

MC meetodid, praktikum 9

Teema 1: Meeldetuletus - pöördfunktsiooni meetod

R-s funktsioone defineerides on hea, kui need töötavad korrektselt ka juhul, kui argumendid on antud vektoritena. Kasutades selleks aga valemit kujul `valem1(x)*tingimus1(x)+valem2(x)*tingimus2(x)+...` võib tekkida probleeme, kui mõni valemitest ei oma mõningate x väärtuste korral mõtet. Sellest probleemist saab üle, kui muuta valemit nii, et see jääks samaks juhul kui tingimus on täidetud, kuid ei tekitaks vigu juhul, kui tingimus pole täidetud. Järgneva ülesande lahendamisel tulebki mõelda, kuidas seda saavutada.

Harjutus 1

Genereeri 10000 jaotusfunktsioonile

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x - 2x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{16} + x^2, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ e^{x-1}, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

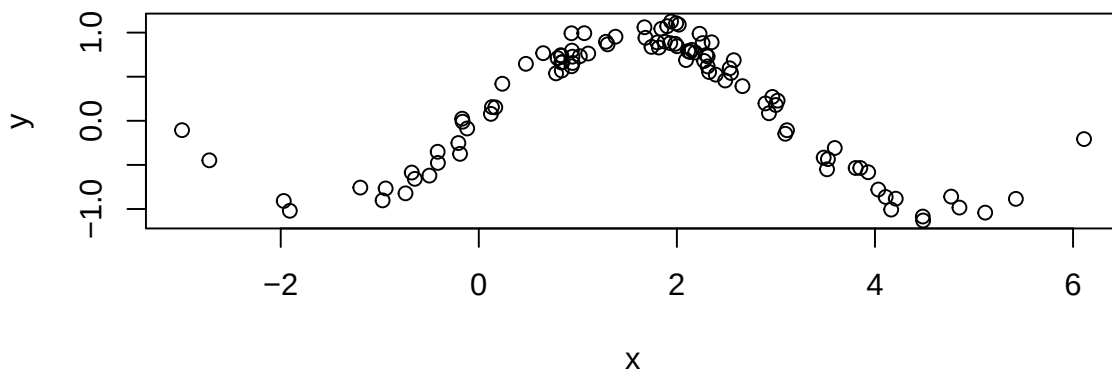
vastavat pseudojuhuslikku arvu.

Teema 2: Tinglike tiheduste abil juhusliku vektori genereerimine.

Eeldame, et teame X_1 jaotust, X_2 jaotust tingimusel, et X_1 on antud, X_3 jaotust, tingimusel, et X_1, X_2 antud jne. Siis järjest vastavatest jaotustest genereerides saame punkti $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ jaotusest, mille tihedusfunktsioon on vastavate tinglike jaotuste tihedusfunktsioonide korrutis.

Harjutus 2

Loominguline ülesanne - mõelda välja moodus, kuidas genereerida punkte jaotusest, mis käituksid sarnaselt allpool toodud graafikule (seal on kujutatud 100 juhuslikult valitud punkti ühest kahemõõtmelisest jaotusest)



Harjutus 3

Kirjuta generaator, mis etteantud n korral genereeriks n vektorit (X, Y) tihedusfunktsioonile

$$f(x, y) = \begin{cases} x e^{-xy}, & 1 \leq x \leq 2, y \geq 0, \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

vastavast jaotusest. Leia 10000 genereeritud punkti abil juhusliku punkti (X, Y) keskmine kaugus koordinaatide alguspunktis.

Teema 3: Metropolis-Hastings algoritm

Vaatleme pideva juhusliku vektori erijuhtu. Algoritm üldkujul on rakendatav nii pidevatele kui diskreetsetele jaotustele

Algoritm:

- Vaatleme erijuhtu, kus ekslemisel uue asukoha määramisel kasutama normaaljaotust
- eeldame, et teame soovitud tihedusfunktsiooniga proportsionaalset funktsiooni f
- Algoritm:
 - Valime algpunkti x_1 (NB! peab olems selline, et $f(x_1) > 0$)
 - iga $i = 1, 2, \dots, n - 1$ korral
 - * leiame uue asukoha kandidaadi $x \sim N(x_i, \Sigma)$
 - * genereerime $u \sim U(0, 1)$
 - * Kui $u \leq \frac{f(x)}{f(x_i)}$, siis $x_{i+1} = x$, muidu $x_{i+1} = x_i$
 - väljastame punktid $x_{n_0}, x_{n_0+\ell}, x_{n_0+2\ell}$ jne, kus n_0 ja ℓ on sobivalt valitud naturaalarvud

Harjutus 4

Alustuseks vaatleme ühemõõtmelist erijuhtu. Genereeri MH algoritmi abil jada $x_1, x_2, \dots, x_n$ juhul $n = 100000$, kui soovitud tihedusfunktsioon on proportsionaalne funktsiooniga

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x e^{-2x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

kasutades liikumiseks normaaljaotust $N(x, 0.1)$, kus x on hetkeasukoht. Lähtepunktiks valige $x_1 = 1$. Näidata sõltumatute paaride testiga, et jada ei vasta sõltumatutele vaatlustele soovitud jaotusest. Kas osajada, mis vastab $n_0 = 100, \ell = 100$ läbib eelnevalt kasutatud sõltumatuse testi? Uurige ka visuaalselt vastavust soovitud jaotusele.

Sageli on küllalt lihtne kontrollida mingisse ruumipiirkonda kuuluvust, kuid küllalt raske on täpselt kirjeldada vastava piirkonna täpset kuju. Näiteks võib piirkond m -mõõtmelises ruumis olla defineeritud võrratustega $a_i \cdot x + d_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, kus a_i , $i = 1, \dots, k$ on vektorid, $\cdot$ tähistab skalaarkorrutist ja d_i , $i = 1, \dots, k$ on reaalarvud. Toodud tingimuste täidetust on iga x korral lihtne kontrollida, kuid vastavat piirkonda ei ole alati kuigi lihtne kirjeldada.

Harjutus 5

Eesmärgiks on kirjutada funktsioon, mis etteantud n korral genereerib n juhuslikult valitud punkti võrratustega

$$\begin{aligned} x + 0.2y + 0.4 &\geq 0, \\ 2x - 5y + 1 &\geq 0, \\ -x + 2y + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

määratud piirkonnast (st tahame valida vastavalt ühtlasele jaotusele selles piirkonnas). Genereeri 1000 punkti selle funktsiooni abil ja kujuta nende paiknemine graafikul.