Analüütiline geomeetria

VI loeng. Sirge võrrandid.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi vektorvõrrandiks.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi vektorvõrrandiks.

Kui sirge võrrandis esineb muutuv reaalarv (järgnevas nimetame parameetriks ja tähistame t) nii, et selle muutuva arvu igale väärtusele vastab sirge üks ja ainult üks punkt, siis võrrandit nimetame parameetriliseks võrrandiks.

Sirgete ja tasandite võrrandid

Selles ja järgmistes loengutes tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi vektorvõrrandiks.

Kui sirge võrrandis esineb muutuv reaalarv (järgnevas nimetame parameetriks ja tähistame t) nii, et selle muutuva arvu igale väärtusele vastab sirge üks ja ainult üks punkt, siis võrrandit nimetame parameetriliseks võrrandiks. Kui sirge või tasandi vektorvõrrand on koostatud ja uuritud, siis ruumi varustame **reeperiga** (koordinaadisüsteemiga) ja leiame **vektorvõrrandi kuju koordinaatides**.

Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Aksioom

Kui A, B on eukleidilise ruumi E erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, mis läbib punkte A, B.

Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Aksioom

Kui A, B on eukleidilise ruumi E erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, mis läbib punkte A, B.

Seega meil on üks-ühene vastavus $(A, B) \leftrightarrow$ sirge l. Olgu A, B eukleidilise ruumi erinevad punktid. Sellega on üheselt määratud sirge l.

Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Aksioom

Kui A, B on eukleidilise ruumi E erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, mis läbib punkte A, B.

Seega meil on üks-ühene vastavus $(A, B) \leftrightarrow$ sirge l. Olgu A, B eukleidilise ruumi erinevad punktid. Sellega on üheselt määratud sirge l. Moodustame vektori $\vec{s} = \vec{AB}$. On ilmne, et $\vec{s} \neq \vec{0}$ (punktid A, B on erinevad) ja vektor $\vec{s}$ määrab sirge l sihti. Tuletame meelde, et vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge l sihivektoriks.

Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Aksioom

Kui A, B on eukleidilise ruumi E erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, mis läbib punkte A, B.

Seega meil on üks-ühene vastavus $(A, B) \leftrightarrow$ sirge l. Olgu A, B eukleidilise ruumi erinevad punktid. Sellega on üheselt määratud sirge l. Moodustame vektori $\vec{s} = \vec{AB}$. On ilmne, et $\vec{s} \neq \vec{0}$ (punktid A, B on erinevad) ja vektor $\vec{s}$ määrab sirge l sihti. Tuletame meelde, et vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge l sihivektoriks. Fikseerime ruumi E punkti O ja fikseerime sirge l punkti A ning olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$.

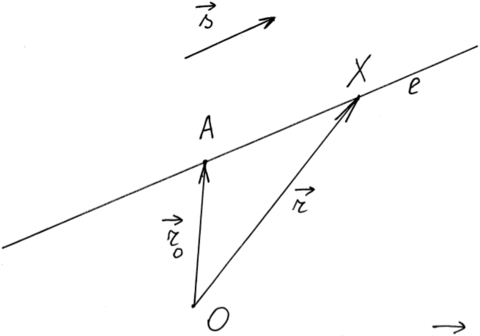
Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Aksioom

Kui A, B on eukleidilise ruumi E erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, mis läbib punkte A, B.

Seega meil on üks-ühene vastavus $(A, B) \leftrightarrow$ sirge l. Olgu A, B eukleidilise ruumi erinevad punktid. Sellega on üheselt määratud sirge l. Moodustame vektori $\vec{s} = \vec{AB}$. On ilmne, et $\vec{s} \neq \vec{0}$ (punktid A, B on erinevad) ja vektor $\vec{s}$ määrab sirge l sihti. Tuletame meelde, et vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge l sihivektoriks. Fikseerime ruumi E punkti O ja fikseerime sirge l punkti A ning olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$. Olgu X sirge l suvaline punkt ja $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ (vt joonis).



$\vec{s}$ on sirge l sihivektor. $\vec{r}-\vec{r}_0=\overrightarrow{AX}$, seega $\vec{r}-\vec{r}_0 \parallel \vec{s}$, st $\vec{r}-\vec{r}_0$ ja $\vec{s}$ on kollineaarsed vektorid. Järelikult leidub reaalarv t nii, et $\vec{r}-\vec{r}_0=t\cdot\vec{s}$. Sirge parameetriline vektorvõrrand on

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s}}$$

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \text{ või } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \tag{1}$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \text{ või } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \qquad (1)$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \ \text{ või } \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \tag{1}$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Märgime, et sirge vektorvõrrandi kuju ei sõltu ruumi dimensioonist.

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \,||\, \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s} \text{ või } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}} \tag{1}$$

kus t on reaalarv. Märgime, et vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üks-ühene. Seega võime vaadelda parameetrit t sirge l punktide koordinaadina.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Märgime, et sirge vektorvõrrandi kuju ei sõltu ruumi dimensioonist.

$\mathbf{n = 3}$, st alustame 3-mõõtmelisest ruumist E^3. Ruumis E^3 fikseerime reeperi $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja olgu

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \;\; \vec{r} = (x, y, z), \;\; \vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$$

vektorite $\vec{r}_0, \vec{r}, \vec{s}$ koordinaadid.

Sirge parameetrilise vektorvõrrandi kuju koordinaatides on järgmine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \\ z &= z_0 + s_3\, t, \end{aligned}$$

Antud võrrandit nimetatakse sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides.

Sirge parameetrilise vektorvõrrandi kuju koordinaatides on järgmine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \\ z &= z_0 + s_3\, t, \end{aligned}$$

Antud võrrandit nimetatakse sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides.

$\mathbf{n = 2}$. Kui sirge l asub tasandil E^2 ja tasandil on fikseeritud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, siis sirge parameetrilise võrrandi kuju on järgmine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus (x, y) on sirge muutuva punkti koordinaadid, (x_0, y_0) on sirge fikseeritud punkti (sirge alguspunkti) koordinaadid, (s_1, s_2) on sirge sihivektori koordinaadid ja t on parameeter, $-\infty < t < +\infty$.

Definitsioon

Joone parameetriliseks vektorvõrrandiks nimetatakse võrrandit $\vec{r} = \vec{r}(t)$, kus $t \in I$ ja $I \subset \mathbb{R}$. Kui tasandil on fikseeritud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, siis joone vektorvõrrandi kuju reeperi poolt määratud koordinaatides on järgmine

$$\begin{aligned} x &= \xi(t), \\ y &= \eta(t), \end{aligned}$$

kus $\xi(t), \eta(t)$ on t funktsioonid, $t \in I$. Antud võrrandit nimetatakse tasandilise joone parameetriliseks võrrandiks ja muutujat t nimetatakse joone parameetriks. Ruumilise joone parameetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\begin{aligned} x &= \xi(t), \\ y &= \eta(t), \\ z &= \chi(t), \end{aligned}$$

kus $\xi(t), \eta(t), \chi(t)$ on t funktsioonid, $t \in I$.

Kui tasandilise joone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Kui tasandilise joone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Järelikult

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}\,(x - x_0),$$

või

$$\boxed{y = k\,x + b,}$$

kus $k = \frac{s_2}{s_1}, b = y_0 - \frac{s_2\, x_0}{s_1}$. Kordajat k nimetatakse tasandilise sirge tõusuks.

Kui tasandilise joone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Järelikult

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}\,(x - x_0),$$

või

$$\boxed{y = k\,x + b,}$$

kus $k = \frac{s_2}{s_1}, b = y_0 - \frac{s_2\,x_0}{s_1}$. Kordajat k nimetatakse tasandilise sirge tõusuks. Tasandilise sirge kanooniliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}.}$$

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega: sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$ (st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt tekitatud sirgega). Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$, $\vec{r} = \vec{OX}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\vec{N}$ on sirge normaalvektor.

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega: sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$ (st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt tekitatud sirgega). Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$, $\vec{r} = \vec{OX}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\vec{N}$ on sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$, seega

$$\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.} \tag{2}$$

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega: sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$ (st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt tekitatud sirgega). Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$, $\vec{r} = \vec{OX}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\vec{N}$ on sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$, seega

$$\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.} \tag{2}$$

Antud võrrandit (2) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu.

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega: sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$ (st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt tekitatud sirgega). Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$, $\vec{r} = \vec{OX}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\vec{N}$ on sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$, seega

$$\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.} \tag{2}$$

Antud võrrandit (2) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} >=< \vec{r}_0, \vec{N} >$ ja tähistades $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$, saame $\boxed{< \vec{r}, \vec{N} >= -C}$.

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega: sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$ (st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt tekitatud sirgega). Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$, $\vec{r} = \vec{OX}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\vec{N}$ on sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$, seega

$$\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.} \qquad (2)$$

Antud võrrandit (2) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} >=< \vec{r}_0, \vec{N} >$ ja tähistades $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$, saame $\boxed{< \vec{r}, \vec{N} >= -C}$. Fikseerime tasandil **ristreeperi** $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja olgu $\vec{r} = (x, y), \vec{N} = (A, B)$, siis eespool kirjutatud võrrandi kuju koordinaatides on

$$A\,x + B\,y = -C \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\,x + B\,y + C = 0.}$$

Tasandi sirge on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega: sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$ (st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt tekitatud sirgega). Fikseerime tasandi mingi punkti O ja olgu $\vec{r}_0 = \vec{OA}$, $\vec{r} = \vec{OX}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti X kohavektor ning $\vec{N}$ on sirge normaalvektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$, seega

$$\boxed{< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.} \tag{2}$$

Antud võrrandit (2) nimetatakse tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu. Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} >=< \vec{r}_0, \vec{N} >$ ja tähistades $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$, saame $\boxed{< \vec{r}, \vec{N} >= -C}$. Fikseerime tasandil **ristreeperi** $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja olgu $\vec{r} = (x, y), \vec{N} = (A, B)$, siis eespool kirjutatud võrrandi kuju koordinaatides on

$$A\,x + B\,y = -C \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\,x + B\,y + C = 0.}$$

Antud võrrandit nimetatakse tasandilise sirge üldvõrrandiks. Pöörame tähelepanu sellele, et üldvõrrandis kordajad A, B on sirge **normaalvektori koordinaadid.**

Definitsioon

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv.

Definitsioon

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv. Kui $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks.

Definitsioon

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv. Kui $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks. Erijuhul, kui $n = 2$, st $F(x, y)$ on teise astme polünoom, joont nimetatakse teist järku jooneks.

Definitsioon

Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon määramispiirkonnaga $U \subset E^2$ ja c on reaalarv. Kui $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks. Erijuhul, kui $n = 2$, st $F(x, y)$ on teise astme polünoom, joont nimetatakse teist järku jooneks. Kui $F(x, y)$ on esimese astme polünoom (lineaarne), siis võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joon on sirge.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.
Fikseerime tasandil suvalise punkti O. Olgu X ringjoone muutuv punkt.
Moodustame vektori $\vec{r}_0 = \vec{OA}$ ja vektori $\vec{r} = \vec{OX}$.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.
Fikseerime tasandil suvalise punkti O. Olgu X ringjoone muutuv punkt. Moodustame vektori $\vec{r}_0 = \vec{OA}$ ja vektori $\vec{r} = \vec{OX}$. On ilmne, et kehtib

$$\boxed{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = R^2.}$$

See on ringjoone vektorvõrrand.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$.
Fikseerime tasandil suvalise punkti O. Olgu X ringjoone muutuv punkt. Moodustame vektori $\vec{r}_0 = \vec{OA}$ ja vektori $\vec{r} = \vec{OX}$. On ilmne, et kehtib

$$\boxed{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = R^2.}$$

See on ringjoone vektorvõrrand. Ringjoone ilmutamata võrrand ristkoordinaatides on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

seega antud juhul $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $c = R^2$ ja $F(x, y)$ on teise astme polünoom. Järelikult ringjoon on teist järku joon. Ringjoone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= R\cos t + x_0, \\ y &= R\sin t + y_0, \end{aligned}$$

kus $0 \leq t \leq 2\pi$.

Olgu tasandil antud polaarkoordinaatide süsteem r, ϕ.

Definitsioon

Tasandi joone võrrandiks polaarkoordinaatides nimetatakse võrrandit

$$r = r(\phi),$$

kus $r(\phi)$ on polaarnurga ϕ funktsioon ja $\phi \in I \subset \mathbb{R}$.

Näiteks, tasandilist joont $r = k\,\phi$, kus $k > 0$ on konstant, nimetatakse Archimedese spiraaliks.

Olgu tasandil antud polaarkoordinaatide süsteem r, ϕ.

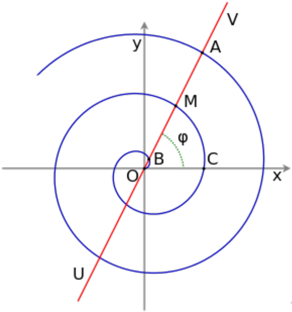
Definitsioon

Tasandi joone võrrandiks polaarkoordinaatides nimetatakse võrrandit

$$r = r(\phi),$$

kus $r(\phi)$ on polaarnurga ϕ funktsioon ja $\phi \in I \subset \mathbb{R}$.

Näiteks, tasandilist joont $r = k\,\phi$, kus $k > 0$ on konstant, nimetatakse Archimedese spiraaliks.



Olgu antud sirge parameetriline võrrand

$$\boxed{\begin{cases} x = & x_0 + t\, s_1, \\ y = & y_0 + t\, s_2, \\ z = & z_0 + t\, s_3 \end{cases}} \tag{3}$$

Oletame, et $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$ ja avaldame parameetrit t

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Olgu antud sirge parameetriline võrrand

$$\boxed{\begin{cases} x = & x_0 + t\,s_1, \\ y = & y_0 + t\,s_2, \\ z = & z_0 + t\,s_3 \end{cases}} \tag{3}$$

Oletame, et $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$ ja avaldame parameetrit t

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Võrrandit

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3},}$$

nimetatakse ruumilise sirge kanooniliseks võrrandiks.

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid.

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui $s_3 = 0$, kirjutame

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0}.$$

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui $s_3 = 0$, kirjutame

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0}.$$

See tähendab, et ülalpool kirjutatud võrrand on ekvivalentne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{s_1} = & \frac{y-y_0}{s_2}, \\ z - z_0 = & 0 \end{cases} \tag{4}$$

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus.

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3, -1, -1), B(1, 2, -7), C(-5, 14, -3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad.

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad. Moodustame kaks vektorit $\vec{BA}, \vec{BC}$,

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad. Moodustame kaks vektorit $\vec{BA}, \vec{BC}$, nende koordinaadid on

$$\vec{a} = \vec{BA} = (2,-3,6), \quad \vec{b} = \vec{BC} = (-6,12,4).$$

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad. Moodustame kaks vektorit $\vec{BA}, \vec{BC}$, nende koordinaadid on

$$\vec{a} = \vec{BA} = (2,-3,6), \quad \vec{b} = \vec{BC} = (-6,12,4).$$

Arvutame vektorite pikkused

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad. Moodustame kaks vektorit $\vec{BA}, \vec{BC}$, nende koordinaadid on

$$\vec{a} = \vec{BA} = (2,-3,6), \quad \vec{b} = \vec{BC} = (-6,12,4).$$

Arvutame vektorite pikkused

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7,$$

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad. Moodustame kaks vektorit $\vec{BA}, \vec{BC}$, nende koordinaadid on

$$\vec{a} = \vec{BA} = (2,-3,6), \quad \vec{b} = \vec{BC} = (-6,12,4).$$

Arvutame vektorite pikkused

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7, \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+144+16} = \sqrt{196} = 14$$

Näide

Näeme, et $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Kuidas leida vektoriga $\vec{a}$ samasuunalist vektorit ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunalist vektorit nii, et pikkused oleksid võrdsed?

Näide

Näeme, et $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Kuidas leida vektoriga $\vec{a}$ samasuunalist vektorit ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunalist vektorit nii, et pikkused oleksid võrdsed?

Vastus: vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{a}_0$ ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{b}_0$!

Näide

Näeme, et $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Kuidas leida vektoriga $\vec{a}$ samasuunalist vektorit ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunalist vektorit nii, et pikkused oleksid võrdsed?

Vastus: vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{a}_0$ ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{b}_0$!

Arvutame

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}), \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (-\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7})$$

Seega

$$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = (-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{8}{7}).$$

Näide

Näeme, et $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Kuidas leida vektoriga $\vec{a}$ samasuunalist vektorit ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunalist vektorit nii, et pikkused oleksid võrdsed?

Vastus: vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{a}_0$ ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{b}_0$!

Arvutame

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}), \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (-\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7})$$

Seega

$$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = (-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{8}{7}).$$

See on nurgapoolitaja sihivektor!

Näide

Märgime, et nurgapoolitaja sihivektoriks sobib iga vektor $\lambda\,\vec{c}$, kus $\lambda \neq 0$ on mingi reaalarv ($\vec{c}\,||\,\lambda\,\vec{c}$).

Näide

Märgime, et nurgapoolitaja sihivektoriks sobib iga vektor $\lambda\,\vec{c}$, kus $\lambda \neq 0$ on mingi reaalarv ($\vec{c}\,||\,\lambda\,\vec{c}$). Seega võtame $\vec{s} = 7\,\vec{c} = (-1, 3, 8)$.

Näide

Märgime, et nurgapoolitaja sihivektoriks sobib iga vektor $\lambda\,\vec{c}$, kus $\lambda \neq 0$ on mingi reaalarv ($\vec{c}\,||\,\lambda\,\vec{c}$). Seega võtame $\vec{s} = 7\,\vec{c} = (-1, 3, 8)$.Vastus:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}.$$

Punkti kaugus sirgeni

On antud sirge l ja ruumi punkt P. Kuidas leida punkti P kaugust d sirgeni l? Leiame vektorkujul. Olgu $\vec{s}$ sirge sihivektor, sirge läbib punkti A.

Punkti kaugus sirgeni

On antud sirge l ja ruumi punkt P. Kuidas leida punkti P kaugust d sirgeni l? Leiame vektorkujul. Olgu $\vec{s}$ sirge sihivektor, sirge läbib punkti A. Kauguse d leidmiseks kasutame vektorkorrutise rööpküliku pindala omadust. Vaatleme rööpkülikut, mis on ehitatud vektoritele $\vec{s}, \vec{AP}$ (vt joonis). On ilmne, et kaugus d on võrdne selle rööpküliku kõrgusega, seega

$$d = \frac{|\vec{s} \times \vec{AP}|}{|\vec{s}|}. \tag{5}$$

Vektorit $\vec{AP}$ saab avaldada punktide A, P kohavektorite $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{r} = \vec{OP}$ kaudu järgmiselt $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$. Asendades valemisse (5) saame

$$\boxed{d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})|}{|\vec{s}|}.}$$

Valemi kuju koordinaatides

Punkti P kauguse d sirgeni l arvutusvalemi vektorkuju on järgmine

$$\boxed{d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})|}{|\vec{s}|}.}$$

Kirjutame ruumi ristkoordinaatides. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi ristreeper, olgu $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ sirge sihivektori koordinaadid, $A(x_a, y_a, z_a)$ sirge punkti A koordinaadid, $P(x_p, y_p, z_p)$ punkti P koordinaadid. Punkti P kauguse sirgeni arvutusvalemi kuju ristkoordinaatides on järgmine

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ y_p - y_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_3 \\ x_p - x_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ x_p - x_a & y_p - y_a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus:

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

ja punkt $P(2, 3, -1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s} = (3, 2, -2)$, $A\,(5, 0, -25)$, $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a} = (-3, 3, 24)$.

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2},$$

ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s}=(3,2,-2)$, $A\,(5,0,-25)$, $\vec{AP}=\vec{r}-\vec{a}=(-3,3,24)$.
Seega

$$\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{a})=$$

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2},$$

ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s}=(3,2,-2),\ A\,(5,0,-25),\ \vec{AP}=\vec{r}-\vec{a}=(-3,3,24)$.
Seega

$$\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{a})=(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 24 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 24 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}),$$

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s} = (3,2,-2)$, $A\,(5,0,-25)$, $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a} = (-3,3,24)$. Seega

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \right),$$

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = (54,-66,15) = 3\,(18,-22,5),$$

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s} = (3,2,-2)$, $A\,(5,0,-25)$, $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a} = (-3,3,24)$. Seega

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \right),$$

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = (54, -66, 15) = 3\,(18, -22, 5),\ |\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})| = 3\sqrt{833},$$

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline võrrand

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

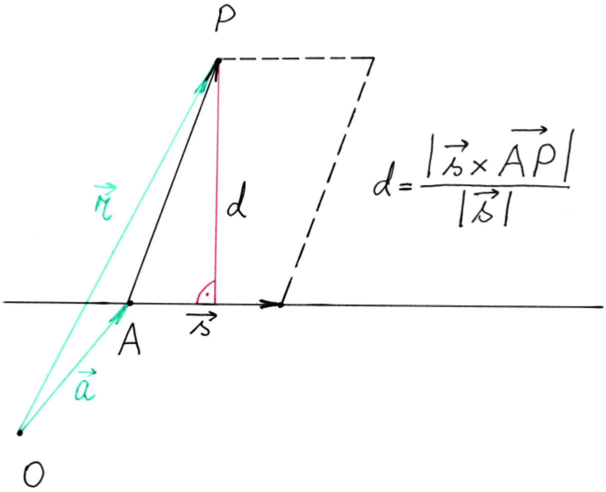
ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s} = (3,2,-2),\ A\,(5,0,-25),\ \vec{AP} = \vec{r} - \vec{a} = (-3,3,24)$.
Seega

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \right),$$

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = (54,-66,15) = 3\,(18,-22,5),\ |\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})| = 3\,\sqrt{833},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{17},\ d = \frac{3\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = 3\sqrt{49} = 21.$$


P
d
A
O
$\vec{r}$
$\vec{a}$
$\vec{s}$
$d = \dfrac{|\vec{s} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{s}|}$

Eksami küsimused

1. Tasandilise sirge parameetriline vektorvõrrand. Tasandilise sirge parameetriline ja kanooniline võrrand (koordinaatides). Tasandilise joone parameetrilise võrandi ja võrrand polaarkoordinaatides. Tasandilise sirge üldvõrrand.
2. Ruumilise sirge parameetriline vektorvõrrand. Ruumilise sirge parameetriline ja kanooniline võrrand (koordinaatides). Punkti kaugus sirgeni.

Eksami ülesanded

1. On antud sirgete l_1, l_2 parameetrilised vektorvõrrandid $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{s}_1,\ \vec{r} = \vec{r}_2 + t\,\vec{s}_2$. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et sirged l_1, l_2 on lõikuvad sirged (st sirgetel on ainult üks ühine punkt, st lõikepunkt).
2. On antud sirge l parameetriline vektorvõrrand $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}$. On antud punkt P ja selle kohavektor $\vec{r}_P$. Olgu punkt M punkti P ristprojektsioon sirgele l. Leida punkti M kohavektor $\vec{r}_M$.