

Analüütiline geomeetria

II loeng. Kollineaarsed ja komplanaarsed vektorid. Baas, reeper, koordinaadid.

Koordinaadisüsteemid

Koordinaadisüsteem tugineb kahele mõistele:

- 1 vektori projektsioon teise vektori sihile
- 2 baas, reeper.

Olgu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reaalarvud, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorid. Moodustame algebralise avaldise

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i. \quad (1)$$

Avaldist (1) nimetatakse vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ lineaarkombinatsiooniks kordajatega $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Juhul, kui vähemalt üks kordajatest on nullist erinev, lineaarkombinatsiooni (1) nimetatakse **mittetriviaalseks lineaarkombinatsiooniks** ja vastasel juhul, kui kõik kordajad on korraka nullid, nimetatakse **triviaalseks lineaarkombinatsiooniks**.

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Teoreem

Tasandilised vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed vektorid parajasti sii, kui leidub vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st leiduvad reaalarvud α_1, α_2 sellised, et nad ei ole korraka nullid (st vähemalt üks nendest on nullist erinev) ja kehtib võrdsus

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}. \quad (2)$$

Tõestus. Tarvilikus:

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Teoreem

Tasandilised vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed vektorid parajasti sii, kui leidub vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st leiduvad reaalarvud α_1, α_2 sellised, et nad ei ole korraga nullid (st vähemalt üks nendest on nullist erinev) ja kehtib võrdsus

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}. \quad (2)$$

Tõestus. **Tarvilikus:** (eeldame) kollineaarsed $\Rightarrow$ kehtib (2). Kui vähemalt üks vektor on nullvektor (definiitsiooni kohaselt sellisel juhul vektorid on kollineaarsed), nt $\vec{a}_2 = \vec{0}$, siis leiduvad reaalarvud α_1, α_2 sellised, et kehtib (2). Tõepoolest sellisel juhul võtame $\alpha_1 = 0$ ja α_2 on suvaline nullist erinev arv.

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Teoreem

Tasandilised vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed vektorid parajasti sii, kui leidub vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st leiduvad reaalarvud α_1, α_2 sellised, et nad ei ole korraga nullid (st vähemalt üks nendest on nullist erinev) ja kehtib võrdsus

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0}. \quad (2)$$

Tõestus. **Tarvilikus:** (eeldame) kollineaarsed $\Rightarrow$ kehtib (2). Kui vähemalt üks vektor on nullvektor (definiitsiooni kohaselt sellisel juhul vektorid on kollineaarsed), nt $\vec{a}_2 = \vec{0}$, siis leiduvad reaalarvud α_1, α_2 sellised, et kehtib (2). Tõepoolest sellisel juhul võtame $\alpha_1 = 0$ ja α_2 on suvaline nullist erinev arv.

Seega üldsust kitsendamata eeldame, et $\vec{a}_1 \neq \vec{0}, \vec{a}_2 \neq \vec{0}$.

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Kollineaarsete vektorite korral meil on **ainult kaks võimalust**, kas $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ või $\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2$.

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Kollineaarsete vektorite korral meil on **ainult kaks võimalust**, kas $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ või $\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2$. Samasuunaliste vektorite korral moodustame kaks vektorid $|\vec{a}_2| \vec{a}_1$ ja $|\vec{a}_1| \vec{a}_2$.

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Kollineaarsete vektorite korral meil on **ainult kaks võimalust**, kas $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ või $\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2$. Samasuunaliste vektorite korral moodustame kaks vektorid $|\vec{a}_2| \vec{a}_1$ ja $|\vec{a}_1| \vec{a}_2$. Analoogiliselt vastassuunaliste vektorite korral moodustame kaks vektorid $|\vec{a}_2| \vec{a}_1$ ja $-|\vec{a}_1| \vec{a}_2$. On lihtne näidata, et kehtib

- $|\vec{a}_2| \vec{a}_1 = |\vec{a}_1| \vec{a}_2$, kui vektorid on samasuunalised, st $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$,
- $|\vec{a}_2| \vec{a}_1 = -|\vec{a}_1| \vec{a}_2$, kui vektorid on vastassuunalised, st $\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2$.

Sellest järeldub (2).

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Kollineaarsete vektorite korral meil on **ainult kaks võimalust**, kas $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ või $\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2$. Samasuunaliste vektorite korral moodustame kaks vektorid $|\vec{a}_2|\vec{a}_1$ ja $|\vec{a}_1|\vec{a}_2$. Analoogiliselt vastassuunaliste vektorite korral moodustame kaks vektorid $|\vec{a}_2|\vec{a}_1$ ja $-|\vec{a}_1|\vec{a}_2$. On lihtne näidata, et kehtib

- $|\vec{a}_2|\vec{a}_1 = |\vec{a}_1|\vec{a}_2$, kui vektorid on samasuunalised, st $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$,
- $|\vec{a}_2|\vec{a}_1 = -|\vec{a}_1|\vec{a}_2$, kui vektorid on vastassuunalised, st $\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2$.

Sellest järeldub (2).

Piisavus. Eeldame, et kehtib (2) $\Rightarrow$ peame näitama, et vektorid on **kollineaarsed**. Näitame järgmiselt: kuna arvud α_1, α_2 ei ole korraga nullid, siis vähemalt üks nendest on nullist erinev, nt α_1 . Valemist (2) järeldub, et

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2.$$

Vektori arvuga korrutamise definitsioonist nüüd järeldub $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$.

Tähtsad järeldused

Tõestatud teoreemist järeldub:

- ① Kui $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed vektorid ja $\vec{a}_1$ on nullvektorist erinev vektor, siis vektor $\vec{a}_2$ avaldub vektori $\vec{a}_1$ kaudu järgmiselt

$$\vec{a}_2 = \alpha \vec{a}_1,$$

kus α on reaalarv ja

$$\alpha = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} (\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2), \alpha = -\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} (\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2).$$

Tähtsad järeldused

Tõestatud teoreemist järeldub:

- ① Kui $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed vektorid ja $\vec{a}_1$ on nullvektorist erinev vektor, siis vektor $\vec{a}_2$ avaldub vektori $\vec{a}_1$ kaudu järgmiselt

$$\vec{a}_2 = \alpha \vec{a}_1,$$

kus α on reaalarv ja

$$\alpha = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} (\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2), \alpha = -\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} (\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2).$$

- ② Kui $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ on kollineaarsed vektorid ja $\vec{a}_1$ on nullvektorist erinev vektor, siis vektor $\vec{a}_2$ avaldub järgmiselt

$$\vec{a}_2 = |\vec{a}_2| \vec{e}_1 (\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2), \vec{a}_2 = -|\vec{a}_2| \vec{e}_1 (\vec{a}_1 \downarrow\uparrow \vec{a}_2),$$

kus

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$$

on vektoriga $\vec{a}_1$ samasuunaline ühikvektor.

Baasi ja reeperi mõisted

Olgu l sirge eukleidilises ruumis E . Sirgel l fikseerime kaks erinevat punkti $A, B \in l$. Vektorit $\vec{a} = \vec{AB}$ nimetatakse sirge l **sihivektoriks**. On ilmne, et $\vec{a} \neq \vec{0}$. Kui $\vec{a} \neq \vec{0}$ on nullvektorist erinev vektor ja $A \in E$ on eukleidilise ruumi punkt, siis vektor $\vec{a}$ üheselt määrab sirget l , mis läbib punkti A , ja vektor $\vec{a}$ on sirge l sihivektor.

Baasi ja reeperi mõisted

Olgu l sirge eukleidilises ruumis E . Sirgel l fikseerime kaks erinevat punkti $A, B \in l$. Vektorit $\vec{a} = \vec{AB}$ nimetatakse sirge l **sihivektoriks**. On ilmne, et $\vec{a} \neq \vec{0}$. Kui $\vec{a} \neq \vec{0}$ on nullvektorist erinev vektor ja $A \in E$ on eukleidilise ruumi punkt, siis vektor $\vec{a}$ üheselt määrab sirget l , mis läbib punkti A , ja vektor $\vec{a}$ on sirge l sihivektor.

Kõigepealt näitame, kuidas toimub koordinaadisüsteemi konstrueerimine vektorite abil ja alustame eukleidilisest tasandist E^2 .

Definitsioon

Vektorsüsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, mis koosneb kahest mittekollinearsest vektorist $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, nimetatakse tasandi vektorite hulga $\mathbb{E}^2$ **baasiks**. Vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ nimetatakse **baasivektoriteks**. Kolmikut $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, kus O on tasandi punkt ja $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ on tasandi baas, nimetatakse **reeperiks**. Punkti O nimetatakse reeperi **alguspunktiks**.

Vektori koordinaadid

Olgu $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ tasandi reeper. Esimene baasvektor $\vec{a}_1$ määrab sirget l_1 , mis läbib punkti O , ja $\vec{a}_1$ on selle sirge sihivektor. Analoogiliselt sirget, mis on määratud teise baasvektoriga $\vec{a}_2$, tähistame l_2 . On ilmne, et sirged l_1, l_2 lõikuvad reeperi alguspunktis O .

Vektori koordinaadid

Olgu $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ tasandi reeper. Esimene baasvektor $\vec{a}_1$ määrab sirget l_1 , mis läbib punkti O , ja $\vec{a}_1$ on selle sirge sihivektor. Analoogiliselt sirget, mis on määratud teise baasvektoriga $\vec{a}_2$, tähistame l_2 . On ilmne, et sirged l_1, l_2 lõikuvad reeperi alguspunktis O .

Olgu $\vec{r}$ tasandi suvaline vektor. Rakendame vektori $\vec{r}$ alguspunktist O ja saadud seotud vektori lõpp-punkti tähistame P . Edaspidi vektorit $\vec{r}$ nimetame punkti P **kohavektoriks**. Projekteerime punkti P sirgele l_1 paralleelselt sirgega l_2 ja projektsioonipunkti tähistame P' . Vektorit $O\vec{P}'$ nimetame vektori $\vec{r}$ **projektsioonivektoriks** vektori $\vec{a}_1$ sihile. Vektori $\vec{r}$ **projektsiooni** vektor $\vec{a}_1$ sihile defineerime valemiga

- $\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r} = |\vec{OP}'|$, kui $O\vec{P}' \uparrow\uparrow \vec{a}_1$,
- $\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r} = -|\vec{OP}'|$, kui $O\vec{P}' \uparrow\downarrow \vec{a}_1$.

Vektori koordinaadid

Joonisel näeme, et $O\vec{P}' \parallel \vec{a}_1$. Kuna $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, enne tõestatud teoreemist järeldub, et vektori $\vec{r}$ projektsioonivektor $O\vec{P}'$ avaldub baasivektori $\vec{a}_1$ kaudu. Tõepoolest kui $O\vec{P}' \uparrow\uparrow \vec{a}_1$, siis

$$O\vec{P}' = \frac{|O\vec{P}'|}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1.$$

Teisel juhul $O\vec{P}' \uparrow\downarrow \vec{a}_1$ kehtib analoogiline valem

$$O\vec{P}' = -\frac{|O\vec{P}'|}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1.$$

Seega kehtib valem

$$O\vec{P}' = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1.$$

Vektori koordinaadid

Projekteerides vektorit $\vec{r}$ teise vektori $\vec{a}_2$ sihile saame analoogilise valemi

$$O\vec{P}'' = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{r}}{|\vec{a}_2|} \cdot \vec{a}_2.$$

Joonisel näeme, et $\vec{r} = O\vec{P}' + O\vec{P}''$, seega

$$\vec{r} = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1 + \frac{\text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{r}}{|\vec{a}_2|} \cdot \vec{a}_2.$$

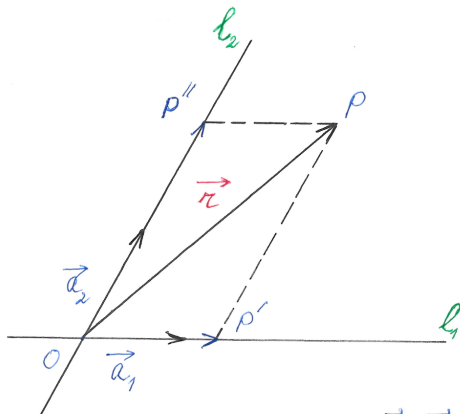
Arvusid

$$x_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|}, x_2 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{r}}{|\vec{a}_2|},$$

nimetatakse vektori $\vec{r}$ **koordinaatideks** baasis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Tasandi suvaline vektor $\vec{r}$ avaldub baasivektorite kaudu

$$\vec{r} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2. \quad (3)$$

Mainime, et saab näidata, et koordinaadid on **üheselt määratud**. Kui tasandi baas on fikseeritud, siis valemi (3) kuju võime lihtsustada järgmiselt $\vec{r} = (x_1, x_2)$.



$$\vec{r} = \frac{1}{|\vec{a}_1|} \text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{a} \cdot \vec{a}_1 + \frac{1}{|\vec{a}_2|} \text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{a} \cdot \vec{a}_2$$

Vektorite koordinaadid

Tõestatud valemist järeldub

- ◇ Tasandi suvalise vektori $\vec{r}$ saab alati esitada kahe mittekolleenaarse vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ linearkombinatsiooni kujul $\vec{r} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$, kus kordajad x_1, x_2 on üheselt määratud.

Vektorite koordinaadid

Tõestatud valemist järeldub

- ◇ Tasandi suvalise vektori $\vec{r}$ saab alati esitada kahe mittekollineaarse vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ linearkombinatsiooni kujul $\vec{r} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$, kus kordajad x_1, x_2 on üheselt määratud.
- ◇ Tasandi kolme suvalise vektori $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ korral leidub nende vektorite mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \vec{r} + \beta \vec{s} + \gamma \vec{t} = \vec{0}.$$

Vektori projektsioonil on järgmised omadused:

- ✚ $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{r} + \vec{s}) = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{r} + \text{pr}_{\vec{a}} \vec{s},$
- ✚ $\text{pr}_{\vec{a}}(\alpha \cdot \vec{r}) = \alpha \text{pr}_{\vec{a}} \vec{r}.$

Liitmine ja korrutamine koordinaatides

Olgu $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ tasandi E^2 suvaline reeper. Olgu (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ koordinaadid baasis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, st võime kirjutada $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$. Vektori projektsiooni omadustest järeldub, et

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

Liitmine ja korrutamine koordinaatides

Olgu $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ tasandi E^2 suvaline reeper. Olgu (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ koordinaadid baasis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, st võime kirjutada $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$. Vektori projektsiooni omadustest järeldub, et

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

Tasandi baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse **ortonormeeritud baasiks** või **ristbaasiks**, kui baasivektorid on teineteisega risti $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ ja baasivektorid on ühikvektorid $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Tasandi reeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse **ristreeperiks**, kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on ortonormeeritud baas. Ristreeperiga määratud koordinaate nimetatakse **ristkoordinaatideks**. Järgnevas kasutame ristbaasi selle pärast, et valemite kuju ristkoordinaatides on kompaktsem ja lihtsam, kui suvalistes koordinaatides. Näiteks vektori $\vec{r}$ ristprojektsioon ühikvektori $\vec{e}$ sihile avaldub järgmiselt

$$\text{pr}_{\vec{e}} \vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}).$$

Ristkoordinaadid

Siit kohe järeldub, et ortonormeeritud baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ korral suvalise vektori $\vec{r}$ saab kirjutada kujul

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2.$$

Antud valem näitab, et vektori $\vec{r}$ koordinaadid ortonormeeritud baasis saab arvutada järgmiselt

$$\vec{r} = (|\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1), |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2)).$$

Olgu $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ tasandi mingi reeper ja P tasandi suvaline punkt. Vektorit $\vec{r} = \vec{OP}$ nimetatakse punkti P **kohavektoriks**, seda näitame järgmiselt $P(\vec{r})$. Punkti P koordinaatideks võtame selle kohavektori $\vec{r}$ koordinaadid. Seega kui $\vec{r} = (x_1, x_2)$ on tasandi punkti P kohavektor, siis punkti P koordinaadid on (x_1, x_2) , kirjutame $P(x_1, x_2)$. Kui $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, siis kehtib $\vec{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$. Kui $P(x_1, x_2)$ ja $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ja vektor $\vec{a}$ rakendatud punktist P annab seotud vektori $\overline{PQ}$, siis lõpp-punkti Q koordinaadid leiame järgmiselt $Q(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$.

Vektorid ruumis E^3

Nüüd vaatleme kolmemõõtmelist ruumi E^3 . Kolmemõõtmelises ruumis kehtib teoreem

Teoreem

Kolm vektorit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui leidub vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st leiduvad arvud $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, mis ei ole korraga nullid, sellised, et kehtib

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}.$$

Vektorid ruumis E^3

Nüüd vaatleme kolmemõõtmelist ruumi E^3 . Kolmemõõtmelises ruumis kehtib teoreem

Teoreem

Kolm vektorit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui leidub vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st leiduvad arvud $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, mis ei ole korruga nullid, sellised, et kehtib

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}.$$

Definitsioon

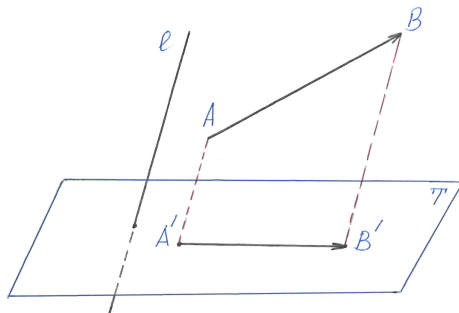
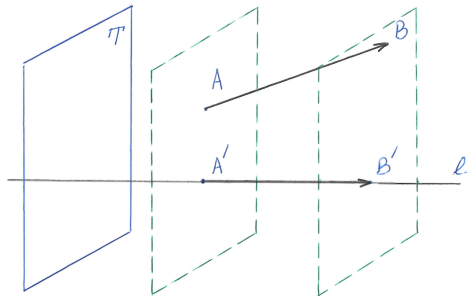
Vektorsüsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, kus $\vec{a}_i \in \mathbb{E}^3, i = 1, 2, 3$, nimetatakse **ruumi E^3 baasiks**, kui vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ on mittekomplanaarsed. Baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nimetatakse **ortonormeeritud baasiks** või **ristbaasiks**, kui baasivektorid on teineteisega risti ja kõik baasivektorid on ühikvektorid.

Koordinaadid ruumis

Kui $O \in E^3$ on ruumi mingi punkt ja $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on ruumi baas, siis $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ nimetatakse ruumi **reeperiks**. Reeper määrab ruumis koordinaadisüsteemi. Nii nagu tasandi korral, ruumi koordinaadisüsteemi konstrueerimiseks kasutame punkti (vektori) projekteerimist. Ruumis on kaks projekteerimist,

- ♠ projekteerimine sirgele (vektori sihile) paralleelselt tasandiga,
- ♠ projekteerimine tasandile paralleelselt sirgega.

Projekteerimised on näidatud järgmisel slaidil.



Koordinaadid

Kõigepealt eeldame, et ruumis on antud reeper $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Iga baasvektor määrab üheselt sirget, mis läbib alguspunkti O (seega baasvektor on sirge sihivektor). Vastavaid sirgeid tähistame l_1, l_2, l_3 . Sirged l_1, l_2, l_3 on koordinaatteljed ja koos nad moodustavad koordinaadisüsteemi teljestiku.

Koordinaadid

Kõigepealt eeldame, et ruumis on antud reeper $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Iga baasivektor määrab üheselt sirget, mis läbib alguspunkti O (seega baasivektor on sirge sihivektor). Vastavaid sirgeid tähistame l_1, l_2, l_3 . Sirged l_1, l_2, l_3 on koordinaatteljed ja koos nad moodustavad koordinaadisüsteemi teljestiku.

Nüüd moodustame vektorite paarid $(\vec{a}_1, \vec{a}_2), (\vec{a}_2, \vec{a}_3), (\vec{a}_1, \vec{a}_3)$. Iga paar on mittekollineaarsed vektorid (miks?), seega vektorite iga paar määrab üheselt tasandit, mis läbib reeperi alguspunkti O . Vastavat tasandit tähistame $\mathfrak{T}_{12}, \mathfrak{T}_{23}, \mathfrak{T}_{13}$. Tasandeid $\mathfrak{T}_{12}, \mathfrak{T}_{23}, \mathfrak{T}_{13}$ nimetatakse **koordinaattasanditeks**.

Koordinaadid

Kõigepealt eeldame, et ruumis on antud reeper $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Iga baasivektor määrab üheselt sirget, mis läbib alguspunkti O (seega baasivektor on sirge sihivektor). Vastavaid sirgeid tähistame l_1, l_2, l_3 . Sirged l_1, l_2, l_3 on koordinaatteljed ja koos nad moodustavad koordinaadisüsteemi teljestiku.

Nüüd moodustame vektorite paarid $(\vec{a}_1, \vec{a}_2), (\vec{a}_2, \vec{a}_3), (\vec{a}_1, \vec{a}_3)$. Iga paar on mittekollineaarsed vektorid (miks?), seega vektorite iga paar määrab üheselt tasandit, mis läbib reeperi alguspunkti O . Vastavat tasandit tähistame $\mathfrak{T}_{12}, \mathfrak{T}_{23}, \mathfrak{T}_{13}$. Tasandeid $\mathfrak{T}_{12}, \mathfrak{T}_{23}, \mathfrak{T}_{13}$ nimetatakse [koordinaattasanditeks](#).

Olgu P ruumi suvaline punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Vaatleme rohelist kolmnurka $\triangle P\tilde{P}P'$. Selle kolmnurga tipp P' on saadud kahe erineva projekteerimise abil, kus

Vektori koordinaadid

- esimene projekteerimine toimub järgmiselt: punkti P projekteerime $P \rightarrow \tilde{P}$ koordinaattasandile $\mathfrak{T}_{12}$ paralleelselt sirgega l_3 ja seejärel punkti $\tilde{P}$ projekteerime $\tilde{P} \rightarrow P'$ sirgele l_1 paralleelselt sirgega l_2 ;
- teine projekteerimine on punkti P projektsioon $P \rightarrow P'$ sirgele l_1 paralleelselt koordinaattasandiga $\mathfrak{T}_{23}$

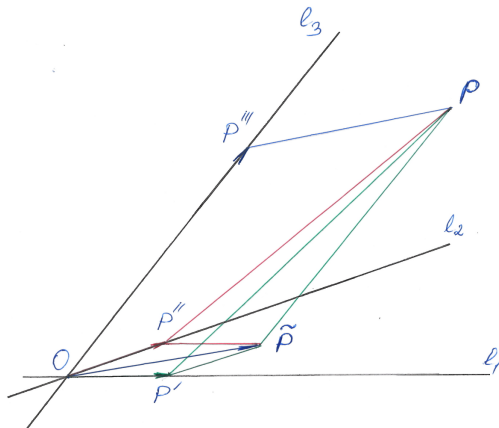
Siin on tähtis (ja seda näeme joonisel), et mõlemad projekteerimised annavad ühe ja sama punkti P' ! Joonis näitab, et kehtivad valemid

$$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{O\tilde{P}} + \vec{O\tilde{P}'''} = \vec{OP'} + \vec{OP''} + \vec{O\tilde{P}'''} ,$$

seega

$$\vec{OP'} = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1, \quad \vec{OP''} = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{r}}{|\vec{a}_2|} \cdot \vec{a}_2, \quad \vec{O\tilde{P}'''} = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_3} \vec{r}}{|\vec{a}_3|} \cdot \vec{a}_3.$$

Joonis



Koordinaadid ruumis

Seega

$$\vec{r} = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1 + \frac{\text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{r}}{|\vec{a}_2|} \cdot \vec{a}_2 + \frac{\text{pr}_{\vec{a}_3} \vec{r}}{|\vec{a}_3|} \cdot \vec{a}_3.$$

Reaalarve

$$x_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{r}}{|\vec{a}_1|}, \quad x_2 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_2} \vec{r}}{|\vec{a}_2|}, \quad x_3 = \frac{\text{pr}_{\vec{a}_3} \vec{r}}{|\vec{a}_3|},$$

nimetatakse vektori $\vec{r}$ (punkti P) koordinaatideks baasis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ (reeperis $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$). Seega

$$\vec{r} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \vec{a}_i.$$

Järgnevas kirjutame $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $P(x_1, x_2, x_3)$.

Vektorite koordinaadid

Tuletatud valemist järeldub

- ◇ Ruumi suvalise vektori $\vec{r}$ saab alati esitada kolme mittekomplanaarse vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linearkombinatsiooni kujul

$$\vec{r} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3,$$

kus kordajad x_1, x_2, x_3 on üheselt määratud.

Vektorite koordinaadid

Tuletatud valemist järeldeb

- ◇ Ruumi suvalise vektori $\vec{r}$ saab alati esitada kolme mittekomplanaarse vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linearkombinatsiooni kujul

$$\vec{r} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3,$$

kus kordajad x_1, x_2, x_3 on üheselt määratud.

- ◇ Ruumi nelja suvalise vektori $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}, \vec{v}$ korral leidub nende vektorite mittetriviaalne linearkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga, st

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \vec{r} + \beta \vec{s} + \gamma \vec{t} + \lambda \vec{v} = \vec{0}.$$

Ruumis projekteerimisel vektori sihile paralleelselt tasandiga omadused:

$$\boxtimes \operatorname{pr}_{\vec{a}}(\vec{r} + \vec{s}) = \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{r} + \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{s},$$

$$\boxtimes \operatorname{pr}_{\vec{a}}(\alpha \cdot \vec{r}) = \alpha \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{r}.$$

Tehted vektoritega koordinaatides

Projektsiooni omadustest järeldub, et kui

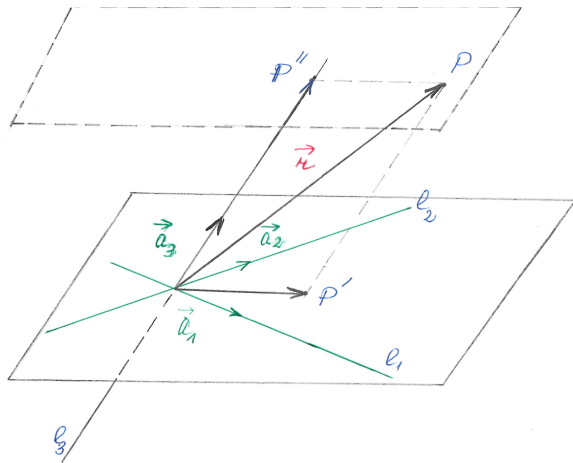
$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3), \vec{s} = (y_1, y_2, y_3),$$

siis

$$\begin{aligned}\vec{r} + \vec{s} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \\ \alpha \vec{r} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).\end{aligned}\tag{4}$$

Ristbaasis kehtib valem

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$



Orientatsiooni mõiste

Vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ rakendame punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ vastavad seotud vektorid. Pöörama **esimest** seotud vektorit $\overline{OA}$ ümber rakenduspunkti O lühemat teed pidi seotud vektorile $\overline{OB}$ ja kui see toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas (samas suunas), siis öeldakse, et reeperi $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ orientatsioon on **parema käe (vasaku käe) orientatsioon** ja reeperit nimetatakse **parema käe (vasaku käe) reeperiks**.

Orientatsiooni mõiste

Vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ rakendame punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ vastavad seotud vektorid. Pöörata **esimest** seotud vektorit $\overline{OA}$ ümber rakenduspunkti O lühemat teed pidi seotud vektorile $\overline{OB}$ ja kui see toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas (samas suunas), siis öeldakse, et reeperi $\{O; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ orientatsioon on **parema käe (vasaku käe) orientatsioon** ja reeperit nimetatakse **parema käe (vasaku käe) reeperiks**.

Olgu ruumis antud reeper $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}]$. Baasivektoreid rakendame alguspunktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ vastavad seotud vektorid. Kui esimese seotud vektori $\overline{OA}$ pööre (ümber rakenduspunkti O) lühemat teed pidi seotud vektorile $\overline{OB}$ jälgituna seotud vektori $\overline{OC}$ lõpp-punktist toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas, siis öeldakse, et reeperi orientatsioon on **parema käe orientatsioon** ja reeperit ruumis nimetatakse parema käe reeperiks. Mainime, et **ruumis on kaks orientatsiooni**.

Polaarkoordinaadid

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on [polaarkoordinaadisüsteem](#). Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

Polaarkoordinaadid

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on [polaarkoordinaadisüsteem](#). Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

- 1 punkt O (nimetatakse [pooluseks](#));

Polaarkoordinaadid

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on [polaarkoordinaadisüsteem](#). Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

- 1 punkt O (nimetatakse [pooluseks](#));
- 2 punktist O lähtuv kiir l (nimetatakse [polaarteljeks](#)).

Kui P on tasandi suvaline punkt, siis selle polaarkoordinaadid on (r, ϕ) , kus r on lõigu OP pikkus, st $r = |OP|$, ja ϕ on nurk, mida mõõdetakse kiirest l vastu päeva. Esimest koordinaati r nimetatakse [polaarraadiuseks](#) ja teist koordinaati ϕ nimetatakse [polaarnurgaks](#). Mainime, et polaarnurk erineb vektorite vahelisest nurgast, sest polaarnurga mõiste kasutab tasandi orientatsiooni (ϕ mõnikord nimetatakse orienteeritud nurgaks).

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$. Teiseks, polaarnurk ei ole üheselt määratud, sest kui r on fikseeritud, siis ϕ ja $\phi + 2\pi k$ määravad ühte ja sama punkti. Siin on kaks võimalust, kas nõuame $0 \leq \phi < 2\pi$ või arvupaarid $(r, \phi), (r, \phi + 2\pi k)$ samastame, st $(r, \phi) \equiv (r, \phi + 2\pi k)$.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$. Teiseks, polaarnurk ei ole üheselt määratud, sest kui r on fikseeritud, siis ϕ ja $\phi + 2\pi k$ määravad ühte ja sama punkti. Siin on kaks võimalust, kas nõuame $0 \leq \phi < 2\pi$ või arvupaarid $(r, \phi), (r, \phi + 2\pi k)$ samastame, st $(r, \phi) \equiv (r, \phi + 2\pi k)$. Kui tasandil on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kusjuures alguspunkt O asub pooluses, baasivektor $\vec{e}_1$ asub kiirel l , siis ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu järgmiselt (vt joonis):

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

Silindrilised koordinaadid (ruumis) on täielikult määratud, kui on antud punkt O , sellest punktist lähtuv kiir l ja ühikvektor $\vec{n}$, mis on risti l , st $\vec{n} \perp l$. Konstrueerime ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et alguspunkt on punkt O , $\vec{e}_1$ on l sihivektor, $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ja reeper on parema käe reeper. Silindriliste koordinaatide r, ϕ, z seos ristkoordinaatidega x, y, z on järgmine

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

$$z = z.$$

Silindrilised koordinaadid (ruumis) on täielikult määratud, kui on antud punkt O , sellest punktist lähtuv kiir l ja ühikvektor $\vec{n}$, mis on risti l , st $\vec{n} \perp l$. Konstrueerime ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et alguspunkt on punkt O , $\vec{e}_1$ on l sihivektor, $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ja reeper on parema käe reeper. Silindriliste koordinaatide r, ϕ, z seos ristkoordinaatidega x, y, z on järgmine

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

$$z = z.$$

Sfääriliste koordinaatide konstrueerimiseks fikseerime punkti O , sellest lähtuva kiire l ja ühikvektori $\vec{n}$ (nii nagu silindriliste koordinaatide korral). Seos ristkoordinaatidega on antud valemiga

$$x = r \sin \psi \cos \phi,$$

$$y = r \sin \psi \sin \phi,$$

$$z = r \cos \psi.$$

Eksami küsimused

- Vektorite mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni mõiste. Teoreem kollineaarsetest vektoritest tõestusega.
- Tasandi baasi ja repeeri definitsioon. Projektsioonivektori ja vektori projektsiooni mõisted. Näidata, kuidas määratakse vektori koordinaadid projektsiooni abil. Projektsiooni omadused ja tehted vektoritega koordinaatides.
- Komplanaarsete vektorite definitsioon. Ruumi baasi ja repeeri definitsioon,. Projekteerimised ruumis. Vektori koordinaadid ruumis. Vektori koordinaadid ristbaasi korral.
- Polaarkoordinaadisüsteem. Poolus ja polartelg. Polaarraadius ja polaarnurk. Silindrilised ja sfäärilised koordinaadid.