

MC meetodid, praktikum 13

Teema 1: MC meetodi rakendused

Finantsmatemaatika: optsioonide hinnad. Finantsoptsioonid on lepingud, mis võimaldavad omanikul saada tulevikus saada tulu, mille suurus sõltub aktsiaturu käitumisest vaadeldaval tulevikuperioodil. Näiteks ostuoptsioon, mis võimaldab osta ühe Amazon.com aktsia 3 kuu pärast hinnaga 1600 dollarit, võimaldab teenida tulu, kui turuhind on 3 kuu pärast suurem kui 1600; tulu suurus on sel juhul $S(T) - 1600$, kus $S(T)$ tähistab aktsiahinda kolme kuu pärast. Kui tuleviku aktsiahind on väiksem kui 1600, siis on leping väärtusetu ja sellelt teenitav tulu on null. Seega saab tulevikus saadavat tulu arvutada funktsiooni $p(s) = \max(s - 1600, 0)$, $0 \leq s < \infty$ abil kujul $p(S(T))$. Optsioonide teooria üks põhitulemusi on see, et optsiooni turuhind sõlmimismomendil peab olema kujul

$$H = E(e^{-rT} p(S(T))),$$

kus r on riskivaba intressimäär ning $S(T)$ on nn riskineutraalsele turumudelile vastav tuleviku aktsiahind. Samasugune valem kehtib ka juhul, kui tulevikus teenitav tulu sõltub mitme aktsia tulevikukäitumisest. Lihtsamate turumudelite korral on $S(T)$ jaotus teada.

Harjutus 1

Leia MC meetodil eelnevalt kirjeldatud amazon.com ostuoptsiooni hind täpsusega 1 dollar (tõenäosusega 0.99), kui hinna esituses kasutatav tuleviku hind $S(T)$ on lognormaalse jaotusega $LN(\mu, \sigma)$, kus

$$\mu = \ln(1604) + (r - \frac{0.24^2}{2}) \cdot T, \quad \sigma = 0.12,$$

riskivaba intressimäär on 2% ja $T = \frac{1}{4}$. NB! tulevikutulu arvutamisel (ehk funktsiooni p defineerimisel) on otstarbekas kasutada R funktsiooni `pmax`, mis töötab korrektselt vektoritega (st kui s asemel anda ette vektor, tahame saada tulemuseks vektori, mis iga etteantud väärtuse korral on leidnud sellele hinnale vastava funktsiooni väärtuse). Lognormaalse jaotusega juhuslike suuruste genereerimiseks on käsk `rlnorm`.

Kindlustusfirma laostumistõenäosus Kindlustusfirmal on alguses teatud rahasumma u (et maksta kahjunõudeid), olemasolevad kliendid maksavad kindlustuspreemiaid ning firma maksab välja kindlustujuhtumite kahjusid. Lisaks on muidugi veel firma püsikulud (töötajate palgad, kontorikulud jms), aga need jätame vaatluse alt välja. Eeldame, et preemiad laekuvad ajas pidevalt kiirusega c rahaühikut ajaühikus ja et kahjud X_i , $i = 1, 2, \dots$ on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused ning et kahjude toimumise ajad on juhuslikud suurused $0 \leq T_1 < T_2 < T_3$ jne (st välistame kahe kahju korraga toimumise). Siis ajamomendil t on kindlustusfirmal järgi rahasumma

$$V_t = u + ct - \sum_{i: T_i \leq t} X_i$$

Kindlustusfirma laostub, kui mingil ajamomendil muutub suurus V_t negatiivseks.

Harjutus 2

Olgu kindlustusfirma algne reserv $u = 50000$, preemiate laekumise kiirus $c = 50000$ (eurot aastas), olgu kahjude suurused lognormaalse jaotusega $LN(5, 2)$ ning olgu kahjude toimumisaegade vahed $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ sõltumatud juhuslikud suurused eksponentjaotusega $Exp(45)$. Leida $n = 10000$ simulatsiooni põhjal tõenäosus, et kindlustusfirma läheb järgmise aasta jooksul pankrotti ning leida ka tõenäosuse hinnangu tõenäoline viga.

Teema 2: Antiteetiliste muutujate kasutamine

Antiteetilisteks nimetame juhuslikke suurused X_1 ja X_2 , mis on sama jaotusega ja negatiivselt korreleeritud. Võimalused saada antiteetilisi juhuslikke suurused:

- Kui X jaotus on sümmeetriline punkti $x = \mu$ suhtes, siis on X ja $X_2 = 2\mu - X$ antiteetilised juhuslikud suurused
- Kui X jaotus on sümmeetriline punkti $x = \mu$ suhtes ja g on monotoonne (st mittekahanev või mittekasvav) funktsioon, siis $g(X)$ ja $g(2\mu - X)$ on antiteetilised juhuslikud suurused
- Olgu F mingi jaotuse jaotusfunktsioon ja F^{-} selle üldistatud pöördfunktsioon. Siis on juhusliku suuruse $U \sim U(0, 1)$ korral $F^{-}(U)$ ja $F^{-}(1 - U)$ funktsioonile F vastava jaotusega antiteetilised juhuslikud suurused

Kui on soovi leida MC meetodiga EY , kus $Y = g(X)$, siis antiteetiliste muutujate meetod seisneb MC meetodi rakendamises antiteetiliste muutujate X ja X_2 abil defineeritud juhusliku suuruse $\tilde{Y} = \frac{g(X) + g(X_2)}{2}$ keskväärtuse leidmiseks. Meetod annab ajalist võitu siis, kui $g(X)$ ja $g(X_2)$ on samuti antiteetilised juhuslikud suurused.

Harjutus 3

Kasuta ühtlast jaotust ja antiteetilisi juhuslikke suuruseid selleks, et arvutada integraal

$$\int_1^3 e^{x^2 - 4x} \cos(x) dx$$

veaga, mis on väiksem kui 0.0001 tõenäosusega 0.9. Leia, kui suur oli võit genereeritud juhuslike suuruste väärtuste arvus võrreldes tavalise MC meetodiga.

Harjutus 4

Kasuta antiteetiliste juhuslike suuruste ideed selleks et leida ligikaudselt keskväärtus $Ee^{\sqrt{X}}$ täpsusega 0.001 (juhul $\alpha = 0.05$), kus X on eksponentjaotusega $Exp(2)$ juhuslik suurus. Kui suur on võit vajaminevas genereerimiste arvus?

Antiteetiliste muutujate ideed saab kasutada ka mitmest juhuslikust suurusest sõltuva keskväärtuse leidmisel, kuid siis peab otsustama, kuidas on kõige suurem lootus saada keskväärtuse all oleva funktsiooni vastandlikke väärtuseid. Näiteks $E(\sqrt{X^2 + Y})$ leidmisel juhul $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim U(0, 1)$ ei ole mingit mõtet asendada suurust X antiteetilise suurusega $-X$, sest see ei ei anna tulemuseks vastandlikult käituvaid väärtuseid. Küll aga võib loota mingit võitu, kui lisaks paarile (X, Y) kasutada paari $(X, 1 - Y)$, sest suurem Y väärtus vastab suuremale keskväärtuse all olevale funktsiooni väärtusele ja seega saame vastandlikult käituvad tulemused. Mõnikord on kasulik asendada mitme juhusliku suuruse väärtused antiteetilistega ning võimalikke üldistusi mitmemõõtmelisele juhule on veelgi (aga neid me siin kursusel ei vaatle)

Harjutus 5

Kasuta sobivat antiteetilistel juhuslikel suurustel põhinevat ideed, et leida keskväärtus

$$E|X + Y - 1|, \quad X \sim U(0, 2), Y \sim U(0, 3)$$

nii, et 10000 genereeritud arvupaari korral oleks vastus võimalikult täpne. Leida vastuse 95% usaldusintervall.

Kodutöö nr. 9 (1,5 punkti, tähtaeg 4. detsember 2022)

Ülesanne 1 (0,5 punkti)

Leia MC meetodiga keskvärtus $E\left(\frac{2X}{Y^2+1}\right)$, kus $X \sim \text{Exp}(3)$ ja $Y \sim N(4, 1)$ on sõltumatud juhuslikud suurused nii, et tõenäosusega 0.95 on tulemise viga väiksem kui 0.001.

Ülesanne 2 (0,5 punkti)

Uuri katseliselt, kui suur on tõenäosus, et juhuslikku suurust $X \sim \text{Exp}(2)$ kasutades on $n = 1000$ korral MC meetodiga leitud integraali

$$\int_0^\infty e^{-0.5x} dx$$

ligikaudse väärtuse tegelik absoluutne viga väiksem kui genereeritud arvude põhjal leitud veahinnang juhul $\alpha = 0.1$. Kas tulemus on kooskõlas kasutatud α väärtusega? Kui ei ole, siis mis on selle põhjuseks? Selgita!

Ülesanne 3 (0,5 punkti)

Leida $n = 10000$ korral MC meetodiga integraali

$$\iiint_D \frac{z}{x + y^2 + z + 3} e^{-(x+y^2+2z)} dx dy dz$$

kus D on piirkond $[0, \infty) \times (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$, ligikaudne väärtus ja selle väärtuse tõenäosusega 0.99 kehtiv veahinnang.