loom liikuma ja süüa sama pikalt, kuidas on jaotus siis?

1. Määramata integraal

1. Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest (integraalide tabel).
2. Muutujavahetus.
3. Ositi integreerimine.

2. Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid.
2. Lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid.

3. Maatriksid

1. Maatriksite liigid. Ühikmaatriks, nullmaatriks. Regulaarne, singulaarne maatriks.
2. Tehted maatriksitega. Maatriksite korrutamine. Maatrikstehete omadused. Transponeeritud maatriksite omadused.
3. Pöördmaatriks.
4. Maatriksvõrrandite lahendamine.

4. Determinandid

1. Determinantide omadused, nende kasutamine determinandi arvutamisel.
2. Determinantide arendamine rea või veeru järgi.

Praktikum 23

Riemanni summad ja numbriline integreerimine

23.1 Riemanni summad

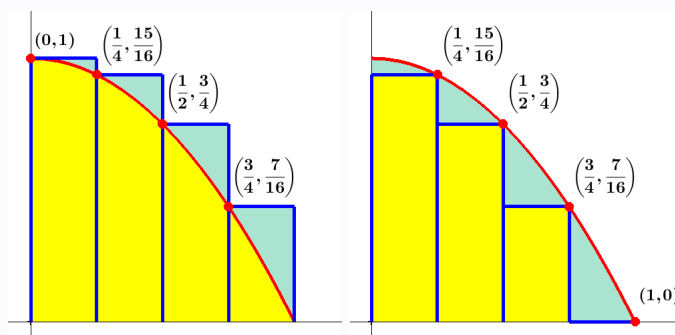
Definitsioon 23.1

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon $y = f(x)$. Vaatleme selles lõigus jaotust $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. Tähistame iga osalõigu pikkuse $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Valime igas osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$ suvaliselt ühe punkti $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Summat

$$S_n = f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \quad (23.1)$$

nimetatakse funktsiooni f **Riemanni summaks** lõigus $[a, b]$.

Pindala leidmine lõplikke summade abil. Funktsiooni $y = 1 - x^2$ graafiku ja x -telje vahelise ala pindala leidmiseks ligikaudselt leiame vasakpoolsete ja parempoolsete ristkülikute pindalade summana (joonisel).



Ristkülikute alusteks on vastavad osalõigud (pikkustega Δx_i) ja kõrgusteks on funktsiooni väärtused osalõikude vasakpoolses (parempoolses) otspunktis (punktides c_i).

Ülesanne 23.1. Järgnev tabel näitab mudelrongi kiirust esimese 10 sekundi jooksul.

Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)	Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)
0	0	6	28
1	30	7	15
2	56	8	5
3	25	9	15
4	38	10	0
5	33		

Leidke rongi poolt läbitud teepikkus, moodustades 10 osalõiku pikkusega 1 ning summeerides kord vasak-, kord parempoolsete ristkülikute pindalad.

Ülesanne 23.2. Leidke järgmiste joontega ja x -teljega määratud kujundite pindalad ligikaudselt, jagades toodud osalõigud n võrdseks osaks ning summeerides tekkinud ristkülikud. Ristkülikuid saab tekitada erinevat moodi. Valige ise sobiv meetod ja proovige erinevaid võimalusi.

(a) $y = 3x$, $x \in [0, 3]$, $n = 3$ ja $n = 10$

(c) $y = 4x - x^2$, $x \in [1, 4]$, $n = 6$ ja $n = 10$

(b) $y = x^2$, $x \in [0, 2]$, $n = 5$ ja $n = 10$

(d) $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$, $n = 3$ ja $n = 12$

Ülesanne 23.3. Koostage järgmiste joontega piiratud tasandiliste kujundite pindala arvutamiseks õiged integraalid (või nende summad). Integraale ei ole vaja välja arvutada, kuid joonise tegemine võib olla abiks.

(a) $y = x^2, x + y = 2$

(c) $y = x^2, y = x^3$

(e) $y = 4 - x^2, y = -x + 2$

(b) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0$

(d) $y = \frac{x^2}{4}, y = 1, y = x$

(f) $y = \frac{x^3}{3} - x, y = \frac{x}{3}$

Ülesanne 23.4. Visandage integraalimärgi all olevast funktsioonist graafik ning arvutage integraali väärtus, kasutades tuntud geomeetriliste kujundite pindala leidmise valemeid.

(a) $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$

(b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

(c) $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

(d) $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

23.2 Numbriline integreerimine

Trapetsvalem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Simpsoni valem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Valemit saab kasutada vaid paarisarvulise n korral.

Ülesanne 23.5. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused trapetsvalemiga märgitud osalõikude arvu n korral.

(a) $\int_0^1 (1 - x^2) dx, \quad n = 3$

(b) $\int_1^4 (1 + \sqrt{x}) dx, \quad n = 6$

(c) $\int_3^8 \sqrt{1 + x} dx, \quad n = 5$

Ülesanne 23.6. Kahe alajaama vaheline vahemaa on täpselt 100 m. Alajaamade ühendamiseks vajaminev telefonikaabli pikkus L (arvestades lõtku) arvutatakse valemiga

$$L = 2 \int_0^{50} \sqrt{6.4 \cdot 10^{-7} x^2 + 1} dx.$$

Kasutades 10 osalõiku ($n = 10$), arvutage trapetsvalemiga kaabli pikkus L .

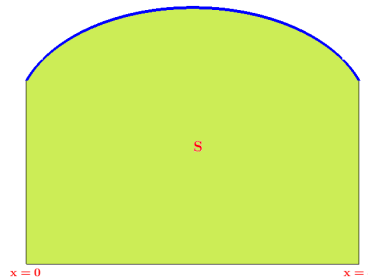
Ülesanne 23.7. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused Simpsoni valemiga märgitud osalõikude arvu n korral.

(a) $\int_0^2 (1 + x^3) dx, \quad n = 2$

(b) $\int_0^8 x^{1/3} dx, \quad n = 4$

(c) $\int_0^2 x \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad n = 4$

Ülesanne 23.8. Raudteetunneli ristlõige on kujuga, mis tekib ülalt kaarega $y = 4 + \sqrt{1 + 8x - 2x^2}$, alt x -teljega ja külgedelt sirgetega $x = 0$ ja $x = 4$ piiratud alast. Kui tunnel on 100 m pikkune ja kõik muud ühikud on samuti meetrites, siis kui mitu kuupmeetrit tulvavett on võimalik vajaduse korral tunnelisse lasta (eeldame, et tunnelit saab mõlemalt poolt sulgeda)? Arvutage ruumala trapetsvalemiga ja Simpsoni valemiga $n = 8$ jaoks. Kumb tulemus võiks olla täpsem?

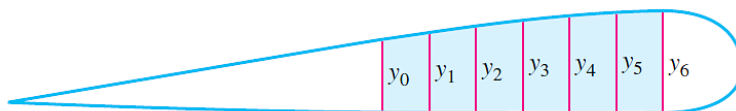


Ülesanne 23.9. Lennuki üks tagumistest tiibadest (stabilisaator) on kujuga, mida piirab x -telg ja funktsiooni $y = f(x)$ graafik, kus

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{0.6}.$$

Koostage pindala arvutamiseks integraal. Arvutage lennuki tiiva pindala trapetsvalemiga ja Simpsoni valemiga $n = 6$ osalõigu korral.

Ülesanne 23.10. (F) Uue lennuki tootmiseks on igasse lennuki tiiba vaja konstrueerida kütusemahuti (joonisel näidatud alas), millesse mahub 22240 N kütust tihedusega 6600 N/m³.



Leidke Simpsoni valemiga, kui sügav peab olema kütusemahuti, kui

$$y_0 = 0.457, \quad y_1 = 0.488, \quad y_2 = 0.549, \quad y_3 = 0.579, \quad y_4 = 0.610, \quad y_5 = y_6 = 0.640.$$

Ühikud on meetrites ja lõigu pikkus on siin 0.3048 m.

Ülesanne 23.11. (K) Gaasi paisumisel 2 cm³-st 10 cm³-ni tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$A = \int_2^{10} 500 V^{-1.4} dV$$

Arvutage töö A Simpsoni valemiga 6 osalõigu korral.

Ülesanne 23.12. (IT) Robotkäsi on disainitud liikuma trajektooriga

$$\begin{cases} x(t) = \frac{20}{3} + 0.3t + 3.9t^2 - 2.3t^3 \\ y(t) = \frac{10}{3} + 0.3t + 0.9t^2 - 2.7t^3 \end{cases}$$

Robotkäe poolt esimese 2 sekundiga läbitud teepikkus arvutatakse valemiga

$$s = \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Arvutage läbitud teepikkus s Simpsoni valemiga 6 osalõigu korral. Kirjutage programm üldise ajavahemiku $[t_1, t_2] \subset [0, 2]$ jaoks, kasutades n osalõiku (n on suvaline paarisarv).

Praktikum 24

Määratud integraali arvutamine

24.1 Newton-Leibnizi valem

Teoreem 24.1

Newton-Leibnizi valem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis kehtib Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (24.1)$$

kus F on funktsiooni f suvaline algfunktsioon lõigus $[a, b]$.

Ülesanne 24.1. Arvutage integraalid kasutades Newton-Leibnizi valemit.

(a) $\int_{-3}^2 (2x^2 + 1) dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

(e) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin^3 2x}{(\cos x)^3} dx$

(b) $\int_{-5}^{-1} \frac{(x+5) dx}{x^2}$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

24.2 Määratud integraali omadused

Omadus 24.1

Integraali aditiivsus rajade suhtes

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \text{kus } c \in (a, b). \quad (24.2)$$

Omadus 24.2

Integraali lineaarsus integreeritava funktsiooni suhtes

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \text{kus } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (24.3)$$

Teoreem 24.2

Integraal sümmeetriliselt paiknevate rajade korral. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[-a, a]$.

Kui f on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (24.4)$$

Kui f on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (24.5)$$

Ülesanne 24.2. Integreerige, kasutades määratud integraali aditiivsuse omadust.

(a) $\int_{-1}^2 |x| dx$

(c) $\int_{-1}^3 |x(x-2)| dx$

(e) $\int_{-1}^2 x\sqrt{(x^2-1)^2} dx$

(b) $\int_0^4 |2-x| dx$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} dt$

(f) $\int_{-5}^3 |x^2+2x-3| dx$

Ülesanne 24.3. Leidke integraalid sümmeetriliselt paiknevate rajade korral.

(a) $\int_{-1}^1 (8x^{2021} + \sin x) dx$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - \cos x) dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2} dx$

24.3 Muutujavahetus määratud integraalis

Teoreem 24.3

Kui g' on pidev lõigus $[a, b]$ ja f on pidev funktsiooni g muutumispiirkonnas, siis muutujavahetusel $u = g(x)$ kehtib võrdus

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Ülesanne 24.4. Arvutage integraalid muutujavahetuse või diferentsiaali märgi alla viimise teel.

(a) $\int_{-1}^0 (x+2)^5 dx$

(d) $\int_{-1}^1 x^3(2x^4-5)^6 dx$

(g) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3x+4}$

(e) $\int_{0,1}^e \frac{|\ln 5x| dx}{x}$

(h) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

(c) $\int_0^3 x\sqrt{x^2+1} dx$

(f) $\int_{-\pi/4}^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x dx$

Ülesanne 24.5. Arvutage integraalid märgitud muutujavahetusega.

(a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}, t = x+1$

(c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx, x = \sin t$

(b) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}, t = \sqrt{1+3x}$

(d) $\int_0^2 \frac{6x}{(1+2x)} dx, t = 1+2x$

Ülesanne 24.6. Integreerige, võttes integreerimisloiguks funktsiooni määramispiirkonna.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{kui } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos^{-2} x, & \text{kui } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin^{-2} x, & \text{kui } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Praktikum 25

Määratud integraali ositi integreerimine

25.1 Ositi integreerimine

Valem 25.1

Kehtib ositi integreerimise valem

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Ülesanne 25.1. Arvutage integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx$

(c) $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$

(e) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

(b) $\int_1^e \ln x \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} x^3 \cos \frac{x}{2} \, dx$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x \, dx$

25.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Kui ratsionaalfunktsioon $\frac{P(x)}{Q(x)}$ on liigmurd, siis võime polünoomi $P(x)$ jagamisel polünoomiga $Q(x)$ eraldada täisosa polünoomi $T(x)$, nii et kehtib

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ülesanne 25.2. Eraldage liigmurru täisosa, lahutage saadud lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x^2 + 1} \, dx$

(c) $\int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} \, dx$

(e) $\int_0^2 \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 3x + 2} \, dx$

(b) $\int_1^2 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3x} \, dx$

(d) $\int_2^3 \frac{x^3 + x + 2}{(x-1)(x+1)} \, dx$

(f) $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x(x^2 - 1)} \, dx$

Ülesanne 25.3. Arvutage integraalid

(a) $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} e^{-x} \cos 2x \, dx$

(f) $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} \, dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \, dx$

(g) $\int_1^3 x^x (1 + \ln x) \, dx$

(c) $\int_{-1}^0 (x+4) \sqrt{x^2 + 8x + 7} \, dx$

(e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx$

(h) $\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx$

26.1 Kõvertrapetsi pindala

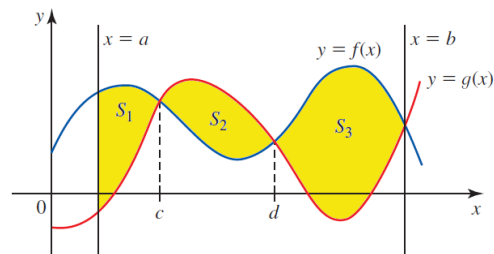
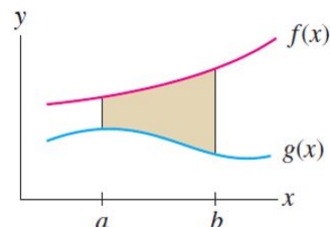
Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$, kusjuures $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Siis **kõvertrapetsiks** nimetatakse joonega $y = f(x)$, x -teljega ning püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$ piiratud kujundit. **Kõvertrapetsi pindala** avaldub määratud integraalina

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Kui kõvertrapets on piiratud vaadeldaval lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonidega f ja g , kus $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b]$, ning vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega $x = a$ ja $x = b$. Siis f ja g graafikutega piiratud kujundi pindala avaldub valemiga

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Kui funktsioonide f ja g graafikud lõikuvad, siis leitakse lõikepunktid ja arvutatakse kogu pindala osade kaupa.



Ülesanne 26.1. Leidke järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad.

(a) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$

(b) $y = x$, $y = 3 - x$, $x = 0$

(c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, $x = 0$, $y = 4$ ($x > 0$)

(d) $y = 8 - 2x^2$, $y = 0$

(e) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

(f) $y = x^2$, $y = x^3$

(g) $y = \frac{3}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$

(h) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 3-x$, $y = 0$

(i) $y = \frac{1}{2}x^5$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$

(j) $y = x^2$, $y = x^{1/3}$

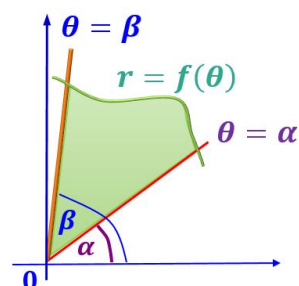
(k) $y = \pm\sqrt{x^4(1-x^3)}$

26.2 Kõversektori pindala

Definitsioon 26.1

Läbige nullpunkti kaks sirget, mis moodustavad x -telje positiivse suunaga vastavalt nurgad α ja β .

Kõversektoriks nimetatakse tasandilist kujundit, mis on piiratud nimeetatud sirgetega ning pideva mittenegatiivse funktsiooni $r = f(\theta)$ graafikuga, kus nurki mõõdetakse radiaanides.



Lause 26.1

Pideva funktsiooniga $r = f(\theta)$ määratud **kõversektori pindala** avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

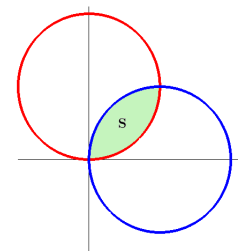
Kahe kõveraga piiratud **kõversektori pindala**, kui $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta.$$

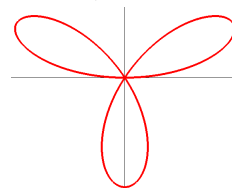
Ülesanne 26.2. Leidke joontega $r = 2 \sin \theta$ (ringjoon), $\theta = \frac{\pi}{4}$ ja $\theta = \frac{\pi}{2}$ piiratud kujundi pindala.

Ülesanne 26.3. Leidke kardiodi $r = 2(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ pindala.

Ülesanne 26.4. Leidke kahe ühikringi $r = 2 \sin \theta$ ja $r = 2 \cos \theta$ poolt piiratud kujundi pindala S .



Ülesanne 26.5. Leidke kolmelehelise roosi $r = 2 \sin 3\varphi$ pindala. Nurk $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ joonistab välja ühe õie. Kas sama tulemuse saaksime, kui võrrandiks oleks $r = 2 |\sin 3\varphi|$?



Ülesanne 26.6. Pindala, mis jääb kardiodi $r = \cos \theta + 1$ sisse, kuid ringist $r = \cos \theta$ välja, ei võrdu avaldisega

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((\cos \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta) d\theta = \pi.$$

Miks? Põhjendage oma vastust. Leidke tegelik pindala.

26.3 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral

Olgu funktsioon (täpsemalt, tema graafik) antud parameetriliselt $x = x(t)$, $y = y(t)$, kus $t \in [\alpha, \beta]$, kus x on diferentseeruv funktsioon. **Parameetriliselt antud kõvertrapetsi pindala** avaldub võrdusega

$$S = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Ülesanne 26.7. Leidke joone $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$ ja x -telje vahele jääva ala pindala.

Ülesanne 26.8. Leidke ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala funktsiooni parameetrilise esituse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ korral. Leidke esimeses veerandis oleva ellipsi pindala ja korrutage neljaga, rajad on $t = \frac{\pi}{2}$ ja $t = 0$.

Ülesanne 26.9. Leidke tsükloidi $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ja x -telje vahelise kujundi pindala.

Praktikum 27

Joone pikkuse ja keha ruumala arvutamine

27.1 Joone pikkus

Lause 27.1

Lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f graafiku kui joone pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Lause 27.2

Kui funktsiooni graafik on esitatud parameetriliselt $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, kus x ja y on diferentseeruvad lõigus $[\alpha, \beta]$, siis selle joone pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ülesanne 27.1. Leidke järgmiste joonte pikkused.

(a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 1$, $x \in [0, 2]$

(c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 2$

(b) $x = y^{3/2}$, $0 \leq y \leq 4$

(d) $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$, $2 \leq y \leq 3$ $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$

Ülesanne 27.2. Kasutage sirglõigu $y = 3 - 2x$, $0 \leq x \leq 2$, pikkuse leidmiseks joone pikkuse valemit. Kontrollige oma vastust, leides sirglõigu pikkuse kui täisnurkse kolmnurga hüpoteenuusi pikkuse.

Ülesanne 27.3. Leidke ringjoone $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$, $t \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ pikkus.

Ülesanne 27.4. Leidke astroidi $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ pikkus.

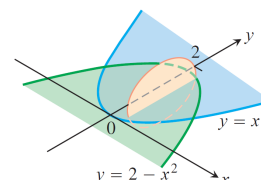
27.2 Keha ruumala ristlõikepindala kaudu

Lause 27.3

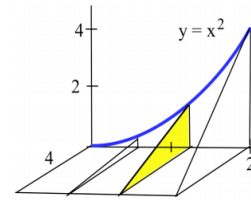
Olgu keha piiratud tasanditega, mis on risti x -teljega punktides $x = a$ ja $x = b$. Kui igas punktis $x \in [a, b]$ on keha ristlõikepindala $S(x)$ ja S on pidev funktsioon lõigus $[a, b]$, siis **keha ruumala** avaldub valemiga

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

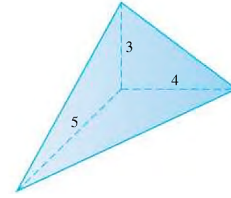
Ülesanne 27.5. Keha asetseb x -teljega ristuvate tasandite $x = -1$ ja $x = 1$ vahel. Ristlõiked on risti x -teljega ning moodustavad ringid, mille diameetrite otspunktid asuvad paraboolidel $y = x^2$ ja $y = 2 - x^2$. Leidke keha ruumala.



Ülesanne 27.6. Leidke ruumala kujundile, millel on kolmnurksed ristlõiked ja mille kõrgus jälgib joone $y = x^2$ kuju. Kolmnurkade alused on pikkusega 4 ja vaatlеме lõiku $x \in [0, 2]$.



Ülesanne 27.7. Joonisel on kujutatud kolmnurksete külgedega püramiid, mille kolm külge on omavahel risti ning mille servade pikkused on 3, 4 ja 5. Leidke püramiidi ruumala.



27.3 Pöördkeha ruumala

Olgu f pidev mittenegatiivne funktsioon lõigus $[a, b]$. Siis ümber x -telje pöörleva joonega $y = f(x)$ piiratud **pöördkeha ruumala** avaldub valemiga

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Analoogiliselt lõigus $y \in [c, d]$ ümber y -telje pöörleva joonega $x = f(y)$ piiratud **pöördkeha ruumala** avaldub

$$V = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

Ülesanne 27.8. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x -telje.

(a) $y = 2x, y = 0, x = 3$

(d) $y = x^4, x = 0, y = 1$

(b) $y = \sqrt{x}, x = 0, y = 2$

(e) $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0$

(c) $y = x^2 + 1, y = x + 1$

(f) $xy = 2, y = 0, x = 1, x = 3$

Ülesanne 27.9. Leidke pöördkoonuse ruumala. Koonus tekib sirge $y = ax$ ($a > 0$) pöörlemisel ümber x -telje ja on kõrgusega $h > 0$.

Ülesanne 27.10. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber y -telje.

(a) $y = 2x^{1/3}, x = 0, y = 2$

(d) $y^2 = x, y = 5, x = 0$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 1}, y = 0, x = 3$

(e) $y = \sqrt{4 - x^2}, 1$ veerand

(c) $y = 3\sqrt{x}, x = 0, y = 3$

(f) $y = 8 - x^3, x = 0, y = 0$

Ülesanne 27.11. Kerakujulisest kõrvitsast raadiusega 22 cm valmistati kaanega anum, lõigates ära poole raadiuse kõrgune osa ning uuristades ülejäänud tühjaks. Mitu liitrit vedelikku mahub saadud anumasse, kui kõrvitsa koore paksus oli 2 cm?

Ülesanne 27.12. Poolkerakujuline kauss raadiusega R täidetakse veega kõrguseni h . Leidke kausis oleva vee ruumala.

Praktikum 28

Määratud integraali füüsikalised rakendused

28.1 Teepikkuse arvutamine

Valem 28.1

Olgu $v = v(t)$ keha liikumise kiirus ajahetkel t ja $s = s(t)$ keha poolt läbitud teepikkus hetkel t ja Δs nihe (kaugus algpunktist). Ajahetkede t_1 ja t_2 vahel keha poolt läbitud **teepikkus ja nihe** avalduvad valemiga

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt, \quad \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (28.1)$$

Ülesanne 28.1. Lennuk lendab tugevnevas vastutuules kiirusega $v = 50(12-t)$ km/h. Kui kaugele jõuab lennuk oma algpunktist kahe tunniga?

Ülesanne 28.2. Rongi kiirus v (m/s) alates pidurdamise algusest on antud valemiga

$$v(t) = \sqrt{400 - 20t}.$$

Leidke rongi pidurdusteed (pidurdamise algusest seiskumiseni).

Ülesanne 28.3. Ralliauto kiiruslegend ütleb, et kõigepealt tuleb liikuda 6 minutit kiirusega $v(t) = 2000t - 1000t^2$ km/h, seejärel hoida saavutatud kiirust 12 minutit ning siis aeglustada kiirusega $190 - 900t$ km/h (siin aega on hakatud lugema pidurduse algusest). Kui kaugele on ralliauto esimese 24 minutiga jõudnud?

Ülesanne 28.4. Eelmisel õhtul jõulupeolt tulnud tudeng näeb jõuluvana, kes liigub sirgel rajal kiirusega $v(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$ m/s 40 meetri kaugusel oleva postkasti poole. Kui pika vahemaa läbib jõuluvana 6 sekundi jooksul? Kas ta jõuab selle ajaga postkastini?

Ülesanne 28.5. Postiljon seisab postkasti juures ning märkab suurt koera, mille peale hakkab ta jooksmas kiirusega

$$\begin{cases} v = at + v_0, & 0 \leq t \leq 4, \\ v = \text{const}, & 4 < t \leq 10. \end{cases}$$

(a) Avaldage postiljoni poolt läbitud teepikkus s ja kiirus v esimese nelja sekundi jaoks kiirenduse a kaudu.

(b) Leidke kiirendus a kui on teada, et 10 sekundi jooksul läbis postiljon 56 meetrit.

Ülesanne 28.6. Langevarjurid A ja B asuvad 1950 m kõrgusel lendavas helikopteris. Langevarjur A hüppab esimesena, avades langevarju 4 sekundit pärast hüpet. Seejärel tõuseb helikopter 2130 m kõrguseni. Langevarjur B hüppab 45 sekundit A-st hiljem, avades langevarju 13 sekundit pärast hüpet. Mõlemad hüppajad langevad avatud langevarjudega ühtlasel kiirusel 5 m/s. Jätame lihtsuse mõttes õhutakistuse arvestamata.

(a) Millisel kõrgusel avaneb A langevari?

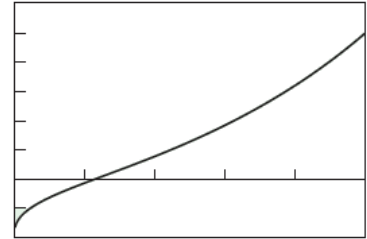
(c) Kumb langevarjur maandub esimesena?

(b) Millisel kõrgusel avaneb B langevari?

Ülesanne 28.7. Osake alustab liikumist punktist $s(0) = 9$ ja liigub kiirusega

$$v(t) = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Leidke läbitud teepikkus ja kui kaugele algpunktist osake liikus.



28.2 Kiirus ja kiirendus

Ülesanne 28.8. Võõrkeha sattumisel verre luuakse konkreetsetes mudelis organismi kaitseks antikehi kiirusega $r(t) = \frac{t}{t^2+1}$ tuhat antikeha minutis. Leidke antikehade arv 5 minutit pärast võõrkeha sattumist verre, kui alghetkel antikehi ei ole.

Ülesanne 28.9. (F) Õhupall tõuseb õhku kiirusega 4 m/s.

Leidke õhupallilt alla visatud liivakoti kiirus 1.5 sekundi pärast selle lahti laskmist.

Ülesanne 28.10. Auto (aeglustav) kiirendus avarii korral on 250 m/s^2 (maksimaalne lubatud kiirendus, et inimene võiks ellu jääda). Kui auto sõidab kiirusega 96 km/h , siis millise vahemaa vältel peab avanema õhkpadi, et viimasest midagi ka kasu oleks?

Ülesanne 28.11. Maantee ehitamiseks tuleb planeerida kõrvalteelt peateele sõitmiseks kiirendusrada. Leidke minimaalne kiirendusraja pikkus, kui kiirendusrajale sõidetakse kiirusega 25 km/h ja 12 sekundiga tuleb raja lõpus saavutada kiirus 95 km/h .

Ülesanne 28.12. (IT) Arvuti riistvara usaldatavuse R (protsentides) muutumise kiirus avaldub valemiga

$$\frac{dR}{dt} = -2.5(0.05t + 1)^{-1.5},$$

kus t on aeg tundides. Leidke R kahe ööpäeva jaoks, kui $R(0) = 100$.

Ülesanne 28.13. (Maj) Kui eeldada, et $K(t)$ tähistab firma kapitali ning $I(t)$ investeeringute muutumise kiirust, siis kehtib valem

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Leidke firma kapitali muut ΔK ajaperioodil $1 \leq t \leq 8$, teades et, investeeringute muutumise kiirus allub seaduspärasusele $I(t) = 1 + 3\sqrt[3]{t^2}$.

Ülesanne 28.14. Raudteejaamast väljuv elektrirong liigub esimese tunni jooksul kiirusega $v(t) = 90t^2 - 20t^3 \text{ km/h}$, kus t on rongi liikumise aeg tundides. Arvutage elektrienergia kulu W (kWh) esimese sõidutunni jooksul, kui

$$W(T) = \int_0^T (a(t) + 2)v(t) dt.$$

28.3 Töö

Lause 28.1

Mööda x -telge punktist $x = a$ punkti $x = b$ liikuvale kehale mõjuva jõu $F(x)$ poolt tehtav töö avaldub võrdusega

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (28.2)$$

Ülesanne 28.15. (F) Kui palju tehakse tööd vedru kokku surumisel 0.25 m võrra, kui vedru jäikustegur $k = 16$ N/m?

Ülesanne 28.16. (F) Kui osake massiga m asub punktis $(x, 0)$, tõmmatakse teda nullpunkti poole jõuga, mille moodul on k/x^2 . Kui osake alustab asendist $x = b$ ja talle ei mõju ükski teine jõud, siis leidke tehtud töö hetkel, mil osake jõuab asendisse $x = a$, $0 < a < b$.

Ülesanne 28.17. (F) Mägironija sikutab üles 50 m pikkust rippuvat köit. Kui palju tööd selleks kulub, kui köis kaalub 0.624 N/m?

Ülesanne 28.18. (F) Lift massiga 680 kg on kinnitatud trosside otsa, mille mass ühe meetri kohta on 18 kg. Leidke, kui palju tehakse tööd, tõstes lifti keldrikorruselt teisele korrusele (kokku 7 m).

Ülesanne 28.19. (K) Ideaalse gaasi kokku surumisel või paisumisel tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV,$$

kus $P = \frac{nRT}{V}$ on rõhk ja V on gaasi ruumala. Liikuva kolviga silindri läbimõõt on 20 cm ja pikkus 80 cm. Silindris on gaas 10 000 g/cm² rõhu all. Arvutage töö, mis kulub konstantsel temperatuuril T selle gaasi kokkusurumiseks kuni ruumala kahekordse vähenemiseni. Siin n ja R on konstandid.

28.4 Vedelike pumpamisel tehtav töö

Anumate tühjendamiseks tehtav töö. Olgu anuma ristlõike pindala kõrgusel y võrdne pideva funktsiooni väärtusega $S(y)$. Olgu vedeliku tihedus ϱ , siis erikaal on $\gamma = \varrho g$. Kui anuma sisu asub kõrguste a ja b vahel, siis selle vedeliku pumpamiseks kõrgusele $h > b$ tehtav töö avaldub võrdusega

$$A = \gamma \int_a^b S(y)(h - y) dy.$$

Ülesanne 28.20. (F) Vertikaalselt paigutatud silindrikujulise anuma kõrgus on 9 m ja diameeter on 6 m. Anum on ääreni täidetud petrooleumiga, mis kaalub 8048.6 N/m³. Kui palju tööd kulub petrooleumi pumpamiseks anuma ülemise ääreni?

Ülesanne 28.21. (F) Joone $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ kaare pööramisel ümber y -telje moodustub anum, mis täidetakse Surnumerest pärit mereveega (kaaludes ligikaudu 11 475.6 N/m³). Kui palju tööd kulub merevee pumpamiseks anuma ülemise ääreni?

Ülesanne 28.22. (F) Silindrikujuline anum lebab horisontaalselt, selle kõrgus on 4 m ja raadius on 2 m ning see on täidetud diiselkütusega kaaluga 8331.6 N/m³. Kui palju tööd kulub kogu kütuse pumpamiseks 6 m kõrgusele üle anuma ääre?

Praktikum 29

Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

29.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Paarisarvulise astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel kasutame võrduseid

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (29.1)$$

Paaritu astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel teisendame

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx = \int \sin^{2k} x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx.$$

Ülesanne 29.1. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 2x \, dx$

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$

(b) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(e) $\int_0^1 8 \cos^4 2\pi x \, dx$

(h) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^6 x \, dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \, dx$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^4 x} \, dx$

Kui integreeritav funktsioon on ratsionaalfunktsioon trigonomeetrilistest funktsioonidest kujul $R(\sin x, \cos x)$, siis universaalne muutujavahetus on

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{kui } x \in (-\pi, \pi). \quad (29.2)$$

Sel juhul

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad (29.3)$$

ja

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (29.4)$$

Ülesanne 29.2. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(d) $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$

(g) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

(b) $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$

(e) $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$

(h) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$

(c) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

(f) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$

(i) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}$

Ülesanne 29.3. Proovides asendusi $t = \sin x$, $t = \cos x$ või $t = \tan x$, leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

(c) $\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$

(e) $\int \tan^3 x dx$

(b) $\int \frac{\cos^3 x}{3 + \sin x} dx$

(d) $\int \frac{\sin^3 x}{(1 - \cos x)^2} dx$

(f) $\int \frac{1 + 9 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} dx$

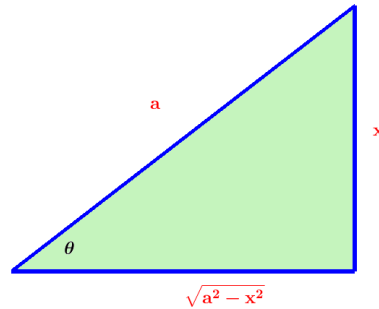
29.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine

Kui integraali märgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad |x| \leq a,$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = a \sin t \quad \text{või} \quad x = a \cos t.$$

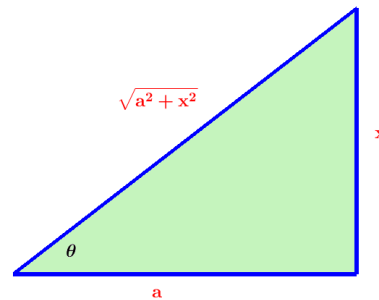


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = a \tan t \quad \text{või} \quad x = a \cot t.$$

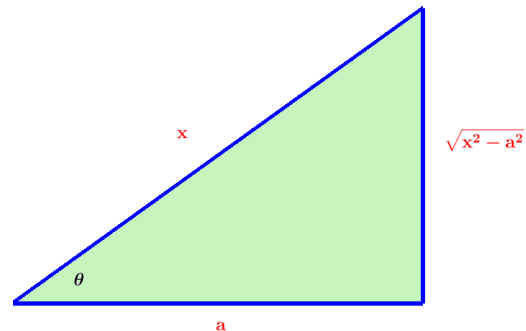


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{kusjuures } x > a \text{ või } x < -a,$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{või} \quad x = \frac{a}{\sin t}.$$



Ülesanne 29.4. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

(f) $\int \frac{3 dz}{z^2 \sqrt{z^2 + 9}}$

(k) $\int_0^4 \frac{9}{(t^2 + 9)^{3/2}} dt$

(b) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

(g) $\int \frac{6 dx}{x \sqrt{4 - x^2}}$

(l) $\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$

(c) $\int x \sqrt{16 - x^2} dx$

(h) $\int \frac{6 dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$

(m) $\int \frac{6 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

(d) $\int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2 - 36}}$

(i) $\int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

(n) $\int_{2.5}^3 \frac{dy}{y \sqrt{4y^2 - 9}}$

(e) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$

(j) $\int_0^{0.5} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

1. Lineaarvõrrandisüsteemid

1. Lineaarvõrrandisüsteemi lahenduvus, üldlahendi ja erilahendi leidmine, vabade tundmatute arv lahendis.
2. Gaussi elimineerimismeetod.
3. Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem. Millisel tingimusel on süsteemil ainult triviaalne lahend, millisel lõpmata palju lahendeid. Vabade tundmatute arv.

2. Määratud integraal

1. Riemanni summad, trapetsvalem.
2. Newton-Leibnizi valem.
3. Absoluutväärtust sisaldavad avaldised.
4. Sümmeetrilised rajad.
5. Muutujavahetus, ositi integreerimine, ratsionaalfunktsioonide integreerimine määratud integraalis.

3. Määratud integraali rakendused

1. Tasandilise kujundi pindala leidmine (kõvertrapets, kõversektor, pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral).
2. Joone pikkuse arvutamine.
3. Keha ruumala leidmine ristlõigete pindalade kaudu. Pöördkeha ruumala joone pöörlemisel ümber x - ja y -telje.
4. Keha poolt läbitud teepikkuse leidmine, kauguse leidmine alguspunktist (sirgjoonelisel liikumisel). Kiiruse ja kiirenduse leidmine.
5. Töö arvutamine (muutuva jõu poolt tehtav töö, vedelike pumpamisel anumate tühjendamiseks tehtav töö).

31.1 Lõpmatute rajadega integraalid

Definitsioon 31.1

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$ iga $b \in (a, \infty)$ korral.

Päratu integraal piirkonnas $[a, \infty)$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (31.1)$$

Definitsioon 31.2

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$, iga $a \in (-\infty, b)$ korral.

Päratu integraal piirkonnas $(-\infty, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (31.2)$$

Definitsioon 31.3

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus (31.1) (või (31.2)), siis nimetame vastavat päratut integraali **koonduvaks**, vastasel korral **hajuvaks**.

Definitsioon 31.4

Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis päratu integraal defineeritakse järgmiselt:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx, \quad \text{kus } c \in \mathbb{R} \text{ on suvaline.}$$

Ülesanne 31.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

(a) $\int_0^\infty (x^2 + 1) dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 4)^{3/2}}$

(m) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^n x}, n \in \mathbb{N}$

(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$

(h) $\int_0^\infty e^{-x/2} dx$

(n) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

(i) $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx$

(o) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{x^2 + 1}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

(j) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

(p) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

(e) $\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^5} dx$

(k) $\int_{-\infty}^0 \cos^2 x dx$

(q) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$

(f) $\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$

(l) $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$

(r) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$

32.1 Integraal tõkestamata funktsioonist

Definitsioon 32.1

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti b ümbruses (iga $\delta > 0$ korral on f tõkestamata vahemikus $(b - \delta, b)$) ja eksisteerigu

$$\int_a^c f(x) dx$$

iga $c \in (a, b)$ korral. Siis päratu integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx. \quad (32.1)$$

Definitsioon 32.2

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti a ümbruses (iga $\delta > 0$ korral on f tõkestamata vahemikus $(a, a + \delta)$) ja eksisteerigu

$$\int_c^b f(x) dx,$$

iga $c \in (a, b)$ korral. Siis päratu integraal lõigus $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (32.2)$$

Definitsioon 32.3

Kui funktsioon f on tõkestamata punkti $c \in (a, b)$ ümbruses, kuid pidev piirkonnas $[a, c) \cup (c, b]$, siis defineerime päratu integraali

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ülesanne 32.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$

(f) $\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

(k) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$

(p) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(g) $\int_{-2}^2 \frac{x^2+1}{x^3-8} dx$

(l) $\int_{-1}^1 \frac{\ln x}{x} dx$

(q) $\int_0^1 \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$

(h) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/5}}$

(m) $\int_1^e \frac{\ln^n x}{x} dx, n \in \mathbb{N}$

(r) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$

(i) $\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(n) $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^n x}, n \in \mathbb{N}$

(s) $\int_0^\pi \tan x dx$

(e) $\int_1^2 \frac{2 dx}{\sqrt{2-x}}$

(j) $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

(o) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(t) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

32.2 Päratute integraalide rakendusi

Definitsioon 32.4

Kui X on pidev juhuslik suurus, siis **tõenäosus**, et X satub lõiku $[a, b]$, defineeritakse integraaliga

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (32.3)$$

kus funktsioon f on pideva juhusliku suuruse X **tihedusfunktsioon** või lihtsalt **tihedus**.

Definitsioon 32.5

Pideva juhusliku suuruse X **keskväärtuseks** nimetatakse arvu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (32.4)$$

Pideva juhusliku suuruse X **dispersiooniks** nimetatakse arvu

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx. \quad (32.5)$$

Ülesanne 32.2. (F) Signaalitöötles kasutatakse ajast sõltuva signaali $f(t)$ jaoks Fourier' teisendust

$$F(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\sigma t} dt,$$

kus σ on sagedus hertsides. Niimoodi seatakse signaalile f vastavusse tema spekter, kus iga sageduse σ Hz jaoks vastab võnkumise amplituud $|F(\sigma)|$ ja faas $\arg(F(\sigma))$. Olgu signaaliks

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & , \text{ kui } t \in [0, \infty) \\ 0 & , \text{ kui } t \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Leidke selle signaali Fourier' teisendus $F(\sigma)$ suvalise reaalarvulise sageduse σ jaoks.

Ülesanne 32.3. (F) Füüsikas kasutatakse diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks Laplace'i teisendust

$$L(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Leidke funktsioonide $f(t) = \sin t$ ja $f(t) = \cos t$ Laplace'i teisendused.

Ülesanne 32.4. (F) Lambi eluiga on eksponentjaotusega, keskmise elueaga 1000 töötundi:

$$p(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000}, \quad t \geq 0.$$

Milline on tõenäosus, et lambi eluiga on suurem kui 2000 töötundi?

Ülesanne 32.5. (IT) Juhuslikult lõigust $[-1, 1]$ arvu valimisele vastab ühtlane jaotus

$$p(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Leidke ühtlase jaotuse keskväärtus ja tõenäosus, et valides $n \in \{10, 15, 20\}$ juhuslikku arvu lõigust $[-1, 1]$, nende arvude keskväärtus $\bar{x}$ kuulub lõiku $[-0.5, 0.5]$? Vihje: keskväärtuse tõenäosus jaotub normaaljaotusega, mille keskväärtus on leitud μ ning standardhälve on $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{n}$:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-\mu)^2/\sigma_0^2}.$$

Ülesanne 32.6. IQ testide tulemused on tavaliselt jaotunud normaaljaotusega

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kus keskväärtus $\mu = 100$ ja standardhälve $\sigma = 15$. Leidke (arvuti abiga), mitmel protsendil elanikkonnast on mudeli järgi IQ vahemikus 85 kuni 115. Mitmel % elanikkonnast on IQ suurem kui 140?

Praktikum 1

Vastus 1.1. (a) 8 (b) 8 (c) 3

Vastus 1.2. (a) $x = \pm 3$ (b) $x = -2$ ja $x = 5$ (c) $x = -5$ ja $x = -1$ (d) $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = \frac{17}{3}$
(e) $-2 < x < 2$ (f) $-\infty < x < 0$ või $2 < x < \infty$ (g) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Vastus 1.5. (a) -24 (b) $3/2$ (c) 30 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) -3 (f) 3

Vastus 1.6. (a) 2 (b) -3 (c) 17 (d) 0

Vastus 1.7. (a) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 3$ (b) 9

Vastus 1.8. 10

Vastus 1.9. $A(14, 0)$, $B(0, 14/3)$

Vastus 1.10. sirge $18x - 8y - 53 = 0$

Vastus 1.11. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{6}$

Vastus 1.12. $\sqrt{37}$

Vastus 1.13. (a) $\arccos(\sqrt{2}/10)$ (b) $\arccos(44/\sqrt{2170})$ (c) $\arccos(-2/\sqrt{21})$ (d) $\arccos(19/5\sqrt{58})$

Vastus 1.14. (a) nürinurga (b) kollineaarsed (c) risti (d) teravnurga

Vastus 1.16. $\pi/3$

Vastus 1.17. $\pi/4$

Praktikum 2

Vastus 2.1. (a) $6\sqrt{3}$ (b) 28 (c) 0 (d) 0

Vastus 2.2. $(5; 9; 17)$, $\vec{0}$, $17(5; 9; 17)$

Vastus 2.3. -15

Vastus 2.4. (a) $2\sqrt{77}$ (b) $5\sqrt{3}$

Vastus 2.5. $72\sqrt{2}$

Vastus 2.6. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\vec{c} = \pm(\sqrt{5}/5)(\vec{a} \times \vec{b})$

Vastus 2.7. $(-8, 7, 5)$

Vastus 2.8. $(\sqrt{5}/25)(6, -5, -8)$

Vastus 2.10. (a) -48 (b) -30 (c) -24

Vastus 2.11. $V = 3, h_D = 6/\sqrt{59}$

Vastus 2.12. $D(0, 8, 0), D(0, -7, 0)$

Praktikum 3

Vastus 3.1. (a) $2y - 5z + 7 = 0$ (b) $3x + 4z - 9 = 0$ (c) $5x - 2y + 1 = 0$

Vastus 3.2. (a) $4x - y - 14z = 0$ (b) $x - y - z + 2 = 0$ (c) $3x + 3y + z - 8 = 0$

Vastus 3.3. (a) $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ (b) $x - 4y - 7z + 12 = 0$ (c) $4x - y - 3z + 20 = 0$

Vastus 3.4. $L(-4/11; -5/11; 13/11)$

Vastus 3.5. $x - 2y + 3z - 8 = 0$

Vastus 3.6. xy -tasand: $\arccos(|C|/|\vec{n}|)$, xz -tasand: $\arccos(|B|/|\vec{n}|)$, yz -tasand: $\arccos(|A|/|\vec{n}|)$, $\vec{n} = (A; B; C)$

Vastus 3.7. (a) $\pi_1 \perp \pi_2$ (b) $\varphi = \pi/4$ (c) $\pi_1 \parallel \pi_2$

Vastus 3.8. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

Vastus 3.9. $x + 20y + 7z - 12 = 0$, $x - z + 4 = 0$

Vastus 3.10. (a) 1 (c) 10 (b) $\frac{25}{3}$

Vastus 3.11. $AB: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 8y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$, $AC: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-8}$, $BC: \begin{cases} y - 4 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$

Vastus 3.12. (a) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{0}$ ehk $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ z + 7 = 0 \end{cases}$ (b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{4}$ (c) $\frac{x+3}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{1}$ ehk $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$ (d) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{8}$

Vastus 3.13. $\frac{x-2}{37} = \frac{y-3}{-25} = \frac{z-4}{-32}$

Vastus 3.14. $P_1(17/10; 0; 2/5)$, $P_2(-31/10; 0; 14/5)$

Vastus 3.15. (a) $\arcsin(\sqrt{26/35})$, $L(0; 0; -2)$ (b) paralleelsed, ei lõiku (c) $\arcsin(3/(2\sqrt{3003}))$, $L(2; 4; 6)$

Praktikum 4

Vastus 4.2. (a) $x = -\frac{1}{2}$, $y = 3$ (b) $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 1$

Vastus 4.3. (a) 42 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 2 (e) 5 (f) 2 (g) 12 (h) 2

Vastus 4.5. (a) 1 (b) $1 + 2i$ (c) 0 (d) -1 (e) 0 (f) 4096 (g) $-1 + 6i$ (h) $-\frac{7}{8} + 4i$

Vastus 4.6. (a) $z_1 + z_2 = 3 - 4i$, $z_1 - z_2 = 3 + 4i$, $z_1 \cdot z_2 = -12i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}i$, $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $\overline{z_1} = 3$, $\overline{z_2} = 4i$.

(b) $z_1 + z_2 = 2$, $z_1 - z_2 = -2i$, $z_1 \cdot z_2 = 2$, $\frac{z_1}{z_2} = -i$, $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$, $\overline{z_1} = z_2 = 1 + i$, $\overline{z_2} = z_1 = 1 - i$.

(c) $z_1 + z_2 = -2 + 3i$, $z_1 - z_2 = 4 - i$, $z_1 \cdot z_2 = -5 - i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 - 5i}{13}$, $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{13}$, $\overline{z_1} = 1 - i$, $\overline{z_2} = -3 - 2i$.

(d) $z_1 + z_2 = 5 - 4i$, $z_1 - z_2 = -1 - 6i$, $z_1 \cdot z_2 = 11 - 13i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{10} - \frac{17i}{10}$, $|z_1| = \sqrt{29}$, $|z_2| = \sqrt{10}$, $\overline{z_1} = 2 + 5i$, $\overline{z_2} = 3 - i$.

(e) $z_1 + z_2 = 5 - 3i$, $z_1 - z_2 = -1 - 11i$, $z_1 \cdot z_2 = 34 - 13i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{22}{25} - \frac{29i}{25}$, $|z_1| = \sqrt{53}$, $|z_2| = 5$, $\overline{z_1} = 2 + 7i$, $\overline{z_2} = 3 - 4i$.

(f) $z_1 + z_2 = -11 - 5i$, $z_1 - z_2 = 3 + 3i$, $z_1 \cdot z_2 = 24 + 23i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{32}{65} - \frac{9i}{65}$, $|z_1| = \sqrt{17}$, $|z_2| = \sqrt{65}$, $\overline{z_1} = -4 + i$, $\overline{z_2} = -7 + 4i$.

(g) $z_1 + z_2 = \frac{11}{10} + \frac{27i}{10}$, $z_1 - z_2 = \frac{9}{10} + \frac{33i}{10}$, $z_1 \cdot z_2 = 1$, $\frac{z_1}{z_2} = -8 + 6i$, $|z_1| = \sqrt{10}$, $|z_2| = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{z_1} = 1 - 3i$, $\overline{z_2} = \frac{1}{10} + \frac{3i}{10}$.

(h) $z_1 + z_2 = 2i$, $z_1 - z_2 = 0$, $z_1 \cdot z_2 = -1$, $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\overline{z_1} = -i$, $\overline{z_2} = -i$.

Praktikum 5

Vastus 5.1. (a) $z = 1 + 0i = 1$, $z = e^{i0} = 1$ (b) $z = 2\sqrt{3} + 2i$, $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ (c) $z = -4\sqrt{3} - 4i$, $z = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$ (d) $z = 0 - 3i$, $z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Vastus 5.2. (a) $\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$ (b) $64(\cos 0 + i\sin 0) = 64$ (c) $\cos(-1) + i\sin(-1) \approx 0.54 - 0.84i$

(d) $2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$ (e) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}i$ (f) $2(\cos \pi + i\sin \pi) = -2$

(g) $\frac{1}{e}(\cos 1 + i\sin 1) \approx 0.199 + 0.31i$ (h) $\tan 1(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}) = i \tan 1$

Vastus 5.3. (a) $z = 8(\cos 0 + i\sin 0)$ (b) $z = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}\right)$ (e) $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}\right)$ (f) $z = \sqrt{12}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i\sin \frac{7\pi}{6}\right)$

(i) $z = \sqrt{53}(\cos(-15.95^\circ) + i\sin(-15.95^\circ))$ (k) $z = 12\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i\sin \frac{5\pi}{3}\right)$

Vastus 5.4. (a) $z_1 \cdot z_2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} = 8(\cos \frac{7\pi}{6} + i\sin \frac{7\pi}{6}) \approx -6.928 - 4i$, $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}) = 2i$

(b) $z_1 \cdot z_2 = 3e^{i3\theta} = 3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 3\cos 3\theta + 3i\sin 3\theta$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{i\theta} = \frac{1}{3}(\cos \theta + i\sin \theta) = \frac{1}{3}\cos \theta + i\frac{1}{3}\sin \theta$

Vastus 5.5. (a) 1 (b) $-17 + 17i$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ (d) $\cos 87^\circ + i\sin 87^\circ \approx 0.052 + 0.999i$

Vastus 5.6. $x = 0 \vee y = 0$

Vastus 5.7. $z^2 - 4z + 5 = 0$

Vastus 5.10. $180 - 30i$

Vastus 5.11. $\frac{353}{65} + \frac{101i}{65}$

Vastus 5.12. $Q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ja $R = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. Viige punkt $2 + i$ ringjoonele raadiusega $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ja korrutage/jagage saadud punkt ühikringi elemendiga $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Vastus 5.13. $d = 6.36 + 5.47i = 8.39(\cos 40.70^\circ + i\sin 40.70^\circ)$

Vastus 5.14. $V = 43.3(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$, $|V| = 43.3$ volti.

Praktikum 6

Vastus 6.1. (a) $z = \frac{1}{4096}$ (b) $288\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -432 + 144\sqrt{3}i$ (c) $32(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

(d) $32(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -16\sqrt{3} + 16i$ (e) -2 (f) $81(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$

(g) $\frac{1}{125}(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)$ (h) $36e^{\frac{137\pi}{90}i}$ (i) 256

(j) $e^{\frac{17\pi}{9}i}$ (k) $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (l) 1.

Vastus 6.2. $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$.

Vastus 6.3. $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}} = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{5}} = \left\{\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)\right) \mid k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\right\}$.

Vastus 6.4. $\sqrt[4]{-64} \in \{2 + 2i, 2 - 2i, -2 + 2i, -2 - 2i\}$.

Vastus 6.5. $\sqrt[5]{z} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)\right)$, $k = 0, 1, \dots, 4$.

Vastus 6.8. (a) $z \in \{1, i, -1, -i\}$ (c) $z \in \{\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ, \cos(-135^\circ) + i\sin(-135^\circ)\}$ (m) $z \in \{2i, -2i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

Praktikum 7

Vastus 7.3. Ei kehti.

Vastus 7.9. (a) $X = [-4, \infty)$, $Y = [0, \infty)$ (b) $X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $Y = [0, \infty)$

(c) $X = (6, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ (d) $X = [-2, 1) \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus [\sqrt{3}, \frac{1}{\log 3})$

(e) $X = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (f) $X = [0, 1]$, $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(g) $X = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$, $Y = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

Vastus 7.10. (a) Paaritu (b) Paaris (c) Paaris (d) Paaritu (e) Pole paaris ega paaritu

Vastus 7.11. (a) $T = \pi$ (b) $T = \frac{2\pi}{3}$ (c) Ei ole perioodiline funktsioon (d) $T = 2\pi$

Praktikum 8

Vastus 8.1. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$ (b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \in (0, \infty)$ (c) $f^{-1}(x) = \log(x-1)$, $x \in (1, \infty)$

(d) $f^{-1}(x) = 2 - 10^{x-1}$, $x \in (-\infty, \infty)$ (e) $f^{-1}(x) = 3 \sin 2x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ (f) $f^{-1}(x) = 1 - \cos(x-1)$, $x \in [1, 1+\pi]$

Vastus 8.3. (a) $y = x - 5 + \ln(x - 5)$ (b) $x = \ln^5 y + \ln y$

Vastus 8.4. (a) $y = e^x + \sin(x)$ (b) $y = x \pm 2$

Vastus 8.2. (a) Üks-ühene (b) Üks-ühene (c) Ei ole üks-ühene (d) Üks-ühene (e) Üks-ühene (f) Ei ole üks-ühene

Vastus 8.9. (a) 47 (b) 115/7 (c) -1 e 3 (d) 19

Vastus 8.11. Siiriuse tegelik heledus on ligikaudu 912 korda suurem kui veel silmaga nähtavatel tähtedel.

Vastus 8.12. $A = A_0 \cdot 0,8^{0,1t}$

Vastus 8.14. $b^b = 1000$

Praktikum 9

Vastus 9.1. (a) 3 (b) 3 (c) 3 (d) 3 (e) 2 (f) ei eksisteeri

Vastus 9.2. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ei eksisteeri, sest $f(x)$ pole määratud, kui $x < 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.

Vastus 9.4. Võrdus ei kehti, sest $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = \infty$, aga $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0$.

Vastus 9.5. (a) 0 (b) 3 (c) $-\frac{1}{\pi}$ (d) 0 (e) 0 (f) 4 (g) $-\infty$ (h) 1 (i) -1 (j) ei eksisteeri (k) 2

Vastus 9.6. (a) 2 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) -4 (e) $\frac{3}{8}$ (f) $-\frac{1}{3}$ (g) $-\frac{1}{2}$ (h) $-\frac{1}{3}$ (i) $-\frac{1}{2}$ (j) ei eksisteeri (k) $-\infty$ (l) ei eksisteeri

Vastus 9.7. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{32}$ (c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{8}{3}$ (f) 0 (g) $\frac{1}{2}$ (h) 0 (i) $-\frac{2}{5}$

Vastus 9.8. (a) 3 (b) ∞ (c) 2 (d) -1 (e) $-\log 2$ (f) $-\frac{1}{8}$ (g) $\frac{2}{5}$ (h) 0 (i) ∞

Vastus 9.9. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 4 (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 1 (g) $-\frac{1}{2}$ (h) 10 (i) 0 (j) 1 (k) $\frac{3}{4}$ (l) e^{-1} (m) e^{-3} (n) e^9 (o) e^{-1}

Vastus 9.10. (a) $-\frac{1}{12}$ (b) -2 (c) 1 (d) 2 (e) 0 (f) $\frac{3}{5}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) ∞ (i) $-\infty$ (j) ei eksisteeri

Vastus 9.11. Aeg läheneb viiele minutile.

Vastus 9.12. Pindala võib muutuda väärtuste 6 (mm²) ja 36 (mm²) vahel.

Vastus 9.13. $M(0) = m$ ehk kui keha seisab paigal, siis keha mass on võrdne seisumassiga; $M(\frac{c}{2}) = \frac{2m}{\sqrt{3}} \sim 1,15m$ ehk poole valguse kiirusega liikuva keha mass on 1,15 korda suurem kui seisumass; $\lim_{v \rightarrow c^-} M(v) = \infty$ ehk keha kiiruse lähenemisel valguse kiirusele tema mass kasvab tõkestamatult; $\lim_{v \rightarrow c^+} M(v)$ ei eksisteeri, sest pole teada valguse kiirusest suuremat kiirust ja $M(v)$ pole defineeritud, kui $v \geq c$.

Vastus 9.14. Punktmassi liikumise kiirus on 5.

Vastus 9.15. Kui $t \rightarrow \infty$, siis süsihappegaasi tase läheneb 8,4 osakesele miljoni osakese kohta.

Vastus 9.16. $\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{3s}(r) = 27N$ ja $\lim_{r \rightarrow \infty} R_{3s}(r) = 0$.

Praktikum 10

Vastus 10.1. Funktsioon on katkev punktides $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$, mujal on ta pidev

Vastus 10.3. (a) Funktsioon f on katkev punktis $x = 3$, mujal reaalteljel on ta pidev

(b) Funktsioon f on pidev kogu oma määramispiirkonnas $\mathbb{R} \setminus (0, 2]$

(c) Funktsioon f on pidev kogu reaalteljel

(d) Funktsioon f on katkev punktis $x = 2$, mujal reaalteljel on ta pidev

(e) Funktsioon f on pidev kogu reaalteljel

Vastus 10.4. (a) $a = 5$ (b) $b = \frac{4}{3}$ (c) $a = -1$ (d) $a = 2$ (e) $a = -1$, $b = 1$

Vastus 10.6. (a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6(x+h) - 1) - (6x - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$

(b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5) - (2x^2 - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) = 4x$

(c) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

(d) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h \cdot (\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}} = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$

$$(e) f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\cos t - \cos x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \left(-2 \sin \frac{t+x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{t-x}{2}}{t-x} \right) = -2 \cdot \sin \frac{x+x}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\sin x$$

$$(f) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{xh(x+h)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{Vastus 10.7. (a) } f'(x) = 15x^4 \text{ (b) } f'(x) = 1 + 2x^{-\frac{2}{3}} \text{ (c) } f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(d) f'(x) = 2^x \ln 2 - e^x \text{ (e) } f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \cos x \text{ (f) } f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(g) f'(x) = -147x^{-8} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \text{ (h) } f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \text{ (i) } f'(x) = 8x^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Vastus 10.8. (a) } f'(x) = -\frac{6x}{(x^2-1)^2} \text{ (b) } f'(x) = x^{a-1}b^x(a+x \ln b) \text{ (c) } f'(x) = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$$

$$(d) f'(t) = t^2 \sin t \text{ (e) } f'(u) = \sin u (\ln u - \frac{1}{u^2}) \text{ (f) } f'(x) = \frac{30}{(x-6)^2}$$

$$(g) f'(x) = e^x a^x \text{ (h) } f'(x) = \frac{\tan \alpha (1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \ln x + 1 \text{ (i) } f'(x) = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(j) f'(x) = \frac{a^2}{x^2+1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{Vastus 10.9. (a) } f'(x) = 36x^3 - 74x \text{ (b) } f(x) = (3x-1)(3x+1)(x^2-4) = 9x^4 - 37x^2 + 4$$

$$\text{Vastus 10.10. (a) } f'(1) = 60e \text{ (b) } f'(-1) = \frac{71}{100}$$

$$\text{Vastus 10.11. } \frac{dP}{df} = \frac{2kf(\omega^2 - \omega f + a^2)}{(\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2)^2}$$

$$\text{Vastus 10.12. } \frac{dt}{dN} = \alpha(\ln N + 1), \text{ kus } \alpha \text{ on võrdetegur}$$

$$\text{Vastus 10.13. } \frac{dT}{dV} = \frac{2ab - aV + pV^3}{RV^3}.$$

$$\text{Vastus 10.14. (a) } 20(4x-3)^4 + 18x \text{ (b) } \frac{60x^5}{\sqrt[3]{3x^6-4}} \text{ (c) } -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$(d) \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (e) } \frac{x+1}{x^2+x \ln x} \text{ (f) } \frac{6^{\sqrt{x}} \ln 6}{2\sqrt{x}} + 6 \cdot 4^{6x} \ln 4$$

$$(g) -\frac{1}{4\left(\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2} \text{ (h) } \frac{0.25e^{0.5x}(x-2)}{x^2}$$

$$\text{Vastus 10.15. (a) } -\frac{14(2x+1)}{(3x-2)^3} \text{ (b) } -\frac{1}{\sqrt{2x+1}(4x+1)^{3/2}} \text{ (c) } \frac{12}{4x-3}$$

$$(d) 60x^4 (\sin 4x^5)^2 \cos 4x^5 + 9 \sin(2-9x) \text{ (e) } \frac{7 \tan 7x}{\cos 7x} + \frac{7 \cot 7x}{\sin 7x} \text{ (f) } -\frac{3 \sin 6x}{1+2(\sin 2x)^2} - \frac{4 \sin 4x (\cos 3x)^2}{(1+2(\sin 2x)^2)^2}$$

$$(g) 0 \text{ (h) } -\frac{3}{\sqrt{2-x}\sqrt{x-1}} \text{ (i) } -\frac{1}{x^2+1} \text{ (j) } \frac{\arccos x}{(x^2+1) \arctan x} - \frac{\ln \arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Vastus 10.16. } u'(3) = \frac{2f(3)f'(3) + 4g(3)g'(3)}{2\sqrt{f(3)^2 + 2g(3)^2}} = -\frac{22}{\sqrt{41}}$$

$$\text{Vastus 10.17. } L = \sqrt{a \cdot m}$$

$$\text{Vastus 10.18. } R_{\text{kask}}(t) = 0,3041, R_{\text{vahter}}(t) = 0,2243, \text{ järelikult sookask taastoodab ennast efektiivsemalt.}$$

$$\text{Vastus 10.19. } P'(V) = -4.5 \text{ kPa/cm}^3$$

$$\text{Vastus 10.20. (a) } -\frac{1}{x^2} \text{ (b) } \cos x \text{ (c) } 0 \text{ (d) } \frac{2 \tan x}{(\cos x)^2}$$

$$\text{Vastus 10.21. (a) } f''(x) = 4x^2 u''(x^2) + 2u'(x^2) \text{ (b) } f'''(x) = e^{3x} u'''(e^x) + 3e^{2x} u''(e^x) + e^x u'(e^x) \\ (c) f'''(x) = 6u'(x)u''(x) + 2u(x)u'''(x) \text{ (d) } f''(x) = 4xu''(x^2) + \frac{2x^2 u'(x^2) - 2u(x^2)}{x^3}$$

$$\text{Vastus 10.22. (a) } 4 \text{ (b) } -\frac{93}{4}$$

Vastus 10.23. (a) $\frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ (b) $(4q^3 + 6q)e^{q^2}$ (c) $\frac{108}{(3t + 2)^4}$

Vastus 10.24. (a) $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ (b) $f'(x) = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right)$

(c) $f'(x) = (\ln x)^x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$ (d) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{3}{x} + 2x + 2 \cot 2x \right)$

(e) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{3}{x-5} \right)$ (f) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{4x}{3(x^2-1)} \right)$

Praktikum 11

Vastus 11.1. (a) ∞ (b) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{5}{3}$ (e) 0 (f) 0 (g) $\frac{1}{2}$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) 2 (j) 0 (k) 1 (l) ∞

Vastus 11.2. (a) ∞ (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 0 (g) 0 (h) $\frac{2}{\pi}$ (i) ei leidu

Vastus 11.3. (a) $dy = (5x^4 + 4)dx$ (b) $dy = 6xdx$ (c) $dT = -\frac{10}{r^6}dr$
 (d) $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{8x^2}\right)dx$ (e) $dy = (e^x + xe^x)dx$ (f) $dR = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{u}(1+2u)^{3/2}} du$
 (g) $dy = \frac{6(1-6x)}{\sqrt{1-4x}}dx$ (h) $dy = \frac{2}{(5x+2)^2}dx$ (i) $dy = \frac{3x-4}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}dx$

Vastus 11.4. (a) $dy = 12$ (b) $dy = 3810,24$ (d) $df(x) = 0,6257$ (f) $df(x) = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Vastus 11.6. $\Delta S \approx dS = 400\pi$

Vastus 11.8. $\Delta V \approx dV \approx 185 \text{ L}$

Vastus 11.9. (a) 1,04 (b) 3,99 (c) 251,1 (d) 0,72 NB! Argumendi muut peaks olema radiaanides. (e) 1,04 (i) 0,81

Vastus 11.10. (a) $f(x) \approx \frac{11}{3}x - \frac{4}{3}$

Vastus 11.11. $f(x) \approx -\frac{240}{169}x + \frac{550}{13}$

Praktikum 12

Vastus 12.4. (a) $y = 6x - 4$, $y = -\frac{1}{6}x + 8\frac{1}{3}$ (b) $y = 4x - 18$, $y = -\frac{1}{4}x - 5\frac{1}{4}$ (c) $y = -6x + 13$, $y = \frac{1}{6}x - 5\frac{1}{2}$ (d) $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -2x - 1\frac{1}{2}$

Vastus 12.5. (a) $y = 2x - 4$ (b) $y = x - 4$ (c) $y = -\frac{1}{24}x + \frac{129}{16}$ (d) $y = 4x + \frac{97}{32}$

Vastus 12.6. (b) $y = -x + 4$

Vastus 12.2. $\frac{5}{36\pi} \text{ cm/min.}$

Vastus 12.9. (a) kasvav $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$ ning kahanev $[0, 2]$ (b) kasvav $(-\infty, -2]$ ja $[0, 2]$ ning kahanev $[-2, 0]$ ja $[2, \infty)$
 (c) kasvav kogu reaalteljel (d) kahanev $(0, 1)$ ja $(1, e]$ ning kasvav $[e, \infty)$
 (e) kahanev kogu määramispiirkonnas $[-2, 0]$ (f) kasvav $(0, 1]$ ning kahanev $[1, \infty)$

Vastus 12.10. (a) $(-\infty, 2]$ on graafik kumer ja $[2, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(2, 12)$

(b) $(-\infty, 4)$ on graafik kumer ja $(4, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunktid puuduvad

(c) $(-\infty, 0]$ on graafik nõgus ja $[0, \infty)$ on graafik kumer, käänupunkt on $(0, 0)$

(d) $(0, \frac{1}{e}]$ on graafik kumer ja $[\frac{1}{e}, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(\frac{1}{e}, -\frac{3}{2e^2})$

(e) $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ja $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ on graafik nõgus ning $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ on graafik kumer, käänupunktid on $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ ja $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$

(f) $(-\infty, 2]$ on graafik kumer ja $[2, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(2, -16)$

(g) $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on graafik kumer ning $[-1, 1]$ on graafik nõgus, käänupunktid on $(-1, \ln 2)$ ja $(1, \ln 2)$

(h) $(-\infty, -2]$ ja $[1, \infty)$ on graafik nõgus ning $[-2, 1]$ on graafik kumer, käänupunktid on $(-2, -48)$ ja $(1, -9)$

Vastus 12.11. (a) Sobib näiteks $f(x) = -\arctan x - 1$. (b) Sobib näiteks $f(x) = 1 - e^{1-x}$. (c) Sobib näiteks $f(x) = 1 - \arctan x$.

(d) Sobib näiteks $f(x) = \frac{2}{27} \cdot (x^4 - 4x^3 + 16x + 11)$.

Vastus 12.12. (a) $f(-1) = 2$ on lokaalne maksimum, $f(1) = -2$ on lokaalne miinimum

(b) $f(-2) = 16$ ja $f(2) = 16$ lokaalne maksimum ning $f(0) = 0$ on lokaalne miinimum

- (c) $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ lokaalne miinimum
 (d) $f(0) = 0$ on lokaalne miinimum ja $f(2) = \frac{4}{e^2}$ on lokaalne maksimum
 (e) punktis $(1, 0)$ on lokaalne miinimum ja punktis $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$ lokaalne maksimum
 (f) $f(-1) = 1$ lokaalne maksimum ja $f(0) = -3/2$ lokaalne miinimum (NB! punktis 0 tuletist ei eksisteeri!)
 (g) lokaalsed ekstreemumid puuduvad
 (h) $f(0) = 2$ lokaalne maksimum ja $f(2) = 2^{2/3}$ lokaalne miinimum

Vastus 12.13. (a) globaalne maksimum $f(5) = 18$ ja globaalne miinimum $f(1) = 2$

(b) globaalne maksimum $f(3) = 19$ ja globaalne miinimum $f(-2) = -1$ ja $f(1) = -1$

(c) globaalne miinimum $f(1) = 1$ ja globaalne maksimum $f(e) = e - 1$

(d) globaalne miinimum $f(1) = 0$ ja globaalne maksimum $f(-1) = \pi$

(e) globaalne maksimum $f(0) = 1$

(f) $f(1) = 1/2$ globaalne maksimum ja $f(-1) = -1/2$ globaalne miinimum

Vastus 12.14. $V(x) = 4x(6-x)(4-x)$, maksimum on punktis $x \approx 1.57$

Vastus 12.15. Ruumala tuleb 52 liitrit, mõõtudega $57.14 \times 40 \times 22.86$ cm

Vastus 12.16. $r = \frac{2a}{3}$

Vastus 12.17. Valgusallikas peab asuma $2/3$ vahemaad ehk 66.7 meetrit vasakust allikast kaugemal

Vastus 12.18. $m = 9$ mg

Vastus 12.19. (a) $x = 2, y = 0$ (b) $x = -2, x = 2, y = 1$ (c) $x = 1$, kaldasümptoot ei ole (d) $x = -1, y = 2x - 2$ (e) $x = 0, y = 0, y = 1$ (f) $x = 0, y = 2x$

Vastus 12.20. (a) määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f kasvav ning intervallides $[-1, 0)$ ja $(0, 1]$ on f kahanev, intervallis $(0, \infty)$ on f graafik nõgus ja intervallis $(-\infty, 0)$ graafik kumer, püstasümptoot on $x = 0$ ja kaldasümptootid puuduvad

(b) määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, intervallides $(-\infty, -2]$ ja $(0, \infty)$ on f kahanev ning intervallis $[-2, 0)$ on f kasvav, intervallis $(-\infty, -3]$ on f graafik kumer ning intervallides $[-3, 0)$ ja $(0, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot on $x = 0$, rõhtasümptoot on $y = 0$

(c) määramispiirkond on $\mathbb{R}$, intervallis $(-\infty, 0]$ on f kasvav ja intervallis $[0, \infty)$ on f kahanev, intervallis $[-1, 1]$ on f graafik kumer ning intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot ei ole, rõhtasümptoot on $y = 0$

(d) määramispiirkond on $(0, \infty)$, intervallis $(0, \frac{1}{e}]$ on f kahanev ja intervallis $[\frac{1}{e}, \infty)$ on f kasvav, intervallis $(0, 1]$ on f graafik nõgus ja intervallis $[1, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptootid puuduvad

(e) määramispiirkond on $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, intervallis $(-\infty, 0]$ on f kahanev ja intervallis $[2, \infty)$ on f kasvav, intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptootid puuduvad, kaldasümptootid on $y = x - 1$ ja $y = -x + 1$

(f) määramispiirkond on $\mathbb{R}$, intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[1, 2]$ on f kahanev ning intervallides $[0, 1]$ ja $[2, \infty)$ on f kasvav, intervallides $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$ ja $[2, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptootid puuduvad, kaldasümptootid on $y = x - 1$ ja $y = -x + 1$

(g) määramispiirkond on $(0, \infty)$, intervallis $(0, 1]$ on f kasvav ning intervallis $[1, \infty)$ on f kahanev, intervallis $(0, \sqrt{e})$ on f graafik kumer ning intervallis $(\sqrt{e}, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot on $x = 0$, rõhtasümptoot on $y = 0$

Vastus 12.21. v määramispiirkond on $[r_0, 1]$, v kasvav, kumer

Praktikum 13

Vastus 13.2. (a) $2x^6 + 3x^2 + C$ (b) $\frac{8}{3}x^{3/2} + 3x + C$ (c) $x^{5/2} + C$ (d) $(R^2 + 1)^3 + C$

Vastus 13.4. (a) $\frac{y^4}{12} + C$ (b) $8\sqrt{x} + C$ (c) $2x^{5/2} + C$ (d) $\frac{2}{7}x^{7/2} - 2x^{5/2} + C$ (e) $6x^{1/3} + \frac{x}{9} + C$
 (f) $\frac{t^3}{6} + \frac{2}{t} + C$ (g) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3x\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{4} + C$ (h) $3x - 4\ln|x| - 10x^{-1/2} + C$ (i) $\frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} - \frac{6x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{15\sqrt[15]{x^{13}}}{13} + C$

Vastus 13.5. (a) $\frac{10^x}{\ln 10} + ex + C$ (b) $\frac{e^{2x}}{2} + (2\ln 2)e^x + (\ln^2 2)x + C$ (c) $-\frac{1}{e^x} + C$ (d) $-\frac{1}{2^x \ln 2} + C$

Vastus 13.6. (a) $x - \arctan x + C$ (b) $\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$ (c) $\arcsin x + C$ (d) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \arcsin x + C$

Vastus 13.7. (a) $x + C$ (b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C$ (c) $\tan x - x + C$ (d) $x \sin \alpha - 3 \sin x + C$ (siin kasutati omadust $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$)
 (e) $-2 \cot 2x + C$

Vastus 13.8. (a) $3x + C$ (b) $\frac{x^2}{2} + C$ (c) $\frac{4}{3}x^{3/2} + C$ (d) $-d\frac{1}{2x^2} + C$
 (e) $-3\ln|x| + C$ (f) $\tan x + C$ (g) $\frac{1}{2}e^{2x^2} + C$ (h) $\frac{1}{3} \arcsin 3x + C$

Vastus 13.9. (a) $\sin(x + 2) + C$ (b) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$ (c) $\frac{1}{24}(3x - 2)^8 + C$ (d) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(7 - 2x)^4} + C$
 (e) $-\frac{1}{2}e^{-2x+8} + C$ (f) $\frac{1}{3} \ln|3x + 5| + C$ (g) $\frac{1}{2} \tan(2x - 5) + C$ (h) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Vastus 13.10. (a) $\sqrt{x^2 + 5} + C$ (b) $\frac{2 \cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} + C$ (c) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ (d) $7 \arcsin x - 2\sqrt{1 - x^2} + C$ (e) $\frac{3}{4} \ln^2 x + C$ (f) $\ln|\ln x| + C$

Vastus 13.11. (a) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$ (b) $-\ln|\cos x| + C$ (c) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ (d) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$

Vastus 13.12. (a) $-\frac{1}{3} \ln|5 - e^{3x}| + C$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$ (c) $x - \sqrt{5} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (d) $\arcsin \frac{x}{2} + C$
 (e) $\arctan(x + 1) + C$ (f) $-2\sqrt{2 + \cos^2 x} + C$ (g) $\frac{1}{6} \sin^3 x^2 + C$ (h) $\ln|\ln \ln x| + C$
 (i) $4\sqrt{z^2 - 2z} + C$ (j) $\frac{3}{5}(x + 2)^{5/3} + C$ (k) $\frac{1}{27}(x^3 - \frac{3}{2}x^2)^9 + C$

Vastus 13.13. $F(t) = \frac{6}{\pi} e^{\sin(\pi t)} - \frac{6}{e\pi}$

Vastus 13.14. $p(x) = 600\sqrt{60x - x^2} - 5000$

Vastus 13.15. (a) $-\frac{2}{15}(1 - x)^{3/2}(3x + 2) + C$ (b) $-\frac{1}{15}(1 - x^2)^{3/2}(3x^2 + 2) + C$ (c) $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$
 (d) $\frac{1}{2} \ln|\tan x| + C$ (e) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$ (f) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$

Vastus 13.16. (a) $2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C, t = \sqrt{x}$ või $t = 1 + \sqrt{x}$ (b) $2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C, t = \sqrt{e^x - 1}$
 (c) $4\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln(1 + \sqrt[4]{x^3})\right] + C, t = \sqrt[4]{x^3}$ (d) $\frac{4}{21}(1 + e^x)^{3/4}(3e^x - 4) + C, t = \sqrt[4]{1 + e^x}$

Praktikum 15

Vastus 15.1. (a) $e^x(x-1) + C$ (b) $x \sin x + \cos x + C$ (c) $\frac{1}{4}(\sin(2x+1) - 2x \cos(2x+1)) + C$
 (d) $-\frac{1+x \ln 3}{3x \ln^2 3} + C$ (e) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ (f) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
 (g) $x \ln x - x + C$ (h) $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C$ (i) $\frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1) + C$ (alternatiivne kuju $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{\ln x}{x+1} + C$)

Vastus 15.2. (a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ (b) $e^x(x^3 - 36x^2 + 6x - 6) + C$ (c) $-\frac{1}{8e^{2x}}(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3) + C$
 (d) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ (e) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x - 2 \cos x) + C$ (f) $\frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$

Vastus 15.3. $-(4x^2 + 32)e^{-x^2/8} + C$

Vastus 15.4. $\int dx - \int dx = C$

Vastus 15.5. (a) $2 \ln|1-x| - \ln|x+1| + C$ (b) $3 \ln|x+1| - 2 \ln|x| + C$ (c) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$
 (d) $2 \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{3}{x-2} + C$ (e) $\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + \frac{1}{t} + C$ (f) $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{2}{x} + C$
 (g) $\frac{17}{2} \ln|2y-1| - 8 \ln|y-1| + C$ (h) $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| + C$ (i) $\frac{2}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{1+x} \right| + C$
 (j) $-\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 \ln \left| \frac{x}{1-x} \right| + C$ (k) $\ln \frac{x^2}{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + C$ (l) $\ln \frac{(x-2)^2}{x^2+4} - 2 \arctan \frac{x}{2} + C$

Vastus 15.6. Tegemist on liigmurruga

Vastus 15.7. (a) $x + \ln|x| - 4 \ln|x+3| + C$ (b) $x + \frac{1}{x} + 2 \ln|1-x| - \ln|x| + C$ (c) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x-1| + C$ (d) $\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x+1| - 8 \ln|x+2| + C$

Vastus 15.8. (a) $\frac{2 \sin x - 3}{(3 - \sin x)^2} + C$ (b) $\frac{3}{x+2} + \ln|x^2+x-2| + C$ (c) $\ln(x^2+6x+10) + \arctan x - 6 \arctan(x+3) + C$
 (d) $\frac{1}{r^2+1} + \ln(r^2+1) + C$ (e) $\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln(x^2+x+1) + C$ (f) $x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$ (g) $\ln|x+2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$
 (h) $\frac{3}{2} \ln(x^2+2) + 2\sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ (i) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

Praktikum 16

Vastus 16.2. Diferentsiaalvõrrandi lahendid on (a), (b) ja (c).

Vastus 16.3. Diferentsiaalvõrrandi lahendid on (a), (d), (e), (f), (h) ja (i).

Vastus 16.5. (a) $y = 2x + C$ (b) $y = \sin x + C$ (c) $y = \ln|x| + C$ (d) $y = e^x + C$
 (e) $y = \frac{1}{5}x^5 + C$ (f) $y^2 = x^2 + 10x + C$

Vastus 16.6.

(a) $y = \ln|x| + x + C$ (b) $y^2 = 2x + C$
 (c) $\sqrt{y} = x + C$, $y = 0$ (d) $y = Cx - 1$ (e) $y^2 = x^2 - 2x - 2 \ln|x| + C$ (f) $y - 2 = C(x+1)$ (g) $\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \ln|x-1| + C$
 (h) $y = \frac{1}{1+Cx}$ (i) $(y-1)(x+1) = Cxy$ (j) $\arcsin y - \arctan x = C$ (k) $\arcsin y - \arcsin x = C$ (l) $\frac{t+x}{tx} - \ln \left| \frac{x}{t} \right| = C$

Vastus 16.7. (a) $1 + y^2 = C(x^2 - 1)$; $C = 2/3$ (b) $e^x + e^{-y} = C$; $C = 2$ (c) $y = (C + 3x(1-x))^{1/3}$; $C = 5$
 (d) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; $C = e$ (e) $y = \frac{1+x}{1-x}$

Vastus 16.9. $10^7 e^{kt}$

Vastus 16.11. $[H_2O_2]_t = 10e^{-0,51t} \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{min}}$, $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,51} \approx 1,36 \text{ min}$

Vastus 16.13. $x(t) = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ inimest; $t_{1/2} = \frac{\ln 499}{4} \approx 1,6 \text{ päeva}$

Praktikum 17

Vastus 17.2. (a) $y = Cx^3 - x^2$ (b) $y = Ce^x - 2 - 2x - x^2$ (c) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ (d) $y = e^{\sin x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$

(h) $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{xe^x}$ (i) $y = Cx - 1$ (j) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ (k) $y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$

(l) $y = x - 1 + Ce^{-x}$ (p) $y = \frac{1}{x}(e^x + C)$, $C = ba - e^a$ (q) $y = \frac{x+1}{x}(x - \ln|x+1| + C)$, $C = \ln 2 - 1$

Vastus 17.6. $z = \frac{ak_1k_2}{k_2 - k_1} \left[\frac{e^{-k_1t} - e^{-k_3t}}{k_3 - k_1} - \frac{e^{-k_2t} - e^{-k_3t}}{k_3 - k_2} \right]$

Praktikum 18

Vastus 18.3. $a = 0$, $b = 6$, $c = 4$

Vastus 18.4. (g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Vastus 18.5. (a) $\begin{pmatrix} -5 & 14 & 33 \\ -2 & 16 & 34 \\ -3 & 22 & 47 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 25 & 39 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ (f) F (h) F^T

Vastus 18.6. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vastus 18.7. (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vastus 18.15. $\begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3} & \sqrt{3} + 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

Praktikum 19

Vastus 19.1. (b) 40 (c) 6 (d) 100

Vastus 19.2. (a) jah (b) ei (c) jah (d) jah (e) ei (f) ei

Vastus 19.3. (a) -60 (b) 0 (c) 0

Vastus 19.4. (a) -40 (b) 80 (c) 40

Vastus 19.5. -6

Vastus 19.6. (a) -128 (b) -15

Vastus 19.7. (a) 100 (b) -30 (c) 18 (d) 90 (e) 17 (f) -34 (g) -1/2 (h) 1

Vastus 19.8. (a) 7 (b) -83 (c) 45 (d) 0 (e) $-e^t \sin t$ (f) 3 (g) 0 (h) 0 (i) 4 (j) $x^6(x^3 + 3)$ (k) $\cos t + e^{-2t}$ (l) 0

Vastus 19.9. (b) $33/2$ (c) $3/2$

Vastus 19.10. (a) 48 (b) 24 (c) 16

Vastus 19.12. (b) $x^3 - 2x$

Praktikum 20

Vastus 20.1. $A^{-1} = C$.

Vastus 20.4. E

Vastus 20.6. (a) $k = 9$ (c) $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1$

Vastus 20.7. a $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c $C^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Vastus 20.8. a $B^{-1} = B$ c $F^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ d $H^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $I^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -8 & -8 \\ -4 & 4 & 4 \\ 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Vastus 20.9. (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vastus 20.10. Pöördmaatriks on $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

Vastus 20.11. a $x = 1, y = -0,5, z = -1$ b $x = 1, y = -1, z = 1, u = -1$

Vastus 20.12. (a) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -17 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -18 \\ 17 & 16 & -39 \\ 13 & 15 & -32 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -16 & 21 & 7 \end{pmatrix}$

Vastus 20.13. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Vastus 20.14. $I = \frac{3}{17} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}^T$

Vastus 20.15. Vastusteks on M. Kolk poolt leitud aforismikillud: (a) jänes šampust ei joo

Vastus 20.16. 40 g I lahust, 30 g teist, 20 g III ja 10 g IV

Praktikum 21

Vastus 21.1. c) ja l)

Vastus 21.2. a 3 b 3 c 2

Vastus 21.8. b $x = 1/3, y = 2, z = -4/3$ c $x = 1/2, y = 2, z = -1/2, u = -3$

Vastus 21.3. (a) $x = 2, y = -1, 5$ (b) Lahend puudub (c) $x = -1 - 2C, y = C$

(d) Lahend puudub (e) $x = 8 + 6C, y = -1 - 2C, z = C$ (f) $x = 0, y = -3, z = 2$

(g) $x = 2 - 4C_1 - 3C_2, y = C_1, z = 2C_2, u = 4 - 2C_2, v = C_2$ (h) $x = 5 - 2C_1 - 3C_2, y = C_1; z = C_2$

(i) $x = -2 - 2C_1 + C_2; y = 1 - 9C_1 - 2C_2, z = C_1, u = C_2$

Vastus 21.4. (a) $x = 1, y = -1/3, z = -2/3, v = 0$ (b) $x = 1/4, y = -5/4, z = 2$ (c) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$

(d) Lahend puudub (e) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2)$

Vastus 21.5. (a) $x = -C, y = -C, z = C$ (b) $x = 8C_1 - 7C_2, y = -6C_1 + 5C_2, z = C_1, v = C_2$

(g) $x = C_2 - C_1, y = 1 - C_1 - C_2, z = C_1, u = 2, v = C_2$ (i) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$

(h) Lahend puudub (j) $x_1 = 1 - C_2, x_2 = -C_1, x_3 = C_1, x_4 = 2 + 2C_2, x_5 = C_2$

(k) Lahend puudub (c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Vastus 21.6. (c) 1) $a \neq 2$ ja $a \neq 4/3$, 2) $a = 2, a = 4/3$, 3) lahendid on alati olemas

Vastus 21.7. a 1) $a \neq -1, 2$ a) $a = -1$, lahendid $x = -C, y = 0, z = C$

Vastus 21.9. a $x_1 = 330 + C, x_2 = 170 + C, x_3 = 210 + C, x_4 = C$, kus $C \geq 0$

b $x_1 = 500 - a - b, x_2 = a + b - 200, x_3 = a, x_4 = 350 - b, x_5 = b$, kus üldiselt $200 \leq a + b \leq 500$

Praktikum 23

Vastus 23.1. 245 cm ja 245 cm

Vastus 23.2. (a) Kui $n = 3$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 9, parempoolsed 18 ja keskmised 13.5. Kui $n = 10$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 12.15, parempoolsed 14.85 ja keskmised 13.5.

(d) Kui $n = 3$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 4.146, parempoolsed 5.146 ja keskmised 4.677. Kui $n = 12$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 4.540, parempoolsed 4.790 ja keskmised 4.667.

Vastus 23.3. (a) $S = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$ (b) $S = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ (c) $S = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$

(d) Üks võimalikest pindaladest on $S = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$ (e) $S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx$ (f) $S = \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}x\right) dx + \int_0^2 \left(\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3}\right) dx$

Vastus 23.4. (a) 21 (b) $\frac{9}{2}\pi$ (c) 1 (d) $\frac{\pi}{2}$

Vastus 23.5. (a) 0.648 (b) 7.661 (c) 12.660

Vastus 23.6. 100.027

Vastus 23.7. (a) 6.0 (b) 11.655 (c) 3.392

Vastus 23.8. Trapetsvalemiga 2568.25 ja Simpsoni valemiga 2581.29, täpsem on Simpsoni valem

Vastus 23.9. Trapetsvalemiga 4.322 ja Simpsoni valemiga 4.478

Vastus 23.10. 3.238 m

Vastus 23.11. 452.130

Vastus 23.12. 19.398

Praktikum 24

Vastus 24.1. (a) $85/3$ (b) $4 - \ln 5$ (c) $2 - \pi/2$ (d) $\pi/2 - 1$ (e) 0

Vastus 24.2. (a) 2,5 (b) 4 (c) 4 (d) 3 (e) $9/4$ (f) 32

Vastus 24.3. (a) 0 (b) $\frac{2\pi^5}{5}$ (c) 0

Vastus 24.4. (a) 10,5 (b) $\frac{1}{3} \ln 7$ (c) $\frac{1}{3} (10\sqrt{10} - 1)$ (d) 0 (e) $\frac{\ln^2 2 + \ln^2 5e}{2}$ (f) $-1/6$ (g) $\pi/4$ (h) $2 \ln 2 - 1$

Vastus 24.5. (a) $1/24$ (b) 4 (c) $\pi/2$ (d) $6 - \frac{3}{2} \ln 5$

Vastus 24.6. (a) $5/3$ (b) 2

Praktikum 25

Vastus 25.1. (a) 2π (b) 1 (c) $\sqrt{3} - \pi/3$ (d) $2(48 - 24\pi + \pi^3)$ (e) $0,5(1 + e^\pi)$ (h) $(-2 + \pi + 2\ln 2)/12$

Vastus 25.2. (a) $8 - \pi$ (b) $1 + \ln\left(\frac{512}{625}\right)$ (c) $\frac{7}{4} + \ln\left(\frac{9}{2}\right)$

Vastus 25.3. (a) $1 - \frac{5}{4}\ln 3$ (b) $2(\sqrt{2} - 1)$ (c) $7\sqrt{7}/3$
 (f) $-\pi/2$ (d) $\frac{1}{5}(1 - e^{-\pi})$ (e) $(8 - \sqrt{2})/6$ (f) $(3\pi + 4\ln 2)/8$ (g) 26

Praktikum 26

Vastus 26.1. (a) 2 (b) $9/4$ (c) $8/3$ (d) $64/3$ (e) $e-1$ (f) $1/12$

Vastus 26.2. $\pi/4 + 1/2$

Vastus 26.4. $\pi/2 - 1$

Vastus 26.5. π

Vastus 26.6. $5/4\pi$

Vastus 26.7. $3 - e$

Vastus 26.8. $ab\pi$

Vastus 26.7. 108π

Praktikum 27

Vastus 27.1. (a) $2\sqrt{6} - 8/3$ (b) $(80\sqrt{10} - 8)/27$

Vastus 27.2. $2\sqrt{5}$

Vastus 27.3. $\frac{5}{4}\pi r$

Vastus 27.4. $6a$

Vastus 27.7. 10

Vastus 27.8. (a) 36π (b) 8π (c) $7/15\pi$

Vastus 27.10. (a) $2/7\pi$

Praktikum 28

Vastus 28.1. 1100 km

Vastus 28.7. Osake liikus 35 pikkusühikut paremale ja läbis kokku u. 42.6 pikkusühikut.

Vastus 28.9. -10.71 m/s.

Vastus 28.10. 1.4 m

Vastus 28.11. 200 m. Mõistlik on modelleerida läbi keskmise kiirenduse.

Vastus 28.12. $100\sqrt{\frac{5}{17}}$

Vastus 28.15. $1/2$ J

Vastus 28.16. $\frac{k(b-a)}{ab}$

Vastus 28.18. 51021.81 J

Vastus 28.20. $9.2 \cdot 10^6$ J

Vastus 28.21. 384551 J

Praktikum 29

Vastus 29.1. (a) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$, (b) $\left(-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x\right) \Big|_0^\pi = \frac{4}{15}$, (c) $\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16}$,
 (d) $\left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{15}$, (e) $\left(3x + \frac{1}{\pi} \sin 4\pi x + \frac{1}{8\pi} \sin 8\pi x\right) \Big|_0^1 = 3$, (f) $\frac{2}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 2$, (g) $\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$
 $\frac{\pi}{32}$, (h) $\left(\frac{5}{128}x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{192} \sin 6x - \frac{1}{1024} \sin 8x\right) \Big|_0^\pi = \frac{5\pi}{128}$, (i) $\frac{3}{4}$

Vastus 29.2. (a) $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) + C$ (e) $-\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{3}{4} \tan \frac{x}{2} + \frac{9}{4} \right| - \ln \left| \frac{3}{4} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right| \right) + C$
 (g) $\frac{2}{3} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{3} \right) + C$ (i) $\ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + C$

Vastus 29.3. (a) $\frac{(\cos x - 2)^2}{2} + 6 \ln (\cos x + 2) + C$ (c) $-\frac{\cos x}{2} + \frac{3}{2^{\frac{5}{2}}} (\ln |2 \cos x - \sqrt{2}| - \ln |2 \cos x + \sqrt{2}|) + C$ (e) $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$

Vastus 29.4. (a) $\arcsin \frac{x}{4} + C$ (b) $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$ (c) $-\frac{1}{3} (16 - x^2)^{3/2}$
 (d) $2 \ln \left| \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{6} \right| + C$ (e) $\sqrt{x^2 - 25} - 5 \arccos \frac{5}{x} + C$ (f) $-\frac{1}{3 \sin(\arctan \frac{z}{3})} + C$
 (g) $3 \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} \right) \right| + C$ (h) $\frac{3x}{2\sqrt{4 - x^2}} + C$ (i) $4 \left(\frac{(\sqrt{x^2 + 9})^3}{3} - 9\sqrt{x^2 + 9} \right) + C$
 (j) $-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$ (k) $\frac{4}{5}$ (l) $\ln 2 - \frac{3}{5}$
 (m) $6 \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C$ (n) $\frac{1}{3} \left(\arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{3}{5} \right)$

Praktikum 31

Vastus 31.1. (a) integraal hajub (b) integraal hajub (c) 1000

(d) Kui $\alpha \leq 1$, siis integraal hajub. Kui $\alpha > 1$, siis vastus on $\frac{1}{\alpha - 1}$.

(e) $\frac{5}{4}$ (f) integraal hajub (g) 0 (h) 2

(i) 1 (j) $\frac{1}{2}$ (k) integraal hajub (l) $\frac{1}{2}$

(m) Kui $n > 1$, siis algfunktsioon on $\frac{\ln^{1-n} x}{1-n}$ ja vastus $-\frac{\ln^{1-n} 2}{1-n}$ Kui $n = 1$, siis integraal hajub

(n) integraal hajub (o) integraal hajub (p) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (q) $\ln(1 + \frac{\pi}{2})$ (r) $\frac{\pi}{2}$

Praktikum 32

Vastus 32.1. (a) integraal hajub (b) 2 (c) integraal hajub (d) -4.5 (e) 4 (f) $4\sqrt{2}$ (g) integraal hajub (h) $5(\sqrt[5]{2} - 1)$ (i) $2 + \pi/2$ (j) 6 (k) 1000 (l) integraal hajub (m) $\frac{1}{n+1}$ (n) integraal hajub (o) π (p) $\sqrt{3}$ (q) π (r) integraal hajub (s) integraal hajub (t) 2

Vastus 32.2. $F(\sigma) = \frac{1}{1 + \pi^2 \sigma^2} (1 - (\pi \sigma) i)$. Lisaks igale sagedusele $\sigma \in \mathbb{R}$ vastab amplituud $|F(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 \sigma^2}}$.

Vastus 32.3. Siinusfunktsiooni Laplace'i teisendus on $\frac{1}{1 + x^2}$ ja koosinusfunktsiooni oma $\frac{x}{1 + x^2}$. Mõlemad on määratud vaid positiivsete argumentide korral.

Vastus 32.4. Umbes 13.5%.

Vastus 32.5. $\mu = 0$ ja $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 10 arvu korral satub ca iga 162., 15 arvu korral ca iga 1256. ja 20 arvu korral ca iga 9259. keskvaartus lõigust välja.

Vastus 32.6. Vahemikus 85-115: umbes 68%. Üle 140: umbes 0.4%.