

Kategoorieooria, kodutöö VIII

Tähtaeg: 23. mai 2022 (kell 17:45)

Ülesanne 1 (1 p.). Olgu $\mathcal{A}$ **Ab**-kategooria ja $f \in \text{Mor } \mathcal{A}(A, B)$. Tõestage, et morfism f on monomorfism parajasti siis, kui iga morfismi $u \in \text{Mor } \mathcal{A}(C, A)$ korral kehtib tingimus

$$f \circ u = 0 \implies u = 0.$$

Definitsioon. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **Ab**-kategooriad. Funktorit $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nimetatakse **aditiivseks**, kui iga kahe objekti $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ korral on kujutus

$$F_1^{A,A'}: \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A')), \quad f \mapsto F(f)$$

Abeli rühmade homomorfism.

Ülesanne 2 (1 p.). Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **Ab**-kategooriad, kusjuures $\mathcal{A}$ on väike. Vaatleme kategooria $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ täielikku alamkategooriat $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, mille objektideks on aditiivsed kategooriad kujul $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Näidake, et kategooriat $\text{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ saab vaadelda **Ab**-kategooriana.

Ülesanne 3 (0,5 p.). Vaatleme kategooriat Set_b (nn. **aluspunktiga hulka-de kategooria**), mille objektid on paarid (A, a) , kus A on (mittetühi) hulk ja $a \in A$. Morfism $f: (A, a) \longrightarrow (B, b)$ kategoorias Set_b on kujutus $f: A \longrightarrow B$, mille korral $f(a) = b$. Tõestage, et kategoorias Set_b on iga algobjekt ka lõppobjekt, s.t. nullobjekt.