

MC meetodid, praktikum 7

Teema 1: Pideva juhusliku suuruse teisendused

Loengust teame, et kui g on pööratav funktsioon pöördfunktsiooniga h , siis tihedusfunktsiooniga f_X juhusliku suuruse abil defineeritud juhusliku suuruse Y tihedusfunktsioon avaldub kujul

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)|, & y \in g(\mathbb{R}) \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Erijuhul $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$ saame siit

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

Harjutus 1

Kasuta juhusliku suuruse teisendamise ideed selleks, et genereerida 1000 funktsiooniga

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 6, \\ 0, & x > 6 \end{cases}$$

proportsionaalse tihedusfunktsiooniga pseudojuhuslikku arvu, lähtudes jaotusega $Exp(1)$ pseudojuhuslikest arvudest.

Teema 2: Tinglikust jaotusest genereerimine jaotusfunktsiooni pöördfunktsiooni abil.

Järgmises loengus tõestame, et pööratava jaotusfunktsiooniga F_X pideva juhusliku suuruse X korral saab tinglikust jaotusest $X \mid \{a < x \leq b\}$ juhusliku suuruse esitada kujul $Y = F_X^{-1}(Z)$, kus $Z \sim U(F_X(a), F_X(b))$ (ühtlane jaotus vahemikus $(F(a), F(b))$).

Harjutus 2

Genereeri $X \sim N(1, 2)$ korral 10000 arvu tinglikust jaotusest $X \mid \{4 < X \leq 7\}$. Võrdle saadud tulemusi teoreetilise jaotuse tihedusfunktsiooniga.

Harjutus 3

Kasuta segujaotusest genereerimise ideed, et genereerida 10000 väärtust funktsiooniga

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2} + 0.5e^{-2x}, & x \geq -1 \\ 0, & x < -1 \end{cases}$$

proportsionaalse tihedusfunktsiooniga jaotusest, leia nende põhjal ligikaudselt vastava juhusliku suuruse keskväärtus.

Teema 3: Normaaljaotusele vastavate pseudojuhuslike arvude genereerimine tsentraalsele piirteoreemile tuginedes.

Tsentraalsele piirteoreemile tuginedes on lihtne põhjendada, et juhuslik suurus $X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$, kus $U_i \sim U(0, 1)$ on sõltumatud juhuslikud suurused, on ligikaudu normaaljaotusega $N(0, 1)$.

Harjutus 4

Genereeri eelpooltoodud ideed kasutades 100000 ülal defineeritud suuruse X väärtust, kasutades selleks käsuga `runif` saadud pseudojuhuslikke arve jaotusest $U(0, 1)$. Võrrelda visuaalset tekkivat histogrammi standardse normaaljaotuse tihedusfunktsiooniga. Kontrollige Kolmogorov-Smirnovi testiga ja Cramer-von Mises testiga saadud arvude vastavust standardsele normaaljaotusele $\alpha = 0.05$ korral.

Teema 4: Box-Mülleri algoritm

Järgmises loengus näitame, et järgnev algoritm võimaldab genereerida koos kaks standardse normaaljaotusega pseudojuhuslikku arvu.

Algoritm:

- genereeri kaks pseudujuhuslikku arvu u_1, u_2 jaotusest $U(0, 1)$
- arvuta $r = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)}$, $\theta = 2\pi \cdot u_2$
- arvuta $x_1 = r \cdot \cos(\theta)$, $x_2 = r \cdot \sin(\theta)$
- x_1 ja x_2 on pseudojuhuslikud arvud jaotusest $N(0, 1)$

Harjutus 5

Kirjuta kaks funktsiooni, mis etteantud täisarvu n korral väljastavad n standardse normaaljaotusega pseudojuhuslikku arvu, kasutades selleks `runif` käsuga tekitatud ühtlase jaotusega pseudojuhuslikke arve. Esimene neist funktsioonidest peab kasutama pöördfunktsiooni meetodit, teine aga Box-Müller meetodit. Mõlema katse korral kontrolli histogrammi abil visuaalselt 10000 genereeritud väärtuse vastavust standardsele normaaljaotusele.

Harjutus 6

Kirjutada funktsioon, mis kasutaks eelmises harjutuses loodud Box-Mülleri algoritmi abil töötavat generaatorit selleks, et etteantud n ja k korral genereerida n pseudojuhuslikku arvu jaotusest χ_k^2 . Kontrolli Kolmogorov-Smirnovi testi abil juhul $n = 100000$, $k = 3$ korral saadud pseudojuhuslike arvude vastavust χ_k^2 jaotusele.

Kodune töö nr. 6 (1 punkt, tähtaeg 23.10.2022)

1. (0,5 punkti). Eeldame, et kursuse Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika kuulajate hulgast juhuslikult valitud tudengi esimese kontrolltöö punktiskoori (hinnatakse skaalal 0-40) kirjeldab hästi tihedusfunktsiooniga $f_x(x) \propto \frac{2}{1+0.04 \cdot (x-27)^2}$, $0 \leq x \leq 40$ jaotus. Leia simulatsioonide põhjal kontrolltöö juhuslikult valitud tudengi punktiskoori keskväärtus ja standardhälve, kasutades selleks praktikumis vaadeldud tinglikust jaotusest genereerimise meetodit. Vihje: uurida tasuks Cauchy jaotuse tihedusfunktsiooni.
2. (0,5 punkti). Defineeri funktsioon, mis etteantud n korral genereeriks n väärtust tihedusfunktsioonile

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x \in [0, 2], \\ 0 & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

vastavast jaotusest ning kasuta seejärel seda generaatorit, et tekitada 10000 väärtust tihedusfunktsioonile

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{8}, & x \in [4, 8], \\ 0 & x \notin [4, 8] \end{cases}$$

vastavast jaotusest. Kontrolli saadud arvude vastavust soovitud jaotusele visuaalselt (histogrammi abil).