KATEGOORIATEOORIA

Kevad 2022

Loengukonspekt

Lektor: Kristo Väljako

Koostanud: Valdis Laan; täiendanud: Ülo Reimaa ja Kristo Väljako (7. juuli 2022. a.)

Sisukord

1. Kategooriad

1.1. Hulgateoreetilistest alustest

On hästi teada, et kõigi hulkade hulka ei ole olemas. Samas kategooriateoorias sooviks me käsitleda kõigi hulkade, kõigi rühmade, kõigi topoloogiliste ruumide ja teiste matemaatiliste objektide kogumeid. Et sellest probleemist üle saada, vaatleme lisaks hulkadele veel kogumeid, mida kutsume **klassideks**[1]. Iga hulk on klass, kuid mitte vastupidi. Hulgad on klassid, mis kuuluvad mõnda klassi. Klasse, mis ei ole hulgad, nimetatakse *pärisklassideks*. Iga omaduse P jaoks on olemas kõigi selliste hulkade klass, millel on omadus P. Muuhulgas on olemas kõigi hulkade klass, kõigi rühmade klass jne. Antud klasside jaoks saab moodustada nende ühisosa, ühendi ja otsekorrutise, samuti võib vaadelda kujutusi klasside vahel, ekvivalentsiseoseid klassidel jne.

Märkus 1.1. Teadupoolest ei suuda matemaatikud lõplikult kokku leppida, kas null on naturaalarv või mitte. Leidub tugevaid argumente mõlema seisukoha kaitseks. Ka siinkohal jätame selle küsimuse lahtiseks, aga täpsuse mõttes toome sisse kaks erinevat naturaalarvude hulga tähistust, mida kasutame vastavalt vajadusele:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\},$$
$$\mathbb{N}_1 := \{1, 2, \ldots\}.$$

1.1.1. Klasside leidumisest*

Esmapilgul võib klassidega tutvumisel jääda (mitte nii-väga vale) mulje, et naiivse hulgateooria ülesehitamisel tekkisid probleemid ja siis matemaatikud mõtlesid välja uue ja piisavalt teistsuguse 'naiivse' mõiste nagu klass ning said seeläbi tööriista, mille abil ignoreerida hulgateooria probleeme. Esialgu see umbes nii oligi, kuid siiski saab ka klasside teooriat formuleerida. Teeme seda kasutades Zermelo[2]-Fraenkelo[3] hulgateooria (koos valikuaksioomiga) laiendust, mida nimetatakse *Tarski*[4]*–Grothendiecki*[5] *hulgateooriaks*, milles on kesksel kohal universumi mõiste.

Definitsioon 1.2. Kogum $\mathcal{U}$ on **(Grothendiecki) universum**[6], kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:
1. $x \in y$ ja $y \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in \mathcal{U}$,
2. $I \in \mathcal{U}$ ja $\forall i \in I\colon\ x_i \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$,
3. $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \wp(x) \in \mathcal{U}$,
4. $x \in \mathcal{U}, y \subseteq \mathcal{U}$, $f : x \to y$ on sürjektiivne funktsioon $\Rightarrow y \in \mathcal{U}$,
5. $\omega \in \mathcal{U}$,

kus ω on kõigi lõplike ordinaalarvude hulk ja $\wp(x)$ on x kõigi alamhulkade hulk.

Selle definitsiooni mõned järeldused on järgnevad (cf. [4], Proposition 1.1.3).

Lause 1.3. *Olgu $\mathcal{U}$ mingi universum. Siis kehtivad järgmised tingimused:*
1. $x \in \mathcal{U}, y \subseteq \mathcal{U}$ *ja* $y \subseteq x \Rightarrow y \in \mathcal{U}$,
2. $x \in \mathcal{U}$ *ja* $y \in \mathcal{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{U}$,
3. $x \in \mathcal{U}$ *ja* $y \in \mathcal{U} \Rightarrow x \times y \in \mathcal{U}$,
4. $x \in \mathcal{U}$ *ja* $y \in \mathcal{U} \Rightarrow x^y \in \mathcal{U}$.

Universumi $\mathcal{U}$ omadused kindlustavad, et rakendades $\mathcal{U}$ elementidele hulgateooria põhitehteid saame jälle $\mathcal{U}$ elemendid; muuhulgas tingimus $\omega \in \mathcal{U}$ annab, et $\mathcal{U}$ sisaldab ka hästituntud naturaalarvude hulga. Seega võib "tavalise" matemaatika põhimõtteliselt üles ehitada universumis $\mathcal{U}$, s.t. $\mathcal{U}$ elementidel. Iseenesest võiksime me universumi definitsioonist eemaldada tingimuse 5. Sel juhul oleks näiteks $\varnothing$ universum. Samuti oleks ka kõikide lõplike ordinaalarvude hulk ω – mis on samastatav naturaalarvude hulgaga $\mathbb{N}_0$ – universum. Nimelt oleks see ω "väikseim" lõpmatu universum. Siin konspektis on toodud levinuim universumi definitsioon, mis keelustab hulkade $\varnothing$ ja ω universumiteks olemise, kuid nende peale mõtlemine aitab minu arvates mõista universumi olemust.

Selleks, et rääkida klassidest sellisel kujul, kui me selles aines kavatseme tegema hakata, peame eeldama järgnevat *universumite leidumise aksioomi* ehk *Tarski aksioomi*.

---

[1] *class.*
[2] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953) – Saksa matemaatik
[3] Abraham Fraenkel (1891–1965) – Iisraeli matemaatik
[4] Alfred Tarski (1901–1983) – Poola matemaatik
[5] Alexander Grothendieck (1928–2014) – kodakondsusetu ja hiljem Prantsuse matemaatiks
[6] *Grothendieck universe*

Aksioom 1.4 (Universumite leidumise aksioom). *Iga hulk kuulub mingisse universumisse $\mathcal{U}$.*

Fikseerime nüüd vähima universumi $\mathcal{U}$, mis sisaldab kõiki hulki. Seega $\mathcal{U}$ on kõigi hulkade kollektsioon ja me tähistame teda sümboliga Set. Universumi $\mathcal{U}$ alamkogumeid kutsume **klassideks** s.t. kogumit K nimetame klassiks parajasti siis kui $K \subseteq U$. Kuna tingimusest $x \in y \in \mathcal{U}$ järeldub, et $x \in \mathcal{U}$, siis $\mathcal{U}$ iga element y on ka $\mathcal{U}$ alamhulk, see tähendab, et iga hulk on klass. Vastupidi, klass $\mathcal{U}$ ise ei ole hulk, sest $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ oleks vastuolus *regulaarsuse aksioomiga*, mis väidab, et ei leidu lõpmatuid ahelaid $\ldots x_n \in x_{n-1} \in x_{n-2} \in \ldots \in x_0$. Klasse, mis ei ole hulgad kutsutakse **pärisklassideks**[7].

Niiviisi võime näiteks vaadelda kõigi rühmade või kõigi topoloogiliste ruumide pärisklasse kui klassi Set alamklasse.

Toome siinkohal ära ka klasside Valikuaksioomi. See on tavalise hulkade Valikuaksioomi otsene üldistus. Nagu hulkade Valikuaksioomi puhul, kaasnevad ka klasside Valikuaksioomiga sarnased vastuolud.

Aksioom 1.5 (Klasside Valikuaksioom). *Iga suvalise mittetühjade klasside klassi K korral leidub korrektselt defineeritud valikufunktsioon $f\colon K \longrightarrow \bigcup K$, mis iga klassi K elemendile $X \in K$ seab vastavusse elemendi $x \in X$.*

Edasi võime me tuua **konglomeraadi**[8] mõiste tähistamaks kõikvõimalikke klasside kogumeid. Näiteks võime rääkida kõikide klasside konglomeraadist. Suurem osa autoreid jätavad konglomeraadi mõiste suhteliselt lahtiseks öeldes, et *päriskonglomeraadid* (s.t. konglomeraadid, mis pole klassid ega hulgad) on lihtsalt kõikvõimalikud kogumid, mis ei esitu meie fikseeritud universumi $\mathcal{U}$ elementide ega alamkogumitena. Konglomeraatide peale peame mõtlema, kui hakkame vaatlema kvaasikategooriaid.

Iseenesest võime me konglomeraadi mõistet formaliseerida Tarski aksioomi analoogiga, laiendades oma universumit sisaldama kõiksuguseid klasside kogumeid. Selleks peaksime aga eeldama Tarski aksioomi tugevdust, et iga klass kuulub mingisse universumisse $\mathcal{U}'$. Vähima sellise universumi $\mathcal{U}'$ elemendid oleksid sel juhul klassid ning selle universumi alamkogumeid nimetatakse *konglomeraatideks*. Tegelikkuses võiks seda protsessi lõpmatult jätkata, kuid siin kursuses pole seda tarvis.

1.2. Kategooria definitsioon ja näiteid

Kategooriat võib lühidalt kirjeldada kui noolte kogumit koos hästi käituva järjestikuste noolte ühendamise operatsiooniga. *Noolte kogum* tähendab siin kontekstis teatud üldistatud graafi, mis koosneb lisaks ka objektide kogumist, mille elementide vahele on nooled "joonistatud". Lugedes järgnevat kategooria definitsiooni, võib panna tähele, et esimesed kaks punkti kirjeldavad üldistatud graafi[9] ning ülejäänud kirjeldavad noolte ühendamise operatsiooni.

Definitsioon 1.6. Kategooria[10] $\mathcal{C}$ koosneb järgmistest asjadest:

D1. klass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, mille elemente kutsume selle kategooria **objektideks**;

D2. iga objektipaari (A, B) jaoks on olemas hulk $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, mille elemente nimetame **morfismideks** (ehk **noolteks**) objektist A objekti B; kõikide morfismide klassi kategoorias $\mathcal{C}$ tähistame $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$;

D3. iga objektikolmiku (A, B, C) jaoks on olemas kujutus (**komponeerimine** ehk **korrutamine**)

$$\circ\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C);$$

morfismide paarile (f, g) vastavat kujutist (f ja g **kompositsiooni** ehk **korrutist**) tähistame $g \circ f$ (või lühidalt gf);

D4. iga objekti A jaoks on olemas morfism $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, mida kutsutakse objekti A **ühikmorfismiks**.

Need andmed peavad rahuldama järgmisi aksioome.

A1. Kui $(A, B) \neq (A', B')$, siis $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B') = \varnothing$.

A2. *Assotsiatiivsuse aksioom:* mistahes morfismide $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ korral kehtib võrdus

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

A3. *Ühiku aksioom:* mistahes morfismide $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ korral kehtivad võrdused $\mathrm{id}_B \circ f = f$ ja $g \circ \mathrm{id}_B = g$.

[7] *proper class*

[8] *conglomerate*

[9] Kohati kutsutakse sellist üldistatud graafi **nooletupp** (*quiver*) rõhutades seda, et tegu on lihtsalt mingi noolte kogumiga.

[10] *category*

Morfismi $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ jaoks kasutatakse tihti tähistusi $f : A \to B$ ja $A \xrightarrow{f} B$; üheselt määratud objekti A kutsutakse morfismi f **lähteobjektis** ehk **doomeniks**[11] (tähistus: $\mathrm{dom}\, f$) ning objekti B kutsutakse morfismi f **sihtobjektiks** ehk **kodoomeniks**[12] (tähistus: $\mathrm{cod}\, f$). Objekti A ühikmorfismi tähistatakse tihti sümboliga 1_A. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide klassi tähistatakse ka $\mathcal{C}_0$ või $|\mathcal{C}|$, morfismide klassi aga $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ või $\mathcal{C}_1$. Morfismide hulka objektist A objekti B tähistatakse veel ka sümboliga $\mathcal{C}(A, B)$ või $\mathrm{hom}(A, B)$.

Morfismi $f : A \to A$ nimetatakse objekti A **endomorfismiks** ja hulka $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ nimetatakse objekti A endomorfismide hulgaks. On selge, et $(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A), \circ)$ on monoid.

Märkused 1.7.
1. Osutub, et id_A on objekti A ainus ühikmorfism, sest kui $i_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ on veel mingi morfism, mis rahuldab ühiku aksioomi, siis $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ i_A = i_A$.
2. Samamoodi nagu poolrühmade korral järeldub assotsiatiivsuse aksioomist, et lõpliku arvu morfismide komponeerimisel võib sulge paigutada mistahes (mõttekal) viisil ja seega võib nad üldse ära jätta.

Definitsioon 1.8. Kategooria on **väike**[13] kui tema objektide klass on hulk, vastasel korral kutsutakse kategooriat **suureks**[14].

Me nimetame kategooriat $\mathcal{C}$ **lõplikuks**[15], kui $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ on mõlemad lõplikud hulgad. Iga lõplik kategooria on ilmselt väike.

1.2.1. Diagrammidest kategooriateoorias

Nagu eelnevalt sai mainitud, siis võib kategooriaid vaadelda kui noolte kogumit. Seepärast on kategooriateoorias kesksel kohal diagrammida, kus morfisme kujutatakse nooltena. Kategooria definitsioonist saab tuua lihtsaid näiteid diagrammidest. Esieks vaatleme kompositsiooni definitsiooni (D3.), mida võib esitada järgmise diagrammina.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, dashed, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Eelneva diagrammi pealt on näha ka ühte levinud kokkulepet kategooriateooria diagrammide kohta. Nimelt, kui me tahame esitada diagrammil tingimust, mis nõuab mingisuguse morfismi (ühest) leidumist (siinkohal morfismi $g \circ f$), siis me joonistame selle noole punktiirina.

Erilist tähtsust omavad nn. kommutatiivsed diagrammid. Diagrammi nimetatakse **kommutatiivseks**[16], kui iga sama algus- ja lõpppunktiga tee viib sama tulemuseni. Eelnev kompositsiooni definitsiooni diagramm on kommutatiivne. Kompositsiooni assotsiatiivsus (A2.) on samuti esitatav alloleva kommutatiivse diagrammina.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=50, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=50, "(h\circ g)\circ f"'] & B \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Ka ühiku aksioom (A3.) on esitatav kahe alloleva diagrammina, mis peavad kommuteeruma suvaliste morfismide $f \colon A \longrightarrow B$ ja $g \colon B \longrightarrow C$ korral.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \\ B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

[11] *domain*
[12] *codomain*
[13] *small category*
[14] *large category*
[15] *finite category*
[16] *commutative diagram*

Illustreerimaks diagrammidega töötamist tõestame järgneva lihtsa lause.

Lause 1.9. *Kui järgnevas diagrammis on ruudud (I) ja (II) kommutatiivsed,*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "e"] \\
D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd}
\tag{1.1}
$$

on ruudud (I) ja (II) kommutatiivsed, siis on kogu diagramm kommutatiivne.

TÕESTUS. Näitame, et diagrammis (1.1) on välimised teed võrdsed. Paneme tähele, et

$$e \circ b \circ a = (e \circ b) \circ a \underset{\text{(II)}}{=} (g \circ d) \circ a = g \circ (d \circ a) \underset{\text{(I)}}{=} g \circ (f \circ c) = g \circ f \circ c.$$

On lihtne näha, et ka kõikvõimalikud muud samade algus- ja lõpppunktidega teed diagrammis (1.1) on võrdse tulemusega. Kokkuvõttes on kogu diagramm (1.1) kommutatiivne. ■

Diagrammidega puutume selle kursuse raames veel tülpimuseni kokku.

1.2.2. Kategooriate lihtsaid näiteid

Siinkohal tutvume mõningate lihtsamate näidetega kategooriatest.

Näide 1.10. Paljud matemaatilised struktuurid ja nende vahel vaadeldavad kujutused või homomorfismid moodustavad kategooria. Järgnevas tabelis on toodud mõned selliste kategooriate näited.

Tähis	objektid	morfismid
Set	hulgad	kujutused
FinSet	lõplikud hulgad	kujutused
Rel	hulgad	binaarsed seosed hulkade vahel
Mon	monoidid	monoidide homomorfismid
Grp	rühmad	rühmade homomorfismid
Ab	Abeli[17] rühmad	rühmade homomorfismid
Ring	ühikelemendiga assotsiatiivsed ringid	(ühikel.-ga) ringide homomorfismid
Rng	assotsiatiivsed ringid[18]	ringide homomorfismid
Vec_K	vektorruumid üle korpuse K	lineaarkujutused
Mod_R	parempoolsed moodulid üle ringi R	moodulite homomorfismid
Ban_∞	Banachi[19] ruumid üle reaalarvude	tõkestatud lineaarkujutused
Ban_1	Banachi ruumid üle reaalarvude	ahendavad lineaarkujutused[20]
Top	topoloogilised ruumid	pidevad kujutused
Pos	järjestatud hulgad	järjestust säilitavad kujutused
Lat	võred	võrede homomorfismid
Graph	graafid	graafide homomorfismid
Sgraph	graafid	tugevad graafide homomorfismid
0	ei ole	ei ole
1	A	id_A
2	A, B	$A \to B, \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B$

Enamusel juhtudel on morfismide komponeerimiseks tavaline kujutuste komponeerimine (järjestrakendamine) ja ühikmorfismid on samasusteisendused. Kategoorias Rel on seoste kompositsiooniks nende korrutis ja ühikmorfism on võrdusseos. Kategooriat **0** nimetatakse **tühjaks kategooriaks**[21]. Üheobjektilist ja ühemorfismilist kategooriat **1** nimetatakse **lõppkategooriaks**[22]. □

[17] Niels Henrik Abel (1802–1829) – Norra matemaatik

[18] Kategoorias Rng ei nõuta, et ringis peab ühikelement olema.

[19] Stefan Banach (1892–1945) – Poola matemaatik

[20] Olgu B ja C Banachi ruumid. Lineaarkujutust $f\colon B \longrightarrow C$, kus B ja C on Banachi ruumid, nimetatakse **ahendavaks** (*contraction*) kui iga $b \in B$ korral kehtib $\|f(b)\| \leq \|b\|$.

[21] *empty category*

[22] *terminal* või *final category*

Näide 1.11. 1. Võib vaadelda kategooriat, kus objektid on naturaalarvud (ilma nullita), morfismid m-st n-i on kõik maatriksid (üle fikseeritud korpuse), millel on m rida ja n veergu, morfismide komponeerimine on harilik maatriksite korrutamine ja ühikmorfismideks on vastavat järku ühikmaatriksid.

2. Järjestatud hulka (selle kursuse jooksul kutsume osaliselt järjestatud hulki lühidalt järjestatud hulkadeks) $(P, \leqslant)$ võib vaadelda kategooriana $\mathcal{P}$, mille objektide hulk on P. Kui $x, y \in P$, siis $\mathrm{Mor}_{\mathcal{P}}(x, y)$ koosneb täpselt ühest morfismist, kui $x \leqslant y$, ning on tühi vastasel juhul. (Kategooria saamiseks piisab tegelikult sellest, et $\leqslant$ on eeljärjestus, s.t. refleksiivne ja transitiivne seos hulgal P.)
   Sellist kategooriat, kus kahe üksteisest erineva objekti vahel on ülimalt üks morfismi, nimetatakse **õhukeseks**[23] kategooriaks. Kõik õhukesed kategooriad on isomorfismi täpsuseni vaadeldavad kui mingid eeljärjestatud hulgad eelpool kirjeldatud viisil.
3. Iga hulka võib vaadelda kui **diskreetset kategooriat**[24], s.t. kui kategooriat, mille objektid on selle hulga elemendid ja ainsad morfismid on ühikmorfismid.
4. Iga monoid $(M, \cdot)$ tekitab kategooria $\mathcal{M}$, milles on üks objekt $*$, $\mathrm{Ob}(\mathcal{M}) = \{*\}$, ja $\mathrm{Mor}_{\mathcal{M}}(*, *) = M$; morfismide komponeerimine on monoidi M korrutamine $\cdot$ ja objekti $*$ ühikmorfism on monoidi ühikelement 1. Ka vastupidi: iga üheobjektilise kategooria kõigi morfismide hulk on monoid. □

1.3. Funktsionaalsed programmeerimiskeeled kui kategooriad*

Lisaks matemaatikale leiavad kategooriad rakendamist veel näiteks funktsionaalsete programmeerimiskeelte teoorias.

Puhtal funktsionaalsel programmeerimiskeelel on olemas:
- primitiivsed andmetüübid,
- iga tüübi konstandid,
- operatsioonid, mis on kujutused andmetüüpide vahel,
- konstruktorid, mida kasutades saab olemasolevatest andmetüüpidest ja operatsioonidest tuletada uusi vaadeldava keele andmetüüpe ja operatsioone.

Selline keel ise on kõigi operatsioonide ja tüüpide hulk, mida saab konstruktorite abil tuletada primitiivsetest tüüpidest ja operatsioonidest.

Selleks, et funktsionaalset programmeerimiskeelt L saaks vaadelda kategooriana $\mathcal{C}(L)$, tuleb teha kaks eeldust ja üks väike muudatus.
- Eeldame, et iga tüübi A (nii primitiivse kui tuletatud) jaoks leidub mitte millegi tegemise operatsioon id_A. Selle rakendamisel ei tehta sisendandmetega mitte midagi, need väljastatakse muutmata kujul.
- Lisame keelele ühe tüübi, mida tähistame sümboliga $\mathbf{1}$, millel on omadus, et igast tüübist A leidub üheselt määratud operatsioon tüüpi $\mathbf{1}$. Iga konstanti c tüübist A tõlgendame kui morfismi $c\colon \mathbf{1} \to A$.
- Eeldame, et keelel on olemas komponeerimiskonstruktor: kui f on operatsioon, mille sisendid on tüüpi A ja väljundid on tüüpi B, ning kui g on operatsioon sisenditega tüübist B ja väljunditega tüübist C, siis nende järjestrakendamine on tuletatud operatsioon ehk programm (tihti tähistatakse seda $f; g$), mille sisendtüüp on A ja väljundtüüp C.

Nendel eeldustel tekitab funktsionaalne programmeerimiskeel L kategooria $\mathcal{C}(L)$, kus
1. objektid on keele L tüübid,
2. morfismid on keele L operatsioonid (nii primitiivsed kui tuletatud),
3. morfismi lähte- ja sihtobjekt on vastava operatsiooni sisend- ja väljundtüüp,
4. morfismide komponeerimine on antud komponeerimiskonstruktori abil, kusjuures komponeeritavate järjekord vahetatakse ära, s.t. $g \circ f = f; g$,
5. ühikmorfismid on mitte millegi tegemise operatsioonid.

Näide 1.12. Vaatleme programmeerimiskeelt, milles on kolm andmetüüpi: NAT (naturaalarvud ja 0), BOOLEAN (tõene või väär) ja CHAR (sümbolid). Anname operatsioonide kirjelduse kategoorses stiilis.
- Tüübis NAT on konstant $0\colon \mathbf{1} \to \mathrm{NAT}$ ja operatsioon $\mathtt{succ}\colon \mathrm{NAT} \to \mathrm{NAT}$.
- Leiduvad konstandid $\mathtt{true}, \mathtt{false}\colon \mathbf{1} \to \mathrm{BOOLEAN}$ ja operatsioon $\neg\colon \mathrm{BOOLEAN} \to \mathrm{BOOLEAN}$, mis peavad rahuldama võrdusi $\neg \circ \mathtt{true} = \mathtt{false}$ ja $\neg \circ \mathtt{false} = \mathtt{true}$.

[23] *thin category*
[24] *discrete category*

- Tüübis $\textsc{char}$ on üks konstant $c : \mathbf{1} \to \textsc{char}$ iga sümboli c jaoks.
- On kaks tüübiteisendusoperatsiooni $\texttt{ord} : \textsc{char} \to \textsc{nat}$ ja $\texttt{chr} : \textsc{nat} \to \textsc{char}$. Need rahuldavad võrdust $\texttt{chr} \circ \texttt{ord} = \mathrm{id}_{\textsc{char}}$. (Et $\texttt{chr}$ oleks defineeritud kõigil positiivsetel naturaalarvudel, võib lugeda, et ta tegutseb mooduli n järgi, kus n on sümbolite arv.) □

Näiteprogrammiks on morfism $\texttt{next}$, mis on defineeritud kui kompositsioon

$$\texttt{chr} \circ \texttt{succ} \circ \texttt{ord} : \textsc{char} \to \textsc{char}$$

ja mis leiab antud sümbolile koodi järgi järgneva sümboli. Märgime, et kaks morfismi (programmi) samastatakse kategoorias $\mathcal{C}(L)$, kui nad peavad defineerivate võrduste tõttu samad olema. Näiteks morfismid $\texttt{chr} \circ \texttt{succ} \circ \texttt{ord}$ ja $\texttt{chr} \circ \texttt{succ} \circ \texttt{ord} \circ \texttt{chr} \circ \texttt{ord}$ on samad.

Paneme veel tähele, et tüübis $\textsc{nat}$ on olemas konstandid $\texttt{succ} \circ \ldots \circ \texttt{succ} \circ 0 : \mathbf{1} \to \textsc{nat}$, kus $\texttt{succ}$ esineb null või rohkem korda.

1.4. Mõned konstruktsioonid

Olemasolevatest kategooriatest saab teatud konstruktsioonide abil luua uusi.

Definitsioon 1.13. Kategooria $\mathcal{A}$ **alamkategooria**[25] $\mathcal{B}$ koosneb

1. kategooria $\mathcal{A}$ objektide klassi $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ alamklassist $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$;
2. iga objektipaari $(B, B') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})^2$ jaoks leiduvast hulgast $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, B')$, nii et
   (a) kui $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B', B'')$, siis $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B'')$,
   (b) $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B)$ iga $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral.

Asjaolu, et $\mathcal{B}$ on kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooria tähistame $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Definitsioon 1.14. Kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse **täielikuks alamkategooriaks**[26], kui

$$B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, B'),$$

s.t. $\mathcal{B}$ sisaldab koos iga kahe objektiga kõik nende objektide vahel kategoorias $\mathcal{A}$ leiduvad morfismid.

Näide 1.15. Kategooria FinSet on kategooria Set täielik alamkategooria. Kategooria Ab on kategooria Grp täielik alamkategooria, Grp on Mon täielik alamkategooria, Mon on poolrühmade kategooria Sgr alamkategooria, mis ei ole täielik. Kategooria Ban_∞ on $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ alamkategooria, kuid mitte täielik alamkategooria. □

Definitsioon 1.16. Kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **(otse)korrutis**[27] on kategooria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, mis on defineeritud järgmiselt.

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.
2. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((A, B), (A', B')) = \{(a, b) \mid a \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A'), b \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B')\}$.
3. Kategooria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ morfismide komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ komponeerimiste poolt, nimelt
$$(a', b') \circ (a, b) = (a' \circ a, b' \circ b).$$
4. Objekti $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ühikmorfism on $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$.

1.5. Duaalsusest

Jämedalt öeldes tähendab kategoorne duaalsus "kõigi morfismide ümberpööramist".

Definitsioon 1.17. Kategooria $\mathcal{C}$ **duaalne kategooria**[28] $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ defineeritakse järgmiselt.

1. Kategooriatel $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ on samad objektid, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
2. Iga $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ korral $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$, s.t. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ morfismid on $\mathcal{C}$ morfismid, mida "kirjutatakse vastupidises suunas". Segaduse vältimiseks kirjutame $f^{\mathrm{op}} : A \to B$, kui vaatleme $\mathcal{C}$ morfismi $f : B \to A$ kui $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ morfismi.

[25] *subcategory*
[26] *full subcategory*
[27] *(direct) product of categories*
[28] *dual* või *opposite category*

3. Komponeerimine kategoorias $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ defineeritakse võrdusega

$$f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} := (g \circ f)^{\mathrm{op}}.$$

$$\text{Kategoorias } \mathcal{C}: \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad \text{Kategoorias } \mathcal{C}^{\mathrm{op}}: \quad \begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f^{\mathrm{op}}"] & C \arrow[l, "g^{\mathrm{op}}"] \arrow[ll, bend right, "(g\circ f)^{\mathrm{op}}"'] \end{tikzcd}$$

Märgime, et $(f^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = f$ ja $\mathrm{id}_A^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}_A$.

Iga kategooriate jaoks defineeritud mõiste jaoks leidub duaalne mõiste (mille nimi tekitatakse harilikult eesliite 'ko-' (või 'koo-') abil), mis saadakse definitsioonis kõigi morfismide suuna muutmisel vastupidiseks ja kompositsioonide $f \circ g$ asendamisel kompositsioonidega $g \circ f$. Samuti on iga väite jaoks olemas duaalne väide.

> **Duaalsusprintsiip** ütleb, et kui mingi väide on tõene kõigis kategooriates, siis ka selle väite duaalne väide on tõene kõigis kategooriates.

Kokkuvõtteks võib väita, et tänu duaalsusprintsiibile saame kategoorias peaaegu alati "kaks asja ühe hinnaga": igas mõiste definitsioonist saame duaalse mõiste definitsiooni ning igas väite tõestusest saame kohe ka duaalse väite tõestuse. Siin konspektis on kasutatud sümbolit $\boxed{\text{D}}$ väite lõpus, kui selle väite tõestus on täpselt duaalne mõne eelneva väitega.

1.6. Ülesanded

Ülesanded 1.18. 1. Vali mingid objektid ja morfismid nende vahel nii, et nad moodustavad kategooria. Tõesta, et nad moodustavad kategooria. Edaspidises kutsume seda kategooriat "sinu lemmikkategooriaks".

2. Too üks näide täielikust ja üks näide mittetäielikust alamkategooriast oma lemmikkategoorias.

2. Morfismide ja objektide liigid

2.1. Morfismide liigid

Nii nagu hulkade korral on tähtsal kohal üksühesed ehk injektiivsed kujutused ja peale- ehk sürjektiivsed kujutused, nii ka kategooriates võib vaadelda teatud eriomadustega morfisme.

Definitsioon 2.1. Morfismi $f:\ A \to B$ kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse

- **monomorfismiks**[29], kui ta on vasakult taandatav, s.t.

$$f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h$$

  iga morfismide paari $g, h:\ C \to A$ korral;
- **koretraktsiooniks**[30] (või **lõikeks**), kui ta on vasakult pööratav, s.t. leidub selline morfism $g:\ B \to A$, et $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Sellisel juhul nimetatakse objekti A objekti B **retraktiks**.

Asjaolu, et morfism $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ on monomorfism rõhutatakse erilise noolega $f\colon\ A \rightarrowtail B$. Noolt $\rightarrowtail$ võib kasutada nii tekstis kui diagrammidel.

Lause 2.2. *Suvalises kategoorias $\mathcal{C}$ kehtivad tingimused:*
1. *iga koretraktsioon on monomorfism;*
2. *iga ühikmorfism on koretraktsioon;*
3. *kahe monomorfismi (koretraktsiooni) kompositsioon on monomorfism (koretraktsioon);*
4. *kui kahe morfismi kompositsioon $k \circ f$ monomorfism (koretraktsioon), siis f on monomorfism (koretraktsioon).*

Tõestus. 1. Oletame, et $k \circ f = \mathrm{id}_A$ ja $f \circ g = f \circ h$ kus $f:\ A \to B$, $k:\ B \to A$ ja $g, h:\ C \to A$. Siis

$$g = \mathrm{id}_A \circ g = (k \circ f) \circ g = k \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ h) = (k \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h.$$

2. Iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A$.
3. Oletame, et $k : B \rightarrowtail D$ ja $f : A \rightarrowtail B$ on monomorfismid ja $(k \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ h$, kus $g, h : C \to A$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, tail, "k"] & D \end{tikzcd}$$

Siis $k \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ h)$ ja seega $f \circ g = f \circ h$, sest k on monomorfism. Kuna f on monomorfism, siis viimasest võrdusest järeldub $g = h$. Sellega oleme näidanud, et kf on monomorfism.

Kui $k : B \to D$ ja $f : A \to B$ on koretraktsioonid, s.t. $s \circ k = \mathrm{id}_B$ ja $t \circ f = \mathrm{id}_A$ mingite $s : D \to B$ ja $t : B \to A$ korral, siis võrduste ahel

$$(t \circ s) \circ (k \circ f) = t \circ (s \circ k) \circ f = t \circ \mathrm{id}_B \circ f = t \circ f = \mathrm{id}_A$$

näitab, et $k \circ f$ on koretraktsioon.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "t"] \arrow[r, shift left, "k"] & D \arrow[l, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

4. Oletame, et $k \circ f$ on monomorfism ja $f \circ g = f \circ h$, kus $f : A \to B$, $k : B \to D$, ja $g, h : C \to A$. Siis

$$(k \circ f) \circ g = k \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ h) = (k \circ f) \circ h,$$

millest järeldub $g = h$. Seega f on monomorfism.

Kui $k \circ f$ on koretraktsioon, s.t. $s \circ (k \circ f) = \mathrm{id}_A$ mingi $s : D \to A$ korral, siis $(s \circ k) \circ f = \mathrm{id}_A$ tähendab, et ka f on koretraktsioon. ■

Järgnevalt defineerime mõistete monomorfism ja koretraktsiooni duaalsed mõisted.

Definitsioon 2.3. Morfismi $f : A \to B$ kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse

[29] *monomorphism*
[30] *coretraction* või *section*

- **epimorfismiks**[31] kui ta on paremalt taandatav, s.t.

$$g \circ f = h \circ f \quad \Rightarrow \quad g = h$$

iga morfismipaari $g, h : B \to C$ korral;
- **retraktsiooniks**, kui ta on paremalt pööratav, s.t. leidub morfism $g : B \to A$ nii, et $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Asjaolu, et morfism $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ on epimorfism rõhutatakse erilise noolega $f\colon\ A \twoheadrightarrow B$.

Retraktsiooni ja koretraktsiooni on võimalik defineerida ka diagrammide abil, mis on üldiselt omasem kategooriateooriale. Nimelt, morfismi $f\colon\ A \longrightarrow B$ nimetatakse koretraktsiooniks (retraktsiooniks), kui leidub morfism $g\colon\ B \longrightarrow A$, mis muudab vasakpoolse (parempoolse) diagrammi kommutatiivseks.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

Ka monomorfismi ja epimorfismi on võimalik defineerida diagrammide abil, kuid need diagrammid on juba keerulisemad. Nende juurde me tuleme, kui räägime tagasitõmbajatest ja väljatõukajatest.

Duaalselt lausega 2.2 saab tõestada järgmise lause.

Lause 2.4. *Suvalises kategoorias $\mathcal{C}$ kehtivad tingimused:*
1. *iga retraktsioon on epimorfism;*
2. *iga ühikmorfism on retraktsioon;*
3. *kahe epimorfismi (retraktsiooni) kompositsioon on epimorfism (retraktsioon);*
4. *kui kahe morfismi kompositsioon $k \circ f$ on epimorfism (retraktsioon), siis k on epimorfism (retraktsioon).* $\boxed{D}$

Definitsioon 2.5. Kategooriat nimetatakse **konkreetseks kategooriaks**[32], kui tema objektid on hulgad (harilikult mingi struktuuriga), morfismid on kujutused (mis harilikult säilitavad vaadeldavat struktuuri), morfismide komponeerimine on kujutuste järjestrakendamine ja ühikmorfismid on samasusteisendused.

Kategooriad Set, Grp, Rng, Ring, Top, Ban_∞, Pos ja paljud teised on konkreetsete kategooriate näideteks. Rel ei ole konkreetne kategooria, sest mitte kõik binaarsed seosed ei ole kujutused. Konkreetsetes kategooriates, saab eri tüüpi morfismide suhete kohta rohkem öelda.

Lause 2.6. *Konkreetses kategoorias kehtivad morfismide jaoks järgmised implikatsioonid:*

$$\begin{aligned} \textit{koretraktsioon} &\overset{(ki)}{\Longrightarrow} \textit{injektiivne} \overset{(im)}{\Longrightarrow} \textit{monomorfism}, \\ \textit{retraktsioon} &\overset{(rs)}{\Longrightarrow} \textit{sürjektiivne} \overset{(se)}{\Longrightarrow} \textit{epimorfism}. \end{aligned}$$

TÕESTUS. (ki). Oletame, et morfismi $f : A \to B$ jaoks leidub selline morfism $g : B \to A$, et $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Kui $f(a_1) = f(a_2)$, $a_1, a_2 \in A$, siis ka

$$a_1 = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2) = a_2.$$

Seega f on injektiivne.

(im). Oletame, et $f : A \to B$ on injektiivne ja $f \circ g = f \circ h$, kus $g, h : C \to A$. Siis iga $c \in C$ korral $f(g(c)) = f(h(c))$, millest järeldub, et $g(c) = h(c)$ iga $c \in C$ korral. Järelikult $g = h$ ja me oleme tõestanud, et f on monomorfism.

Ei ole raske veenduda, et ka implikatsioonid (rs) ja (se) kehtivad. ∎

[31] *epimorphism*
[32] *concrete category*

Näide 2.7. Osutub, et hulkade kategoorias Set on monomorfismideks parajasti injektiivsed kujutused. Lause 2.6 põhjal me juba teame et injektiivsed kujutused on monomorfismid. Tõestame vastupidise väite. Olgu $f : A \rightarrowtail B$ monomorfism ning iga elemendi $a \in A$ korral olgu $g_a : \{*\} \to A$ kujutus üheelemendilisest hulgast $\{*\}$ hulka A, mis kujutab elemendi $*$ elemendiks a. Kui $f(a) = f(a')$, $a, a' \in A$, siis $(f \circ g_a)(*) = (f \circ g_{a'})(*)$, millest $f \circ g_a = f \circ g_{a'}$. Eelduse põhjal $g_a = g_{a'}$, mis on samaväärne võrdusega $a = a'$. Seega f on injektiivne. $\square$

Näide 2.8. Kategoorias Top on monomorfismideks injektiivsed pidevad kujutused. Tõepoolest, vaadeldes üheelementilist topoloogilist ruumi $\{*\}$ ja mistahes teist topoloogilist ruumi A paneme tähele, et kujutused $g_a : \{*\} \to A$, $a \in A$, mis on defineeritud näites 2.7, on pidevad ning järelikult morfismid kategoorias Top. Seega näite 2.7 tõestuse saab üle kanda. $\square$

Näide 2.9. Kategooriates Grp ja Ab on monomorfismideks injektiivsed rühmade homomorfismid. Jällegi peame näitama ainult seda, et monomorfismid on injektiivsed. Olgu $f : G \rightarrowtail H$ rühmade monomorfism ja iga $a \in G$ korral olgu $g_a : \mathbb{Z} \to G$ kujutus, mis on defineeritud võrdusega

$$g_a(z) := a^z.$$

Ilmselt g_a on rühmade homomorfism. Kui $f(a) = f(a')$, siis $(f \circ g_a)(1) = (f \circ g_{a'})(1)$. Lihtne on näidata, et siis ka $(f \circ g_a)(z) = (f \circ g_{a'})(z)$ iga $z \in \mathbb{Z}$ korral ning järelikult $f \circ g_a = f \circ g_{a'}$. Eelduse põhjal $g_a = g_{a'}$ ja seega $a = g_a(1) = g_{a'}(1) = a'$. $\square$

Näide 2.10. Kategoorias Ban_1 on monomorfismideks injektiivsed ahendavad lineaarsed operaatorid (ehk ahendavad lineaarkujutused, need on lineaarkujutused $f : B \to C$, mis rahuldavad tingimust $||f(b)|| \leqslant ||b||$ iga $b \in B$ korral). Selle tõestamiseks oletame, et $f : B \rightarrowtail C$ on Banachi ruumide monomorfism ja $f(b) = f(b')$. Peame näitama, et $b = b'$. Vaatleme erinevaid võimalusi.

1) Olgu $||b||, ||b'|| \leqslant 1$. Siis kujutused $k_b, k_{b'} : \mathbb{R} \to B$, mis on defineeritud võrdustega

$$k_b(r) := rb, \quad k_{b'}(r) := rb',$$

$r \in \mathbb{R}$, on ahendavad operaatorid. Kehtivad võrdused $(f \circ k_b)(1) = f(b) = f(b') = (f \circ k_{b'})(1)$. Lineaarsuse tõttu

$$(f \circ k_b)(r) = r(f \circ k_b)(1) = r(f \circ k_{b'})(1) = (f \circ k_{b'})(r)$$

iga reaalarvu r korral. Sellest järeldub, et $f \circ k_b = f \circ k_{b'}$. Kuna f on monomorfism, siis $k_b = k_{b'}$ ja seega $b = b'$.

2) Olgu $||b||, ||b'|| > 1$. Tähistame

$$r := \frac{1}{||b|| \cdot ||b'||}, \quad b_1 := rb, \quad b_1' := rb'.$$

Siis $||b||, ||b_1'|| \leqslant 1$. Korrutades võrduse $f(b) = f(b')$ mõlemaid pooli arvuga r ja kasutades lineaarsust saame võrduse $f(b_1) = f(b_1')$. Rakendades osas 1) tõestatut võime väita, et $b_1 = b_1'$, millest järeldub võrdus $b = b'$.

3) Olgu $||b|| \leqslant 1$ ja $||b'|| > 1$. Selle juhu jätame lugejale läbimõtlemiseks. $\square$

Näide 2.11. Implikatsioon (im) ei ole pööratav, s.t. mitte kõik monomorfismid konkreetses kategoorias ei pruugi olla injektiivsed. Vaatleme jaguvate Abeli rühmade kategooriat Div. Meenutame, et Abeli rühm A on **jaguv**, kui iga $a \in A$ ja iga (positiivse) naturaalarvu n korral leidub selline $b \in A$, et $nb = a$. Loomulik sürjektsioon $\kappa : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $a \mapsto [a]$ jaguva rühma $\mathbb{Q}$ faktorrühmale alamrühma $\mathbb{Z}$ järgi ei ole injektiivne, sest näiteks $\kappa(3) = [3] = [4] = \kappa(4)$, kuigi $3 \neq 4$. (Märgime, et faktorrühma $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ elementideks on kõrvalklassid $a + \mathbb{Z} =: [a]$, kus $a \in \mathbb{Q}$, ning võrdus $\overline{a} = \overline{b}$ kehtib parajasti siis, kui $a - b \in \mathbb{Z}$. Kehtib isomorfism $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, kuna selles faktorrühmas samastatakse kõik ratsionaalarvud, millel on võrdsed murdosad.)

Näitame, et κ on monomorfism. Oletame, et A on jaguv Abeli rühm ja $f, g : A \to \mathbb{Q}$ on sellised rühmade homomorfismid, et $\kappa \circ f = \kappa \circ g$. Võttes $h := f - g : A \to \mathbb{Q}$ saame $\kappa \circ h = 0$ (siin 0 on nullkujutus $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $a \mapsto [0]$). Me peame tõestama, et $h = 0$. Teame, et iga $a \in A$ korral $[0] = (\kappa \circ h)(a) = [h(a)]$, s.t. $h(a) \in \mathbb{Z}$. Oletame vastuväiteliselt, et $h \neq 0$. Siis leidub selline $a \in A$, et $h(a) \in \mathbb{N}_1$. Tänu jaguvusele saame naturaalarvu $2h(a)$ jaoks leida sellise $b \in A$, et $2h(a) \cdot b = a$. Et h on Abeli rühmade homomorfism, siis

$$h(a) = h(2h(a) \cdot b) = 2h(a)h(b),$$

kus viimane korrutis on hulgas $\mathbb{Q}$. Jagades selle võrduse mõlemaid pooli nullist erineva ratsionaalarvuga $2h(a)$ saame võrduse $h(b) = \frac{1}{2}$, mis on vastuolus eelpoolmainituga. Järelikult peab $h = 0$. $\square$

Näide 2.12. Ka implikatsioon (ki) ei ole pööratav. Kategoorias Set on tühjad kujutused $\varnothing \to A$ injektiivsed, aga neil ei ole vasakpoolset pöördelementi, kui $A \neq \varnothing$. Siiski iga injektiivne kujutus $B \to A$ kategoorias Set, kus $B \neq \varnothing$, on koretraktsioon. $\square$

Näide 2.13. Kategoorias Set on epimorfismideks sürjektiivsed kujutused. Selles veendumiseks vaatleme epimorfismi $f : A \to B$, kaheelemendilist hulka $\{0,1\}$ ja kujutusi $g, h : B \to \{0,1\}$, mis on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned} g(b) &= \begin{cases} 1, & b \in f(A), \\ 0, & b \notin f(A), \end{cases} \\ h(b) &= 1. \end{aligned}$$

Ilmselt $g \circ f = h \circ f : A \to \{0,1\}$ on konstantsed kujutused elemendile 1. Järelikult $g = h$, mis tähendab, et $f(A) = B$ ehk f on sürjektiivne. Vastupidine väide järeldub lausest 2.6.

Veelgi enam, kategoorias Set on iga sürjektiivne kujutus retraktsioon. Olgu $f : A \to B$ sürjektiivne kujutus. Defineerime kujutuse $g : B \to A$ valides iga $b \in B$ jaoks elemendi $a_b \in A$ nii, et $f(a_b) = b$ ja võttes $g(b) := a_b$. Siis ilmselt $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b$ iga $b \in B$ korral ja seega $f \circ g = \mathrm{id}_B$. (Paneme tähele, et kõigi nende (üldjuhul lõpmata paljude) valikute tegemiseks on meil vaja valikuaksioomi.) $\square$

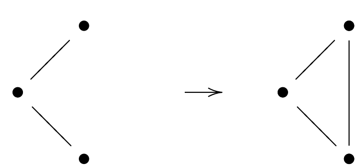
Näide 2.14. Kategoorias Top on epimorfismideks sürjektiivsed pidevad kujutused. Selles veendumiseks kasutame näidet 2.13, milles topoloogiliseks ruumiks on $\{0,1\}$ topoloogiaga $\{\varnothing, \{0,1\}\}$ ning g ja h on defineeritud samamoodi. On selge, et g ja h on siis pidevad kujutused. $\square$

Näide 2.15. Kategoorias Ban_1 on epimorfismideks tiheda kujutisega ahendavad operaatorid. (Lineaarkujutusel $f : A \to B$ kategoorias Ban_1 on tihe kujutis, kui sulund $\overline{f(A)} = B$, s.t. et iga $b \in B$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $a \in A$ nii, et $||f(a) - b|| < \varepsilon$.)

Oletame, et $f : A \to B$ on epimorfism. Siis $\overline{f(A)}$ on B kinnine alamruum ja faktorruum $B/\overline{f(A)}$ on Banachi ruum. Nii loomulik sürjektsioon $\kappa B \to B/\overline{f(A)}$ kui ka nullkujutus $0 : B \to B/\overline{f(A)}$ on ahendavad operaatorid. Kuna $\kappa \circ f = 0 = 0 \circ f$, siis $\pi = 0$, mis tähendab, et $B = \overline{f(A)}$.

Vastupidi, oletame et $\overline{f(A)} = B$ ja $g \circ f = h \circ f$, $g, h : B \to C$. Kuna g ja h langevad kokku hulgal $f(A)$, siis pidevuse tõttu g, h langevad kokku ka hulgal $\overline{f(A)} = B$. Seega $g = h$. $\square$

Näide 2.16. Implikatsioon (rs) ei ole pööratav. Kategoorias Graph leidub sürjektiivne homomorfism



millel ei ole parempoolset pöördmorfismi. $\square$

Näide 2.17. Implikatsioon (se) ei ole pööratav. Vaatleme monoidide ja monoidide homomorfismide kategooriat Mon ning monoidi $(\mathbb{N}_0, +)$ sisestust ι monoidi $(\mathbb{Z}, +)$, mis kindlasti ei ole sürjektiivne. Samas osutub ta epimorfismiks.

Vaatleme monoidide homomorfismi $f : (\mathbb{Z}, +) \to (S, \cdot)$. Iga $n \in \mathbb{N}_1$ korral

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1)^n,$$

s.t. $f(n)$ on määratud $f(1)$ poolt. Lisaks sellele, $f(1)$ on $f(-1)$ pöördelement monoidis S, sest

$$f(1)f(-1) = f(1 + (-1)) = f(0) = 1 = f(0) = f((-1) + 1) = f(-1)f(1).$$

Kuna igal S elemendil saab olla ainult üks pöördelement, siis $f(-1)$ on määratud $f(1)$ poolt. Samuti f väärtus igal teisel negatiivsel täisarvul on määratud $f(1)$ poolt. Seega homomorfism f on täielikult ära määratud elemendiga $f(1) \in S$.

Nüüd oletame, et $g, h : (\mathbb{Z}, +) \to (S, \cdot)$ on sellised monoidide homomorfismid, et $g \circ \iota = h \circ \iota$. Siis $g(1) = g(\iota(1)) = h(\iota(1)) = h(1)$ ja seega $g = h$. Järelikult ι on epimorfism. $\square$

2.1.1. Isomorfismid

Definitsioon 2.18. Morfismi nimetatakse **bimorfismiks**, kui ta on nii monomorfism kui epimorfism, s.t. kui ta on taandatav.

Definitsioon 2.19. Morfismi nimetatakse **isomorfismiks**[33], kui ta on nii koretraktsioon kui ka retraktsioon, s.t. kui ta on pööratav. Kategooria $\mathcal{C}$ objektid A ja B on **isomorfsed** kui leidub isomorfism $f: A \to B$. Objektide A ja B isomorfsust tähistatakse $A \cong B$.

Märgime, et bimorfism ja isomorfism on mõlemad iseendaga duaalsed mõisted. Kategooria $\mathcal{C}$ kõikide isomorfismide hulka tähistame sümboliga $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$.

Kategooriat, kus kõik bimorfismid on isomorfismid, nimetatakse **tasakaalustatuks**[34].

Lause 2.20. *Suvalises kategoorias $\mathcal{C}$ kehtivad järgnevad tingimused:*

1. *iga isomorfism on bimorfism;*
2. *iga ühikmorfism on isomorfism;*
3. *kahe bimorfismi (isomorfismi) kompositsioon on bimorfism (isomorfism).*

TÕESTUS. See järeldub lausest 2.2 ja lausest 2.4. ■

Järeldus 2.21. *Objektide isomorfsusseos on ekvivalentsiseos.*

Lause 2.22. *Kui epimorfism on koretraktsioon, siis ta on isomorfism.*

TÕESTUS. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja $f\colon A \twoheadrightarrow B$ epimorfism ja koretraktsioon kategoorias $\mathcal{C}$. Olgu $g\colon B \longrightarrow A$ morfism, mille korral $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (mis leidub tänu koretraktsiooniks olemisele). Nüüd paneme tähele, et

$$(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

Kuna f on epimorfism, siis $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Seetõttu on f ka retraktsioon ja seega ka isomorfism. ■

Lause 2.23. *Kui monomorfism on retraktsioon, siis ta on isomorfism.* $\boxed{D}$

Järeldus 2.24. *Iga isomorfismi $f\colon A \longrightarrow B$ korral leidub isomorfism $g\colon B \longrightarrow A$ nii, et $g \circ f = \mathrm{id}_A$ ja $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

Isomorfismi g eelmisest lausest nimetatakse isomorfismi f **pöördmorfismiks**[35] ja tähistatakse sümboliga f^{-1}. Kehtivad järgnevad valemid suvaliste morfismide $f\colon A \longrightarrow B$ ja $g\colon C \longrightarrow A$ korral:

$$(f^{-1})^{-1} = f, \tag{2.1}$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}. \tag{2.2}$$

Meenutame, et lause 2.20 järgi teame, et kahe isomorfismi kompositsioon on alati isomorfism.

Näide 2.25. Kategoorias Set on isomorfismideks bijektiivsed kujutused. □

Näide 2.26. Kategooriates Grp, Ab ja Rng on isomorfismideks bijektiivsed homomorfismid. □

Näide 2.27. Kategoorias Top on isomorfismideks homöomorfismid (pidevad lahtised bijektsioonid). Kuna pidevad bijektsioonid ei pruugi olla homöomorfismid, siis on see näiteks kategooriast, kus bimorfismid ei pruugi olla isomorfismid. Seega ei ole Top tasakaalustatud kategooria. □

Näide 2.28. Kategoorias $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ on isomorfismideks bijektiivsed lineaarkujutused. □

Näide 2.29. Kategoorias Ban_1 on isomorfismideks isomeetrilised bijektsioonid. (Meenutame, et lineaarkujutus $f: A \to B$ Banachi ruumide vahel on isomeetriline, kui $||f(a)|| = ||a||$ iga $a \in A$ korral.) Iga isomeetriline bijektsioon $f: A \to B$ on isomorfism, sest pöördkujutus $f^{-1}: B \to A$ on lineaarne,

$$||b|| = ||(f \circ f^{-1})(b)|| = ||f(f^{-1}(b))|| = ||f^{-1}(b)||$$

iga $b \in B$ korral ning seega f^{-1} on ahendav lineaarne operaator. Vastupidi, kui ahendaval operaatoril $f: A \to B$ on olemas pöördkujutus $f^{-1}: B \to A$, mis on samuti ahendav operaator, siis f on isomeetriline. Tõepoolest, kuna

$$||a|| = ||(f^{-1} \circ f)(a)|| = ||f^{-1}(f(a))|| \leqslant ||f(a)||$$

ja $||f(a)|| \leqslant ||a||$ iga $a \in A$ korral, siis $||f(a)|| = ||a||$ iga $a \in A$ korral. □

[33] *isomorphism*
[34] *balanced*
[35] *inverse (morphism)*

Näide 2.30. Iga rühma võib vaadelda kui üheobjektilist kategooriat, kus kõik morfismid on isomorfismid (vt. näide 1.11.4). □

Näide 2.31. Meenutame, et iga järjestatud hulka võib vaadelda kategooriana (näide 1.11.2). Sellises kategoorias on iga morfism bimorfism, sest mistahes kahe objekti vahel leidub ülimalt üks morfism. Isomorfismid on aga ainult ühikmorfismid. □

Definitsioon 2.32. Monomorfismi f nimetatakse **ekstremaalseks**[36], kui sellest, et $f = g \circ e$ ja e on epimorfism järeldub, et e on isomorfism.

Lause 2.33. *Kategooria $\mathcal{C}$ on tasakaalustatud parajasti siis, kui iga monomorfism kategoorias $\mathcal{C}$ on ekstremaalne.*

Tõestus. ($\Longrightarrow$) Olgu kategooria $\mathcal{C}$ tasakaalustatud ja $f\colon A \rightarrowtail B$ monomorfism kategoorias $\mathcal{C}$, mis lahutub kompositsiooniks $f = g \circ e$, kus e on epimorfism. Tänu lausele 2.2 (4) saame, et e on lisaks ka monomorfism. Seega e on bimorfism ja tänu $\mathcal{C}$ tasakaalustatusele ka isomorfism.

($\Longleftarrow$) Kehtigu kategoorias $\mathcal{C}$, et kõik monomorfismid on ekstremaalsed. Olgu $f\colon A \longrightarrow B$ bimorfism. Seega on f muuhulgas ka ekstremaalne monomorfism. Paneme tähele, et f esitub kompositsioonina $f = \mathrm{id}_B \circ f$. Tänu bimorfism olemisele on f epimorfism ning tänu ekstremaalsusele saame, et f on isomorfism. Järelikult on kategooria $\mathcal{C}$ tasakaalustatud ■

Definitsioon 2.34. Epimorfismi f nimetatakse **ekstremaalseks**, kui sellest, et $f = m \circ g$ ja m on monomorfism järeldub, et m on isomorfism.

Lause 2.35. *Kategooria $\mathcal{C}$ on tasakaalustatud parajasti siis, kui iga epimorfism kategoorias $\mathcal{C}$ on ekstremaalne.* $\boxed{D}$

2.2. Objektide liigid

Definitsioon 2.36. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti $\mathbf{1}$ nimetatakse **lõppobjektiks**[37], kui $\mathcal{C}$ igast objektist C leidub täpselt üks morfism objekti $\mathbf{1}$. Kategooria $\mathcal{C}$ objekt $\mathbf{0}$ on **algobjekt**[38], kui objektist $\mathbf{0}$ leidub täpselt üks morfism $\mathcal{C}$ igasse objekti. Objekt on **nullobjekt**[39], kui ta on korraga nii lõpp- kui algobjekt.

Lause 2.37. *Kategooria mistahes kaks lõpp- (alg-, null-) objekti on isomorfsed.*

Tõestus. Kui $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on lõppobjektid, siis $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, C) = \{\mathrm{id}_C\}$ ja $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', C') = \{\mathrm{id}_{C'}\}$. Samuti leiduvad morfismid $f : C \to C'$ ja $g : C' \to C$. Kuna $g \circ f : C \to C$, siis $g \circ f = \mathrm{id}_C$ ja samamoodi $f \circ g = \mathrm{id}_{C'}$. Seega $C \cong C'$. Alg- ja nullobjektide jaoks on tõestus analoogiline. ■

Näide 2.38. Kategoorias Set on tühi hulk algobjekt ja üheelemendilised hulgad on lõppobjektid. Sama kehtib kategooria Top korral. □

Näide 2.39. Kategooriates Ab, $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ ja Ban_1 on $\{0\}$ nii alg- kui ka lõppobjekt, seega nullobjekt. □

Näide 2.40. Ühikelemendiga assotsiatiivsete ringide kategoorias Ring on $\{0\}$ lõppobjekt ja $\mathbb{Z}$ algobjekt. □

Definitsioon 2.41. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti P nimetatakse **projektiivseks**[40], kui iga epimorfismi $g : B \twoheadrightarrow C$ ja iga morfismi $f : P \to C$ jaoks leidub selline morfism $h : P \to B$, et $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ B \arrow[r, two heads, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

[36] *extremal*
[37] *terminal object*
[38] *initial object*
[39] *zero object* või *null object*
[40] *projective object*

Lause 2.42. *Kategooria $\mathcal{C}$ algobjekt $\mathbf{0}$ on on projektiivne.*

Tõestus. Olgu $\mathbf{0}$ kategooria $\mathcal{C}$ algobjekt ning $g\colon A \longrightarrow B$ mingi (epi)morfism kategoorias $\mathcal{C}$. Leiduvad üheselt määratud morfismid $f_A\colon \mathbf{0} \longrightarrow A$ ja $f_B\colon \mathbf{0} \longrightarrow B$. Märkame, et $g \circ f_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, B) = \{f_B\}$, mistõttu $g \circ f_A = f_B$ nagu vaja. ■

Lause 2.43. *Projektiivse objekti retrakt on projektiivne.*

Tõestus. Järgmises diagrammis olgu P projektiivne ja olgu A tema retrakt, s.t. $r \circ i = \mathrm{id}_A$ mingite $r : P \to A$ ja $i : A \to P$ korral (vt. definitsiooni 2.1). Lisaks olgu $g\colon B \twoheadrightarrow C$ mingi epimorfism.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f\circ r"] \arrow[r, shift right, two heads, "r"'] & A \arrow[l, shift right, tail, "i"'] \arrow[dl, "f"] \\
B \arrow[r, two heads, "g"'] & C &
\end{tikzcd}$$

Kui $f : A \to C$, siis P projektiivsuse tõttu leidub selline morfism $h : P \to B$, et $g \circ h = f \circ r$. Seega

$$g \circ (h \circ i) = (g \circ h) \circ i = (f \circ r) \circ i = f \circ (r \circ i) = f \circ \mathrm{id}_A = f,$$

mistõttu $h \circ i\colon A \longrightarrow B$ on otsitav morfism. ■

Objekti projektiivsuse duaalne mõiste on injektiivsus.

Definitsioon 2.44. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti A nimetatakse **injektiivseks**[41], kui iga monomorfismi $g : B \rightarrowtail C$ ja iga morfismi $f : B \longrightarrow A$ korral leidub selline morfism $h : C \to A$, et $h \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, tail, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Lause 2.45. *Kategooria $\mathcal{C}$ lõppobjekt $\mathbf{1}$ on injektiivne.* $\boxed{D}$

Lause 2.46. *Injektiivse objekti iga retrakt on injektiivne.* $\boxed{D}$

Näide 2.47. Kategooria Set iga objekt on projektiivne. Kasutades fakti, et iga epimorfism on retraktsioon kategoorias Set ja definitsiooni 2.41 tähistusi saame leida sellise $p : C \to B$, et $g \circ p = \mathrm{id}_C$. Võttes $h := p \circ f$ saame, et $g \circ h = g \circ p \circ f = f$. □

Näide 2.48. Üks klassikalisi algebra tulemusi väidab, et Abeli rühm on injektiivne parajasti siis, kui ta on jaguv (vt. [2, lause 5.4.3]). □

Näide 2.49. Projektiivsed ja injektiivsed objektid mängivad tähtsat rolli moodulite teoorias (üle ringi). Klassikaline tulemus on, et a moodul on projektiivne parajasti siis, kui ta on vaba mooduli otseliidetav (vt. [2, lause 5.3.8]). Projektiivsed moodulid on nii ringide Morita teooria kui ka algebralise K-teooria nurgakiviks. □

2.3. Alam- ja faktorobjektid

Järgnevalt tutvume kategooria $\mathcal{C}$ objekti A alamobjekti mõistega, mis on alamhulga üldistus, ning temaga duaalse mõiste – faktorobjekt – mõistega, mis on faktorhulga üldistus.

Definitsioon 2.50. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti A **alamobjektiks**[42] nimetatakse paari (B, f), kus $f\colon B \rightarrowtail A$ on monomorfism.

[41] *injective object*
[42] *subobject*

Objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ kõikide alamobjektide klassil defineerime järgneva eel-järjestusseose:

$$(B, f) \preceq (C, g) \quad \Longleftrightarrow \exists h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C): \quad f = g \circ h.$$

Teisisõnu, kehtib $(B, f) \preceq (C, g)$ parajasti siis, kui leidub morfism $h\colon B \longrightarrow C$ nii, et järgnev diagramm on kommutatiivne.

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
B \arrow[ur, tail, "f"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & & C \arrow[ul, tail, "g"']
\end{tikzcd}$$

Märgime, et seos $\preceq$ on tõepoolest eel-järjestusseos. Refleksiivsus kehtib, kuna $f = f \circ \mathrm{id}_B$ ning transitiivsus tuleb morfismide kompositsioonist. Lisaks märgime, et morfism h on monomorfism tänu lause 2.2 tingimusele 4. Lisaks on morfism h tegelikult üheselt määratud. Tõepoolest, oletades selliste morfismide $h_1, h_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ leidumist, et $f = g \circ h_1 = g \circ h_2$, saame $h_1 = h_2$ kuna g on monomorfism.

Defineerime nüüd objekti A alamobjektide *ekvivalentsuse*:

$$(B, f) \equiv (C, g) \quad :\Longleftrightarrow \; (B, f) \preceq (C, g) \;\&\; (C, g) \preceq (B, f).$$

Seos $\equiv$ on selgelt ekvivalentsiseos A alamobjektide klassil. Tähistame

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(A) := \{[(B, f)]_{\equiv} | f\colon B \rightarrowtail A\}.$$

Klassi $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(A)$ elemente (ehk siis paaride (B, f) ekvivalentsiklasse) nimetatakse tihti hoopis objekti A *alamobjektideks*. Meie siiski jätkame paari (B, f) alamobjektiks nimetamist. Paneme tähele, et klassis $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(A)$ on järjestusseose $\preceq$ poolt indutseeritud seos järjestusseos, s.t. klassis $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(A)$ on allpool defineeritud seos $\preceq$ järjestusseos.

$$[(B, f)]_{\equiv} \preceq [(C, g)]_{\equiv} \quad :\Longleftrightarrow \; (B, f) \preceq (C, g).$$

Järgnevalt näitame, et alamobjektide ekvivalentsus on kooskõlas objektide isomorfsusega.

Lause 2.51. *Kui objekti A alamobjektid (B, f) ja (C, g) on ekvivalentsed, siis objektid B ja C on isomorfsed.*

Tõestus. Olgu objekti A alamobjektid (B, f) ja (C, g) ekvivalentsed, s.t. $(B, f) \equiv (C, g)$. Seega kehtib $(B, f) \preceq (C, g)$, mistõttu leidub morfism $h\colon B \longrightarrow C$ nii, et $f = g \circ h$. Teisalt aga tingimusest $(C, g) \preceq (B, f)$ järeldub, et leidub morfism $u\colon C \longrightarrow B$ nii, et $g = f \circ u$. Nüüd, aga

$$f \circ \mathrm{id}_B = f = g \circ h = (f \circ u) \circ h = f \circ (u \circ h),$$

millest saame võrduse $u \circ h = \mathrm{id}_B$, kuna f on monomorfism. Seega on h koretraktsioon. Vahetades (B, f) ja (C, g) rollid, saame, et h on ka retraktsioon. Kokkuvõttes oleme saanud, et $h\colon B \longrightarrow C$ on isomorfism. ■

Järeldusena eelmisest lausest võime väita, et kaks objekti A alamobjekti (B, f) ja (C, f) on ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub isomorfism $h\colon B \longrightarrow C$ nii, et $f = g \circ h$.

Defineerime nüüd alamobjekti duaalse mõiste – faktorobjekti.

Definitsioon 2.52. Kategooria $\mathcal{C}$ objekti A **faktorobjektiks**[43] nimetatakse paari (B, f), kus $f\colon A \twoheadrightarrow B$ on epimorfism.

Ka objekti A faktorobjektide klassil defineeritakse eel-järjestus duaalselt alamobjektide juhuga:

$$(B, f) \preceq (C, g) \quad :\Longleftrightarrow \; \exists h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B): \quad f = h \circ g.$$

Seose $\preceq$ saab defineerida nõudes, et $(B, f) \preceq (C, g)$ kehtib parajasti, siis kui leidub morfism $h\colon B \longrightarrow C$ nii, et allolev diagramm kommuteerub.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, two heads, "f"'] \arrow[dr, two heads, "g"] & \\
B & & C \arrow[ll, dashed, "h"]
\end{tikzcd}$$

[43] *quotient object*

Duaalselt on morfism h üheselt määratud epimorfism. Taaskord defineerime faktorobjektide $(B, f) \equiv (C, g)$ *ekvivalentsuse* tingimustega $((B, f)) \preceq (C, g)$ ja $(C, g) \preceq (B, f)$ ning tähistame

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}}(A) := \{[(B, f)]_{\equiv} | f: A \twoheadrightarrow B\}.$$

Sarnaselt alamojektide juhule on seose $\preceq$ poolt indutseeritud seos järjestusseos klassil $\mathrm{Quot}\,\mathcal{C}(A)$ ning tihti nimetatakse objekti A *faktorobjektideks* just klassi $\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}}(A)$ kuuluvaid ekvivalentsiklasse.

Lause 2.53. *Kui objekti A faktorobjektid (B, f) ja (C, g) on ekvivalentsed, siis objektid B ja C on isomorfsed.* $\boxed{D}$

Siit näeme sarnaselt alamobjektidele, et kaks faktorobjekti (B, f) ja (C, g) on ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub isomorfism $h: C \longrightarrow B$ nii, et $f = h \circ g$.

Näide 2.54. Vaatleme alam- ja faktorobjekte kategoorias Set. Olgu $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ mingi hulk. Hulga A alamobjektid on kõik sellised hulgad B, mille korral leidub monomorfism $f: B \rightarrowtail A$, mis siinkohal on lihtsalt injektiivne kujutus. Paneme tähele, et kui $f: B \rightarrowtail A$ on injektiivne, siis leidub alamhulk $A' \subseteq A$ (tavalise sisalduvuse mõttes) nii, et leidub bijektiivne kujutus (ehk hulkade isomorfism) $h: B \longrightarrow A'$. Teisisõnu B ja A' on sama võimsusega. Kokkuvõttes saame, et ekvivalentsiklassi $[(B, f)] \in \mathrm{Sub}_{\mathsf{Set}}(A)$ kuuluvad kõik hulgad, mis on hulgaga B sama võimsusega. Siit on näha, et klass $\mathrm{Sub}_{\mathsf{Set}}(A)$ on ekvivalentne kõikide hulga A võimsusega väiksemate või võrdsete kardinaalarvude hulgaga. Klassi $[(B, f)]$ esindajaks võib võtta ka paari (A', ι), kus $A' \subseteq A$ ja $\iota: A' \longrightarrow A$ on sisestus.

Paneme tähele, et hulga A kõik faktorobjektid on paarid (X, h), kus X on hulk ja $h: A \twoheadrightarrow X$ on sürjektiivne kujutus. Seega on faktorobjektis (X, h) võimsus samuti väiksem või võrdne hulga A võimsusega, mistõttu klass $\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}}(A)$ on samuti ekvivalentne võimsusest $\#(A)$[44] väiksemate või võrdsete kardinaalarvude hulgaga. Ekvivalentsiklassi $[(X, h)] \in \mathrm{Quot}_{\mathcal{C}}(A)$ esindajaks saab samuti võtta paari $(A/\ker h, \kappa)$, kus $\ker f$[45] on kujutuse h tuum ning $\kappa\colon\ A \longrightarrow A/\ker h$ on faktorhulga $A/\ker h$ loomulik sürjektsioon. $\square$

Näide 2.55. Vaatleme rühmade kategooriat Grp. Olgu $G \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Grp})$ rühm. Rühma G suvalise alamobjektide ekvivalentsiklassi $[(G', \iota)] \in \mathrm{Sub}_{\mathsf{Grp}}(G)$ esindajaks on paar (G', ι), kus G' on G alamrühm ning $\iota: G' \longrightarrow G$ on sisestus. Ekvivalentsiklassi $[(G', \iota)]$ ülejäänud elemendid on kujul $(H, \iota \circ h)$, kus H on isomorfne (rühmadena) rühmaga G' ning $h: H \longrightarrow G'$ on see isomorfism.

Rühma G faktorobjektideks on paarid $(H, h \circ \kappa)$, kus H on isomorfne mingi faktorrühmaga $G/\ker f$ (f on mingi rühmade homomorfism ja $\ker f$[46] on selle homomorfismi tuum), $h\colon\ G/\ker f \longrightarrow H$ on see isomorfism ja $\kappa: G \longrightarrow G/\ker f$ on loomulik sürjektsioon.

Täpselt analoogiline olukord on ka kategooriates Mon, Ab, Rng, $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ ja paljudes teistes algebralistes kategooriates. $\square$

Näide 2.56. Kui $(P, \leqslant)$ on järjestatud hulk, mida vaadeldakse kategooriana $\mathcal{P}$ (vt. näidet 1.11.2) ja $a \in P$. Meenutame, et kategoorias $\mathcal{P}$ on kõik morfismid bimorfismid (näide 2.31). Objekti a alamobjektid on kõigi elementide hulk, mis on a-st väiksemad või a-ga võrdsed, s.t. elemendi a poolt tekitatud pääfilter $a{\downarrow} = \{b \in P \mid b \leq a\}$. Duaalselt on objekti faktorobjektid kõigi elemendist a suuremate või võrdsete elementide hulk, s.t. elemendi a poolt tekitatud pääideaal $a{\uparrow} := \{b \in P \mid a \leq b\}$. Kuna kategoorias $\mathcal{P}$ on isomorfismid vaid ühikmorfismid, kehtivad ka $a{\downarrow} = \mathrm{Sub}_{\mathcal{P}}(a)$ ja $a{\uparrow} = \mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(a)$. $\square$

Definitsioon 2.57. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{C}$ on **korrektse võimsusega**[47], kui iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(A)$ on hulk.
Öeldakse, et kategooria $\mathcal{C}$ on **korrektse kovõimsusega**[48], kui iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}}(A)$ on hulk.

Näide 2.58. Kategooriad Set, Mon, Ab, Rng, $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$, Ban_1 ja Top on kõik korrektse võimsusega ja ka korrektse kovõimsusega. $\square$

Näide 2.59. Vaatleme kategooriat ORD, mille objektideks on ordinaalarvud. Teadupoolest on kõik ordinaalarvud lineaarselt järjestatud, seega morfismide klass on sellest järjestusest tulenev (analoogiliselt näitega 1.11.2 ja näitega 2.56). Kategooria ORD on korrektse võimsusega, kuid pole korrektse kovõimsusega. $\square$

[44] Sümbol $\#(A)$ tähistab hulga A võimsust.
[45] Siinkohal mõtleme kujutuse $h: A \longrightarrow B$ hulgateoreetilist tuuma, s.t. seost $\ker h := \{(a_1, a_2) \mid h(a_1) = h(a_2)\} \subseteq A \times A$.
[46] Siinkohal mõtleme homomorfismi $f: G \longrightarrow G'$ algebralist tuuma, s.t. alamrühma $\ker f = \{g \mid f(g) = 1_{G'}\} \subseteq G$.
[47] *well-powered*
[48] *well-copowered* või *co-well-powered*

2.3.1. Viilud ja koviilud

Mingi objekti alam- ja faktorobjektide klassi on võimalik vaadelda ka kui omaette kategooriat. Need uued kategooriad on tihedatl seotud kategooriateoreetiliste mõistete *viil* ja *koviil*. Alljärgnevalt tutvumegi nende mõistetega. Tulenevalt levinud terminoloogiast on alamobjektidega seotud just objekti üleste objektide kategooria.

Definitsioon 2.60. Kui $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on kategooria $\mathcal{A}$ fikseeritud objekt, siis leidub **A-üleste objektide kategooria** ehk A **poolt tekitatud viil**[49] $(\mathcal{A} \downarrow A)$, mis on defineeritud järgmiselt.

1. Objektid on paarid (B, f), kus $f : B \to A$.
2. Morfism $h : (B, f) \to (B', f')$ on $\mathcal{A}$ morfism $h : B \to B'$, mille korral $f' \circ h = f$.
3. Komponeerimine kategoorias $(\mathcal{A} \downarrow A)$ on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.
4. Objekti (B, f) ühikmorfismiks on id_B.

$$
\begin{tikzcd}
& A & \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & B' \arrow[ul, "f'"']
\end{tikzcd}
$$

Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Vaatleme alamkategooriat $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, mille objektid on täpselt kategooria $\mathcal{C}$ objektid, kuid morfismideks on ainult kategooria $\mathcal{C}$ monomorfismid. Nüüd on objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ alamobjektide klass täpselt elemendi A poolt tekitatud viilu $(\mathcal{C}' \downarrow A)$ kategoorias $\mathcal{C}'$ objektide klass.

Vaatleme, aga viile nüüd eraldiseisva konstruktsioonina.

Näide 2.61. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, milles on lõppobjekt $\mathbf{1}$. Sel juhul on viil $(\mathcal{C} \downarrow \mathbf{1})$ isomorfne kategooriaga $\mathcal{C}$. Nimelt vaatleme iga objekti $A \in \mathcal{C}$ paarina (A, f_A), kus $f_A \colon A \longrightarrow \mathbf{1}$ on lõppobjekti definitsioonist tulenev üheselt määratud morfism. □

Lause 2.62. *Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*

1. *Viilus $(\mathcal{C} \downarrow A)$ leidub lõppobjekt (A, id_A).*
2. *Kui kategoorias $\mathcal{C}$ on algobjekt $\mathbf{0}$, siis $(\mathbf{0}, f_A)$ (kus $f_A \colon \mathbf{0} \longrightarrow A$) on viilu $(\mathcal{C} \downarrow A)$ algobjekt.*

Tõestus.
1. Vaatleme objekti $(A, \mathrm{id}_A) \in \mathrm{Ob}((\mathcal{C} \downarrow A))$. Olgu $(B, f) \in \mathrm{Ob}((\mathcal{C} \downarrow A))$ suvaline objekt, siis $f \colon B \longrightarrow A$. Paneme tähele, et $f \colon (B, f) \longrightarrow (A, \mathrm{id}_A)$ ning kehtib $\mathrm{id}_A \circ f = f$. Oletame nüüd, et leidub veel mingi morfism $g \colon (B, f) \longrightarrow (A, \mathrm{id}_A)$. Sel juhul
$$\mathrm{id}_A \circ g = f = \mathrm{id}_A \circ f.$$
Kuna id_A on isomorfism, siis on ta ka monomorfism, mistõttu saame $g = f$. Järelikult on morfism $f \colon (B, f) \longrightarrow (A, \mathrm{id}_A)$ üheselt määratud.
2. Olgu kategoorias $\mathcal{C}$ algobjekt $\mathbf{0}$. Võtame suvalise objekti $(B, f) \in \mathrm{Ob}((\mathcal{C} \downarrow A))$. Tänu algobjekti definitsioonile leidub üheselt määratud morfism $f_B \colon \mathbf{0} \longrightarrow B$. Paneme tähele, et
$$f \circ f_B \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, A) = \{f_A\},$$
mistõttu $f \circ f_B = f_A$. Seega oleme konstrueerinud morfismi $f \colon (\mathbf{0}, f_A) \longrightarrow (B, f)$ kategoorias $(\mathcal{C} \downarrow A)$, mis on ühene tänu f_A ühesusele kategoorias $\mathcal{C}$. ■

Viilu mõiste duaalne mõiste on koviil, mis on analoogiliselt seotud faktorobjektidega.

Definitsioon 2.63. Kui $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on kategooria $\mathcal{A}$ fikseeritud objekt, siis leidub **A-aluste objektide kategooria**[50] ehk A **poolt tekitatud koviil** $(A \downarrow \mathcal{A})$, mis on defineeritud järgmiselt.

1. Objektid on paarid (B, f), kus $f : A \to B$.
2. Morfism $h : (B, f) \to (B', f')$ on $\mathcal{A}$ morfism $h : B \to B'$, mille korral $h \circ f = f'$.
3. Komponeerimine kategoorias $(A \downarrow \mathcal{A})$ on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.
4. Objekti (B, f) ühikmorfismiks on id_B.

[49] *over category* või *slice*
[50] *under category*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ B \arrow[rr, "h"'] & & B' \end{tikzcd}$$

Duaalselt näeme, et objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ faktorobjektid on täpselt kategooria $(A, \mathcal{C}'')$ objektid, kus $\mathcal{C}''$ on kategooria $\mathcal{C}$ alamkategooria, mille objektideks on kõik kategooria $\mathcal{C}$ objektid ning morfismideks on kategooria $\mathcal{C}$ epimorfismid.

Lause 2.64. *Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*

1. *Koviilus $(A \downarrow \mathcal{C})$ leidub algobjekt (A, id_A).*
2. *Kui kategoorias $\mathcal{C}$ on lõppobjekt $\mathbf{1}$, siis $(\mathbf{1}, f_A)$ (kus $f_A \colon A \longrightarrow \mathbf{1}$) on koviilu $(A \downarrow \mathcal{C})$ lõppobjekt.* $\boxed{D}$

Näide 2.65. Vaatleme taaskord kategooriat $\mathcal{P} = (P, \leq)$, kus P on järjestatud hulk. Fikseerime elemendi $a \in P$. Paneme tähele, et kategoorias $\mathcal{P}$ kehtib $(\mathcal{P} \downarrow a) = \mathrm{Sub}_{\mathcal{P}}(a) = a{\downarrow}$ ning $(a \downarrow \mathcal{P}) = \mathrm{Quot}_{\mathcal{P}}(a) = a{\uparrow}$ (võrrelda näitega 2.56). Kahjuks tekib siin ebakõla levinud terminoliigiaga, nimelt objekti a alamobjektid on ühtlasi ka a-ülesed objektid ning a faktorobjektid on a-alused objektid. $\square$

Märkus 2.66. Viilud ja koviilud on tegelikult erijuhud palju üldisemast konstruktsioonist, mida nimetatakse *komakategooriaks*. Komakategooriatega tutvume hiljem (def. 3.16).

2.4. Ülesanded

Ülesanded 2.67.

1. Kui monomorfism on retraktsioon, siis ta on isomorfism (vt. lauset 2.23).
2. Tõestada, et konkreetses kategoorias on iga retraktsioon sürjektiivne (vt. lauset 2.6).
3. Tõestada, et konkreetses kategoorias on iga sürjektiivne morfism epimorfism (vt. lauset 2.6).
4. Millised on monomorfismid, epimorfismid, bimorfismid ja isomorfismid sinu lemmikkategoorias?
5. Kas su lemmikkategoorial on olemas lõpp-, alg- või nullobjekt?
6. Vaatleme kategooriat $\mathsf{Set_b}$ (nn. **aluspunktiga hulkade kategooria**[51]), mille objektid on paarid (A, a), kus A on (mittetühi) hulk ja $a \in A$ (nn. **aluspunkt**[52]). Morfism $f \colon (A, a) \longrightarrow (B, b)$ kategoorias $\mathsf{Set_b}$ on kujutus $f \colon A \longrightarrow B$, mille korral $f(a) = b$. Tõestage, et kateoorias $\mathsf{Set_b}$ on iga algobjekt ka lõppobjekt, s.t. nullobjekt.
7. Tõestada otse, et kategooria Set iga objekt on projektiivne (vt. näidet 2.47).
8. Millised on projektiivsed objektid sinu lemmikkategoorias?
9. Tõestada, et kategooria Set objekt on injektiivne parajasti siis, kui ta on mittetühi.

[51] *pointed set*
[52] *base point*

3. Funktorid

Selles peatükis tutvume funktori mõistega. Laias laastus on funktorid kategooriate vahel sarnased homomorfismidega algebraliste struktuuride vahel.

3.1. Kovariantsed ja kontravariantsed funktorid

Definitsioon 3.1. Kovariantne funktor[53] F kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$, mida tähistatakse $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, koosneb

1. kujutusest $F_0 : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ objektide klasside vahel; objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ kujutist tähistatakse $F(A)$;
2. $\mathcal{A}$ iga objektipaari (A, A') jaoks kujutusest $F_1^{A,A'} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$; morfismi $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$ kujutist tähistatakse $F(f)$;

nii et on täidetud järgmised tingimused:

1. mistahes morfismide $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A', A'')$ korral
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f);$$
2. iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral
$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}\,.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
A' \arrow[r, mapsto] & F(A')
\end{tikzcd}$$

Definitsioon 3.2. Kontravariantne funktor[54] F kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$, mida tähistatakse samuti $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ koosneb

1. kujutustest $F_0 : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ objektide klasside vahel; objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ kujutist tähistatakse $F(A)$;
2. $\mathcal{A}$ iga objektipaari (A, A') jaoks kujutustest $F_1^{A,A'} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A'), F(A))$; morfismi $f \in \mathcal{A}(A, A')$ kujutist tähistatakse $F(f)$;

nii et on täidetud järgmised tingimused:

1. mistahes morfismide $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A', A'')$ korral
$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g);$$
2. iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral
$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}\,.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(A) \\
A' \arrow[r, mapsto] & F(A') \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}$$

Olgu $\mathcal{A}$ kategooria. Funktorit $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ nimetatakse **endofunktoriks**.

Lause 3.3. *Kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ korral leidub üksühene vastavus kontravariantsete funktorite $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja kovariantsete funktorite $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ vahel.*

TÕESTUS. On selge, et iga kategooria $\mathcal{C}$ korral eeskiri
$$(\_)^{\mathrm{op}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \quad C \mapsto C, \quad f \mapsto f^{\mathrm{op}}$$
on kontravariantne funktor ja $(\_)^{\mathrm{op}} \circ (\_)^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ (ehk $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$).

Kui $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on kontravariantne funktor, siis $F \circ (\_)^{\mathrm{op}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ on kovariantne funktor, sest kahe kontravariantse funktori kompositsioon on kovariantne funktor. Samuti, kui $G : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ on kovariantne funktor, siis $G \circ (\_)^{\mathrm{op}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on kontravariantne funktor. Et $F \circ (\_)^{\mathrm{op}} \circ (\_)^{\mathrm{op}} = F$ ja $G \circ (\_)^{\mathrm{op}} \circ (\_)^{\mathrm{op}} = G$, siis ongi meil olemas nõutav üksühene vastavus. ■

[53] *(covariant) functor*
[54] *contravariant*

Seda tulemust silmas pidades räägime edaspidises vaikimisi alati kovariantsetest funktoritest (mis lähtuvad siis kas kategooriast $\mathcal{A}$ või $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$). Mõnikord võib olla mugav vaadelda kontravariantseid funktoreid $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kui kovariantseid funktoreid $\mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$.

Näited 3.4. Toome mõned kovariantsete funktorite näited.

1. Iga kategooria $\mathcal{A}$ korral leidub **ühikfunktor**[55] $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, mis on objektidel defineeritud võrdusega $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(A) = A$ ja morfismidel võrdusega $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(f) = f$.
2. Kategooria $\mathcal{A}$ iga alamkategooria $\mathcal{B}$ tekitab loomulikul viisil **sisestusfunktori**[56] $\mathrm{J}_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, mis on lihtsalt ühikfunktori $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ ahend kategooriale $\mathcal{B}$.
3. Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on kategooriad ja $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ on fikseeritud objekt, siis leidub **konstantne funktor**[57] objektile B, $\Delta_B^{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ehk lihtsalt Δ_B, mis on defineeritud võrdustega
$$\Delta_B(A) := B, \quad \Delta_B(f) := \mathrm{id}_B$$
iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi f korral.
4. **Unustav funktor**[58] $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ kujutab rühma $(A, \cdot)$ tema põhihulgaks A ja rühmahomomorfismid vastavateks kujutusteks. Samamoodi võib veel vaadelda unustavaid funktoreid $\mathsf{Rng} \to \mathsf{Ab}$ ("unustab ära" korrutamise), $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Mon}$ ("unustab ära" liitmise) või $\mathsf{Ban}_1 \to \mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ ("unustab ära" normi).
5. **Vaba rühma funktor**[59] $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$ seab igale hulgale A vastavusse vaba rühma, mille tekitajate hulgaks on A, ning igale kujutusele f indutseeritud homomorfismi, mis tekitajatel langeb kokku kujutusega f.
6. Iga rühma A korral olgu A' selle rühma *kommutaatoralamrühm*, s.t. alamrühm, mis on tekitatud kõigi elementide poolt, mis on kujul $aba^{-1}b^{-1}$, kus $a, b \in A$. (Olgu $a, b \in A$. Elementi $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ nimetatakse a ja b *kommutaatoriks*. Rühma A kommutaatoralamrühm A' avaldub kujul
$$A' := \{[a, b] \mid a, b \in A\}.)$$
Defineerime $F : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$ võrdustega
$$F(A) := A/A', \quad F(h)(aA') := h(a)B',$$
kõigi rühmade A, B ja rühmade homomorfismide $h : A \to B$ korral. Siis F on funktor, mida nimetame **abelistamise funktoriks**[60].
7. Kui R on ring ja M_R on fikseeritud parempoolne R-moodul, siis leidub mooduliga M_R **tensorkorrutamise funktor** $M \otimes_R \_\_ : {}_R\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ (vasakpoolsete R-moodulite kategooriast Abeli rühmade kategooriasse Ab), mis on defineeritud võrdustega
$$(M \otimes_R \_\_)({}_R N) := M \otimes_R N, \quad M_R(f) := \mathrm{id}_M \otimes f$$
iga vasakpoolse R-mooduli ${}_R N$ ja iga vasakpoolsete R-moodulite homomorfismi f korral.
8. Olgu $(P, \leq)$ ja $(Q, \leq)$ järjestatud hulgad, mida vaatleme kategooriatena nii nagu näites 1.11(2). Selliste kategooriate vahelised funktorid on parajasti kujutused $f : P \to Q$, mis säilitavad järjestuse.
9. Olgu $(S, \cdot)$ ja $(T, *)$ monoidid, mida vaatleme kategooriatena nii nagu näites 1.11(4). Selliste kategooriate vahelised funktorid on parajasti nende monoidide vahelised homomorfismid. Seega funktorit võib vaadelda monoidide homomorfismi üldistusena. □

Näited 3.5. On ka palju kontravariantsete funktorite näiteid.

1. Leidub funktor $\wp : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, mis seab igale hulgale A vastavusse tema kõigi alamhulkade hulga $\wp(A)$ ja kujutusele $f : A \to B$ kujutuse $f^{-1} : \wp(B) \to \wp(A)$, mis kujutab B alamhulga C hulgaks $f^{-1}(C) \subseteq A$ (ehk hulga C originaaliks).
2. Kui (X, τ) on topoloogiline ruum, siis X kõigi lahtiste alamhulkade U hulk τ on järjestatud hulk sisalduvusseose suhtes ja seega tekitab kategooria, kus morfism $\iota_U^V : V \to U$ leidub parajasti siis, kui $V \subseteq U$. Olgu $\overline{C}(U) = \{h : U \to \mathbb{R} \mid h \text{ on pidev}\}$. Siis $\overline{C} : \tau \to \mathsf{Set}$ on funktor, kui defineerime kujutused $\overline{C}(\iota_U^V) : \overline{C}(U) \to \overline{C}(V)$ võrdusega
$$\overline{C}(\iota_U^V)(h) := h|_V.$$
□

[55] *identity functor*
[56] *inclusion functor*
[57] *constant* või *selection functor*
[58] *forgetful functor*
[59] *free (group) functor*
[60] *abelization functor* (Abeli rühm *abelian group* kirjutatakse inglise keeles alati väikese tähega)

Järgmisena toome sisse funktorid, mis on kategooriateoorias väga suure tähtsusega.

Näide 3.6. Kategooria $\mathcal{C}$ fikseeritud objekti C korral defineerib reegel

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,A) \arrow[d, "f\circ__"] & \ni & g \arrow[d, mapsto] \\
B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,B) & \ni & f\circ g
\end{tikzcd}$$

kovariantse funktori $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,\_\_) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, mida nimetatakse **kovariantseks hom-funktoriks** või **kovariantseks mor-funktoriks**[61]. Märgime, et tihti kirjutatakse – ja vahel kirjutame meiegi – tähise $f \circ \_\_$ asemel $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, f)$. $\square$

Näide 3.7. Kategooria $\mathcal{C}$ fikseeritud objekti C korral defineerib reegel

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C) & \ni & g\circ f \\
B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \arrow[u, "__\circ f"'] & \ni & g \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

kontravariantse funktori $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_\_, C) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, mida nimetatakse **kontravariantseks hom-funktoriks** või **kontravariantseks mor-funktoriks**. Sarnaselt kovariantsele juhule, tähistatakse tihti järgnevalt $\_\_ \circ f =: \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, C)$. $\square$

Funktorite $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ korral on võimalik moodustada nende kompositsioon ehk korrutis $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ (mis osutub samuti funktoriks), kui defineerida

$$(G \circ F)(A) := G(F(A)), \quad (G \circ F)(f) := G(F(f))$$

kategooria $\mathcal{A}$ iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja iga morfismi f korral. Korrutise $G \circ F$ variantsus on määratud järgmise reegliga:

F	G	$G \circ F$
kovariantne	kovariantne	kovariantne
kovariantne	kontravariantne	kontravariantne
kontravariantne	kovariantne	kontravariantne
kontravariantne	kontravariantne	kovariantne.

Funktorite komponeerimine on assotsiatiivne ja ühikfunktorid käituvad ühikelementidena sellise komponeerimise suhtes. See võib viia mõttele vaadelda "kõigi kategooriate kategooriat", kus funktorid mängiks morfismide rolli. Kahjuks kõigi kategooriate kogum ei ole enam klass ja ka kõigi ühest kategooriast teise viivate funktorite kogum ei pruugi olla hulk. Väljapääs sellest on muuta kategooria definitsiooni lubades suuremaid objektide ja morfismide kogumeid (konglomeraate). Selliseid asju nimetame **kvaasikategooriateks**[62] (Herrlichi ja Streckeri järgi). Seega kõigi kategooriate ja nendevaheliste funktorite kogum, mis on varustatud funktorite komponeerimisega, on kvaasikategooria, mida tähistatakse CAT. Siiski, kui $\mathcal{A}$ on väike kategooria ja $\mathcal{B}$ on suvaline kategooria, siis kõigi funktorite kogum $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ on klass, ja kui $\mathcal{B}$ on ka väike, siis $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ on hulk. Seega võime kõnelda **kõigi väikeste kategooriate kategooriast**, mida tähistatakse Cat.

3.2. Funktorite omadusi

Definitsioon 3.8. Vaatleme funktorit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja iga objektipaari $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral kujutust

$$F_1^{A,A'} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A')), \quad f \mapsto F(f).$$

Funktor F on

[61] *(covariant) hom-* või *mor-functor*
[62] *quasicategory*

- **täpne**[63], kui kujutus $F_1^{A,A'}$ on injektiivne iga $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral;
- **täielik**[64], kui kujutus $F_1^{A,A'}$ on sürjektiivne iga $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral;
- **täielik ja täpne**, kui kujutus $F_1^{A,A'}$ on bijektiivne iga $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral;
- **kategooriate isomorfism**[65], kui leidub selline funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, et $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ ja $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.

Tavaliselt nimetatakse kategooriate isomorfismideks vaid kovariantseid funktoreid. Samadele tingimustele vastavat kontravariantset funktorit (s.t. kontravaiantset funktorit $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, mille korral leidub (kontravariantne) funktor $G\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ nii, et $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ ja $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$) nimetatakse *kategooriate duaalsuseks*[66].

Lemma 3.9. *Kategooriate isomorfism on täielik ja täpne.*

Tõestus. Olgu funktor $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ isomorfism, seega leidub $G\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ nii, et $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ ja $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Fikseerime objektid $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Olgu $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$ sellised, et $F(f) = F(g)$. Nüüd

$$f = \mathrm{id}_A(f) = (G \circ F)(f) = G(F(f)) = G(F(g)) = (G \circ F)(g) = \mathrm{id}_A(g) = g.$$

See tõestabki, et $F_1^{A,A'}$ on injektiivne ehk F on täpne.

Olgu nüüd $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$. Nüüd

$$h = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(h) = (F \circ G)(h) = F(G(h)).$$

Seega $G(h)$ on morfismi h originaal kujutuse $F_1^{A,A'}$ järgi, mistõttu $F_1^{A,A'}$ on sürjektiivne. Järelikult F ka täielik. ■

Näide 3.10.
1. Unustav funktor $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ on täpne, aga mitte täielik ning ta ei ole kategooriate isomorfism.
2. Unustav funktor $U : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Grp}$ on täielik ja täpne, sest mistahes Abeli rühmade A ja B korral $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{Grp}}(A, B)$.
3. Konstantne funktor $\Delta_B : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ei ole harilikult ei täielik ega täpne.
4. Kaks monoidi kui kategooriad on isomorfsed parajasti siis kui nad on isomorfsed monoididena.
5. Kui $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ on kategooria $\mathcal{C}$ täielik alamkategooria, siis sisestusfunktor $J\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ on täielik ja täpne. □

Märkus 3.11. Kahjuks on kategooriate isomorfsus väga tugev tingimus ning väga harva juhtub, et kaks kategooriat on isomorfsed (kui nad just võrdsed pole). Seepärast on praktikas palju olulisem *kategooriate ekvivalentsus*, millega tutvume hiljem (def. 6.15).

Definitsioon 3.12. Vaatleme funktorit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ütleme, et funktor F
1. **säilitab monomorfisme**[67], kui $\mathcal{A}$ iga morfismi f korral
$$f \text{ on monomorfism} \quad \Rightarrow \quad F(f) \text{ on monomorfism.}$$
2. F **peegeldab monomorfisme**[68], kui $\mathcal{A}$ iga morfismi f korral
$$F(f) \text{ on monomorfism} \quad \Rightarrow \quad f \text{ on monomorfism.}$$

Loomulikult saab samasugused definitsioonid anda ka teiste morfismitüüpide jaoks.

Lause 3.13. *Täpne funktor peegeldab monomorfisme ja epimorfisme.*

Tõestus. Vaatleme täpset funktorit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja morfismi $f : A \to A'$ kategoorias $\mathcal{A}$, mille korral $F(f) : F(A) \to F(A')$ on monomorfism kategoorias $\mathcal{B}$. Oletame, et $f \circ g = f \circ h$ mingite morfismide $g, h : A'' \to A$ korral. Siis

$$f \circ g = f \circ h \implies F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(f \circ h) = F(f) \circ F(h) \implies F(g) = F(h) \implies g = h,$$

[63] *faithful*
[64] *full*
[65] *isomorphism of categories*
[66] *duality of categories*
[67] *preserves (monomorphisms)*
[68] *reflects (monomorphisms)*

kus teine implikatsioon kehtib sellepärast, et $F(f)$ on monomorfism ja viimane implikatsioon sellepärast, et F on täpne. Samamoodi, kui $F(f)$ on epimorfism ja $g \circ f = h \circ f$ mingite $g, h : A' \to A''$ korral, siis

$$g \circ f = h \circ f \implies F(g) \circ F(f) = F(h) \circ F(f) \implies F(g) = F(h) \implies g = h.$$

Kokkuvõttes peegeldab F monomorfisme ja epimorfisme. ■

Lause 3.14. *Iga funktor säilitab isomorfisme.*

Tõestus. Kui $k \circ f = \mathrm{id}_A$, kus $f : A \to B$ ja $k : B \to A$, siis $F(k) \circ F(f) = F(k \circ f) = F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$. See tõestab, et F säilitab nii koretraktsioonid kui ka retraktsioonid ning seega isomorfismid. ■

Lause 3.15. *Täielik ja täpne funktor peegeldab isomorfisme.*

Tõestus. Oletame, et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on täielik ja täpne funktor, $f : A \to A'$ on morfism kategoorias $\mathcal{A}$ ja $F(f) : F(A) \to F(A')$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$. Siis $F(f) \circ s = \mathrm{id}_{F(A')}$ ja $s \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(A)}$ mingi morfismi $s : F(A') \to F(A)$ korral. Kuna F on täielik, siis $s = F(g)$ mingi $g : A' \to A$ korral. Siis

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}_{F(A')} = F(\mathrm{id}_{A'})$$

ja

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(A)} = F(\mathrm{id}_A),$$

millest tänu F täpsusele järelduvad võrdused $f \circ g = \mathrm{id}_{A'}$ ja $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Seega f on isomorfism. ■

3.3. Komakategooriad

Lähtudes antud funktorist (või funktoritest), on võimalik konstrueerida uusi kategooriaid. Esitame siin mõned sellised konstruktsioonid.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, "G"'] \end{tikzcd}$$

Definitsioon 3.16. Olgu $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ja $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funktorid. **Komakategooria**[69] $(F \downarrow G)$ (ehk (F, G)) defineeritakse järgmiselt:

1. kategooria $(F \downarrow G)$ objektid on kolmikud (A, f, B), kus $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $f : F(A) \to G(B)$ on $\mathcal{C}$ morfism;
2. morfism objektist (A, f, B) objekti (A', f', B') kategoorias $(F \downarrow G)$ on paar (a, b), kus $a : A \to A'$ kategoorias $\mathcal{A}$, $b : B \to B'$ kategoorias $\mathcal{B}$ ja $f' \circ F(a) = G(b) \circ f$;
3. komponeerimine kategoorias $(F \downarrow G)$ on indutseeritud $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ komponeerimiste poolt, s.t., et
$$(a', b') \circ (a, b) = (a' \circ a, b' \circ b);$$
4. objekti (A, f, B) ühikmorfismiks on $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$.

$$\mathcal{C}: \quad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(a)"] \arrow[d, "f"'] & F(A') \arrow[r, "F(a')"] \arrow[d, "f'"'] & F(A'') \arrow[d, "f''"] \\ G(B) \arrow[r, "G(b)"'] & G(B') \arrow[r, "G(b')"'] & G(B'') \end{tikzcd}$$

Näide 3.17. Võtame eelmises definitsioonis $\mathcal{A} = \mathbf{1}$, s.o. diskreetse kategooria üheainsa objektiga $\star$, ning olgu $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Siis objekti C võib vaadelda kui konstantset funktorit $\Delta_C : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$, $\star \mapsto C$.

$$\begin{tikzcd} \{\star\} \arrow[r, "\Delta_C"] & \mathcal{C} & \mathcal{B} \arrow[l, "G"'] \end{tikzcd}$$

Võttes $F = \Delta_C$ saame kategooria $(\Delta_C \downarrow G)$, kus objektid on kolmikud $(\star, f, B)$, kus $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $f : C \to G(B)$, ning morfismid $(\star, f, B) \longrightarrow (\star, f', B')$ on paarid $(\mathrm{id}_\star, b)$ kus $b : B \to B'$ on selline, et

[69] *comma category*

$f' = f' \circ \Delta_C(\mathrm{id}_\star) = G(b) \circ f$. Ilmselt on see kategooria isomorfne kategooriaga, mille objektid on paarid (f, B), kus $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, $f : C \to G(B)$, ning kus morfismid $(f, B) \to (f', B')$ on sellised $\mathcal{B}$ morfismid $b : B \to B'$, et $f' = G(b) \circ f$. Tähistame viimase kategooria sümboliga $(C \downarrow G)$ ja nimetame seda objekti C **G-aluste objektide kategooriaks**.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ G(B) \arrow[rr, "G(b)"'] & & G(B') \end{tikzcd}$$

Kui võtame veel $G = \mathrm{id}_\mathcal{C}$ (kategooria $\mathcal{C}$ ühikfunktor), saame täpselt C-aluste objektide kategooria ehk C poolt tekitatud koviilu $(C \downarrow \mathrm{id}_\mathcal{C}) = (C \downarrow \mathcal{C})$ (vt. definitsiooni 2.63).

$$\{\star\} \xrightarrow{\Delta_C} \mathcal{C} \xleftarrow{\mathrm{id}_\mathcal{C}} \mathcal{C}$$

Analoogiliselt võib saada C F-üleste objektide kategooria ja C-üleste objektide kategooria ehk C poolt tekitatud viilu. □

Näide 3.18. Olgu $\mathcal{A} = \mathbf{1}$, $F = \Delta_{\{*\}} : \mathbf{1} \to \mathsf{Set}$ konstantne funktor, mis on defineeritud võrdusega $\Delta_{\{*\}}(\star) = \{*\}$, ning olgu $G : \mathcal{B} \to \mathsf{Set}$ suvaline funktor.

$$\mathbf{1} = \{\star\} \xrightarrow{\Delta_{\{*\}}} \mathsf{Set} \xleftarrow{G} \mathcal{B}$$

Siis on komakategooria $(\Delta_{\{*\}} \downarrow G)$ objektid kolmikud $(\star, f, B)$, kus $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $f : \{*\} \to G(B)$ on kujutused. Iga sellise kujutuse võib samastada hulga $G(B)$ elemendiga $f(*)$. Morfism

$$(1_\star, b) : (\star, f, B) \longrightarrow (\star, f', B')$$

peab muutma järgneva diagrammi kommutatiivseks.

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "1_{\{*\}}"] \arrow[d, "f"'] & \{*\} \arrow[d, "f'"] \\ G(B) \arrow[r, "G(b)"'] & G(B') \end{tikzcd}$$

Sellist komakategooriat nimetatakse G **elementide kategooriaks**[70] ja tähistatakse $\mathsf{el}(G)$.

Tähistust veidi muutes võib öelda, et funktori $G : \mathcal{B} \to \mathsf{Set}$ elementide kategooria konstrueeritakse järgmiselt:

1. kategooria $\mathsf{el}(G)$ objektid on paarid (b, B), kus $b \in G(B)$;
2. morfism $h : (b, B) \to (b', B')$ on selline morfism $h : B \to B'$, et $G(h)(b) = b'$;
3. kategooria $\mathsf{el}(G)$ komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{B}$ komponeerimise poolt;
4. objekti (b, B) ühikmorfism on $\mathrm{id}_B : (b, B) \longrightarrow (b, B)$. □

Järgnevalt vaatleme endofunktori algebrate konstruktsiooni. See on seotud teatava komakategooriaga, kus $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ on suvaline funktor ja $G = \mathrm{id}_\mathcal{A}$ on kategooria $\mathcal{A}$ ühikfunktor.

Definitsioon 3.19. Endofunktori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ **algebrate** (lühidalt: F-algebrate) **kategooria**[71] $\mathsf{Alg}(F)$ konstrueeritakse järgmiselt.

1. Objektid on paarid (A, f^A), kus $f^A : F(A) \to A$.
2. Morfism $\varphi : (A, f^A) \to (A', f^{A'})$ on selline $\mathcal{A}$ morfism $\varphi : A \to A'$, et $f^{A'} \circ F(\varphi) = \varphi \circ f^A$.
3. Kategooria $\mathsf{Alg}(F)$ komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.
4. Objekti (A, f^A) ühikmorfism on morfism id_A.

[70] *category of elements*
[71] *algebra of an endofunctor F* või *F-algebra*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f^A"'] & F(A') \arrow[r, "F(\psi)"] \arrow[d, "f^{A'}"'] & F(A'') \arrow[d, "f^{A''}"] \\
A \arrow[r, "\varphi"'] & A' \arrow[r, "\psi"'] & A''
\end{tikzcd}$$

Paneme tähele, et kategooria $\mathsf{Alg}(F)$ on isomorfne komakategooria $(F \downarrow \mathrm{id}_{\mathcal{A}})$ täieliku alamkategooriaga, mille objektideks on sellised kolmikud (A, f, B), kus $A = B$.

Näide 3.20. Traditsionaalselt vaadeldakse universaalalgebrat $(A, (f_i)_{i \in I})$ kui hulka A, millel on antud teatud algebralised tehted $f_i^A : A^{n_i} \to A$, kus $n_i \in \mathbb{N}_0$. Tehted võib kokku võtta üheks kujutuseks $f^A : \bigsqcup_{i \in I} A^{n_i} \to A$, nii et universaalalgebra on antud hulgaga A ja kujutusega $f^A : F(A) \to A$, kus kategooria Set endofunktor F on objektidel defineeritud võrdusega

$$F(X) := \bigsqcup_{i \in I} X^{n_i}$$

ja iga kujutuse $f : X \to Y$ korral kujutus $F(f) : \bigsqcup_{i \in I} X^{n_i} \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} Y^{n_i}$ on defineeritud võrdusega

$$F(f)(x_1, \ldots, x_{n_i}) := (f(x_1), \ldots, f(x_{n_i})),$$

kus $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$. Näiteks rühma võib vaadelda kui Set-endofunktori F-algebrat, kus $F(X) = X^0 \sqcup X^1 \sqcup X^2$. Saab näidata, et kui (A, f^A) ja (B, f^B) on kaks sama tüüpi algebrat, siis kujutus $\varphi : A \to B$ on algebrate homomorfism parajasti siis, kui järgmine diagramm kommuteerub:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f^A"'] & F(B) \arrow[d, "f^B"] \\
A \arrow[r, "\varphi"'] & B
\end{tikzcd} .$$

□

Teoreetilises arvutiteaduses on eriti kasulikuks osutunud endofunktori algebratega duaalsed koalgebrad. Nende kategooria on isomorfne komakategooria $(\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \downarrow F)$ sellise täieliku alamkategooriaga, mille objektideks on kolmikud (A, f, A), $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

Definitsioon 3.21. Endofunktori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ koalgebrate (lühidalt: F-koalgebrate) **kategooria** $\mathsf{Coalg}(F)$ konstrueeritakse järgmiselt.

1. Objektid on paarid (A, α_A), kus $\alpha_A : A \to F(A)$. (Kui $\mathcal{A} = \mathsf{Set}$, nimetatakse kujutusi α_A koalgebra (A, α_A) **struktuurikujutusteks**.)
2. Morfism $\varphi : (A, \alpha_A) \to (A', \alpha_{A'})$ on selline $\mathcal{A}$ morfism $\varphi : A \to A'$, et $F(\varphi) \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ \varphi$.
3. Kategooria $\mathsf{Coalg}(F)$ komponeerimine on indutseeritud $\mathcal{A}$ komponeerimise poolt.
4. Objekti (A, α_A) ühikmorfism on morfism id_A.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & A' \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\
F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"'] & F(A')
\end{tikzcd}$$

Näide 3.22. Lõplikke ja lõpmatuid Σ-järjendeid (Σ on mingi hulk) võib modelleerida kui funktori $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ koalgebraid, kus F on defineeritud võrdusega

$$F(X) := \{*\} \sqcup (\Sigma \times X).$$

Hulga Σ elementide kõigi lõplike ja lõpmatute järjendite hulgal Σ^∞ defineeritakse struktuurikujutused $\alpha_{\Sigma^\infty} : \Sigma^\infty \to \{*\} \sqcup (\Sigma \times \Sigma^\infty)$ võrdusega

$$\alpha_{\Sigma^\infty}(\sigma) := \begin{cases} *, & \text{kui } \sigma \text{ on tühi list,} \\ (\mathrm{head}(\sigma), \mathrm{tail}(\sigma)), & \text{kui } \sigma \text{ on mittetühi list.} \end{cases}$$

Siin $\mathrm{head}(\sigma)$ all mõistetakse järjendi esimest elementi ja $\mathrm{tail}(\sigma)$ moodustavad järjendi kõik ülejäänud elemendid. □

Näide 3.23. Mittetühje binaarpuid, mille lehed on tüüpi Σ, võib modelleerida kui funktori $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ koalgebraid, kus F on defineeritud võrdusega

$$F(X) := \Sigma \sqcup (X \times X).$$

Kõigi selliste puude hulgal T võib struktuurikujutused $\alpha_T : T \to \Sigma \sqcup (T \times T)$ defineerida võrdusega

$$\alpha_T(t) := \begin{cases} t \in \Sigma, & \text{kui } t \text{ on leht,} \\ (\mathrm{left}(t), \mathrm{right}(t)), & \text{kui } t \text{ ei ole a leht.} \end{cases}$$

Siin $\mathrm{left}(t)$ on tipu t vasakpoolne alampuu ja $\mathrm{right}(t)$ on tipu t parempoolne alampuu. □

Näide 3.24. Olgu andmetüüpide A = PANGAKONTO ja $\mathbb{Q}$ jaoks antud operatsioonid `rahasisse` ja `kontojääk`:

$$\texttt{rahasisse} : A \times \mathbb{Q} \to A,$$
$$\texttt{kontojääk} : A \to \mathbb{Q}.$$

Pangakonto tüüp koos nende operatsioonidega tekitab funktori $F(X) = X^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ koalgebra (A, α), kus struktuurikujutusel $\alpha_A : A \to A^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ on kuju

$$\alpha_A(a) = (\texttt{rahasisse}(a, \_), \texttt{kontojääk}(a)).$$ □

Näide 3.25. Deterministlikke automaate võib vaadelda koalgebratena. Fikseeritud hulga Σ jaoks vaatleme kovariantset mor-funktorit $F = \mathsf{Set}(\Sigma, \_) = (\_)^\Sigma : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$. F-koalgebra olgu antud kujutusega $\alpha_A : A \to A^\Sigma$. Sellised kujutused on üksüheses vastavuses kujutustega $\delta_A : A \times \Sigma \to A$, see tähendab, deterministlike automaatidega, mille sisendtähestik on Σ, olekute hulk A ja üleminekufunktsioon δ_A, kui defineerime

$$\delta_A(a, \sigma) := \alpha_A(a)(\sigma).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ A^\Sigma \arrow[r, "F(\varphi) = \varphi \circ \_"'] & B^\Sigma \end{tikzcd}$$

Kujutus $\varphi : A \to B$ on F-koalgebrate homomorfism, kui $(\varphi \circ \alpha_A)(a) = \alpha_B(\varphi(a))$, see tähendab, kui

$$\varphi(\delta_A(a, \sigma)) = \varphi(\alpha_A(a)(\sigma)) = ((\varphi \circ \alpha_A)(a))(\sigma) = (\alpha_B(\varphi(a)))(\sigma) = \delta_B(\varphi(a), \sigma),$$

iga $a \in A$ ja $\sigma \in \Sigma$ korral. Võrdus $\varphi(\delta_A(a, \sigma)) = \delta_B(\varphi(a), \sigma)$ on täpselt see, millega defineeritakse automaatide homomorfism. □

3.4. Ülesanded

Ülesanded 3.26.
1. Konstrueerida funktor oma lemmikkategooriast mõnda teise kategooriasse või mõnest teisest kategooriast oma lemmikkategooriasse. Kas sellel funktoril on mõni hää omadus?
2. Tõestada, et funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on kategooriate isomorfism parajasti siis, kui ta on täielik, täpne ja indutseerib bijektsiooni $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ objektide klasside vahel.
3. Tõestada, et kategooriate isomorfism säilitab ja peegeldab monomorfisme ja epimorfisme.
4. Näidata, et kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ otsekorrutist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (vt. definitsiooni 1.16) võib vaadelda komakategooriana.

4. Loomulikud teisendused

4.1. Loomulike teisenduste definitsioon ja näited

Loomulikke teisendusi võib vaadelda kui funktoritevahelisi morfisme.

Definitsioon 4.1. Olgu $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kaks kovariantset funktorit kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. **Loomulik teisendus**[72] $\alpha : F \Rightarrow G$ funktorist F funktorisse G on kategooria $\mathcal{B}$ morfismide süsteem $(\alpha_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$, mis on indekseeritud $\mathcal{A}$ objektide järgi, mille korral $\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$ kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $f : A \to A'$ korral, s.t. järgmine ruut on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ A' & F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd} .$$

Morfismi α_A, kus $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, nimetatakse loomuliku teisenduse $\alpha = (\alpha_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$ **komponendiks** kohal A.

Definitsioon 4.2. Olgu $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kaks kontravariantset funktorit kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. **Loomulik teisendus** $\alpha : F \Rightarrow G$ funktorist F funktorisse G on kategooria $\mathcal{B}$ morfismide süsteem $(\alpha_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$, mis on indekseeritud $\mathcal{A}$ objektide järgi, mille korral $G(f) \circ \alpha_{A'} = \alpha_A \circ F(f)$ kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $f : A \to A'$ korral, s.t. järgmine ruut on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] & G(A) \\ A' & F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] \arrow[u, "F(f)"] & G(A') \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd} .$$

Definitsioon 4.3. Loomulikku teisendust $\alpha : F \Rightarrow G$, kus $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, nimetatakse **loomulikuks isomorfismiks**, kui $\alpha_A : F(A) \to G(A)$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$ iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral. Funktoreid F ja G nimetatakse **loomulikult isomorfseteks** (tähistus: $F \cong G$), kui leidub loomulik isomorfism $F \Rightarrow G$.

Loomulik isomorfsus on ilmselt ekvivalentsiseos konglomeraadil $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Funktorite $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ korral tähistame kõigi nendevaheliste loomulike teisenduste konglomeraati tähisega $\mathsf{Nat}(F, G)$.

Näide 4.4. Iga funktori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jaoks leidub selle funktori **samasusteisendus**[73] $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$, mis on defineeritud võrdusega

$$(\mathrm{id}_F)_A := \mathrm{id}_{F(A)}$$

iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral. □

Näide 4.5. Olgu $f : B \to A$ fikseeritud morfism kategoorias $\mathcal{A}$. Definitsioon

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_\_)_C(g) := g \circ f,$$

$g : A \to C$, annab loomuliku teisenduse $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_\_) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_\_)$ objektide A ja B poolt tekitatud mor-funktorite vahel, sest kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $h : C \to C'$ korral $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, s.t. järgmine ruut on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_\_)_C"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,h) = h \circ \_\_"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B,h) = h \circ \_\_"] \\ C' & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C') \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_\_)_{C'}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C') \end{tikzcd} .$$

[72] *natural transformation*
[73] *identity natural transformation*

Duaalselt, fikseeritud morfismi $f : A \to B$ korral kategoorias $\mathcal{A}$, definitsioon

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_\_, f)_C(g) := f \circ g,$$

$g : C \to A$, annab loomuliku teisenduse $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_\_, f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_\_, A) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_\_, B)$ kontravariantsete mor-funktorite vahel. □

Näide 4.6. Fikseeritud korpuse K korral võime vaadelda kontravariantset mor-funktorit $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(\_\_, K) : \mathsf{Vec}_K \to \mathsf{Set}$. On hästi teada, et vektorruumi V korral üle K saab lineaarkujutuste $V \to K$ (ehk lineaarsete funktsionaalide) hulka $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(V, K) = \mathrm{Hom}_K(V, K) =: V^*$ vaadelda kui vektorruumi üle K punktiviisiliste tehete suhtes. Veelgi enam, kui $f : V \to U$ on lineaarkujutus, siis kujutus $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(\_\_, K)(f) = \_\_ \circ f : U^* \to V^*$ on ka lineaarkujutus. Seega funktorit $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(\_\_, K)$ võib vaadelda kui kontravariantset funktorit $\mathsf{Vec}_K \to \mathsf{Vec}_K$. Me tähistame seda funktorit lühidalt $(\_\_)^*$. Funktori $(\_\_)^*$ kompositsioon iseendaga on kovariantne funktor $\mathsf{Vec}_K \to \mathsf{Vec}_K$. Me tähistame seda $(\_\_)^{**}$ ja nimetame **teise kaasruumi funktoriks**. Iga vektorruumi V korral defineerime kujutuse $\alpha_V : V \to V^{**} = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$ võrdusega

$$(\alpha_V(a))(g) := g(a),$$

$a \in V$, $g \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$. Lineaaralgebrast on teada, et kujutused α_V on vektorruumide lineaarkujutused. Iga $f \in \mathrm{Hom}_K(V, U)$, iga $a \in V$ ja iga $h \in \mathrm{Hom}_K(U, K) = U^*$ korral

$$\begin{aligned}(f^{**} \circ \alpha_V)(a)(h) &= (\alpha_V(a)(\_\_ \circ f))(h) = \alpha_V(a)(h \circ f) = (h \circ f)(a) = h(f(a)) = \alpha_U(f(a))(h) \\ &= (\alpha_U \circ f)(a)(h),\end{aligned}$$

mis tõestab, et $\alpha = (\alpha_V)_{V \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Vec}_K)} : \mathrm{id}_{\mathsf{Vec}_K} \Rightarrow (\_\_)^{**}$ on loomulik teisendus.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "\_\_\circ(\_\_\circ f) = f^{**}"] \\ U \arrow[r, "\alpha_U"'] & U^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U^* \arrow[r, "\_\_\circ f"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha_U(f(a))"] & V^* \arrow[r, "\alpha_V(a)"'] & K \end{tikzcd}$$

□

Näide 4.7. Kui R^* on ühikelemendiga assotsiatiivse ringi R multiplikatiivne monoid ja $\mathrm{Mat}_n(R)$ on kõigi n-ndat järku ruutmaatriksite hulk üle R, mida vaatleme samuti multiplikatiivse monoidina, siis $\det_R : \mathrm{Mat}_n(R) \to R^*, A \mapsto \det(A)$ on monoidide homomorfism. Veelgi enam, ruut

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mat}_n(R) \arrow[r, "\det_R"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_n(f)"'] & R^* \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Mat}_n(S) \arrow[r, "\det_S"'] & S^* \end{tikzcd}$$

kommuteerub iga ringide homomorfismi $f : R \to S$ korral (siin $\mathrm{Mat}_n(f)$ rakendab kujutust f maatriksi kõigile elementidele). See tähendab, et determinant on loomulik teisendus $\det : \mathrm{Mat}_n \Rightarrow (\_\_)^*$ funktorite $\mathrm{Mat}_n, (\_\_)^* : \mathsf{Ring} \to \mathsf{Mon}$ vahel. □

Näide 4.8. Oletame, et mingis programmeerimiskeeles L (näiteks näite 1.12 keeles) on olemas konstruktor $(\_\_)^*$, mis lubab iga andmetüübi A (s.t. konstantide hulga) abil konstrueerida uue tüübi A^*, mis on kõigi lõplike A-järjendite hulk. Näiteks kui $A = \{a, b\}$, siis järjendid $[a, b, a], [\ ], [b, b, b, b]$ kuuluvad tüüpi A^*. Kui $f : A \to B$ on keele L operatsioon, siis f^* tähistab (tuletatud) operatsiooni $A^* \to B^*$, mis rakendab operatsiooni f antud A-järjendi kõigile elementidele (nt. $f^*([a, b, a]) = [f(a), f(b), f(a)] \in B^*$). On kerge näha, et $(\_\_)^* : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(L)$ on keele L poolt indutseeritud kategooria $\mathcal{C}(L)$ endofunktor.

Tüübi A korral võib vaadelda hulka $(A^*)^* = A^{**}$, mis koosneb kõigi A-järjendite järjenditest; see on saadud funktori $(\_\_)^*$ kahekordsel rakendamisel. Sellise tüübi A^{**} jaoks võib soovida omada `flatten`-operatsiooni, mis lihtsalt konkateneerib kõik järjendid järjendis. Näiteks

$$\texttt{flatten}([[a, b, a], [\ ], [b, b, b, b]]) = [a, b, a, b, b, b, b].$$

Kõigi selliste `flatten`-operatsioonide süsteem on loomulik teisendus $(\_)^{**} \Rightarrow (\_)^{*}$, sest järgmine ruut kommuteerub iga operatsiooni $f : A \to B$ korral:

$$\begin{tikzcd} A^{**} \arrow[r, "\mathtt{flatten}_A"] \arrow[d, "f^{**}"'] & A^{*} \arrow[d, "f^{*}"] \\ B^{**} \arrow[r, "\mathtt{flatten}_B"'] & B^{*} \end{tikzcd} .$$

□

4.2. Funktorite kvaasikategooriad

Kõigepealt näitame, et loomulikke teisendusi on võimalik komponeerida.

Lemma 4.9. *Kui $F, G, H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on funktorid kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ ja $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ on loomulikud teisendused, siis võrdus*

$$(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A,$$

$A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$*, defineerib loomuliku teisenduse $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathcal{B} \arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow \alpha"] \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow \beta"] \end{tikzcd}$$

Tõestus. Iga morfismi $f : A \to A'$ korral kategoorias $\mathcal{A}$

$$H(f) \circ (\beta \circ \alpha)_A = H(f) \circ \beta_A \circ \alpha_A = \beta_{A'} \circ G(f) \circ \alpha_A = \beta_{A'} \circ \alpha_{A'} \circ F(f) = (\beta \circ \alpha)_{A'} \circ F(f).$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] \arrow[rr, bend left, "(\beta\circ\alpha)_A"] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] \arrow[rr, bend right, "(\beta\circ\alpha)_{A'}"'] & G(A') \arrow[r, "\beta_{A'}"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

Siit näeme, et $\beta \circ \alpha\colon\ F \Rightarrow H$ on tõesti loomulik teisendus. ■

Loomulikku teisendust $\beta \circ \alpha\colon F \Rightarrow H$ nimetatakse loomulike teisenduste $\alpha\colon F \Rightarrow G$ ja $\beta\colon G \Rightarrow H$ **(vertikaalseks) kompositsiooniks**[74].

Loomulikku teisendust $\alpha\colon F \Rightarrow G$ nimetatakse **pööratavaks**, kui leidub loomulik teisendus $\beta\colon G \Rightarrow F$ nii, et $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$ ja $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$. Märgime, et α on pööratav parajasti siis, kui α on loomulik isomorfism (ülesanne 4.15.2).

Näide 4.10. Olgu $f : B \to A$ ja $g : C \to B$ morfismid kategoorias $\mathcal{A}$. Vaatleme loomulikke teisendusi $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_)$ ja $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, \_) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, \_)$ (vt. näidet 4.5). Siis

$$\begin{aligned} (\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, \_) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_))_D(h) &= (\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, \_)_D \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_)_D)(h) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, \_)_D(h \circ f) \\ &= (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f \circ g, \_)_D(h) \end{aligned}$$

iga morfismi $h : A \to D$ korral kategoorias $\mathcal{A}$. Järelikult

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, \_) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f \circ g, \_).$$

□

[74] *(vertical) composition of natural transformations*

Definitsioonist järeldub kergesti, et loomulike teisenduste komponeerimine $\circ$ on assotsiatiinve ja funktorite samasusteisendused käituvad selle komponeerimise suhtes ühikelementidena. Seega võime moodustada **kõigi kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ viivate funktorite kvaasikategooria** $\mathsf{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, kus morfismideks on loomulikud teisendused selliste funktorite vahel. Kui $\mathcal{A}$ on väike, siis see kvaasikategooria on kategooria.

4.3. Loomulike teisenduste horisontaalne kompositsioon

Lisaks loomulike teisenduste niinimetatud vertikaalsele kompositsioonile $\circ$ on olemas veel teine viis loomulike teisenduste komponeerimiseks.

Lause 4.11. *Vaatleme järgmist olukorda:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left=1.5, "F"] \arrow[r, shift right=1.5, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{B} \arrow[r, shift left=1.5, "H"] \arrow[r, shift right=1.5, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} ,$$

kus $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ on kategooriad, F,G,H,K on funktorid ja α, β on loomulikud teisendused. Võrdus

$$(\beta * \alpha)_A := \beta_{G(A)} \circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \circ \beta_{F(A)} : \ (H \circ F)(A) \to (K \circ G)(A)$$

defineerib loomuliku teisenduse $\beta * \alpha : H \circ F \Rightarrow K \circ G$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left=1.5, "H\circ F"] \arrow[r, shift right=1.5, "K\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Tõestus. Kõigepäält paneme tähele, et tõepoolest $\beta_{G(A)} \circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \circ \beta_{F(A)}$, sest β on loomulik teisendus:

$$\begin{tikzcd} H(F(A)) \arrow[r, "H(\alpha_A)"] \arrow[d, "\beta_{F(A)}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta*\alpha"] & H(G(A)) \arrow[d, "\beta_{G(A)}"] \\ K(F(A)) \arrow[r, "K(\alpha_A)"'] & K(G(A)) \end{tikzcd} .$$

Lisaks sellele on $\mathcal{A}$ iga morfismi $f : A \to A'$ korral välimine ristkülik diagrammis

$$\begin{tikzcd} (H \circ F)(A) \arrow[r, "H(\alpha_A)"] \arrow[d, "(H\circ F)(f)"'] \arrow[rr, bend left, "(\beta*\alpha)_A"] & (H \circ G)(A) \arrow[r, "\beta_{G(A)}"] \arrow[d, "(H\circ G)(f)"] & (K \circ G)(A) \arrow[d, "(K\circ G)(f)"] \\ (H \circ F)(A') \arrow[r, "H(\alpha_{A'})"'] \arrow[rr, bend right, "(\beta*\alpha)_{A'}"'] & (H \circ G)(A') \arrow[r, "\beta_{G(A')}"'] & (K \circ G)(A') \end{tikzcd}$$

kommutatiivne, sest vasakpoolne ruut kommuteerub α loomulikkuse ja H funktoriaalsuse tõttu ning parempoolne ruut kommuteerub β loomulikkuse tõttu. ■

Lauses 4.11 defineeritud kompositsiooni $*$ nimetatakse loomulike teisenduste α ja β **horisontaalseks kompositsiooniks**[75] (mõnikord ka **Godement'i**[76] **korrutiseks**).

Paneme tähele, et kehtivad tingimused

$$(\beta * \mathrm{id}_F)_A = \beta_{F(A)}, \tag{4.1}$$

$$(\mathrm{id}_H * \alpha)_A = H(\alpha_A), \tag{4.2}$$

$$\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{H\circ F}, \tag{4.3}$$

kus $\beta * \mathrm{id}_F : \ H \circ F \Rightarrow K \circ F$ ja $H * \alpha : H \circ F \Rightarrow H \circ G$.

Tihti kirjutatakse funktori F samasusteisenduse id_F asemel sümbol F ise.

[75] *horizontal composition* või *Godement product*

[76] Roger Godement (1921–2016) – prantsuse matemaatik

4.4. Yoneda Lemma

Teoreem 4.12 (Yoneda[77] lemma). *Olgu $\mathcal{A}$ kategooria, $F : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ funktor, $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja olgu $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ vastav mor-funktor.*

1. *Leidub üksühene vasatavus*

$$\theta_{F,A} : \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_), F) \longrightarrow F(A)$$

funktorite $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_)$ ja F vaheliste loomulike teisenduste ja hulga $F(A)$ elementide vahel; muuhulgas neid loomulikke teisendusi on hulk.

2. *Bijektsioonid $\theta_{F,A}$ tekitavad loomuliku teisenduse A suhtes.*
3. *Kui $\mathcal{A}$ on väike kategooria, siis bijektsioonid $\theta_{F,A}$ tekitavad loomuliku teisenduse ka F suhtes.*

Tõestus. 1. Defineerime kujutused

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_), F) \arrow[r, shift left, "\theta_{F,A}"] & F(A) \arrow[l, shift left, "\tau"] \end{tikzcd}$$

võrdusega

$$\theta_{F,A}(\alpha) := \alpha_A(\mathrm{id}_A) \in F(A)$$

iga loomuliku teisenduse $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) \Rightarrow F$ korral ja võrdusega

$$\tau(a)_B(f) := F(f)(a) \in F(B) \tag{4.4}$$

iga $a \in F(A)$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $f : A \to B$ korral. Peame kontrollima, et $\tau(a) = (\tau(a)_B)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$ on loomulik teisendus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) \Rightarrow F$. Tõepoolest, mistahes morfismide $g : B \to C$ ja $f : A \to B$ korral kategoorias $\mathcal{A}$

$$(F(g) \circ \tau(a)_B)(f) = F(g)(F(f)(a)) = F(g \circ f)(a) = \tau(a)_C(g \circ f) = (\tau(a)_C \circ (g \circ \_\_))(f).$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \arrow[r, "\tau(a)_B"] \arrow[d, "g \circ \_\_"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C) \arrow[r, "\tau(a)_C"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

Edasi, iga $a \in F(A)$ korral

$$(\theta_{F,A} \circ \tau)(a) = \theta_{F,A}(\tau(a)) = \tau(a)_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(a) = \mathrm{id}_{F(A)}(a) = a,$$

mis tõestab, et $\theta_{F,A} \circ \tau = \mathrm{id}_{F(A)}$. Teisest küljest, kui $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) \Rightarrow F$ on loomulik teisendus ja $f : A \to B$ on morfism kategoorias $\mathcal{A}$, siis

$$\begin{aligned} ((\tau \circ \theta_{F,A})(\alpha))_B(f) &= (\tau(\theta_{F,A}(\alpha)))_B(f) = (\tau(\alpha_A(\mathrm{id}_A)))_B(f) = F(f)(\alpha_A(\mathrm{id}_A)) \\ &= (F(f) \circ \alpha_A)(\mathrm{id}_A) = (\alpha_B(f \circ \_\_))(\mathrm{id}_A) = \alpha_B(f \circ \mathrm{id}_A) = \alpha_B(f). \end{aligned}$$

Siin neljas võrdus järeldub α loomulikkusest, s.t. diagrammi

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "f \circ \_\_"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & F(B) \end{tikzcd}.$$

kommutatiivsusest. Seega $(\tau \circ \theta_{F,A})(\alpha) = \alpha$ iga α korral, mis tõestab, et $\tau \circ \theta_{F,A} = \mathrm{id}_{\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_), F)}$. Nüüd kuna klass $\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_), F)$ on üksüheses vastavuses hulgaga $F(A)$, siis järelikult on ka $\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_), F)$ hulk.

[77] Nobuo Yoneda (1930–1996) – jaapani matemaatik ja arvutiteadlane

2. Olgu F fikseeritud funktor. Tõestame, et kujutuste süsteem $(\theta_{F,A})_{A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$ on loomulik teisendus. Selleks vaatleme funktorit $N : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$, mis on objektidel defineeritud võrdusega

$$N(A) := \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), F)$$

ja $\mathcal{A}$ morfismidel $f : A \to B$ on kujutused $N(f) : \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), F) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_), F)$ defineeritud võrdusega

$$N(f)(\alpha) := \alpha \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_) = \alpha \circ (\_ \circ f),$$

kus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_)$ (vt. näidet 4.5) ja $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow F$. Ei ole raske veenduda, et N on tõesti funktor. Näitame, et definitsioon $\nu_A := \theta_{F,A}$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, annab loomuliku teisenduse $\nu : N \Rightarrow F$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, _), F) \arrow[r, "\theta_{F,A}"] \arrow[d, "N(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, _), F) \arrow[r, "\theta_{F,B}"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

Tõepoolest, iga morfismi $f : A \to B$ ja loomuliku teisenduse $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow F$ korral

$$\begin{aligned}
(F(f) \circ \theta_{F,A})(\alpha) &= F(f)(\alpha_A(\mathrm{id}_A)) = \alpha_B((f \circ _)(\mathrm{id}_A)) = \alpha_B(f), \\
(\theta_{F,B} \circ N(f))(\alpha) &= \theta_{F,B}(\alpha \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, _)) = (\alpha \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, _))_B(\mathrm{id}_B) \\
&= \alpha_B(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, _)_B(\mathrm{id}_B)) = \alpha_B(\mathrm{id}_B \circ f) = \alpha_B(f).
\end{aligned}$$

3. Kui $\mathcal{A}$ on väike kategooria, siis võime vaadelda kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse Set viivate funktroite kategooriat $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$. Fikseeritud objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral vaatleme seekord funktorit $M : \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$, mis on objektidel $F : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ defineeritud võrdusega

$$M(F) := \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), F)$$

ja kui $\gamma : F \Rightarrow G$ on morfism kategoorias $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$, siis kujutused

$$M(\gamma) : \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), F) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), G)$$

on defineeritud võrdusega

$$M(\gamma)(\alpha) := \gamma \circ \alpha.$$

Teisest küljest, leidub kohal A *väärtustamise funktor*[78] $\mathsf{ev}_A : \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$, mis on defineeritud võrdusega

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}_A(F) &:= F(A); \\
\mathsf{ev}_A(\gamma) &:= \gamma_A.
\end{aligned}$$

Tuleb välja, et definitsioon $\mu_F := \theta_{F,A}$, kus $F : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$, annab loomuliku teisenduse $\mu : M \Rightarrow \mathsf{ev}_A$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, _), F) \arrow[r, "\mu_F = \theta_{F,A}"] \arrow[d, "\gamma\circ__ = M(\gamma)"'] & F(A) \arrow[d, "\gamma_A = \mathsf{ev}_A(\gamma)"] \\
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, _), G) \arrow[r, "\mu_G = \theta_{G,A}"'] & G(A)
\end{tikzcd}$$

Tõepoolest, mistahes loomulike teisenduste $\gamma : F \Rightarrow G$ ja $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow F$ korral

$$\begin{aligned}
(\mathsf{ev}_A(\gamma) \circ \mu_F)(\alpha) &= (\gamma_A \circ \theta_{F,A})(\alpha) = \gamma_A(\alpha_A(\mathrm{id}_A)) = (\gamma_A \circ \alpha_A)(\mathrm{id}_A) = (\gamma \circ \alpha)_A(\mathrm{id}_A) \\
&= \theta_{G,A}(\gamma \circ \alpha) = (\theta_{G,A} \circ (\gamma \circ _))(\alpha) = (\mu_G \circ M(\gamma))(\alpha),
\end{aligned}$$

mistõttu $\mathsf{ev}_A(\gamma) \circ \mu_F = \mu_G \circ M(\gamma)$. Seega $\mu \colon M \Rightarrow \mathsf{ev}_A$ on tõesti loomulik teisendus. ■

[78] *evaluation functor*

Järeldus 4.13. *Kui* $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$*, siis igal loomulikul teisendusel* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_)$ *on kuju* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_)$*, kus* $f : B \to A$ *on üheselt määratud morfism.*

TÕESTUS. Vaatleme suvalist loomulikku teisendust $\alpha : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_)$. Rakendame Yoneda lemmat funktori $F = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_)$ korral. Yoneda lemma tõestusest teame, et võrdusega (4.4) defineeritud kujutused $\tau : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_))$ on bijektiivsed, seega leidub üheselt määratud morfism $f : B \to A$ nii, et $\alpha = \tau(f)$. Järelikult iga $C \in \mathrm{Ob}(A)$ ja $g : A \to C$ korral

$$\alpha_C(g) = \tau(f)_C(g) = (\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_)(g))(f) = (g \circ \_)(f) = g \circ f = \mathcal{A}(f, \_)_C(g),$$

mis tähendab, et $\alpha = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_)$. ∎

Kategooria $\mathcal{A}$ korral defineerime kujutuse $Y^{\mathrm{op}} : \mathcal{A} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$ võrdustega

$$\begin{aligned} Y^{\mathrm{op}}(A) &:= \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), \\ Y^{\mathrm{op}}(f) &:= \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_) : \ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_) \end{aligned}$$

kus $f : B \to A$ kategoorias $\mathcal{A}$. Näite 4.10 põhjal $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f \circ g, \_) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, \_) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_)$, kui $f : B \to A$, $g : C \to B$ kategoorias $\mathcal{A}$, seega

$$Y^{\mathrm{op}}(f \circ g) = Y^{\mathrm{op}}(g) \circ Y^{\mathrm{op}}(f), \quad Y^{\mathrm{op}}(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{Y^{\mathrm{op}}(B)} \,. \tag{4.5}$$

Järelikult Y^{op} on kontravariantne funktor. Seda funktorit nimetatakse **kontravariantseks Yoneda sisestuseks**[79]. Täpsemalt võib öelda, et $Y^{\mathrm{op}} \colon \ \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathrm{con}}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$, kus $\mathsf{Fun}^{\mathrm{con}}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$ on funktorite kategooria $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$ täielik alamkategooria, mis koosneb vaid kategooria $\mathcal{A}$ ja Set kovariantsetest funktoritest.

Lause 4.14. *Yoneda sisestus on täielik ja täpne.*

TÕESTUS. Peame näitama, et iga $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on kujutus

$$(Y^{\mathrm{op}})_1^{B,A} : \ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{A},\mathsf{Set})}(Y^{\mathrm{op}}(A), Y^{\mathrm{op}}(B)) = \mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_), \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \_))$$

bijektiivne. Kuid nagu me nägime järelduses 4.13, $\tau(f) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(f, \_) = Y^{\mathrm{op}}(f)$ iga $f : B \to A$ korral. Seega Y^{op} on bijektiivne morfismidel sest τ on seda. ∎

Analoogiliselt saab defineerida kovariantse Yoneda sisestuse $Y : \mathcal{A} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$ võrdustega

$$\begin{aligned} Y(A) &:= \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_, A), \\ Y(f) &:= \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_, f) \colon \ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_, A) \Rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_, B). \end{aligned}$$

Täpsemalt võib väita, et $Y \colon \ \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Fun}^{\mathrm{contra}}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$, kus $\mathsf{Fun}^{\mathrm{contra}}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$ on kategooria $\mathcal{A}$ ja Set kontravariantsete funktorite kategooria.

4.5. Ülesanded

Ülesanded 4.15.

1. Tuletame meelde, et iga monoidi võib vaadelda kategooriana (vt. näidet 1.11). Mis on funktorid selliste kategooriate vahel? Oletame, et A, B on rühmad, mida vaadeldakse üheobjektiliste kategooriatena, ja $f, g : A \to B$ on kaks funktorit nende kategooriate vahel. Näidata, et loomulik teisendus $f \Rightarrow g$ leidub parajasti siis, kui f ja g on **konjugeeritud**[80], see tähendab, et

$$\exists b \in B \, \forall a \in A \colon \quad f(a) = b^{-1} g(a) b.$$

2. Tõestada, et loomulik teisendus $\alpha : F \Rightarrow G$ on loomulik isomorfism parajasti siis, kui leidub loomulik teisendus $\beta : G \Rightarrow F$ nii, et $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$ ja $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$. Teiste sõnadega: loomulikud isomorfismid on isomorfismid funktorite kvaasikategoorias $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
3. Näidata, et Teoreemi 4.12 2. osas defineeritud N on funktor.

[79] *Yoneda embedding*
[80] *conjugated*

4. Fikseeritud objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ jaoks defineerime $\mathsf{ev}_A : \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$ võrdusega

$$\begin{aligned} \mathsf{ev}_A(F) &:= F(A), \\ \mathsf{ev}_A(\gamma) &:= \gamma_A, \end{aligned}$$

$F, G : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}, \gamma : F \to G$. Tõestada, et ev_A on funktor.

5. Kategooria $\mathcal{A}$ korral vaatleme kvaasikategooriat $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$. Tõestada, et $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Set})$ morfism α (s.t. loomulik teisendus) on monomorfism parajasti siis, kui iga komponent α_A, $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, on monomorfism kategoorias Set (s.t. injektiivne kujutus). (Näpunäide: kasutada Yoneda lemmat.)

6. Tõestada kompositsioonide $*$ ja $\circ$ **vahetusreegel**, s.t. tõestada, et võrdus

$$(\delta * \gamma) \circ (\beta * \alpha) = (\delta \circ \beta) * (\gamma \circ \alpha)$$

kehtib alati kui selle mõlemal poolel olevad kompositsioonid on defineeritud.

5. Piirid ja kopiirid

5.1. Korrutised ja kokorrutised

Kui A ja B on hulgad, siis nende otsekorrutis on

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Sellel korrutisel on kaks kanoonilist projektsiooni

$$\begin{aligned} p_A &: A \times B \to A, \quad (a, b) \mapsto a, \\ p_B &: A \times B \to B, \quad (a, b) \mapsto b. \end{aligned}$$

Veelgi enam, kui Q on hulk ja $f : Q \to A$, $g : Q \to B$ on suvalised kujutused, siis leidub üheselt määratud kujutus

$$m : Q \to A \times B, \qquad q \mapsto (f(q), g(q)),$$

mis muudab järgmise diagrammi kommutatiivseks:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Sellest asjaolust on motiveeritud järgmine üldine definitsioon.

Definitsioon 5.1. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide A, B **korrutis**[81] on kolmik (P, p_A, p_B), kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $p_A : P \to A$, $p_B : P \to B$ on morfismid kategoorias $\mathcal{C}$ (mida nimetatakse **projektsioonideks**), mis rahuldavad tingimust, et kui $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on objekt ja $f : Q \to A$, $g : Q \to B$ on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to P$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

kommuteerub.

Harilikult kirjutatakse P asemel $A \times B$. Üheselt määratud m leidumise omadust kutsutakse tihti korrutiste **universaalomaduseks**. Morfismi m asemel kirjutatakse mõnikord $\langle f, g \rangle$.

Korrutise definitsiooni dualiseerimisel saadakse kokorrutise mõiste, mis üldistab hulkade lõikumatu ühendi konstruktsiooni.

Definitsioon 5.2. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide A, B **kokorrutis** (ehk **summa**) on kolmik (P, u_A, u_B), kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $u_A : A \to P$, $u_B : B \to P$ on kategooria $\mathcal{C}$ morfismid (mida nimetatakse **sisestusteks**[82]), mis rahuldavad tingimust, et kui $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on mistahes objekt ja $f : A \to Q$, $g : B \to Q$ on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $m : P \to Q$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "u_A"'] & P \arrow[u, dashed, "m"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "u_B"] \end{tikzcd}$$

kommuteerub.

[81] *product*
[82] *inclusion*

Harilikult kirjutatakse P asemel $A \coprod B$.

Korrutiste ja kokorrutiste definitsiooni võib üldistada mistahes arvu objektide jaoks.

Definitsioon 5.3. Olgu I hulk ja $(C_i)_{i \in I}$ kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Selle süsteemi **korrutis** on paar $(P, (p_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. P on $\mathcal{C}$ objekt;
2. iga $i \in I$ korral $p_i : P \to C_i$ on $\mathcal{C}$ morfism, mida nimetatakse P **projektsiooniks** objektile C_i;
3. iga paari $(Q, (q_i)_{i \in I})$ jaoks, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i : Q \to C_i$ iga $i \in I$ korral, leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to P$ nii, et kolmnurk

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\
P \arrow[r, "p_i"'] & C_i
\end{tikzcd}
$$

kommuteerub iga $i \in I$ korral.

Harilikult kirjutatakse P asemel $\prod_{i \in I} C_i$.

Definitsioon 5.4. Olgu I hulk ja $(C_i)_{i \in I}$ kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Selle süsteemi **kokorrutis** on paar $(P, (u_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. P on $\mathcal{C}$ objekt;
2. iga $i \in I$ korral $u_i : C_i \to P$ on $\mathcal{C}$ morfism, mida nimetatakse C_i **sisestuseks** objekti P;
3. iga paari $(Q, (q_i)_{i \in I})$ jaoks, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i : C_i \to Q$ iga $i \in I$ korral, leidub üheselt määratud morfism $m : P \to Q$ nii, et kolmnurk

$$
\begin{tikzcd}
Q & \\
P \arrow[u, dashed, "m"] & C_i \arrow[l, "u_i"] \arrow[ul, "q_i"']
\end{tikzcd}
$$

kommuteerub iga $i \in I$ korral.

Harilikult kirjutatakse P asemel $\coprod_{i \in I} C_i$.

Tõestame korrutiste mõned omadused.

Lause 5.5. *Kui $(P, (p_i)_{i \in I})$ on kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ korrutis ja $h, k : C \to P$ on sellised morfismid, et iga $i \in I$ korral $p_i \circ h = p_i \circ k$, siis $h = k$.*

Tõestus. Nii h kui ka k muudavad kõik kolmnurgad

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "k"] \arrow[dr, "p_i \circ h"] & \\
P \arrow[r, "p_i"] & C_i
\end{tikzcd}
$$

kommutatiivseks, seega peavad nad definitsiooni 5.3 põhjal võrdsed olema. ■

Lause 5.5 väidet võib sõnastada ka nii, et korrutise projektsioonid on korraga vasakult taandatavad.

Lause 5.6. *Kui $(P, (p_i)_{i \in I})$ ja $(P', (p'_i)_{i \in I})$ on kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(C_i)_{i \in I}$ korrutised, siis P ja P' on isomorfsed.*

Tõestus. Kuna P ja P' on objektide C_i, $i \in I$, korrutised siis leiduvad φ ja ψ, mis muudavad nii ülemise kui alumise kolmnurga diagrammis

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "p_i'"] & \\
P \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & C_i \\
P' \arrow[ur, "p_i'"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutatiivseks iga $i \in I$ korral. Sellest, et

$$\begin{aligned}
p_i' &= p_i \circ \varphi = p_i' \circ \psi \circ \varphi, \\
p_i &= p_i' \circ \psi = p_i \circ \varphi \circ \psi,
\end{aligned}$$

iga $i \in I$ korral, järeldub lause 5.5 põhjal, et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{P'}$ ja $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_P$. Seega $P \cong P'$. ■

Loomulikult kehtivad ka duaalsed väited kokorrutiste jaoks.

Lause 5.7. *Kui $(P, (u_i)_{i\in I})$ on kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(C_i)_{i\in I}$ kokorrutis ja $h, k\colon P \longrightarrow C$ on sellised morfismid, et iga $i \in I$ korral $h \circ u_i = k \circ u_i$, siis $h = k$.* $\boxed{D}$

Lause 5.8. *Kui $(P, (u_i)_{i\in I})$ ja $(P', (u_i')_{i\in I})$ on kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(C_i)_{i\in I}$ kokorrutised, siis P ja P' on isomorfsed.* $\boxed{D}$

Olgu $n \in \mathbb{N}_0$. Ütleme, et kategoorias $\mathcal{C}$ **on n-aarsed (ko)korrutised**, kui igal objektide süsteemil $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on olemas (ko)korrutis. Ütleme, et kategoorias $\mathcal{C}$ **on lõplikud (ko)korrutised**, kui igal lõplikul objektide süsteemil on olemas (ko)korrutis. Ütleme, et kategoorias $\mathcal{C}$ **on (ko)korrutised**, kui igal $\mathcal{C}$ objektide süsteemil $(C_i)_{i\in I}$ on olemas (ko)korrutis.

Mõtestame lahti null-aarse korrutise Π. Selleks võtame tühja objektide klassi $\varnothing \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Vaadeldes definitsiooni 5.3, saame, et iga suvalise $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral peab leiduma üheselt määratud morfsim

$$Q \xrightarrow[m]{} \Pi.$$

See tähendab aga täpselt seda, et null-aarne korrutis on kategooria $\mathcal{C}$ lõppobjekt. Võtame selle kokku järgneva lemmana.

Lemma 5.9. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on null-aarne korrutis täpselt lõppobjekt $\mathbf{1}$. Duaalselt on kategoorias $\mathcal{C}$ null-aarne kokorrutis algobjekt $\mathbf{0}$.*

Järgnevalt tõestame lause, mille tõestus annab viisi, kuidas binaarsete korrutiste abil konstrueerida ternaarseid korrutisi. Lisaks väidab järgnev lause ka, et kui kategooria $\mathcal{C}$ leidub lõppobjekt, siis on iga unaarne korrutis esitatav binaarse korrutisena.

Lause 5.10. *Kui kategoorias $\mathcal{C}$ on binaarsed korrutised (kõigi objektipaaride jaoks), siis on temas ka ternaarsed korrutised. Veelgi enam, iga $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral*

$$\begin{gathered}
(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C), \\
A \times B \cong B \times A,
\end{gathered}$$

ja kui kategoorias $\mathcal{C}$ on lõppobjekt $\mathbf{1}$, siis

$$A \times \mathbf{1} \cong A, \quad \mathbf{1} \times A \cong A.$$

Tõestus. Objektide $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral olgu $(A \times B, p_A, p_B)$ objektide A ja B korrutis ja olgu $((A \times B) \times C, p_{A\times B}, p_C)$ objektide $A \times B$ ja C korrutis.

$$\begin{tikzcd}
 & & (A\times B)\times C \arrow[dl, "p_{A\times B}"'] \arrow[ddr, "p_C"] & \\
 & A\times B \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & & \\
A & & B & C
\end{tikzcd}$$

Näitame, et $((A \times B) \times C, p_A \circ p_{A\times B}, p_B \circ p_{A\times B}, p_C)$ on süsteemi (A, B, C) korrutis definitsiooni 5.3 mõttes. Universaalomaduse kontrollimiseks oletame, et mingi objekti D korral on olemas morfismid $f : D \to A$, $g : D \to B$ ja $h : D \to C$. Peame tõestama, et leidub üheselt määratud morfism $m : D \to (A \times B) \times C$ nii, et

1. $p_A \circ p_{A\times B} \circ m = f$,
2. $p_B \circ p_{A\times B} \circ m = g$,
3. $p_C \circ m = h$.

Kõigepäält saame morfismide f ja g jaoks leida üheselt määratud morfismi $n : D \to A \times B$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "n"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

kommuteerub. See omakorda indutseerib üheselt määratud morfismi $m : D \to (A \times B) \times C$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "n"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "h"] & \\ A \times B & (A\times B)\times C \arrow[l, "p_{A\times B}"] \arrow[r, "p_C"'] & C \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

on kommutatiivne. Seega $p_A \circ p_{A\times B} \circ m = p_A \circ n = f$, $p_B \circ p_{A\times B} \circ m = p_B \circ n = g$ ja $p_C \circ m = h$.

Olgu $m' : D \to (A \times B) \times C$ veel üks morfism, mille korral $p_A \circ p_{A\times B} \circ m' = f$, $p_B \circ p_{A\times B} \circ m' = g$ ja $p_C \circ m' = h$. Tänu n ühesusele diagrammis (5.1) kehtib võrdus $n = p_{A\times B} \circ m'$. Järelikult ka $m = m'$, sest m diagrammis (5.2) on ühene.

Analoogiliselt saab tõestada, et ka $A \times (B \times C)$ on süsteemi (A, B, C) ternaarne korrutis. Seega $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ lause 5.6 põhjal. Samuti on lihtne tõestada, et $A \times B \cong B \times A$.

Oletame nüüd, et kategoorias $\mathcal{C}$ leidub lõppobjekt $\mathbf{1}$ ja olgu iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral t_C üheselt määratud morfism $C \to \mathbf{1}$. Näitame, et (A, id_A, t_A) on objektide A ja $\mathbf{1}$ korrutis. Tõepoolest, diagrammis

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[dr, "t_Q"] & \\ A & A \arrow[l, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "t_A"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

vertikaalne q on üheselt määratud morfism, mis muudab mõlemad kolmnurgad kommutatiivseks. Lause 5.6 põhjal on paari $(A, \mathbf{1})$ korrutised $A \times \mathbf{1}$ ja A isomorfsed. Analoogiliselt $\mathbf{1} \times A \cong A$. ∎

Selle tõestuse üldistus näitab, et kui kategoorias on binaarsed korrutised, siis on temas n objekti korrutised iga $n \geq 2$ korral. Samuti on lihtne näha, et (A, id_A) on ühestainsast objektist A koosneva süsteemi korrutis. Seega kehtivad järgmised tulemused.

Järeldus 5.11. *Kategoorias on lõplikud korrutised parajasti siis, kui temas on binaarsed korrutised ja lõppobjekt.*

Järeldus 5.12. *Kategoorias on lõplikud kokorrutised parajasti siis, kui temas on binaarsed kokorrutised ja algobjekt.* $\boxed{D}$

Lause 5.13. *Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, kus on lõplikud korrutised ja algobjekt $\mathbf{0}$. Järgmised väited on samaväärsed.*

1. Iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral, kui leidub morfism $f : A \to \mathbf{0}$, siis $A \cong \mathbf{0}$.
2. Iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$.

Tõestus. Iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral tähistame üheselt määratud morfismi $\mathbf{0} \to C$ sümboliga i_C.

Tarvilikkus. Kui 1 kehtib, siis sellest, et $p_{\mathbf{0}} : A \times \mathbf{0} \to \mathbf{0}$, järeldub, et $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$.

Piisavus. Oletame et $(A \times \mathbf{0}, p_A, p_{\mathbf{0}})$ on objektide A ja $\mathbf{0}$ korrutis, $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$ ja $f : A \to \mathbf{0}$ objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral. Siis $i_{A\times\mathbf{0}} : \mathbf{0} \to A \times \mathbf{0}$ peab olema isomorfism. Samuti leidub üheselt määratud $m : A \to A \times \mathbf{0}$ nii, et $p_{\mathbf{0}} \circ m = f$ ja $p_A \circ m = \mathrm{id}_A$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "f"] & \\
A & A \times \mathbf{0} \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_{\mathbf{0}}"'] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} \arrow[ul, "i_A"] \arrow[u, "i_{A\times\mathbf{0}}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathbf{0}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Et $\mathbf{0}$ on algobjekt ja $A \times \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$, siis ka $A \times \mathbf{0}$ on algobjekt. Seega $i_{A\times\mathbf{0}} \circ p_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}_{A\times\mathbf{0}}$. Järelikult

$$i_A \circ f = i_A \circ p_{\mathbf{0}} \circ m = p_A \circ i_{A\times\mathbf{0}} \circ p_{\mathbf{0}} \circ m = p_A \circ \mathrm{id}_{A\times\mathbf{0}} \circ m = \mathrm{id}_A,$$

s.t. f on koretraktsioon. Kuna tema sihtobjekt on algobjekt, on ta ka epimorfism. Seega f on isomorfism (lause 2.22). ■

Lause 5.14. *Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, kus on lõplikud kokorrutised ja lüppobjekt $\mathbf{1}$. Järgmised väited on samaväärsed.*

1. *Iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral, kui leidub morfism $f : \mathbf{1} \to A$, siis $A \cong \mathbf{1}$.*
2. *Iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $A \times \mathbf{1} \cong \mathbf{1}$.* $\boxed{D}$

Kui kategooria $\mathcal{C}$ algobjektil $\mathbf{0}$ on lause 5.13 esimeses osas mainitud omadus, siis teda nimetatakse **rangeks algobjektiks**[83]. Järjestatud hulga (mida vaadeldakse kategooriana) vähim element (kui ta leidub) on range algobjekt. Hulkade kategoorias Set on tühihulk $\varnothing$ range algobjekt. Kategoorias Mon on üheelemendiline monoid $\{1\}$ algobjekt, aga mitte range algobjekt, sest mittetriviaalse monoidi S korral $S \times \{1\} \cong S \ncong \{1\}$.

Duaalselt nimetatakse **rangeks lõppobjektiks**[84] lõppobjekti $\mathbf{1}$, mille korral iga morfism $f\colon \mathbf{1} \longrightarrow A$ on isomorfism (ehk kehtivad lause 5.14 tingimused). Kategoorias Ring leidub range lõppobjekt $\{1\}$, kuna 1 on ühikelemendiga ringis $\{1\}$ nii ühik- kui ka nullelement ning kategoorias Ring peab iga morfism säilitama nii ühik- kui ka nullelemente.

Kategooria $\mathcal{C}$ nullobjekt on range algobjekt (või range lõppobjekt) vaid siis, kui $\mathcal{C} \cong \mathbf{1}$ ehk $\mathcal{C}$ on isomorfne lõppkategooriaga $\mathbf{1}$, s.t. $\mathcal{C}$ on üheobjektiline ning ühemorfismiline kategooria.

5.1.1. Korrutiste ja kokorrutiste näited

Toome mõned korrutiste näited.

Näide 5.15. Kategoorias Set on süsteemi $(C_i)_{i\in I}$ korrutiseks otsekorrutis

$$\prod_{i\in I} C_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in C_i\}$$

koos projektsioonidega $p_k\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_k$, $k \in I$. □

Näide 5.16. Kvaasikategooria CAT objektide binaarsed korrutised on defineeritud definitsioonis 1.16. Projektsioonid on defineeritud eeskirjadega

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{A}} &: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \quad (A, B) \mapsto A, \quad (a, b) \mapsto a, \\ P_{\mathcal{B}} &: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad (A, B) \mapsto B, \quad (a, b) \mapsto b, \end{aligned}$$

mis ilmselt annavad funktorid. Samamoodi võib defineerida suvalise kategooriate väikse süsteemi korrutise. □

[83] *strict initial object*
[84] *strict terminal object*

Näide 5.17. Algebraliste struktuuride kategooriates (nt. rühmad, Abeli rühmad, ringid, moodulid, vektorruumid, Boole'i algebrad jne.) on objektide süsteemi korrutis nende otsekorrutis, mis on varustatud komponenthaavaliste tehetega. Näiteks kui $C_i, i \in I$, on Abeli rühmad, siis $\prod_{i\in I} C_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in C_i\}$ ja liitmine hulgal $\prod_{i\in I} C_i$ on defineeritud võrdusega

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} := (x_i + y_i)_{i\in I}. \qquad \square$$

Näide 5.18. Kategoorias Ban_1 on süsteemi $(C_i)_{i\in I}$ korrutis antud võrdustega

$$\prod_{i\in I} C_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in C_i,\ \sup_{i\in I} ||x_i|| \leqslant \infty\},$$
$$||(x_i)_{i\in I}|| := \sup_{i\in I} ||x_i||$$

ja komponenthaavaliste tehetega. Projektsioonid $p_k : \prod_{i\in I} C_i \to C_k$ on ahendavad lineaarsed operaatorid, sest iga $k \in I$ korral $||p_k\left((x_i)_{i\in I}\right)|| = ||x_k|| \leqslant \sup_{i\in I} ||x_i|| = ||(x_i)_{i\in I}||$. Olgu $q_i : Q \to C_i$, $i \in I$, samuti ahendavate operaatorite pere ja vaatleme elementi $x \in Q$. Siis $||q_i(x)|| \leqslant ||x||$ iga $i \in I$ korral. Seega $\sup_{i\in I} ||q_i(x)|| \leqslant ||x||$ ja me võime defineerida kujutuse $m : Q \to \prod_{i\in I} C_i$ võrdusega

$$m(x) := (q_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C_i.$$

Selline m on üheselt määratud ja ahendav operaator. $\square$

Näide 5.19. Kategoorias Top on süsteemi $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ korrutis topoloogiline ruum (X, τ), kus $X = \prod_{i\in I} X_i$ on otsekorrutis ja topoloogia τ baas koosneb hulga X alamhulkadest, millel on kuju

$$\prod_{i\in I} U_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in U_i\} \subseteq X$$

kus $U_i \in \tau_i$ iga $i \in I$ korral ja hulk $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ on lõplik. Topoloogia τ ise koosneb kõigist baasi kuuluvate alamhulkade ühenditest. Projektsioonid $p_k : X \to X_k$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_k$, on pidevad, sest kui $U \in \tau_k$, siis

$$p_k^{-1}(U) = \prod_{i\in I} V_i$$

kus $V_k = U$ ja $V_i = X_i$ iga $i \in I \setminus \{k\}$ korral.

Universaalomaduse kontrollimiseks olgu

$$q_i : (Y, \sigma) \to (X_i, \tau_i),\ \ i \in I,$$

pidevate kujutuste süsteem. Näitame, et kujutus

$$m : Y \to X, \quad y \mapsto (q_i(y))_{i\in I}$$

on pidev. Kui $\prod_{i\in I} U_i$ kuulub τ baasi, siis

$$m^{-1}\left(\prod_{i\in I} U_i\right) = \{y \in Y \mid \forall i \in I\colon\ q_i(y) \in U_i\} = \bigcap_{i\in I} q_i^{-1}(U_i). \tag{5.3}$$

Iga $i \in I$ korral $q_i^{-1}(U_i) \in \sigma$, sest q_i on pidev ja $U_i \in \tau_i$. Veelgi enam, kui $U_i = X_i$, siis $q_i^{-1}(U_i) = Y$ ja see liige ei mängi mingit rolli ühisosas (5.3). Seega

$$m^{-1}\left(\prod_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ U_i\neq X_i}} q^{-1}(U_i),$$

mis on Y lahtiste alamhulkade lõplik ühisosa ja seega lahtine alamhulk. $\square$

Näide 5.20. Kui me vaatleme järjestatud hulka $(P, \leqslant)$ kategooriana (vt. näidet 1.11), siis korrutised (kui nad leiduvad) on täpselt alumised rajad. $\square$

Näide 5.21. Selleks, et funktsionaalses programmeerimiskeeles (mida vaatlesime alajaotuses 1.3) lubada operatsioone, mis sõltuvad mitmest muutujast, on mõistlik eeldada, et mistahes tüüpide A ja B korral on keeles olemas kirjetüüp P koos kahe väljaselektoriga $P.A : P \to A$ ja $P.B : P \to B$, mis rahuldab universaalomadust. Näiteks kirjetüübil ISIK võivad olla väljad NIMI ja VANUS. Seega kirjekonstruktori olemasolu keeles L tähendaks, et vastavas kategoorias $\mathcal{C}(L)$ on olemas lõplikud korrutised. □

Vaatleme kokorrutiste näiteid.

Näide 5.22. Kategoorias Set on süsteemi $(C_i)_{i\in I}$ kokorrutis sinna kuuluvate hulkade lõikumatu ühend. Selle lõikumatu ühendi võib konstrueerida kui hulga

$$\bigsqcup_{i\in I} C_i := \bigcup_{i\in I}(C_i \times \{i\}) = \{(x,i) \mid i \in I,\ x \in C_i\}.$$

Sisestused $u_i : C_i \to \bigsqcup_{i\in I} C_i$ on defineeritud võrdusega $u_i(x) := (x,i)$, $x \in C_i$. □

Näide 5.23. Kvaasikategoorias CAT on kategooriate süsteemi kokorrutis sinna kuuluvate kategooriate lõikumatu ühend. □

Näide 5.24. Kategoorias Ab on süsteemi $(A_i)_{i\in I}$ kokorrutiseks Abeli rühmade otsesumma

$$\coprod_{i\in I} A_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i, \text{ hulk } \{i \in I \mid x_i \neq 0\} \text{ on lõplik }\} \leqslant \prod_{i\in I} A_i,$$

kus liitmine on defineeritud komponenthaaval. Sisestused $u_k : A_k \to \coprod_{i\in I} A_i$ on defineeritud võrdusega $u_k(x) := (x_i)_{i\in I}$, kus $x_k = x$ ja kõik teised komponendid on nullid. Kui B on teine Abeli rühm ja $q_i : A_i \to B$, $i \in I$, on rühmade homomorfismide süsteem, siis üheselt määratud kujutused $m : \coprod_{i\in I} A_i \to B$ on defineeritud võrdusega $m((x_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} q_i(x_i)$, kus viimane summa on tegelikult lõpliku arvu nullist erinevate elementide summa. □

Näide 5.25. Kategoorias Grp konstrueeritakse süsteemi $(G_i)_{i\in I}$ kokorrutis järgmiselt. Olgu V hulkade G_i lõikumatu ühend ja olgu V^* vaba monoid baasiga V, s.t. kõigi V elementide lõplike jadade ("sõnade") hulk koos konkatenatsioonioperatsiooniga. Muuhulgas sisaldab V^* tühja jada. Vaatleme hulgal V^* ekvivalentsiseost σ, mis on tekitatud järgmiste reeglite poolt:

- iga rühma G_i ühikelemendist koosnev 1-elemendiline jada on ekvivalentne tühja jadaga,
- jada, mis sisaldab kaks järjestikkust samasse hulka G_i kuuluvat elementi, on ekvivalentne jadaga, mis saadakse sellest nende kahe elemendi asendamisel nende korrutisega rühmas G_i.

Seos σ osutub kongruentsiks ja faktormonoid

$$\coprod_{i\in I} G_i := V^*/\sigma$$

on rühm, kus $[v_1 \dots v_n]_\sigma^{-1} = [v_n^{-1} \dots v_1^{-1}]_\sigma$, $v_1, \dots, v_n \in V$. Kujutused

$$u_i : G_i \to \coprod_{i\in I} G_i, \quad x \mapsto [x]_\sigma,$$

on rühmade homomorfismid ja saab näidata, et $\coprod_{i\in I} G_i$ on tõepoolest rühmade $G_i, i \in I$ kokorrutis. Rühmateoorias kutsutakse seda kokorrutist $\coprod_{i\in I} G_i$ harilikult **rühmade $G_i, i \in I$, vabakorrutiseks**[85]. □

Näide 5.26. Kategoorias Top on süsteemi $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ kokorrutiseks (X, τ), kus X on hulkade X_i lõikumatu ühend ja τ on topoloogia hulgal X, mis on tekitatud topoloogiate τ_i lõikumatu ühendi poolt. □

Näide 5.27. Kui vaatleme järjestatud hulka $(P, \leqslant)$ kategooriana (vt. näidet 1.11), siis kokorrutised (kui nad leiduvad) on ülemised rajad. □

[85] *free product*

5.2. Võrdsustajad ja kovõrdsustajad

Definitsioon 5.28. Olgu $f, g : A \to B$ morfismid kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide f ja g **võrdsustaja**[86] on paar (E, e), mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $e : E \to A$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $f \circ e = g \circ e$;
3. iga $\mathcal{C}$ morfismi $e' : E' \to A$ korral, mis rahuldab tingimust $f \circ e' = g \circ e'$, leidub üheselt määratud morfism $k : E' \to E$ nii, et $e \circ k = e'$.

Lühidalt kirjutatakse $(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f, g)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E' \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Definitsioon 5.29. Olgu $f, g : A \to B$ morfismid kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide f ja g **kovõrdsustaja** on paar (C, c), mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $c : B \to C$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $c \circ f = c \circ g$;
3. iga $\mathcal{C}$ morfismi $c' : B \to C'$ korral, mis rahuldab tingimust $c' \circ f = c' \circ g$, leidub üheselt määratud morfism $k : C \to C'$ nii, et $k \circ c = c'$.

Lühidalt kirjutatakse $(C, c) \approx \mathsf{Coeq}(f, g)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & C \arrow[d, dashed, "k"] \\ & & C' \end{tikzcd}$$

Järgnevalt tutvume mõnede (ko)võrdsustajate omadustega.

Lause 5.30. *Kahe morfismi (ko)võrdsustaja, kui ta leidub, on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.*

TÕESTUS. Oletame, et nii (E, e) kui ka (E', e') on $f, g : A \to B$ võrdsustajad. Siis leiduvad sellised $k : E' \to E$ ja $l : E \to E'$, et $e \circ k = e'$ ja $e' \circ l = e$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, dashed, shift left, "l"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E' \arrow[u, dashed, shift left, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Kuna nii id_E kui ka $k \circ l$ muudavad kolmnurgad

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \\ E \arrow[u, shift left, "\mathrm{id}_E"] \arrow[u, shift right, "k \circ l"'] \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

kommutatiivseks, siis peavad nad olema võrdsed, kuna võrdsustaja definitsiooni järgi peab 'võrdsustav' morfism $E \longrightarrow E$ ühene olema. Samamoodi $l \circ k = \mathrm{id}_{E'}$, mis tõestab, et $E \cong E'$. ■

Lause 5.31. *Kui (E, e) on morfismide $f, g : A \to B$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{C}$, siis e on monomorfism.*

TÕESTUS. Oletame, et $e \circ k = e \circ l$, kus $k, l : E' \to E$. Siis $k = l$, sest leidub täpselt üks morfism, mis muudab alljärgnevas diagrammis kolmnurgad kommutatiivseks.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E' \arrow[u, shift left, "l"] \arrow[u, shift right, "k"'] \arrow[ur, "e \circ k"'] & & \end{tikzcd}$$

Järelikult on e monomorfism. ■

[86] *equalizer*

Lause 5.32. *Kui (C, c) on morfismide $f, g : A \to B$ kovõrdsustaja kategoorias $\mathcal{C}$, siis c on epimorfism.* $\boxed{D}$

Lemma 5.33. *Olgu $f\colon A \longrightarrow B$ morfism kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide paari (f, f) võrdsustaja alati leidub ja on paar (A, id_A).*

Lause 5.34. *Olgu kategooria $\mathcal{C}$ morfism $f\colon A \longrightarrow B$ epimorfism ja mingite morfismide $g, h\colon B \longrightarrow C$ võrdsustaja. Siis on f isomorfism kategoorias $\mathcal{C}$.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja epimorfism $f\colon A \twoheadrightarrow B$ morfismide $g, h\colon B \longrightarrow C$ võrdsustaja. Võrdsustaja definitsioonist saame, et $g \circ f = h \circ f$. Kuna f on epimorfism, saame $g = h$. Lemmast 5.33 saame, et paari (g, h) võrdsustaja on (B, id_B). Lausest 5.30 teame, et leidub isomorfism $k\colon A \longrightarrow B$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "k"'] & B \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \\
& B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Nüüd $f = \mathrm{id}_B \circ k$. Seega f on isomorfism, kuna esitub kahe isomorfismi kompositsioonina. $\blacksquare$

Lemma 5.35. *Olgu $f\colon A \longrightarrow B$ morfism kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide paari (f, f) kovõrdsustaja alati leidub ja on paar (B, id_B).* $\boxed{D}$

Lause 5.36. *Olgu kategooria $\mathcal{C}$ morfism $f\colon A \longrightarrow B$ monomorfism ja mingite morfismide $g, h\colon C \longrightarrow A$ kovõrdsustaja. Siis on f isomorfism kategoorias $\mathcal{C}$.* $\boxed{D}$

5.2.1. Võrdsustajate ja kovõrdsustajate näited

Näide 5.37. Enamuses konkreetsetes kategooriates (Set, Top, Grp, Ab, Ban_1, ...) saab morfismide $f, g : A \to B$ võrdsustaja anda võrdusega

$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}, \tag{5.4}$$

kusjuures E struktuur on indutseeritud A struktuuri poolt ja kujutus $e : E \to A$ on sisestus.

Näiteks kategoorias Set on kujutuste $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 1$ võrdsustaja, ringjoon $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Kategoorias Ab on $f, g : A \to B$ võrdsustaja defineeritud võrdusega (5.4). See võrdsustaja on homomorfismi $f - g : A \to B$ tuum $\ker(f - g) = \{a \in A \mid (f - g)(a) = 0_B\}$. $\square$

Näide 5.38. Mittetühjade hulkade (või mittetühjade poolrühmade) kategoorias on olemas paralleelseid morfisme, millel ei ole võrdsustajat. Nimelt peavad sel juhul need paralleelsed morfismid $f, g\colon A \longrightarrow B$ olema sellised, et nad ei lange kokku ühegi argumendi korral. Sellisel juhul on võrdusega (5.4) defineeritud E tühi, mis ei kuulu antud kategooriasse. $\square$

Näide 5.39. Kategoorias Set on kujutuste $f, g : A \to B$ kovõrdsustaja faktorhulk B/σ koos loomuliku sürjektsiooniga $\pi : B \to B/\sigma$, kus σ on paaride hulga $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ poolt tekitatud ekvivalentsiseos hulgal B. $\square$

Näide 5.40. Kategoorias Ab on homomorfismi $f : A \to B$ ja nullhomomorfismi kovõrdsustajaks loomulik sürjektsioon $\pi : B \to B/f(A)$ faktorrühmale $B/f(A)$. Üldisemalt on homomorfismide $f, g : A \to B$ kovõrdsustajaks homomorfismi $f - g : A \to B$ ja nullhomomorfismi kovõrdsustaja, see tähendab loomulik sürjektsioon $B \to B/(f - g)(A)$.

Kovõrdsustajate kirjeldused kategooriates $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ ja Mod_R on analoogilised. $\square$

Näide 5.41. Paljudes algebraliste struktuuride (nt. rühmad, ringid) kategooriates on olukord keerulisem. Üldiselt tuleb homomorfismide $f, g : A \to B$ kovõrdsustaja konstrueerimiseks faktoriseerida B hulga $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ poolt tekitatud kongruentsi järgi. $\square$

Näide 5.42. Kui $f, g : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ on pidevad kujutused kategoorias Top, siis nende kovõrdsustaja on $(Y/\sigma, \theta')$, kus σ on hulga $\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ poolt tekitatud ekvivalentsiseos ja θ' on faktortopoloogia, s.t.

$$\theta' = \{V \subseteq Y/\sigma \mid \pi^{-1}(V) \in \theta\},$$

kus $\pi : Y \to Y/\sigma$ on loomulik sürjektsioon. $\square$

Üks võimalus on mõelda võrdsustajast kui suurimast alamobjektist, millel kehtib mingi samasus või samasuste hulk. Kovõrdsustaja on vähim samastamine, mis on vaja teha, et samasused kehtiks ekvivalentsikalssidel. Järgnev näide illustreerib seda.

Näide 5.43. On kaks võimalust defineerida ratsionaalarve. Esimeses konstruktsioonis samastatakse murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ parajasti siis, kui $a \cdot d = b \cdot c$. Seda võib kirjeldada kui kovõrdsustajat

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1 \arrow[r, "\pi"] & (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1)/\sigma = \mathbb{Q}, \end{tikzcd}$$

kus

$$T = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1 \mid ad = bc\},$$

$f(a, b, c, d) = (a, b)$, $g(a, b, c, d) = (c, d)$, σ konstrueeritakse kanooniliselt nagu näites 5.39 ja tähistatakse $\frac{a}{b} := [(a, b)]_\sigma$.

Teine viis on defineerida ratsionaalarvud paaridena $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1$, kus a ja b on ühistegurita. Selliste paaride hulk on võrdsustaja

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1 \mid \text{SÜT}(a, b) = 1\} \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1 \arrow[r, shift left, "\text{SÜT}"] \arrow[r, shift right, "\text{const}_1"'] & \mathbb{N}_1, \end{tikzcd}$$

kus ι on sisestus ja const_1 on konstantne kujutus arvule 1. □

5.3. Tagasitõmbajad ja väljatõukajad

Definitsioon 5.44. Olgu $f : A \to C$ ja $g : B \to C$ kaks morfismi kategoorias $\mathcal{C}$, millel on sama sihtobjekt. Morfismide f ja g **tagasitõmbaja**[87] on kolmik (P, p_1, p_2), mis rahuldab tingimusi:

1. $p_1 : P \to A$ ja $p_2 : P \to B$ on morfismid kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $f \circ p_1 = g \circ p_2$;
3. kui $q_1 : Q \to A$ ja $q_2 : Q \to B$ on sellised $\mathcal{C}$ morfismid, et $f \circ q_1 = g \circ q_2$, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to P$ nii, et $p_1 \circ m = q_1$ ja $p_2 \circ m = q_2$.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Ruutu eelmises diagrammis nimetatakse **konservatiivseks ruuduks** ehk tagasitõmbamisruuduks. Lühidalt kirjutatakse $(P, p_1, p_2) \approx \mathsf{Pb}(f, g)$.

Näide 5.45. Kategoorias Set on kujutuste $f : A \to C$ ja $g : B \to C$ tagasitõmbaja kolmik (P, p_1, p_2), kus

$$P = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \subseteq A \times B$$

ja $p_1(a, b) = a$, $p_2(a, b) = b$ iga $(a, b) \in P$ korral.

Kui A ja B on C alamhulgad ja f, g on sisestused, siis P on isomorfne ühisosaga $A \cap B$.

Sarnane konservatiivsete ruutude konstruktsioon töötab paljudes kategooriates (nt. Grp, Mod_R, Rng, Top) kui P varustatada korrutise $A \times B$ poolt indutseeritud struktuuriga. □

"Tagasitõmbaja" duaalne mõiste on "väljatõukaja".

Definitsioon 5.46. Olgu $f : C \longrightarrow A$ ja $g : C \longrightarrow B$ kaks morfismi kategoorias $\mathcal{C}$, millel on sama lähteobjekt. Morfismide f ja g **väljatõukaja**[88] on kolmik (P, q_1, q_2), mis rahuldab tingimusi:

[87] *pullback*
[88] *pushout*

1. $q_1 : A \longrightarrow P$ ja $q_2 : B \longrightarrow P$ on morfismid kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $q_1 \circ f = q_2 \circ g$;
3. kui $u_1 : A \longrightarrow Q$ ja $u_2 : B \longrightarrow Q$ on sellised $\mathcal{C}$ morfismid, et $u_1 \circ f = u_2 \circ g$, siis leidub üheselt määratud morfism $h : P \longrightarrow Q$ nii, et $h \circ q_1 = u_1$ ja $h \circ q_2 = u_2$.

$$\begin{tikzcd}
Q & & \\
& P \arrow[ul, dashed, "h"] & B \arrow[l, "q_2"'] \arrow[ull, "u_2"'] \\
& A \arrow[u, "q_1"] \arrow[uul, "u_1"] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Ruutu eelmises diagrammis nimetatakse **radikaalseks ruuduks** ehk väljatõukamiseruuduks. Lühidalt kirjutatakse $(P, q_1, q_2) \approx \mathsf{Po}(f, g)$.

Definitsioon 5.47. Olgu I hulk ja $f_i : A_i \to C$, $i \in I$, kategooria $\mathcal{C}$ morfismide süsteem. Morfismide f_i **hulgitagasitõmbaja**[89] on paar $(P, (p_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:

1. $p_i : P \to A_i$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$ iga $i \in I$ korral;
2. leidub morfism $u : P \to C$ nii, et $f_i \circ p_i = u$ iga $i \in I$ korral;
3. kui $q_i : Q \to A_i$, $i \in I$, ja $v : Q \to C$ on sellised $\mathcal{C}$ morfismid, et $f_i \circ q_i = v$ iga $i \in I$ korral, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to P$ kategoorias $\mathcal{C}$ nii, et $p_i \circ m = q_i$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dd, "q_i"'] \arrow[ddr, "v"] & \\
P \arrow[d, "p_i"] \arrow[dr, "u"] & \\
A_i \arrow[r, "f_i"'] & C
\end{tikzcd}$$

Osutub, et lõppobjekti olemasolu korral on korrutised teatud hulgitagasitõmbajad.

Lause 5.48. *Olgu* $\mathbf{1}$ *kategooria* $\mathcal{C}$ *lõppobjekt. Siis* $(P, (p_i)_{i \in I})$ *on objektide* A_i, $i \in I$, *korrutis parajasti siis, kui* $(P, (p_i)_{i \in I})$ *on (üheselt määratud) morfismide* $f_i : A_i \to \mathbf{1}$, $i \in I$, *hulgitagasitõmbaja.*

Tõestus. **Tarvilikkus.** Ilmne.

Piisavus. Olgu $(P, (p_i)_{i \in I})$ morfismide $f_i : A_i \to \mathbf{1}$, $i \in I$, hulgitagasitõmbaja ning olgu antud morfismid $q_i : Q \to A_i$, $i \in I$. Et $\mathbf{1}$ on lõppobjekt, siis leidub täpselt üks morfism $v : Q \to \mathbf{1}$. Järelikult $f_i \circ q_i = v$ iga $i \in I$ korral. Eelduse põhjal leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to P$ nii, et $p_i \circ m = q_i$ iga $i \in I$ korral. ■

Järeldus 5.49. *Kui kategoorias on lõppobjekt ja hulgitagasitõmbajad, siis selles kategoorias on korrutised.*

Lause 5.50. *Kui ruudud (I) ja (II) diagrammis*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "e"] \\
D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd}$$

on konservatiivsed ruudud, siis ka välimine ristkülik on konservatiivne ruut.

[89] *multiple pullback*

Tõestus. Olgu (I) ja (II) konservatiivsed ruudud ja $q : Q \to D$, $r : Q \to C$ sellised, et $g \circ f \circ q = e \circ r$. Siis leidub üheselt määratud $n : Q \to B$ nii, et $b \circ n = r$ ja $d \circ n = f \circ q$. Kasutades seda, et (I) on konservatiivne ruut, saame leida üheselt määratud $m : Q \to A$ nii, et $c \circ m = q$ ja $a \circ m = n$. Järelikult $b \circ a \circ m = b \circ n = r$. Kui ka $m' : Q \to A$ on selline, et $b \circ a \circ m' = r$ ja $c \circ m' = q$, siis $b \circ (a \circ m) = r = b \circ (a \circ m')$ ja

$$d \circ (a \circ m) = d \circ n = f \circ q = f \circ c \circ m' = d \circ (a \circ m'),$$

kust $a \circ m = a \circ m'$ tänu sellele, et (II) on konservatiivne ruut. Kuna $a \circ m = n = a \circ m'$ ja $c \circ m = q = c \circ m'$, siis $m = m'$ ruudu (I) konservatiivsuse tõttu.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, dashed, "n"] \arrow[drrr, "r"] \arrow[ddr, "q"'] & & & \\
& A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "e"] \\
& D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd}$$

■

Definitsioon 5.51. Paari (f, f) tagasitõmbajat nimetatakse morfismi f **tuumapaariks**[90].

Näide 5.52. Näitest 5.45 järeldub, et kategooria Set morfismi $f : A \to C$ tuumapaar on kujutuse f tuum $\ker f = \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$ koos vastavate projektisoonidega. Sama kehtib näiteks ka kõigi monoidide kategoorias Mon. □

Järgmised laused annavad mõned huvitavad seosed tuumapaaride ja kovõrdsustajate vahel.

Lause 5.53. *Kui kovõrdsustajal on olemas tuumapaar, siis on see kovõrdsustaja tolle tuumapaari kovõrdsustaja.*

Tõestus. Vaatleme diagrammi

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
P \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c'"'] & C \arrow[dl, dashed, "k"] \\
& C' &
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

kus $(C, c) \approx \mathsf{Coeq}(f, g)$ ja $(P, p_1, p_2) \approx \mathsf{Pb}(c, c)$. Näitame, et $(C, c) \approx \mathsf{Coeq}(p_1, p_2)$. Kuna $c \circ f = c \circ g$ ja (P, p_1, p_2) on paari (c, c) tagasitõmbaja, siis leidub üheselt määratud morfism $m : A \to P$ nii, et $p_1 \circ m = f$ ja $p_2 \circ m = g$. Kui nüüd $c' : B \to C'$ on selline, et $c' \circ p_1 = c' \circ p_2$, siis

$$c' \circ f = c' \circ p_1 \circ m = c' \circ p_2 \circ m = c' \circ g$$

ning kovõrdsustaja (C, c) universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud $k : C \to C'$, mille korral $k \circ c = c'$. Sellega on näidatud, et (C, c) on morfismide p_1 ja p_2 kovõrdsustaja. ■

Lause 5.54. *Kui tuumapaaril on olemas kovõrdsustaja, siis on see tuumapaar tolle kovõrdsustaja tuumapaar.*

Tõestus. Vaatleme jälle diagrammi (5.5), kus nüüd eeldame, et $(P, p_1, p_2) \approx \mathsf{Pb}(c', c')$ ja $(C, c) \approx \mathsf{Coeq}(p_1, p_2)$. Peame näitama, et $(P, p_1, p_2) \approx \mathsf{Pb}(c, c)$. Et $c' \circ p_1 = c' \circ p_2$, siis leidub üheselt määratud $k : C \to C'$ nii, et $k \circ c = c'$. Oletame, et $f, g : A \to B$ on sellised, et $c \circ f = c \circ g$. Siis

$$c' \circ f = k \circ c \circ f = k \circ c \circ g = c' \circ g,$$

millest järeldub, et $p_1 \circ m = f$ ja $p_2 \circ m = g$ üheselt määratud morfismi $m : A \to P$ korral. ■

Duaalselt nimetatakse morfismi f **kotuumapaariks** paari (f, f) väljatõukajat.

[90] *kernel pair*

5.3.1. Veelkord mono- ja epimorfismidest

Osutub, et monomorfisme on võimalik kirjeldada tuumapaaride abil. Seetõttu võib öelda, et monomorfismid on tagasitõmbajate erijuhud.

Lause 5.55. *Iga morfismi $f : A \to B$ korral on järgmised väited samaväärsed.*
1. *f on monomorfism.*
2. *$(A, \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$ on morfismi f tuumapaar.*
3. *Morfismil f leidub selline tuumapaar (P, p_1, p_2), kus $p_1 = p_2$.*

Tõestus. 1. $\Rightarrow$ 2. Olgu f monomorfism. Ilmselt $f \circ \mathrm{id}_A = f \circ \mathrm{id}_A$. Kui $f \circ q_1 = f \circ q_2$ mingite morfismide $q_1, q_2 : Q \to A$ korral, siis $q_1 = q_2$ ja seega kolmnurgad diagrammis

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "q_1"] \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "q_1"'] & & \\
& A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivsed.

2. $\Rightarrow$ 3. on ilmne.

3. $\Rightarrow$ 1. Olgu (P, p, p) morfismi f tuumapaar ja $f \circ q_1 = f \circ q_2$, kus $q_1, q_2 : Q \to A$. Siis leidub üheselt määratud $m : Q \to P$ nii, et $q_1 = p \circ m = q_2$. Seega f on monomorfism.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

■

Järgnevalt tutvume monomorfismide olulise alamliigiga – regulaarsete monomorfismidega.

Definitsioon 5.56. Morfismi $f\colon A \longrightarrow B$ nimetatakse **regulaarseks monomorfismiks**[91] kui (A, f) on mingite morfismide $g, h\colon B \longrightarrow C$ võrdsustaja.

Lausest 5.31 saame, et iga regulaarne monomorfism on tõesti monomorfism.

Lause 5.57. *Iga koretraktsioon on regulaarne monomorfism.*

Tõestus. Olgu $f\colon A \longrightarrow B$ koretraktsioon, siis leidub morfism $g\colon B \longrightarrow A$ nii, et $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Vaatleme morfisme $f \circ g, \mathrm{id}_B\colon B \longrightarrow B$. Paneme tähele, et

$$(f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

Olgu $e\colon E \longrightarrow B$ selline, et $(f \circ g) \circ e = \mathrm{id}_B \circ e$. Vaatleme morfismi $g \circ e\colon E \longrightarrow A$. Paneme tähele, et

$$f \circ (g \circ e) = (f \circ g) \circ e = \mathrm{id}_B \circ e = e.$$

Peame veel näitama, et $g \circ e$ on üheselt määratud. Selleke oletame, et leidub morfism $k\colon E \longrightarrow A$ nii, et $f \circ k = e$. Paneme tähele, et

$$f \circ k = e = f \circ (g \circ e).$$

[91] *regular monomorphism*

Kuna tänu lausele 2.2 on f monomorfism, saame, et $k = g \circ e$, mis tõestab, et $g \circ e$ on tõesti üheselt määratud.

Kokkuvõttes oleme saanud, et (A, f) on morfismide $f \circ g$ ja id_B võrdsustaja ja seetõttu regulaarne monomorfism. ■

Nüüd saame lausest 2.22 või teisalt ka lausest 5.34, et kui morfism $f\colon A \longrightarrow B$ on korraga nii epimorfism kui ka regulaarne monomorfism, siis on ta isomorfism.

Lause 5.58. *Iga regulaarne monomorfism on ekstremaalne monomorfism.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{A}$ kategooria ja $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ regulaarne monomorfism, seega leiduvad morfismid $g, h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C)$ nii, et (A, f) on nende võrdsustaja. Lisaks kehtigu $f = k \circ e$, kus $e\colon A \twoheadrightarrow E$ on epimorfism ja $k\colon E \longrightarrow B$ mingi morfism. Sel juhul kehtib

$$(h \circ k) \circ e = h \circ (k \circ e) = h \circ f = g \circ f = g \circ (k \circ e) = (g \circ k) \circ e.$$

Järelikult $h \circ k = g \circ k$, kuna e on epimorfism. Seega tulenevalt võrdsustaja definitsioonist leidub täpselt üks morfism $m\colon E \longrightarrow A$ nii, et $k = f \circ m$. Paneme tähele, et

$$f \circ \mathrm{id}_A = f = k \circ e = (f \circ m) \circ e = f \circ (m \circ e).$$

Kuna f on tänu lausele 5.31 monomorfism, siis $\mathrm{id}_A = m \circ e$. Teiselt poolt paneme tähele, et

$$\mathrm{id}_E \circ e = e = e \circ \mathrm{id}_A = e \circ (m \circ e) = (e \circ m) \circ e.$$

Millest järeldub, et $\mathrm{id}_E = e \circ m$, kuna e on epimorfism. Kokkuvõttes saime, et e on isomorfism, millest tuleneb, et f on ekstremaalne monomorfism. ■

Kokkuvõtlikult saame nüüd kirja panna järgneva implikatsioonide jada, mis kirjeldab erinevaid monomorfismide liike. Järgnev kehtib igas kategoorias morfismi f kohta:

koretraktsioon $\Longrightarrow$ regulaarne mono. $\Longrightarrow$ ekstremaalne mono. $\Longrightarrow$ monomorfism.

Duaalselt saame samasuguse teooria arendada ka epimorfismide jaoks. Kõigepealt kirjeldame epimorfisme väljatõukajate abil.

Lause 5.59. *Iga morfismi $f\colon A \longrightarrow B$ korral on järgmised väited samaväärsed:*
1. *f on epimorfism;*
2. *$(B, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B)$ on morfismi f kotuumapaar;*
3. *morfismide paaril (f, f) leidub selline väljatõukaja (P, q_1, q_2), kus $q_1 = q_2$.* $\boxed{D}$

Morfismi $f\colon A \longrightarrow B$ nimetatakse **regulaarseks epimorfismiks**, kui (A, f) on mingite morfismide $g, h\colon D \longrightarrow A$ kovõrdsustaja.

Lause 5.60. *Iga retraktsioon on regulaarne epimorfism ning iga regulaarne epimorfism on ekstremaalne epimorfism.* $\boxed{D}$

5.4. Piirid ja kopiirid

Tuleb välja, et kõik selles päätükis siiani vaadeldud konstruktsioonid on üldisema konstruktsiooni erijuhud. Edasises tähistagu $\mathcal{D}$ väikest kategooriat ja $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ selle kategooria objektide hulka.

Definitsioon 5.61. Olgu $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor. **Koonus**[92] funktoril F (lühidalt F-koonus) on paar $(C, (p_i)_{i \in I})$, mis rahuldab tingimusi:
1. $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
2. iga objekti $i \in I$ korral $p_i : C \to F(i)$;
3. kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \to j$ korral kehtib võrdus $p_j = F(d) \circ p_i$.

Teiste sõnadega: paar $(C, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril F parajasti siis, kui $p = (p_i)_{i \in I} : \Delta_C \Rightarrow F$, kus $\Delta_C : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on konstantne funktor objektile C (vt. näidet 3.4(3)). See tähendab, et koonused funktoril F on loomulikud teisendused konstantsest funktorist funktorisse F.

[92] *cone*

Definitsioon 5.62. Olgu $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor ja $(B, (q_i)_{i\in I})$, $(C, (p_i)_{i\in I})$ kaks koonust funktoril F. Kategooria C morfismi $f : B \to C$ nimetatakse **morfismiks koonusest** $(B, (q_i)_{i\in I})$ **koonusesse** $(C, (p_i)_{i\in I})$, kui $p_i \circ f = q_i$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
& C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Lause 5.63. *Fikseeritud funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ korral moodustavad koonused funktoril F ja nende morfismid kategooria.*

TÕESTUS. Selle uue kategooria morfisme komponeeritakse nii nagu kategoorias $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "g"] \arrow[dddl, "r_i"'] \arrow[dddr, "r_j"] & \\
& B \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
& C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Oletame, et $f : (B, (q_i)_{i\in I}) \to (C, (p_i)_{i\in I})$ ja $g : (A, (r_i)_{i\in I}) \to (B, (q_i)_{i\in I})$ on kaks funktoril F antud koonuste morfismi. Siis iga $i \in I$ korral

$$p_i \circ (f \circ g) = (p_i \circ f) \circ g = q_i \circ g = r_i$$

ja seega tõepoolest $f \circ g : (A, (r_i)_{i\in I}) \to (C, (p_i)_{i\in I})$ on koonuste morfism. Koonuse $(C, (p_i)_{i\in I})$ ühikmorfism on loomulikult id_C. Komponeerimise assotsiatiivsus järeldub $\mathcal{C}$ vastavast omadusest. ■

Lauses 5.63 konstrueeritud kategooriat tähistatakse $\mathsf{cone}(F)$ ja nimetatakse **F-koonuste kategooriaks**.

Definitsioon 5.64. Funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ **piir**[93] on F-koonuste kategooria $\mathsf{cone}(F)$ lõppobjekt. Seega koonus $(L, (p_i)_{i\in I})$ funktoril F on F piir, kui iga F-koonuse $(Q, (q_i)_{I\in I})$ korral leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to L$ nii, et iga objekti $i \in I$ korral $q_i = p_i \circ m$. Lühidalt kirjutame $(L, (p_i)_{i\in I}) \approx \lim F$.

Vahel öeldakse, et $(L, (p_i)_{i\in I})$ on piir objektidest $F(i)$ ja morfismidest $F(d)$ koosneval diagrammil kategoorias $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
& L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Märgime, et funktori $F \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ piiri $\lim F$ nimetatakse **suureks**, kui $\mathcal{A}$ on suur kategooria.

Lausest 2.37 saame vahetult järgmise tulemuse.

[93] *limit*

Lause 5.65. *Kui $(L, (p_i)_{i\in I})$ ja $(M, (q_i)_{i\in I})$ on funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ piirid, siis leidub selline isomorfism $f : M \to L$ kategoorias $\mathcal{C}$, et $p_i \circ f = q_i$ iga $i \in I$ korral.*

Lause 5.5 saab üldistada suvaliste piiride juhule.

Lause 5.66. *Kui $(L, (p_i)_{i\in I})$ on funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ piir ja $h, k : C \to L$ on sellised morfismid, et iga $i \in I$ korral $p_i \circ h = p_i \circ k$, siis $h = k$.*

Tõestus. Kuna $F(d) \circ p_i \circ h = p_j \circ h$ iga morfismi $d : i \to j$ korral, siis $(C, (p_i \circ h)_{i\in I})$ on koonus funktoril F. Seega leidub ühene morfism $m : C \to L$, mis rahuldab võrdust $p_i \circ m = p_i \circ h$ iga $i \in I$ korral. See aga tähendab, et $h = k$.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[ddl, "p_i\circ h"'] \arrow[ddr, "p_j\circ h"] \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "k"] & \\
& L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

■

Definitsioon 5.67. Olgu $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor. **Kokoonus** funktoril F (lühidalt F-kokoonus) on paar $(C, (u_i)_{i\in I})$, mis rahuldab tingimusi:
1. $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
2. iga objekti $i \in I$ korral $u_i : F(i) \to C$;
3. kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : j \to i$ korral $u_j = u_i \circ F(d)$.

Duaalselt koonuste juhuga defineeritakse F-kokoonuste kategooria $\mathsf{cocone}(F)$.

Definitsioon 5.68. Funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ **kopiir** on F-kokoonuste kategooria $\mathsf{cocone}(F)$ algobjekt. Seega kokoonus $(L, (u_i)_{i\in I})$ funktoril F on F kopiir, kui iga F-kokoonuse $(Q, (v_i)_{i\in I})$ jaoks leidub üheselt määratud morfism $m : L \to Q$ nii, et iga objekti $i \in I$ korral $v_i = m \circ u_i$. Lühidalt kirjutame $(L, (u_i)_{i\in I}) \approx \mathrm{colim} F$.

$$\begin{tikzcd}
& Q & \\
& L \arrow[u, dashed, "m"'] & \\
F(i) \arrow[uur, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"] & & F(j) \arrow[uul, "v_j"'] \arrow[ul, "u_j"'] \arrow[ll, "F(d)"]
\end{tikzcd}$$

Näited 5.69. 1. Vaatleme kahe objektiga diskreetset kategooriat $\mathcal{D}$, $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \{1, 2\}$ (vt. näidet 1.11 (3)). Funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ objektide paari $(F(1), F(2))$ poolt. Koonus funktoril F on diagramm

$$F(1) \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} F(2)$$

ja kokoonus funktoril F on diagramm

$$F(1) \xrightarrow{u_1} P \xleftarrow{u_2} F(2).$$

Seega kolmik (P, p_1, p_2) on funktori F piir parajasti siis, kui ta on objektide $F(1)$ ja $F(2)$ korrutis ning kolmik (P, u_1, u_2) on funktori F kopiir parajasti siis, kui ta on $F(1)$ ja $F(2)$ kokorrutis.

2. Olgu $\mathcal{D} = \mathbf{0}$ tühi kategooria. Siis koonus või kokoonus funktoril $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on lihtsalt $\mathcal{C}$ objekt. Seega $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on F piir (kopiir) parajasti siis, kui ta on $\mathcal{C}$ lõppobjekt (algobjekt).
3. Kui I on hulk ja $\mathcal{D}$ on diskreetne kategooria objektide hulgaga $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = I$, siis funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on määratud $\mathcal{C}$ objektide süsteemi $(F(i))_{i\in I}$ poolt. Koonus funktoril F on paar $(C, (p_i)_{i\in I})$, kus $p_i : C \to F(i)$. See koonus on F piir parajasti siis, kui ta on süsteemi $(F(i))_{i\in I}$ korrutis. Duaalselt, F kopiir on $(F(i))_{i\in I}$ kokorrutis.

4. Vaatleme kategooriat $\mathcal{D}$, kus $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \{1, 0\}$ ja kus on kaks ühikmorfismist erinevat morfismi $d_1, d_2 : 1 \to 0$. Funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ paralleelsete morfismide paariga $f_1, f_2 : F(1) \to F(0)$. Koonus funktoril F on kommutatiivne diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e_1"'] \arrow[rr, bend left, "e_0"] & F(1) \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & F(0) \end{tikzcd}$$

ja kokoonus funktoril F on kommutatiivne diagramm

$$\begin{tikzcd} F(1) \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[rr, bend left, "c_1"] & F(0) \arrow[r, "c_0"'] & C \end{tikzcd}.$$

Ei ole raske näha, et $(E, f_1 \circ e_1, e_1)$ on F piir parajasti siis, kui (E, e_1) on f_1 ja f_2 võrdsustaja ja $(C, c_0, c_0 \circ f_1)$ on F kopiir parajasti siis, kui (C, c_0) on f_1 ja f_2 kovõrdsustaja.

5. Vaatleme kategooriat $\mathcal{D}$, kus $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \{0, 1, 2\}$ ja kus on kaks ühikmorfismist erinevat morfismi $d_1 : 1 \to 0$ ja $d_2 : 2 \to 0$. Funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ morfismide paariga $f_1 : F(1) \to F(0)$, $f_2 : F(2) \to F(0)$. Koonus funktoril F on kommutatiivne diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "p_0"] & F(2) \arrow[d, "f_2"] \\ F(1) \arrow[r, "f_1"'] & F(0) \end{tikzcd}.$$

Seega $(P, f_1 \circ p_1, p_1, p_2)$ on F piir parajasti siis, kui (P, p_1, p_2) on morfismide f_1 ja f_2 tagasitõmbaja.

6. Olgu J hulk ja $\mathcal{D}$ kategooria, kus $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = J \sqcup \{0\}$ ning ühikmorfismist erinevad morfismid on $d_j : j \to 0$, $j \in J$. Funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on ära määratud $\mathcal{C}$ morfismide süsteemiga $(f_j : F(j) \to F(0))_{j \in J}$. Koonus funktoril F on kommutatiivsete diagrammide pere

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "p_j"'] \arrow[dr, "p_0"] & \\ F(j) \arrow[r, "f_j"'] & F(0) \end{tikzcd},$$

$j \in J$. Seega $(P, (p_i)_{i \in J \sqcup \{0\}})$ on F piir parajasti siis, kui $(P, (p_j)_{j \in J})$ on morfismide f_j, $j \in J$, hulgitagasitõmbaja. □

Järgnev tabel võtab eelneva näite kokku.

$\mathcal{D}$ objektide hulk	ühikmorfismist erinevad $\mathcal{D}$ morfismid	$\mathcal{C}$-s on olemas $\mathcal{D}$-piirid tähendab, et $\mathcal{C}$-s on ...	$\mathcal{C}$-s on olemas $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$-kopiirid tähendab, et $\mathcal{C}$-s on ...
ei ole	ei ole	lõppobjekt	algobjekt
$\{1, 2\}$	ei ole	binaarsed korrutised	binaarsed kokorrutised
$\{0, 1\}$	$d_1, d_2 : 1 \rightrightarrows 0$	võrdsustajad	kovõrdsustajad
$\{0, 1, 2\}$	$d_1 : 1 \to 0$, $d_2 : 2 \to 0$	tagasitõmbajad	väljatõukajad
$\mathcal{D}$ objektide hulk	ühikmorfismist erinevad $\mathcal{D}$ morfismid	$\mathcal{C}$-s on olemas $\mathcal{D}$-piirid kõigi selliste $\mathcal{D}$-de korral tähendab, et $\mathcal{C}$-s on ...	$\mathcal{C}$-s on olemas $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$-kopiirid kõigi selliste $\mathcal{D}$-de korral tähendab, et $\mathcal{C}$-s on ...
I hulk	ei ole	korrutised	kokorrutised
$\{1, 2\}$	$d_i : 1 \to 2, i \in I$	hulgivõrdsustajad	hulgikovõrdsustajad
$J \sqcup \{0\}$, J hulk	$d_j : j \to 0, j \in J$	hulgitagasitõmbajad	hulgiväljatõukajad

Osutub, et kõik piirid (ja ka kõik kopiirid) eksisteerivad kategoorias Set ja neid saab konstrueerida kanoonilisel viisil.

Teoreem 5.70. *Olgu $F : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ funktor ja*

$$L = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in F(i),\ (\forall d \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(i,j)\colon\ F(d)(x_i) = x_j)\} \subseteq \prod_{i\in I} F(i).$$

Siis $(L,(p_i)_{i\in I})$, kus $p_i : L \to F(i)$, $i \in I$, on otsekorrutise $\prod_{i\in I} F(i)$ projektsioonide ahendid, on F piir.

Tõestus. Ilmselt $(L,(p_i)_{i\in I})$ on koonus funktoril F. Kui $(Q,(q_i)_{i\in I})$ on ka koonus funktoril F, siis nõutav üheselt määratud kujutus $m : Q \to L$ on iga $x \in Q$ korral defineeritud võrdusega

$$m(x) := (q_i(x))_{i\in I}. \qquad \blacksquare$$

Piirid saab paljudes teistes konkreetsetes kategooriates konstrueerida samamoodi. Näiteks kui $F : \mathcal{D} \to \mathsf{Grp}$, siis L on rühmade $F(i)$ otsekorrutise $\prod_{i\in I} F(i)$ alamhulk, mis on rühm komponenthaaval defineeritud tehete suhtes. Olgu $i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ja $d\colon i \longrightarrow j$. Kuna iga $F(d)$ on rühmade homomorfism, siis

$$F(d)(x_i y_i) = F(d)(x_i) \cdot F(d)(y_i) = x_j \cdot y_j,$$
$$F(d)(x_i^{-1}) = (F(d)(x_i))^{-1} = x_j^{-1},$$

kus $x_i, y_i \in F(i)$ ja $x_j \in F(j)$, ja seega L on $\prod_{i\in I} F(i)$ alamrühm. On selge, et kujutused p_i on rühmade homomorfismid ja ka m on rühmade homomorfism kui kõik kujutused q_i on rühmade homomorfismid.

Teoreem 5.71. *Olgu $F\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Set}$ funktor ja*

$$C = \left(\coprod_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(i) \right) / \sim,$$

kus $\sim$ on ekvivalentsiseos, mis on genereeritud seose S poolt:

$$x\,S\,x' \iff \exists f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(i,j)\colon \quad F(f)(x) = x',$$

kus $x \in F(i)$ ja $x' \in F(j)$. Siis $(C,(q_i)_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})})$ on funktori F kopiir, siin $q_i = q_i' \circ \kappa$, $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, kus $q_i\colon F(i) \longrightarrow \coprod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(i)$ on lõikumatu ühendi $\coprod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(i)$ sisestus ja κ antud faktorhulga kanooniline sürjektsioon. $\boxed{D}$

5.5. Täielikud kategooriad

Definitsioon 5.72. Kategooria $\mathcal{C}$ on
- **$\mathcal{D}$-täielik**, kus $\mathcal{D}$ on kategooria, kui igal funktoril $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on olemas piir;
- **lõplikult täielik**[94], kui $\mathcal{C}$ on $\mathcal{D}$-täielik iga lõpliku kategooria $\mathcal{D}$ korral;
- **täielik**[95], kui $\mathcal{C}$ on $\mathcal{D}$-täielik iga väikse kategooria $\mathcal{D}$ korral.

Duaalselt defineeritakse **$\mathcal{D}$-kotäielikud**, **lõplikult kotäielikud** ja **kotäielikud** kategooriad.

Teoreem 5.73. *Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral on järgmised väited samaväärsed.*
1. *$\mathcal{C}$ on täielik.*
2. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas hulgitagasitõmbajad ja lõppobjekt.*
3. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas korrutised ja tagasitõmbajad.*
4. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas korrutised ja võrdsustajad.*

Tõestus. (1. $\Rightarrow$ 2.) Ilmne.

(2. $\Rightarrow$ 3.) See tuleb välja järeldusest 5.49.

[94] *finitely complete*
[95] *complete*

(3. $\Rightarrow$ 4.) Olgu kategoorias $\mathcal{C}$ olemas korrutised ja tagasitõmbajad. Peame tõestama, et iga morfismipaari $f, g : A \to B$ jaoks leidub võrdsustaja. Korrutiste universaalomaduse abil saame leida sellised üheselt määratud morfismid $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle$, $\langle \mathrm{id}_A, g\rangle$, et diagrammmid

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, dashed, "\langle \mathrm{id}_A, f\rangle"] \arrow[dr, "f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, dashed, "\langle \mathrm{id}_A, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

kommuteeruvad. Konstrueerime morfismide $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle$ ja $\langle \mathrm{id}_A, g\rangle$ tagasitõmbaja

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, g\rangle"] \\
A \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_A, f\rangle"'] & A \times B
\end{tikzcd}
$$

ja näitame, et (P, k) on morfismide f, g võrdsustaja. Paneme tähele, et selles ruudus $k = l$, sest

$$k = \mathrm{id}_A \circ k = p_A \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ k = p_A \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ l = \mathrm{id}_A \circ l = l.$$

Samuti näeme, et

$$f \circ k = p_B \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ k = p_B \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ l = g \circ l = g \circ k.$$

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
 & P' \arrow[ul, dashed, "m"] \arrow[u, "k'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Kui leidub morfism $k' : P' \to A$, mille korral $f \circ k' = g \circ k'$, siis ka

$$
\begin{aligned}
p_A \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ k' = k' = p_A \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ k', \\
p_B \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ k' = f \circ k' = g \circ k' = p_B \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ k',
\end{aligned}
$$

millest lause 5.5 põhjal järeldub võrdus $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ k' = \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ k'$. Kuna (P, k, k) on tagasitõmbaja, siis leidub üheselt määratud morfism $m : P' \to P$ nii, et $k \circ m = k'$.

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, bend left, "k'"] \arrow[ddr, bend right, "k'"'] & & \\
 & P \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"] & A \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, g\rangle"] \\
 & A \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_A, f\rangle"'] & A \times B
\end{tikzcd}
$$

(4. $\Rightarrow$ 1.) Olgu kategoorias $\mathcal{C}$ olemas korrutised ja võrdsustajad. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktorit $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Kõigepäält konstrueerime korrutised

$$\left(\prod_{i \in I} F(i), (s_i)_{i \in I}\right) \quad \text{ja} \quad \left(\prod_{d \in \mathcal{D}} F(\mathrm{cod}(d)), (r_d)_{d \in \mathcal{D}}\right). \tag{5.6}$$

Teise korrutise universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud morfism α nii, et

$$r_d \circ \alpha = s_{\mathrm{cod}(d)} = s_j$$

iga morfismi $d : i \to j \in \mathcal{D}$ korral, ja üheselt määratud morfism β nii, et

$$r_d \circ \beta = F(d) \circ s_{\mathrm{dom}(d)} = F(d) \circ s_i$$

iga morfismi $d : i \to j \in \mathcal{D}$ korral. Olgu (L, l) paari (α, β) võrdsustaja, siis muuhulgas $\alpha \circ l = \beta \circ l$. Defineerime iga $i \in I$ korral morfismi

$$p_i := s_i \circ l : L \to F(i)$$

ja tõestame, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on funktori F piir.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "q_i"'] \arrow[d, shift right, "m"'] \arrow[d, shift left, "m'"] \arrow[dr, "q"] & F(i) & F(\mathrm{cod}(d)) \\
L \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod\limits_{i \in I} F(i) \arrow[u, "s_i"'] \arrow[ur, "s_{\mathrm{cod}(d)}"] \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[d, "s_{\mathrm{dom}(d)}"] & \prod\limits_{d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})} F(\mathrm{cod}(d)) \arrow[u, "r_d"'] \arrow[d, "r_d"] \\
F(i) & F(\mathrm{dom}(d)) \arrow[r, "F(d)"'] & F(\mathrm{cod}(d))
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

Iga morfismi $d : i \to j$ korral kategoorias $\mathcal{D}$ kehtib

$$F(d) \circ p_i = F(d) \circ s_i \circ l = r_d \circ \beta \circ l = r_d \circ \alpha \circ l = s_j \circ l = p_j,$$

mis tähendab, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril F. Oletame, et $(Q, (q_i)_{i \in I})$ on samuti koonus funktoril F. Korrutise $\prod_{i \in I} F(i)$ universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud morfism $q : Q \to \prod_{i \in I} F(i)$ nii, et $s_i \circ q = q_i$ iga $i \in I$ korral. Nüüd $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \to j$ korral

$$r_d \circ \alpha \circ q = s_j \circ q = q_j = F(d) \circ q_i = F(d) \circ s_i \circ q = r_d \circ \beta \circ q.$$

Lause 5.5 põhjal saame $\alpha \circ q = \beta \circ q$. Võrdsustaja (L, l) universaalomadust kasutades saame üheselt määratud morfismi $m : Q \to L$, mille korral $l \circ m = q$. Järelikult

$$p_i \circ m = s_i \circ l \circ m = s_i \circ q = q_i$$

iga $i \in I$ korral. Jääb tõestada, et morfism m on üheselt määratud. Oletame, et $m' : Q \to L$ on samuti morfism, mis rahuldab võrdusi $p_i \circ m' = q_i$, $i \in I$. Siis

$$s_i \circ l \circ m = s_i \circ q = q_i = p_i \circ m' = s_i \circ l \circ m'$$

iga $i \in I$ korral, millest jälle lause 5.5 põhjal järeldub $l \circ m = l \circ m'$. Sellest saame lause 5.31 tõttu võrduse $m = m'$, sest l on võrdsustaja ja seega monomorfism. ■

Samamoodi saab tõestada järgmise tulemuse.

Teoreem 5.74. *Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. *$\mathcal{C}$ on lõplikult täielik.*
2. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas tagasitõmbajad ja lõppobjekt.*
3. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas lõplikud korrutised ja tagasitõmbajad.*
4. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas lõplikud korrutised ja võrdsustajad.*

Sõnastame ka teoreemiga 5.73 duaalse tulemuse.

Teoreem 5.75. *Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. *$\mathcal{C}$ on kotäielik.*
2. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas hulgiväljatõukajad ja algobjekt.*
3. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas kokorrutised ja väljatõukajad.*
4. *Kategoorias $\mathcal{C}$ on olemas kokorrutised ja kovõrdsustajad.* $\boxed{D}$

Näited 5.76.

1. Lõplike hulkade kategooria FinSet ja lõplike topoloogiliste ruumide kategooria FinTop on mõlemad lõplikult täielikud ja lõplikult kotäielikud, aga kumbki neist ei ole täielik ega kotäielik.
2. Lõplike rühmade kategooria FinGrp on lõplikult täielik, aga mitte lõplikult kotäielik.
3. Kategooriad Set, Grp, Ab ja Top on täielikud ja kotäielikud.
4. Järjestatud hulk, mida vaadeldakse kategooriana, on kategoorselt täielik parajasti siis, kui ta on täielik võre, s.t. mistahes alamhulgal leidub alumine raja. □

5.6. Piire säilitavad funktorid

Definitsioon 5.77. Olgu $\mathcal{D}$ väike kategooria ning tähistame jälle $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Öeldakse, et kovariantne funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **säilitab $\mathcal{D}$-piire**, kui iga funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ korral sellest, et $(L, (p_i)_{i\in I})$ on F piir, järeldub, et $(G(L), (G(p_i))_{i\in I})$ on $G \circ F : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ piir.

Definitsioon 5.78. Kovariantne funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **säilitab piire**[96] (**säilitab lõplikke piire**), kui G säilitab $\mathcal{D}$-piire iga väikse kategooria (lõpliku kategooria) $\mathcal{D}$ korral.

Märgime, et funktorit, mis säilitab kõiki (väikseid) piire, nimetatakse ka **pidevaks**[97] funktoriks.

Märkus 5.79. On selge, et kui $(L, (p_i)_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F))$, siis $(G(L), (G(p_i))_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(G \circ F))$. Seega piiride säilitamise kontrollimine taandub universaalomaduse kontrollimisele viimase koonuse jaoks.

Näited 5.80.

1. Unustavad funktorid kategooriatest Grp, Ab, Mod_R, Rng kategooriasse Set säilitavad piire, aga ükski neist ei säilita kõiki kopiire.
2. Unustav funktor kategooriast Top kategooriasse Set säilitab piire ja kopiire.
3. Kui kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas lõplikud korrutised ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on fikseeritud objekt, siis funktor $(A \times \_) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ säilitab piire. □

Lemma 5.81. *Kui funktor säilitab tagasitõmbajaid, siis ta säilitab ka monomorfisme.*

TÕESTUS. Olgu $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor ja $f : A \rightarrowtail B$ monomorfism kategoorias $\mathcal{A}$. Lause 5.55 põhjal on

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

konservatiivne ruut. Eelduse põhjal on ka

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\mathrm{id}_{G(A)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{G(A)}"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

konservatiivne ruut. Jällegi lause 5.55 põhjal on $G(f)$ monomorfism. ■

[96] *preserves limits*
[97] *continuous*

Teoreem 5.82. *Kui $\mathcal{A}$ on täielik kategooria ja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on funktor, siis järgmised väited on samaväärsed.*

1. *G säilitab piire.*
2. *G säilitab hulgitagasitõmbajaid ja lõppobjekte.*
3. *G säilitab korrutisi ja tagasitõmbajaid.*
4. *G säilitab korrutisi ja võrdsustajaid.*

Tõestus. (1. $\Rightarrow$ 2.). Ilmne.

(2. $\Rightarrow$ 3.). Säilitagu G hulgitagasitõmbajaid ja lõppobjekte. Olgu $\mathcal{D}$ väike diskreetne kategooria, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funktor ja $(P, (p_i)_{i \in I})$ funktori F piir, s.t. objektide $F(i)$, $i \in I$, korrutis. Et $\mathcal{A}$ on täielik, siis on temas olemas lõppobjekt $\mathbf{1}$ ja üheselt määratud morfismid $f_i : F(i) \to \mathbf{1}$, $i \in I$. Lause 5.48 põhjal on $(P, (p_i)_{i \in I})$ morfismide f_i, $i \in I$, hulgitagasitõmbaja. Eelduse tõttu on $G(\mathbf{1})$ kategooria $\mathcal{B}$ lõppobjekt ja $(G(P), (G(p_i))_{i \in I})$ on morfismide $G(f_i) : (G \circ F)(i) \to G(\mathbf{1})$, $i \in I$, hulgitagasitõmbaja kategoorias $\mathcal{B}$. Järelikult $(G(P), (G(p_i))_{i \in I})$ on objektide $G(F(i))$, $i \in I$, korrutis.

(3. $\Rightarrow$ 4.). Säilitagu G korrutisi ja tagasitõmbajaid. Olgu (E, e) morfismide $f, g : A \to B$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{A}$, mis on konstrueeritud nii nagu teoreemi 5.73 tõestuses, s.t. olgu

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, g \rangle"] \\ A \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_A, f \rangle"'] & A \times B \end{tikzcd}$$

konservatiivne ruut. Siis ka

$$\begin{tikzcd} G(E) \arrow[r, "G(e)"] \arrow[d, "G(e)"'] & G(A) \arrow[d, "G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle)"'] & G(A \times B) \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

on konservatiivne ruut. Peame näitama, et $(G(E), G(e)) \approx \mathsf{Eq}(G(f), G(g))$.

$$\begin{tikzcd} G(E) \arrow[r, "G(e)"] & G(A) \arrow[r, shift left, "G(f)"] \arrow[r, shift right, "G(g)"'] & G(B) \\ & E' \arrow[ul, dashed, "m"] \arrow[u, "e'"'] & \end{tikzcd}$$

Märkuse 5.79 tõttu piisab universaalomaduse kontrollimisest. Oletame, et $G(f) \circ e' = G(g) \circ e'$ mingi morfismi $e' : E' \to G(A)$ korral. Siis

$$G(p_A) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle) \circ e' = \mathrm{id}_{G(A)} \circ e' = e' = G(p_A) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle) \circ e',$$
$$G(p_B) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle) \circ e' = G(p_B) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle) \circ e'.$$

Kuna G säilitab korrutisi, siis $(G(A \times B), G(p_A), G(p_B))$ on objektide $G(A)$ ja $G(B)$ korrutis kategoorias $\mathcal{B}$ ning lause 5.66 põhjal $G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle) \circ e' = G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle) \circ e'$. Tänu ruudu (5.8) konservatiivsusele leidub üheselt määratud morfism $m : E' \to G(E)$ nii, et $G(e) \circ m = e'$.

(4. $\Rightarrow$ 1.). Säilitagu G korrutisi ja võrdsustajaid. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktorit $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Näitame, et G säilitab funktori F piiri $(L, (p_i)_{i \in I})$, mis on konstrueeritud nii nagu teoreemi 5.73 tõestuses, s.t. (L, l) on morfismide $\alpha, \beta : \prod_{i \in I} F(i) \to \prod_{d \in \mathcal{D}} F(\mathrm{cod}(d))$ võrdsustaja, kus paarid (5.6) on korrutised, α ja β on sellised üheselt määratud morfismid kategoorias $\mathcal{A}$, et $r_d \circ \alpha = s_j$ ja $r_d \circ \beta = F(d) \circ s_i$ iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \to j$ korral ning $p_i = s_i \circ l$ iga $i \in I$ korral (vt. diagrammi (5.7)). Me peame näitama, et $(G(L), (G(p_i))_{i \in I})$ on funktori $G \circ F : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ piir. Selleks oletame, et $(Q, (q_i)_{i \in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(G \circ F))$,

s.t. $(G\circ F)(d)\circ q_i = q_j$ iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \to j$ korral.

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "q_j"] & \\ & G(L) \arrow[dl, "G(p_i)"] \arrow[dr, "G(p_j)"'] & \\ (G\circ F)(i) \arrow[rr, "(G\circ F)(d)"'] & & (G\circ F)(j) \end{tikzcd}$$

Eelduse põhjal on $\left(G(\prod_{i\in I} F(i)), (G(s_i))_{i\in I}\right)$ objektide $(G\circ F)(i)$, $i \in I$, korrutis. Seega leidub selline üheselt määratud morfism $q : Q \to G(\prod_{i\in I} F(i))$, et $G(s_i)\circ q = q_i$ iga $i \in I$ korral. Järelikult

$$\begin{aligned} G(r_d)\circ G(\alpha)\circ q &= G(r_d\circ\alpha)\circ q = G(s_j)\circ q = q_j = (G\circ F)(d)\circ q_i = G(F(d))\circ G(s_i)\circ q \\ &= G(F(d)\circ s_i)\circ q = G(r_d\circ\beta)\circ q = G(r_d)\circ G(\beta)\circ q \end{aligned}$$

iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \to j$ korral.

$$\begin{tikzcd} G(L) \arrow[r, "G(l)"] & G\left(\prod\limits_{i\in I} F(i)\right) \arrow[r, shift left, "G(\alpha)"] \arrow[r, shift right, "G(\beta)"'] \arrow[d, "G(s_i)"] & G\left(\prod\limits_{d\in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})} F(\mathrm{cod}(d))\right) \arrow[d, "G(r_d)"] \\ Q \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[ur, dashed, "q"] \arrow[r, "q_i"'] & (G\circ F)(i) \arrow[r, "(G\circ F)(d)"'] & (G\circ F)(\mathrm{cod}(d)) \end{tikzcd}$$

Eelduse põhjal on $\left(G\left(\prod_{d\in\mathcal{D}} F(\mathrm{cod}(d))\right), G(r_d)\right)$ objektide $(G\circ F)(\mathrm{cod}(d))$ korrutis ning järelikult

$$G(\alpha)\circ q = G(\beta)\circ q.$$

Jällegi eelduse põhjal on $(G(L), G(l))$ morfismide $G(\alpha)$, $G(\beta)$ võrdsustaja ning seega leidub üheselt määratud $m : Q \to G(L)$ nii, et $G(l)\circ m = q$. Järelikult

$$G(p_i)\circ m = G(s_i)\circ G(l)\circ m = G(s_i)\circ q = q_i$$

iga $i \in I$ korral. Oletame, et ka $m' : Q \to G(L)$ on selline, et $G(p_i)\circ m' = q_i$ iga $i \in I$ korral. Siis $G(s_i)\circ G(l)\circ m = G(s_i)\circ G(l)\circ m'$ iga $i \in I$ korral. Taandades korraga korrutise projektsioonid $G(s_i)$ saame $G(l)\circ m = G(l)\circ m'$. Kuna $(G(L), G(l))$ on võrdsustaja, siis tänu lausele 5.31 on $G(l)$ monomorfism. Seega $m = m'$. ■

Analoogiliselt saab tõestada järgmise teoreemi.

Teoreem 5.83. *Kui $\mathcal{A}$ on lõplikult täielik kategooria ja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on funktor, siis järgmised väited on samaväärsed.*

1. *G säilitab lõplikke piire.*
2. *G säilitab tagasitõmbajaid ja lõppobjekte.*
3. *G säilitab lõplikke korrutisi ja tagasitõmbajaid.*
4. *G säilitab lõplikke korrutisi ja võrdsustajaid.*

Osutub, et mor-funktorid säilitavad piire.

Lause 5.84. *Vaatleme kategooriat $\mathcal{A}$ ja objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Kovariantne mor-funktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ säilitab kõiki olemasolevaid piire, kaasaarvatud suured piirid.*

Tõestus. Vaatleme suvalist kategooriat $\mathcal{C}$, funktorit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ja tema piiri $(L, (p_i)_{i\in I})$, kus $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Siis kindlasti $(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, L), (p_i \circ \_\_)_{i\in I})$ on koonus liitfunktoril

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, F(\_\_)) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \_\_) \circ F : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$$

kategoorias Set. Olgu $(M, (q_i : M \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, F(i)))_{i\in I})$ samuti koonus funktoril $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, F(\_\_))$. See tähendab, et kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \to j$ korral

$$q_j = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, F(d)) \circ q_i = (F(d) \circ \_\_) \circ q_i,$$

seega iga elemendi $m \in M$ korral $q_j(m) = F(d) \circ q_i(m)$. Viimane tähendab, et $(A, (q_i(m))_{i\in I})$ on koonus funktoril F. Järelikult leidub üheselt määratud morfism $q(m) : A \to L$ nii, et $p_i \circ q(m) = q_i(m)$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, dashed, "q(m)"] \arrow[ddl, "q_i(m)"'] \arrow[ddr, "q_j(m)"] & \\ & L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] & \\ & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, L) \arrow[dl, "p_i \circ \_\_"'] \arrow[dr, "p_j \circ \_\_"] & \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, F(i)) \arrow[rr, "F(d)\circ \_\_"'] & & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, F(j)) \end{tikzcd}$$

See defineerib kujutuse $q : M \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, L)$ kategoorias Set, mis rahuldab tingimust $(p_i \circ \_\_) \circ q = q_i$ iga $i \in I$ korral.

Jääb veel tõestada, et q on ühene. Oletame, et ka $r : M \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, L)$ on selline, et $(p_i \circ \_\_) \circ r = q_i$ iga $i \in I$ korral. Siis $p_i \circ r(m) = q_i(m)$ iga $i \in I$ ja $m \in M$ korral. Kuna L on piir, siis $q(m) = r(m)$ iga $m \in M$ korral. See tähendab, et kujutused q ja r on võrdsed. ■

Lause 5.85. *Olgu $\mathcal{A}$ lõplike korrutistega kategooria. Kui funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ säilitab tagasitõmbajaid, siis ta säilitab ka võrdsustajaid.*

Tõestus. Olgu $(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f, g)$, kus $f, g : A \to A'$ kategoorias $\mathcal{A}$. Olgu $(A \times A', p_1, p_2)$ objektide A ja A' korrutis. Siis leiduvad sellised üheselt määratud morfismid $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle, \langle \mathrm{id}_A, g\rangle : A \to A \times A'$, et $p_1 \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle = \mathrm{id}_A = p_1 \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle$, $p_2 \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle = f$ ja $p_2 \circ \langle 1_A, g\rangle = g$.

Näitame, et $(E, e, e) \approx \mathsf{Pb}(\langle \mathrm{id}_A, f\rangle, \langle \mathrm{id}_A, g\rangle)$. Kuna

$$p_1 \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ e = e = p_1 \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ e,$$
$$p_2 \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ e = f \circ e = g \circ e = p_2 \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ e,$$

siis $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ e = \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ e$. Kui $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $q, r : Q \to A$ on sellised morfismid, et $\langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ q = \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ r$, siis $q = p_1 \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ q = p_1 \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ r = r$ ja $f \circ q = p_2 \circ \langle \mathrm{id}_A, f\rangle \circ q = p_2 \circ \langle \mathrm{id}_A, g\rangle \circ r = g \circ r = g \circ q$. Võrdsustaja (E, e) universaalomaduse tõttu leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to E$ nii, et $e \circ m = q$. Seega tõepoolest $(E, e, e) \approx \mathsf{Pb}(\langle \mathrm{id}_A, f\rangle, \langle \mathrm{id}_A, g\rangle)$.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, "r"] \arrow[ddr, "q"'] & & \\ & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "\langle \mathrm{id}_A, g\rangle"] \\ & A \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_A, f\rangle"'] & A \times A' \end{tikzcd}$$

Eelduse põhjal on ka

$$\begin{tikzcd} G(E) \arrow[r, "G(e)"] \arrow[d, "G(e)"'] & G(A) \arrow[d, "G(\langle \mathrm{id}_A, g\rangle)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(\langle \mathrm{id}_A, f\rangle)"'] & G(A \times A') \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

konservatiivne ruut. Me peame näitama, et $(G(E), G(e)) \approx \mathsf{Eq}(G(f), G(g))$. Selleks oletame, et $G(f) \circ b = G(g) \circ b$ mingi morfismi $b : B \to G(A)$ korral kategoorias $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} G(E) \arrow[r, "G(e)"] & G(A) \arrow[r, shift left, "G(f)"] \arrow[r, shift right, "G(g)"'] & G(A') \\ & B \arrow[ul, dashed, "b'"] \arrow[u, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Siis

$$G(p_1) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle) \circ b = b = G(p_1) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle) \circ b,$$
$$G(p_2) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle) \circ b = G(f) \circ b = G(g) \circ b = G(p_2) \circ G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle) \circ b.$$

Kuna kategoorias $\mathcal{A}$ on lõplikud korrutised, siis on temas ka lõppobjekt $\mathbf{1}$ (vt. lauset 5.11). Lause 5.48 põhjal on

$$\begin{tikzcd} A \times A' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A' \arrow[d, "t_{A'}"] \\ A \arrow[r, "t_A"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

konservatiivne ruut ning eelduse põhjal on siis ka

$$\begin{tikzcd} G(A \times A') \arrow[r, "G(p_2)"] \arrow[d, "G(p_1)"'] & G(A') \arrow[d, "G(t_{A'})"] \\ G(A) \arrow[r, "G(t_A)"'] & G(\mathbf{1}) \end{tikzcd}$$

konservatiivne ruut. Järelikult on morfismikolmik $G(p_1)$, $G(p_2)$, $G(t_A) \circ G(p_1)$ samaaegselt vasakult taandatav. Siis on samaaegselt vasakult taandatav ka paar $G(p_1)$, $G(p_2)$ ning me saame $G(\langle \mathrm{id}_A, f \rangle) \circ b = G(\langle \mathrm{id}_A, g \rangle) \circ b$. Kuna (5.9) on konservatiivne ruut, siis leidub üheselt määratud morfism $b' : B \to G(E)$ nii, et $G(e) \circ b' = b$. Sellega oleme näidanud, et $(G(E), G(e)) \approx \mathsf{Eq}(G(f), G(g))$. ■

Vaatleme veel piiride peegeldamist.

Definitsioon 5.86. Olgu $\mathcal{D}$ väike kategooria ning tähistame jälle $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Öeldakse, et funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **peegeldab $\mathcal{D}$-piire**, kui iga funktori $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ korral sellest, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril F kategoorias $\mathcal{A}$ ja $(G(L), (G(p_i))_{i \in I})$ on $G \circ F : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ piir, järeldub, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on F piir.

Definitsioon 5.87. Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **peegeldab piire**[98] (**peegeldab lõplikke piire**), kui G peegeldab $\mathcal{D}$-piire iga väikse kategooria (lõpliku kategooria) $\mathcal{D}$ korral.

Lause 5.88. *Olgu $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ piire säilitav funktor. Kui $\mathcal{A}$ on täielik kategooria ja G peegeldab isomorfisme, siis G peegeldab piire.*

TÕESTUS. Vaateleme funktorit $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$, kus $\mathcal{D}$ on väike kategooria ja $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Olgu $(L, (p_i)_{i \in I}) \approx \lim F$, siis $(G(L), (G(p_i))_{i \in I}) \approx \lim(G \circ F)$. Kui nüüd $(M, (q_i)_{i \in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F))$ ja $(G(M), (G(q_i))_{i \in I}) \approx \lim(G \circ F)$, siis kategoorias $\mathsf{cone}(F)$ leidub üheselt määratud morfism $m : (M, (q_i)_{i \in I}) \longrightarrow (L, (p_i)_{i \in I})$. Siis aga $G(m)$ on üheselt määratud morfism kategoorias $\mathsf{cone}(G \circ F)$ kahe lõppobjekti vahel ning seega $G(m)$ on isomorfism. Eelduse põhjal on ka m on isomorfism ja seega paar $(M, (q_i)_{i \in I})$ on funktori F piir. ■

Lause 5.89. *Täielik ja täpne funktor peegeldab piire.*

[98] *reflects limits*

TÕESTUS. Olgu funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ täielik ja täpne, olgu $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funktor, $(L, (p_i)_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F))$ ja $(G(L), (G(p_i))_{i\in I}) \approx \lim(G\circ F)$. Kui $(Q, (q_i)_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F))$, siis leidub üheselt määratud morfism $b : G(Q) \to G(L)$ nii, et $G(p_i) \circ b = G(q_i)$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{tikzcd} & G(Q) \arrow[dl, "G(q_i)"'] \arrow[d, dashed, "b"] \arrow[dr, "G(q_j)"] & \\ & G(L) \arrow[dl, "G(p_i)"] \arrow[dr, "G(p_j)"'] & \\ (G\circ F)(i) \arrow[rr, "(G\circ F)(d)"'] & & (G\circ F)(j) \end{tikzcd}$$

Kuna G on täielik, siis leidub selline $m : Q \to L$, et $b = G(m)$, ning kuna G on täpne, siis $p_i \circ m = q_i$ iga $i \in I$ korral. Kui ka $p_i \circ m' = q_i$ iga $i \in I$ korral, kus $m' : Q \to L$, siis $G(p_i) \circ G(m') = G(q_i)$ iga $i \in I$ korral, millest b ühesuse tõttu järeldub, et $G(m') = b = G(m)$. Kuna G on täpne, siis $m = m'$. ■

Näited 5.90. 1. Unustav funktor $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ peegeldab piire.
2. Unustav funktor kategooriast Top kategooriasse Set ei peegelda piire. □

5.7. Piiride kommuteerumine

Selles paragrahvis tahame tõestada, et täielikus kategoorias kommuteeruvad suvalised piirid suvaliste piiridega. Alustuseks tõestame selle väite ühe erijuhu: korrutised kommuteeruvad võrdsustajatega. Selleks läheb meil vaja ühte lihtsat tulemust, mis järeldub vahetult korrutise definitsioonist.

Lause 5.91. *Olgu I hulk ning olgu $\left(\prod_{i\in I} A_i, (p_i)_{i\in I}\right)$ ja $\left(\prod_{i\in I} B_i, (q_i)_{i\in I}\right)$ kategooria $\mathcal{A}$ objektide süsteemide $(A_i)_{i\in I}$ ja $(B_i)_{i\in I}$ korrutised. Kui $f_i : A_i \to B_i$, $i \in I$, on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$, mis muudab kõik ruudud*

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "\prod_{i\in I} f_i"] \arrow[d, "p_j"'] & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[d, "q_j"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

kommutatiivseks.

Morfismi $\prod_{i\in I} f_i$ nimetatakse morfismide f_i, $i \in I$, **korrutiseks**.

Lause 5.92. *Olgu $\mathcal{A}$ korrutistega kategooria ja I hulk. Kui iga $i \in I$ korral*

$$(E_i, e_i) \approx \mathsf{Eq}(f_i, g_i)$$

kategoorias $\mathcal{A}$, siis

$$\left(\prod_{i\in I} E_i, \prod_{i\in I} e_i\right) \approx \mathsf{Eq}\left(\prod_{i\in I} f_i, \prod_{i\in I} g_i\right).$$

(S.t. võrdsustajate korrutis on korrutiste võrdsustaja.)

TÕESTUS. Vaatleme iga $j \in I$ korral diagrammi

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} E_i \arrow[r, "\prod_{i\in I} e_i"] \arrow[d, "r_j"'] & \prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, shift left, "\prod_{i\in I} f_i"] \arrow[r, shift right, "\prod_{i\in I} g_i"'] \arrow[d, "p_j"'] & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[d, "q_j"'] \\ E_j \arrow[r, "e_j"] & A_j \arrow[r, shift left, "f_j"] \arrow[r, shift right, "g_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

kus r_j, p_j, q_j on vastavate korrutiste projektsioonid, vastavad ruudud on kommutatiivsed ja $f_j \circ e_j = g_j \circ e_j$ iga $j \in I$ korral. Siis

$$q_j \circ \left(\prod_{i\in I} f_i\right) \circ \left(\prod_{i\in I} e_i\right) = f_j \circ p_j \circ \prod_{i\in I} e_i = f_j \circ e_j \circ r_j = g_j \circ e_j \circ r_j = g_j \circ p_j \circ \prod_{i\in I} e_i = q_j \circ \left(\prod_{i\in I} g_i\right) \circ \left(\prod_{i\in I} e_i\right),$$

millest lause 5.66 põhjal saame, et

$$\left(\prod_{i\in I} f_i\right) \circ \left(\prod_{i\in I} e_i\right) = \left(\prod_{i\in I} g_i\right) \circ \left(\prod_{i\in I} e_i\right).$$

Oletame nüüd, et ka $e' : E' \to \prod_{i\in I} A_i$ on selline morfism, et $(\prod_{i\in I} f_i) \circ e' = (\prod_{i\in I} g_i) \circ e'$. Siis iga $j \in J$ korral

$$f_j \circ (p_j \circ e') = q_j \circ \left(\prod_{i\in I} f_i\right) \circ e' = q_j \circ \left(\prod_{i\in I} g_i\right) \circ e' = g_j \circ (p_j \circ e').$$

Kuna $(E_j, e_j) \approx \mathsf{Eq}(f_j, g_j)$, siis iga $j \in I$ korral leidub üheselt määratud morfism $k_j : E' \to E_j$ nii, et $p_j \circ e' = e_j \circ k_j$.

$$\begin{tikzcd}
E_j \arrow[r, "e_j"] & A_j \arrow[r, shift left, "f_j"] \arrow[r, shift right, "g_j"'] & B_j \\
\prod_{i\in I} E_i \arrow[u, "r_j"] & E' \arrow[l, dashed, "\langle k \rangle"'] \arrow[u, "p_j \circ e'"'] \arrow[ul, dashed, "k_j"] &
\end{tikzcd}$$

Kasutades korrutise $\prod_{i\in I} E_i$ universaalomadust saame sellise üheselt määratud morfismi $\langle k \rangle : E' \to \prod_{i\in I} E_i$, et $r_j \circ \langle k \rangle = k_j$ iga $j \in I$ korral. Järelikult

$$p_j \circ \left(\prod_{i\in I} e_i\right) \circ \langle k \rangle = e_j \circ r_j \circ \langle k \rangle = e_j \circ k_j = p_j \circ e'$$

iga $j \in I$ korral, kust projektsioone p_j taandades saame võrduse $(\prod_{i\in I} e_i) \circ \langle k \rangle = e'$.

Kui oletame, et ka $k : E' \to \prod_{i\in I} E_i$ on selline, et $(\prod_{i\in I} e_i) \circ k = e'$, siis

$$e_j \circ r_j \circ \langle k \rangle = p_j \circ e' = p_j \circ \left(\prod_{i\in I} e_i\right) \circ k = e_j \circ r_j \circ k$$

iga $j \in I$ korral. Et e_j on monomorfism (vt. lauset 5.31), siis $r_j \circ \langle k \rangle = r_j \circ k$ iga $j \in I$ korral. Lause 5.66 põhjal $\langle k \rangle = k$. ■

Näide 5.93. Illustreerime lauset 5.92 ühe konkreetse näitega kategoorias Set. Vaatleme võrdsustajaid

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "e_1"] & A_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "g_1"'] & B_1
\end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, "e_2"] & A_2 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & B_2
\end{tikzcd},$$

kus

$$E_1 = \{a_1 \in A_1 \mid f_1(a_1) = g_1(a_1)\},$$
$$E_2 = \{a_2 \in A_2 \mid f_2(a_2) = g_2(a_2)\}$$

ning e_1, e_2 on sisestused. Siis ka

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[r, "e_1 \times e_2"] & A_1 \times A_2 \arrow[r, shift left, "f_1 \times f_2"] \arrow[r, shift right, "g_1 \times g_2"'] & B_1 \times B_2
\end{tikzcd}$$

on võrdsustaja, sest

$$\begin{aligned}(f_1 \times f_2)(a_1, a_2) = (g_1 \times g_2)(a_1, a_2) &\iff (f_1(a_1), f_2(a_2)) = (g_1(a_1), g_2(a_2))\\ &\iff f_1(a_1) = g_1(a_1) \ \&\ f_2(a_2) = g_2(a_2)\\ &\iff (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2.\end{aligned}$$ □

Vaatleme nüüd üldjuhtu. Olgu $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funktor. Eesmärgiks on tõestada, et

$$\lim_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \left(\lim_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(C, D) \right) \cong \lim_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} \left(\lim_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} F(C, D) \right)$$

ehk lühidalt $\lim_J (\lim_I F(j, i)) \cong \lim_I (\lim_J F(j, i))$, kus $i \in I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ja $j \in J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Selgitame, mida mõeldakse selles valemis esinevate piiride all.

Iga fikseeritud objekti $j \in J$ korral on olemas funktor $F(j, \_) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$, mis on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned} F(j, \_)(i) &:= F(j, i),\\ F(j, \_)(d) &:= F(\mathrm{id}_j, d), \end{aligned}$$

iga objekti $i \in I$ ja iga $\mathcal{D}$ morfismi d korral. Sümboliga $\lim_I F(j, i)$ tähistame funktori $F(j, \_)$ piirobjekti. Iga $j \in J$ korral olgu

$$\left(\lim_I F(j, i), (p_i^j)_{i \in I} \right) \approx \lim F(j, \_), \tag{5.10}$$

Kui $c : j \to j'$ kategoorias $\mathcal{C}$, siis kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \to i'$ korral on väike kolmnurk ja trapets diagrammis

$$\begin{tikzcd} & \lim_I F(j,i) \arrow[dl, "p_i^j"'] \arrow[dr, "p_{i'}^j"] & \\ F(j,i) \arrow[d, "F(c,\mathrm{id}_i)"'] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_j,d)"'] & & F(j,i') \arrow[d, "F(c,\mathrm{id}_{i'})"] \\ F(j',i) \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_{j'},d)"'] & & F(j',i') \end{tikzcd}$$

kommutatiivsed, järelikult on kommutatiivne ka suur kolmnurk. See aga tähendab, et

$$\left(\lim_I F(j, i), (F(c, \mathrm{id}_i) \circ p_i^j)_{i \in I} \right) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F(j', \_))).$$

Kuna kehtib (5.10), siis leidub üheselt määratud morfism $\lim_I F(c, \mathrm{id}_i) : \lim_I F(j, i) \to \lim_I F(j', i)$ nii, et $p_i^{j'} \circ \lim_I F(c, \mathrm{id}_i) = F(c, \mathrm{id}_i) \circ p_i^j$ iga $i \in I$ korral. Kui kõigil funktoritel $F(j, \_)$ on piir olemas, siis saame defineerida uue funktori $L : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ võrdustega

$$L(j) := \lim_I F(j, i), \tag{5.11}$$

$$L(c) := \lim_I F(c, \mathrm{id}_i), \tag{5.12}$$

kus $j \in J$ ja c on morfism kategoorias $\mathcal{C}$. Seega $L(c)$ on üheselt määratud morfism, mille korral

$$p_i^{j'} \circ L(c) = F(c, \mathrm{id}_i) \circ p_i^j.$$

$$\begin{tikzcd} \lim_I F(j,i) \arrow[r, "L(c)"] \arrow[d, "p_i^j"'] & \lim_I F(j',i) \arrow[d, "p_i^{j'}"] \\ F(j,i) \arrow[r, "F(c,\mathrm{id}_i)"'] & F(j',i) \end{tikzcd}$$

Näitamaks, et L on tõesti funktor, vaatleme morfisme $c : j \to j'$, $c' : j' \to j''$ kategoorias $\mathcal{C}$. Siis

$$p_i^{j''} \circ L(c') \circ L(c) = F(c', \mathrm{id}_i) \circ p_i^{j'} \circ L(c) = F(c', \mathrm{id}_i) \circ F(c, \mathrm{id}_i) \circ p_i^j = F(c' \circ c, \mathrm{id}_i) \circ p_i^j,$$

millest tänu $L(c' \circ c)$ ühesusele järeldub, et $L(c' \circ c) = L(c') \circ L(c)$. Samuti $L(\mathrm{id}_j) = \mathrm{id}_{L(j)}$.

Oletame, et funktoril $L : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ on olemas piir

$$\left(\lim_J \left(\lim_I F(j,i)\right), (p_j)_{j \in J}\right) \approx \lim L.$$

Analoogiliselt võime rääkida funktoritest $F(\_\_, i) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, iga objekti $i \in I$ korral piiridest

$$\left(\lim_J F(j,i), (q_j^i)_{j \in J}\right) \approx \lim F(\_\_, i),$$

defineerida funktori $M : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ objektil $i \in I$ võrdusega

$$M(i) := \lim_J F(j,i)$$

ja morfismil $d : i \to i'$ nii, et $M(d) = \lim_J F(\mathrm{id}_j, d) : \lim_J F(j,i) \to \lim_J F(j,i')$ on üheselt määratud morfism, mille korral

$$q_j^{i'} \circ M(d) = F(\mathrm{id}_j, d) \circ q_j^i.$$

$$\begin{tikzcd}
\lim_J F(j,i) \arrow[r, "M(d)"] \arrow[d, "q_j^i"'] & \lim_J F(j,i') \arrow[d, "q_j^{i'}"] \\
F(j,i) \arrow[r, "F(\mathrm{id}_j, d)"'] & F(j,i')
\end{tikzcd}$$

Funktori M piir olgu

$$\left(\lim_I \left(\lim_J F(j,i)\right), (q_i)_{i \in I}\right) \approx \lim M.$$

Osutub, et objektide $\lim_J(\lim_I F(j,i))$ ja $\lim_I(\lim_J F(j,i))$ vahel leiduvad kanoonilised morfismid, mis on isomorfismid. Selle näitamiseks fikseerime $i \in I$. Siis iga $c : j \to j'$ korral kategoorias $\mathcal{C}$ on väike kolmnurk ja trapets diagrammis

$$\begin{tikzcd}
 & \lim_J(\lim_I F(j,i)) \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, "p_{j'}"] & \\
\lim_I F(j,i) \arrow[rr, "L(c)"'] \arrow[d, "p_i^j"'] & & \lim_I F(j',i) \arrow[d, "p_i^{j'}"] \\
F(j,i) \arrow[rr, "F(c, \mathrm{id}_i)"'] & & F(j',i)
\end{tikzcd}$$

kommutatiivsed, järelikult on ka suur kolmnurk komutatiivne, s.t.

$$\left(\lim_J \left(\lim_I F(j,i)\right), (p_i^j \circ p_j)_{j \in J}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone} F(\_\_, i)).$$

$$\begin{tikzcd}
 & \lim_J(\lim_I F(j,i)) \arrow[ddl, "p_i^j p_j"'] \arrow[ddr, "p_i^j p_{j'}"] \arrow[d, dashed, "\lambda_i"] & \\
 & \lim_J F(j,i) \arrow[dl, "q_j^i"'] \arrow[dr, "q_{j'}^i"] & \\
F(j,i) \arrow[rr, "F(c, \mathrm{id}_i)"'] & & F(j',i)
\end{tikzcd}$$

Järelikult leidub üheselt määratud morfism $\lambda_i : \lim_J(\lim_I F(j,i)) \longrightarrow \lim_J F(j,i)$ nii, et $q_j^i \circ \lambda_i = p_i^j \circ p_j$ iga $j \in J$ korral. Kui $d : i \to i'$ on morfism kategoorias $\mathcal{D}$, siis iga $j \in J$ korral

$$q_j^{i'} \circ M(d) \circ \lambda_i = F(\mathrm{id}_j, d) \circ q_j^i \circ \lambda_i = F(\mathrm{id}_j, d) \circ p_i^j \circ p_j = p_{i'}^j \circ p_j = q_j^{i'} \circ \lambda_{i'}.$$

Lauset 5.66 kasutades saame järeldada, et $M(d) \circ \lambda_i = \lambda_{i'}$. Seega leidub üheselt määratud morfism $\lambda : \lim_J(\lim_I F(j,i)) \longrightarrow \lim_I(\lim_J F(j,i))$ nii, et $q_i \circ \lambda = \lambda_i$ iga $i \in I$ korral kommuteerub järgmine diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & \lim_J(\lim_I F(j,i)) \arrow[ddl, "\lambda_i"'] \arrow[ddr, "\lambda_{i'}"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & \\
 & \lim_I(\lim_J F(j,i)) \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_{i'}"] & \\
\lim_J F(j,i) \arrow[rr, "M(d)"'] & & \lim_J F(j,i')
\end{tikzcd}$$

Analoogiliselt leidub iga $j \in J$ korral üheselt määratud morfism $\mu_j : \lim_I(\lim_J F(j,i)) \longrightarrow \lim_I F(j,i)$ nii, et $p_i^j \circ \mu_j = q_j^i \circ q_i$ iga $i \in I$ korral, ning selline üheselt määratud morfism $\mu : \lim_I(\lim_J F(j,i)) \longrightarrow \lim_J(\lim_I F(j,i))$, et $p_j \circ \mu = \mu_j$ iga $j \in J$ korral kommuteerub järgmine diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & \lim_I(\lim_J F(j,i)) \arrow[ddl, "\mu_j"'] \arrow[ddr, "\mu_{j'}"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & \\
 & \lim_J(\lim_I F(j,i)) \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, "p_{j'}"] & \\
\lim_I F(j,i) \arrow[rr, "L(c)"'] & & \lim_I F(j',i)
\end{tikzcd}$$

Seega

$$q_j^i \circ q_i \circ \lambda \circ \mu = q_j^i \circ \lambda_i \circ \mu = p_i^j \circ p_j \circ \mu = p_i^j \circ \mu_j = q_j^i \circ q_i,$$

iga $i \in I$, $j \in J$ korral, millest saame, et $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}$. Analoogiliselt saab tõestada võrduse $\mu \circ \lambda = \mathrm{id}$. Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Teoreem 5.94. *Olgu $\mathcal{A}$ täielik kategooria, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ väiksed kategooriad, $J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, ja olgu $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ funktor. Siis*

$$\lim_J \left(\lim_I F(j,i) \right) \cong \lim_I \left(\lim_J F(j,i) \right).$$

Näide 5.95. Veendume, et lause 5.92 (objektide tasemel) on tõesti teoreemi 5.94 erijuhuks. Selleks olgu $\mathcal{C}$ kaheobjektiline kategooria $1 \underset{c_2}{\overset{c_1}{\rightrightarrows}} 0$, $\mathcal{D}$ olgu diskreetne kategooria objektide hulgaga I ja $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ olgu suvaline funktor. Tähistame $F(1,i) =: A_i$, $F(0,i) =: B_i$, $F(c_1,i) =: f_i$ ja $F(c_2,i) =: g_i$ iga $i \in I$ korral.

Siis funktori $F(1, \_) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ kujutis on süsteem $(A_i)_{i \in I}$ ja funktori $F(0, \_) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ kujutis on süsteem $(B_i)_{i \in I}$. Nende funktorite piirid on vastavate süsteemide korrutised. Funktor $L : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ viib

$$\text{diagrammi} \qquad 1 \underset{c_2}{\overset{c_1}{\rightrightarrows}} 0 \qquad \text{diagrammiks} \qquad \prod_{i \in I} A_i \underset{\prod_{i \in I} g_i}{\overset{\prod_{i \in I} f_i}{\rightrightarrows}} \prod_{i \in I} B_i,$$

seega tema piir on $\mathsf{Eq}(\prod_{i \in I} f_i, \prod_{i \in I} g_i)$.

Funktorite $F(\_, i) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, $i \in I$, kujutised on diagrammid $A_i \underset{g_i}{\overset{f_i}{\rightrightarrows}} B_i$. Nende piirid on paaride (f_i, g_i) võrdsustajad (E_i, e_i). Funktor $M : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ on antud võrdustega $M(i) = E_i$, $i \in I$, ja funktori M piir on objektide E_i korrutis. □

Näide 5.96. Kui $\mathcal{C}$ on diskreetne kategooria objektide hulgaga $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{0, 1, 2\}$ ja $\mathcal{D}$ tema alamkategooria, $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \{0, 1\}$, siis tähistades tähistades funtori $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ korral $F(j,i) =: F_{ji} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, saame teoreemist 5.94, et

$$(F_{00} \times F_{10} \times F_{20}) \times (F_{01} \times F_{11} \times F_{21}) \cong (F_{00} \times F_{01}) \times (F_{10} \times F_{11}) \times (F_{20} \times F_{21}). \qquad \square$$

Näide 5.97. Suvalised piirid ei kommuteeru suvaliste kopiiridega. Näiteks diskreetsete kategooriate $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$, kus $J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, korral tähendaks $\mathcal{C}$-kopiiride kommuteerumine $\mathcal{D}$-piiridega isomorfismi

$$\coprod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I} F_{ji} \right) \cong \prod_{i \in I} \left(\coprod_{j \in J} F_{ji} \right).$$

Kui $I = J = \{1, 2\}$ ja $\mathcal{A} = \mathsf{Set}$, siis peaks

$$(F_{11} \times F_{12}) \sqcup (F_{21} \times F_{22}) \cong (F_{11} \sqcup F_{21}) \times (F_{12} \sqcup F_{22}).$$

Viimane enamasti ei kehti, sest

$$(F_{11} \sqcup F_{21}) \times (F_{12} \sqcup F_{22}) = (F_{11} \times F_{12}) \sqcup (F_{11} \times F_{22}) \sqcup (F_{21} \times F_{12}) \sqcup (F_{21} \times F_{22}). \qquad \square$$

5.8. Filtreeritud kopiirid*

Definitsioon 5.98. Kategooriat $\mathcal{A}$ nimetatakse **filtreerituks**[99], kui
1. $\mathcal{A}$ ei ole tühi;
2. $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\, \exists C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\, \exists (f : A \to C)\, \exists (g : B \to C)$;
3. $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\, \forall (f, g : A \to B)\, \exists C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\, \exists (h : B \to C) : \quad h \circ f = h \circ g.$

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, dashed, "f"] & & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, dashed, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Märkus 5.99. Induktsiooniga on lihtne tõestada, et kui A on filtreeritud kategooria, siis
1. $\mathcal{A}$ objektide iga lõpliku süsteemi $(A_i)_{i \in I}$ jaoks leidub objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja morfismide süsteem $(f_i : A_i \to A)_{i \in I}$;
2. $\mathcal{A}$ paralleelsete morfismide iga lõpliku süsteemi $(f_i : A \to B)_{i \in I}$ jaoks leidub objekt C ja morfismid $k : B \to C$, $l : A \to C$ nii, et $k \circ f_i = l$ iga $i \in I$ korral.

Näide 5.100. 1. Iga lõplikult kotäielik kategooria on filtreeritud.
2. Iga kategooria, milles leidub lõppobjekt, on filtreeritud.
3. Järjestatud hulk, mida vaadeldakse kategooriana, on filtreeritud parajasti siis, kui selles järjestatud hulgas leidub mistahes kahel elemendil ülemine tõke (s.t. ta on sup-poolvõre). $\square$

Lemma 5.101. *Olgu $\mathcal{A}$ filtreeritud kategooria. Iga lõpliku kategooria $\mathcal{D}$ korral leidub igal funktoril $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ kokoonus.*

Tõestus. Tähistame $I := \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Märkuse 5.99 põhjal saame leida objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $\mathcal{A}$ morfismide süsteemi $(f_i : F(i) \to A)_{i \in I}$. Kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i' \to i$ korral saame paralleelsete morfismide paari $f_{i'}, f_i \circ F(d) : F(i') \to A$ jaoks leida sellise objekti $A_d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja morfismi $g_d : A \to A_d$, et

$$g_d \circ f_{i'} = g_d \circ (f_i \circ F(d)).$$

Et $(A_d)_{d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})}$ on lõplik objektide süsteem, siis leidub objekt $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja morfismide süsteem $(h_d : A_d \to A')_{d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})}$. Nüüd $(h_d \circ g_d : A \to A')_{d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})}$ on paralleelsete morfismide lõplik süsteem. Seega leidub selline objekt $A'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja morfismid $k : A' \to A''$, $l : A \to A''$, et $k \circ h_d \circ g_d = l$ kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi d korral.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "k"] & A'' & \\ A_d \arrow[u, "h_d"] & A \arrow[l, "g_d"'] \arrow[u, "l"'] & \\ F(i) \arrow[ur, "f_i"] & & F(i') \arrow[ll, "F(d)"] \arrow[ul, "f_{i'}"'] \end{tikzcd}$$

Osutub, et $(A'', (l \circ f_i)_{i \in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cocone}(F))$. Tõepoolest, $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i' \to i$ korral

$$l \circ f_i \circ F(d) = k \circ h_d \circ g_d \circ f_i \circ F(d) = k \circ h_d \circ g_d \circ f_{i'} = l \circ f_{i'}. \qquad \blacksquare$$

Järgnevas lauses anname konstruktsiooni, mille abil saab konstrueerida funktori $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ kopiiri.

[99] *filtered*

Lause 5.102. *Olgu $\mathcal{C}$ väike filtreeritud kategooria, $J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ funktor. Funktori F kopiir on $(L, (u_j)_{j\in J})$, kus*

1. *$L = \left(\coprod_{j\in J} F(j)\right) / \sim$ ja ekvivalentsiseos $\sim$ on defineeritud järgmiselt: iga $x \in F(j)$ ja $x' \in F(j')$ korral*
$$x \sim x' \iff \exists j'' \in J \, \exists (c : j \to j'') \, \exists (c' : j' \to j''): \quad F(c)(x) = F(c')(x'),$$
2. *kujutused $u_j : F(j) \to L$ on defineeritud võrdustega*
$$u_j(x) := [x],$$
kus $[x]$ on elemendi x ekvivalentsiklass seose $\sim$ järgi.

Tõestus. Seos $\sim$ on defineeritud hulkade $F(j)$, $j \in J$, lõikumatul ühendil (mis teatavasti on ka nende kokorrutis). Selle definitsiooni illustreerib järgmine diagramm kategoorias Set:

$$\begin{tikzcd} x \in F(j) \arrow[r, "F(c)"] & F(j'') & F(j') \ni x'. \arrow[l, "F(c')"'] \end{tikzcd}$$

Peame näitama, et seos $\sim$ on ekvivalentsiseos. Refleksiivsus ja sümmeetria on ilmne. Transitiivsuse kontrollimiseks oletame, et $x_1 \sim x_2$ ja $x_2 \sim x_3$, kus $x_i \in F(j_i)$, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{tikzcd} & & j & & \\ & j_4 \arrow[ur, "s_4"] & & j_5 \arrow[ul, "s_5"'] & \\ j_1 \arrow[ur, "f"] & & j_2 \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, "s_2"] \arrow[ur, "h"'] & & j_3 \arrow[ul, "k"'] \end{tikzcd}$$

Siis leiduvad objektid $j_4, j_5 \in J$ ja morfismid $f : j_1 \to j_4$, $g : j_2 \to j_4$, $h : j_2 \to j_5$, $k : j_3 \to j_5$ nii, et $F(f)(x_1) = F(g)(x_2)$ ja $F(h)(x_2) = F(k)(x_3)$. Lemma 5.101 tõttu leidub objektidest j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 ja morfismidest f, g, h, k koosneval diagrammil kokoonus $\big(j, (s_i : j_i \to j)_{i\in\{1,2,3,4,5\}}\big)$. Siis muuhulgas

$$\begin{aligned} F(s_4 \circ f)(x_1) &= F(s_4)(F(f)(x_1)) = F(s_4)(F(g)(x_2)) = F(s_4 \circ g)(x_2) = F(s_2)(x_2) = F(s_5 \circ h)(x_2) \\ &= F(s_5)(F(h)(x_2)) = F(s_5)(F(k)(x_3)) = F(s_5 \circ k)(x_3), \end{aligned}$$

s.t. $x_1 \sim x_3$. Seega $\sim$ on ekvivalentsiseos.

Kui $c : j \to j'$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$ ja $x \in F(j)$, siis võrduse $F(c)(x) = F(\mathrm{id}_{j'})(F(c)(x))$ tõttu $x \sim F(c)(x)$ ja seega

$$(u_{j'} \circ F(c))(x) = u_{j'}(F(c)(x)) = [F(c)(x)] = [x] = u_j(x).$$

Järelikult $(L, (u_j)_{j\in J}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cocone}(F))$. Kui ka $(Q, (v_j)_{j\in J}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cocone}(F))$, siis defineerime kujutuse $m : L \to Q$ võrdusega

$$m([x]) := v_j(x),$$

kus $x \in F(j)$. Kui $x \sim x'$, $x \in F(j)$, $x' \in F(j')$, siis $F(c)(x) = F(c')(x')$ mingite morfismide $c : j \to j''$, $c' : j' \to j''$ korral. Järelikult

$$v_j(x) = (v_{j''} \circ F(c))(x) = (v_{j''} \circ F(c'))(x') = v_{j'}(x')$$

ja m on korrektselt defineeritud. Ilmselt $m \circ u_j = v_j$ iga $j \in J$ korral ja m on üheselt määratud.

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ & L \arrow[u, dashed, "m"] & \\ F(j') \arrow[uur, "v_{j'}"] \arrow[ur, "u_{j'}"] & & F(j) \arrow[ll, "F(c)"] \arrow[ul, "u_j"'] \arrow[uul, "v_j"'] \end{tikzcd}$$

■

Eespool nägime, et üldjuhul piirid ei kommuteeru kopiiridega. Tuleb välja, et teatud eeldustel lõplikud piirid kommuteeruvad filtreeritud kopiiridega. Funktori $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ kopiiri, kus $\mathcal{C}$ on filtreeritud kategooria, nimetatakse **filtreeritud kopiiriks**[100].

Teoreem 5.103. *Olgu $\mathcal{C}$ väike filtreeritud kategooria ja $\mathcal{D}$ lõplik kategooria, $J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Kui $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ on funktor, siis*

$$\operatorname*{colim}_J \Big(\lim_I F(j,i)\Big) \cong \lim_I \Big(\operatorname*{colim}_J F(j,i)\Big)$$

(s.t. lõplikud piirid kategoorias Set kommuteeruvad filtreeritud kopiiridega).

Tõestus. Piisab, kui näidata, et isomorfism leidub kanoonilise kopiiri ja piiri vahel. Iga $j \in J$ korral on funktori $F(j, \_) : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ kanooniline piir teoreemi 5.70 põhjal hulk

$$\lim_I F(j,i) = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in F(j,i), (\forall d \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(i,i')\colon\ F(\mathrm{id}_j, d)(x_i) = x_{i'})\}.$$

koos projektsioonidega $p_i^j : \lim_I F(j,i) \to F(j,i)$, $i \in I$. Vaatleme võrdustega (5.11) ja (5.12) defineeritud funktorit $L : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$. Meenutame, et iga $\mathcal{C}$ morfismi $c : j \to j'$ korral $L(c)$ on üheselt määratud morfism, mille korral diagramm

$$\begin{tikzcd}
\lim_I F(j,i) \arrow[r, "L(c)"] \arrow[d, "p_i^j"'] & \lim_I F(j',i) \arrow[d, "p_i^{j'}"] \\
F(j,i) \arrow[r, "F(c,\mathrm{id}_i)"'] & F(j',i)
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivne. Seega iga $(x_i)_{i\in I} \in \lim_I F(j,i)$ korral $L(c)((x_i)_{i\in I}) = \big(F(c,\mathrm{id}_i)(x_i)\big)_{i\in I}$. Funktori $L : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ kopiir on lause 5.102 põhjal

$$\operatorname*{colim}_J \Big(\lim_I F(j,i)\Big) = \left(\coprod_{j\in J} \lim_I F(j,i)\right) / \sim,$$

kus seos $\sim$ on defineeritud järgmiselt: iga $(x_i)_{i\in I} \in \lim_I F(j,i)$ ja $(x'_i)_{i\in I} \in \lim_I F(j',i)$ korral

$$\begin{aligned}
(x_i)_{i\in I} \sim (x'_i)_{i\in I} \quad &\iff \quad \exists j'' \in J\, \exists (c : j \to j'')\, \exists (c' : j' \to j'')\colon \quad L(c)((x_i)_{i\in I}) = L(c')((x'_i)_{i\in I}) \\
&\iff \quad \exists j'' \in J\, \exists (c : j \to j'')\, \exists (c' : j' \to j'')\, \forall i \in I\colon \quad F(c,\mathrm{id}_i)(x_i) = F(c',\mathrm{id}_i)(x'_i).
\end{aligned}$$

Iga objekti $i \in I$ korral funktori $F(\_, i) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ kanooniline kopiir on

$$\operatorname*{colim}_J F(j,i) = \left(\coprod_{j\in J} F(j,i)\right) / \approx_i,$$

kus seos $\approx_i$ on defineeritud järgmiselt: iga $y \in F(j,i)$ ja $y' \in F(j',i)$ korral

$$y \approx_i y' \iff \exists j'' \in J\, \exists (c : j \to j'')\, \exists (c' : j' \to j'')\colon \quad F(c,\mathrm{id}_i)(y) = F(c',\mathrm{id}_i)(y').$$

Ekvivalentsiklasse seose $\approx_i$ järgi tähistame $[y]_i$. Kopiiri sisestused on $q_j^i : F(j,i) \to \operatorname{colim}_J F(j,i)$, $y \mapsto [y]_i$, $j \in J$. Vaatleme funktorit $M : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$, mille korral

$$M(i) := \operatorname*{colim}_J F(j,i),$$

$i \in I$, ja iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \to i'$ korral $M(d)$ on defineeritud kui üheselt määratud morfism, mis muudab diagrammi

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{colim}_J F(j,i) \arrow[r, "M(d)"] & \operatorname{colim}_J F(j,i') \\
F(j,i) \arrow[r, "F(\mathrm{id}_j,d)"'] \arrow[u, "q_j^i"] & F(j,i') \arrow[u, "q_j^{i'}"']
\end{tikzcd}$$

[100]*filtered colimit*

kommutatiivseks. Seega $M(d)$ on defineeritud võrdusega

$$M(d)([y]_i) := [F(\mathrm{id}_j, d)(y)]_{i'}$$

iga $y \in F(j,i)$ korral. Funktori M kanooniline piir on

$$\lim_I \left(\operatorname*{colim}_J F(j,i) \right) = \left\{ ([y_i]_i)_{i\in I} \,\middle|\, [y_i]_i \in \left(\coprod_{j\in J} F(j,i) \right) / \approx_i, (\forall d \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(i,i')\colon F(\mathrm{id}_j, d)(y_i) \approx_{i'} y_{i'}) \right\}.$$

Defineerime kujutuse

$$\lambda : \operatorname*{colim}_J \left(\lim_I F(j,i) \right) \longrightarrow \lim_I \left(\operatorname*{colim}_J F(j,i) \right)$$

võrdusega

$$\lambda \left([(x_i)_{i\in I}] \right) := ([x_i]_i)_{i\in I}$$

iga $(x_i)_{i\in I} \in \lim_I F(j,i)$ korral. Kuna iga $i \in I$ korral $x_i \in F(j,i)$ ja iga $\mathcal{D}$ morfismi $d : i \to i'$ korral $F(\mathrm{id}_j, d)(x_i) = x_{i'}$, siis $([x_i]_i)_{i\in I} \in \lim_I (\operatorname{colim}_J F(j,i))$.

Näitame, et λ on injektiivne. Selleks oletame, et $(x_i)_{i\in I} \in \lim_I F(j,i)$ ja $(x'_i)_{i\in I} \in \lim_I F(j',i)$ korral $([x_i]_i)_{i\in I} = ([x'_i]_i)_{i\in I}$ ehk $x_i \approx_i x'_i$ iga $i \in I$ korral. Siis iga $i \in I$ jaoks leidub $j_i \in J$ ja sellised morfismid $f_i : j \to j_i$, $g_i : j' \to j_i$, et $F(f_i, \mathrm{id}_i)(x_i) = F(g_i, \mathrm{id}_i)(x'_i)$. Lemma 5.101 põhjal leidub kokoonus $(j'', (s_i)_{i\in I})$ morfismidest f_i, g_i, $i \in I$, koosneval diagrammil.

$$\begin{tikzcd}
& j'' & \\
j \arrow[ur, "s_j"] \arrow[r, "f_i"'] & j_i \arrow[u, "s_{j_i}"'] & j' \arrow[ul, "s_{j'}"'] \arrow[l, "g_i"]
\end{tikzcd}$$

Järelikult iga $i \in I$ korral $s_{j_i} \circ f_i = s_j$ ja $s_{j_i} \circ g_i = s_{j'}$ ning seega

$$F(s_j, \mathrm{id}_i)(x_i) = F(s_{j_i}, \mathrm{id}_i)(F(f_i, \mathrm{id}_i)(x_i)) = F(s_{j_i}, \mathrm{id}_i)(F(g_i, \mathrm{id}_i)(x'_i)) = F(s_{j'}, \mathrm{id}_i)(x'_i).$$

See aga tähendab, et $(x_i)_{i\in I} \sim (x'_i)_{i\in I}$, millega λ injektiivsus on tõestatud.

Näitame, et λ on sürjektiivne. Olgu $([y_i]_i)_{i\in I} \in \lim_I (\operatorname{colim}_J F(j,i))$, kus $y_i \in F(j_i, i)$. Paneme tähele, et seose $\approx_i$ definitsiooni põhjal

$$\forall i \in I\, \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(j', j)\, \forall z \in F(j', i)\colon \quad z \approx_i F(f, \mathrm{id}_i)(z).$$

Lemma 5.101 tõttu saame leida objekti $j \in J$ ja morfismide süsteemi $(f_i : j_i \to j)_{i\in I}$. Kui $d : i \to i'$ on morfism kategoorias $\mathcal{D}$, siis

$$F(f_i, d)(y_i) = F(f_i, \mathrm{id}_{i'})(F(\mathrm{id}_{j_i}, d)(y_i)) \approx_{i'} F(\mathrm{id}_{j_i}, d)(y_i) \approx_{i'} y_{i'} \approx_{i'} F(f_{i'}, \mathrm{id}_{i'})(y_{i'}).$$

Seose $\approx_{i'}$ definitsiooni põhjal leidub iga $d : i \to i'$ jaoks objekt $j_d \in J$ ja sellised morfismid $g_d, h_d : j \to j_d$, et

$$F(g_d \circ f_i, d)(y_i) = F(g_d, \mathrm{id}_{i'})(F(f_i, d)(y_i)) = F(h_d, \mathrm{id}_{i'})(F(f_{i'}, \mathrm{id}_{i'})(y_{i'})) = F(h_d \circ f_{i'}, \mathrm{id}_{i'})(y_{i'}). \quad (5.13)$$

Rakendades lemmat 5.101 diagrammile, mis koosneb kõigist morfismidest g_d, h_d, kus $d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$, saame leida objekti j' ja morfismid $k : j \to j'$ ja $s_d : j_d \to j'$ iga $d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ jaoks, nii et $s_d \circ g_d = k = s_d \circ h_d$ iga $d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ korral.

$$\begin{tikzcd}
& j' & \\
j_d \arrow[ur, "s_d"] & & j \arrow[ul, "k"'] \arrow[ll, shift right, "g_d"'] \arrow[ll, shift left, "h_d"]
\end{tikzcd}$$

Siis aga võrduse (5.13) tõttu

$$F(k \circ f_i, d)(y_i) = F(s_d, \mathrm{id}_{i'})(F(g_d \circ f_i, d)(y_i)) = F(s_d, \mathrm{id}_{i'}) \left(F(h_d \circ f_{i'}, \mathrm{id}_{i'})(y_{i'}) \right) = F(k \circ f_{i'}, \mathrm{id}_{i'})(y_{i'})$$

iga morfismi $d : i \to i'$ korral. Tähistades $x_i := F(k \circ f_i, \mathrm{id}_i)(y_i) \in F(j', i)$, $i \in I$, saame arvutada:

$$F(\mathrm{id}_j, d)(x_i) = F(k \circ f_i, d)(y_i) = F(k \circ f_{i'}, \mathrm{id}_{i'})(y_{i'}) = x_{i'}$$

iga morfismi $d : i \to i'$ korral. Seega $(x_i)_{i \in I} \in \lim_I F(j, i)$ ning $[(x_i)_{i \in I}] \in \mathrm{colim}_J \left(\lim_I F(j, i)\right)$. Lisaks sellele

$$\lambda \left([(x_i)_{i \in I}]\right) = ([x_i]_i)_{i \in I} = \left([F(k \circ f_i, \mathrm{id}_i)(y_i)]_i\right)_{i \in I} = ([y_i]_i)_{i \in I}\,,$$

mis tähendab, et λ on sürjektiivne. ■

Näide 5.104. Kategoorias Set vaatleme hulka X ja diagrammi $\mathcal{C}$, mis koosneb hulga X lõplikest alamhulkadest ja nendevahelistest sisestustest. See diagramm on filtreeritud, sest $\varnothing$ on hulga X lõplik alamhulk, kahe lõpliku alamhulga ühend on lõplik alamhulk ja selles diagrammis ei ole kahte erinevat paralleelset morfismi. Näitame, et hulk X on selle diagrammi kopiir.

Ilmselt $\left(X, (u_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\right)$, kus $u_A : A \to X$ on sisestused, on kokoonus. Oletame, et ka $\left(Q, (q_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\right)$ on kokoonus. Defineerime kujutuse $m : X \to Q$ võrdusega

$$m(x) := q_{\{x\}}(x).$$

Kui $A \subseteq X$ on lõplik alamhulk ja $a \in A$, siis $q_A(a) = q_{\{a\}}(a) = m(a) = (m \circ u_A)(a)$. Seega $q_A = m \circ u_A$.

$$\begin{tikzcd}
& Q & \\
& X \arrow[u, dashed, "m"] & \\
A \arrow[uur, "q_A"] \arrow[ur, "u_A"'] & & B \arrow[ll] \arrow[uul, "q_B"'] \arrow[ul, "u_B"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "q_A"] & & \{a\} \arrow[ll] \arrow[ul, "q_{\{a\}}"']
\end{tikzcd}$$

□

Näide 5.105. Analoogiliselt eelmise näitega saab näidata, et iga Abeli rühm on oma lõplikult tekitatud alamrühmade filtreeritud kopiir. □

Näide 5.106. Filtreeritud kopiiride abil saab kirjeldada teatud omadustega algebraliste struktuuride ehitust. Näiteks iga tugevalt lame polügoon on esitatav lõplikult moodustatud vabade polügoonide filtreeritud kopiirina. □

5.9. Piirid funktorite kategoorias

Selles paragrahvis uurime, kuidas leida piire funktorite kategooriates.

Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategooriad ning $F : \mathcal{D} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ funktor. Tähistame $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ja $J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Vaatleme fikseeritud $j \in J$ korral eeskirja

$$\begin{tikzcd}
F(_)(j) : \mathcal{D} \arrow[r] & \mathcal{A} \\
i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "d"'] & F(i)(j) \arrow[d, "F(d)_j"] \\
i' \arrow[r, mapsto] & F(i')(j)
\end{tikzcd},$$

kus $F(d)_j$ on loomuliku teisenduse $F(d) : F(i) \Rightarrow F(i')$ j-komponent. Kui $d : i \to i'$, $d' : i' \to i''$ on morfismid kategoorias $\mathcal{D}$, siis F funktoriaalsuse ja loomulike teisenduste komponeerimisreegli põhjal

$$(F(\_)(j))(d' \circ d) = F(d' \circ d)_j = (F(d') \circ F(d))_j = F(d')_j \circ F(d)_j = (F(\_)(j))(d') \circ (F(\_)(j))(d).$$

Samuti $(F(\_)(j))(\mathrm{id}_i) = F(\mathrm{id}_i)_j = \left(\mathrm{id}_{F(i)}\right)_j = \mathrm{id}_{F(i)(j)}$ ning seega $F(\_)(j)$ on funktor.

Lause 5.107. *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategooriad, kusjuures $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on väiksed, ning olgu $F : \mathcal{D} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ funktor. Kui iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral funktoril $F(\_)(C) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ on piir olemas, siis ka funktoril F on piir olemas ning see piir on arvutatav punktiviisiliselt.*

TÕESTUS. Tähistame $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ja $J = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Iga $j \in J$ korral olgu

$$\left(L(j), (p_i^j)_{i\in I}\right) \approx \lim F(\_\_)(j). \tag{5.14}$$

Kui $c : j \to j'$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$, siis $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \to i'$ korral

$$F(d)_{j'} \circ (F(i)(c)) \circ p_i^j = (F(i')(c)) \circ F(d)_j \circ p_i^j = (F(i')(c)) \circ p_{i'}^j.$$

Järelikult $\left(L(j), \left((F(i)(c)) \circ p_i^j\right)_{i\in I}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F(\_\_)(j')))$ ning seega leidub selline üheselt määratud morfism $L(c) : L(j) \to L(j')$, et iga $i \in I$ korral

$$p_i^{j'} \circ L(c) = (F(i)(c)) \circ p_i^j. \tag{5.15}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & L(j) \arrow[dll, "p_i^j"'] \arrow[d, "L(c)"] \arrow[drr, "p_{i'}^j"] & & \\
F(i)(j) \arrow[d, "F(i)(c)"'] & & L(j') \arrow[dll, "p_i^{j'}"'] \arrow[drr, "p_{i'}^{j'}"] & & F(i')(j) \arrow[d, "F(i')(c)"] \\
F(i)(j') \arrow[rrrr, "F(d)_{j'}"'] & & & & F(i')(j')
\end{tikzcd}$$

Veendume, et niimoodi defineeritud $L : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ on funktor. Kui $c : j \to j'$ ja $c' : j' \to j''$ kategoorias $\mathcal{C}$, siis iga $i \in I$ korral

$$p_i^{j''} \circ L(c' \circ c) = (F(i)(c' \circ c)) \circ p_i^j = (F(i)(c')) \circ (F(i)(c)) \circ p_i^j = (F(i)(c')) \circ (p_i^{j'} \circ L(c)) = p_i^{j''} \circ L(c') \circ L(c),$$

millest $L(c' \circ c) = L(c') \circ L(c)$. Võrdustest

$$p_i^j \circ L(\mathrm{id}_j) = (F(i)(\mathrm{id}_j)) \circ p_i^j = \mathrm{id}_{F(i)(j)} \circ p_i^j = p_i^j \circ \mathrm{id}_{L(j)},$$

$i \in I$, saame aga, et $L(\mathrm{id}_j) = \mathrm{id}_{L(j)}$. Seega L on funktor.

Võrdustest (5.15) järeldub, et $p_i = \left(p_i^j\right)_{j\in J} : L \Rightarrow F(i)$ on loomulik teisendus.

$$\begin{tikzcd}
L(j) \arrow[r, "p_i^j"] \arrow[d, "L(c)"'] & F(i)(j) \arrow[d, "F(i)(c)"] \\
L(j') \arrow[r, "p_i^{j'}"'] & F(i)(j')
\end{tikzcd}$$

Näitame, et $(L, (p_i)_{i\in I})$ on funktori F piir kategoorias $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Selle piiri punktiviisilisust väljendab valem

$$\left(\lim_{i\in I} F(i)\right)(j) = \lim_{i\in I}(F(i)(j)),$$

mis ütleb, et funktori F piiri $\lim_{i\in I} F(i) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ väärtus kohal $j \in J$ on funktorite $F(i) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ väärtuste (kohal j) piir.

Kuna kehtib (5.14), siis iga morfismi $d : i \to i'$ ja iga $j \in J$ korral $(F(d) \circ p_i)_j = F(d)_j \circ p_i^j = p_{i'}^j$. Seega kehtib võrdus $F(d) \circ p_i = p_{i'}$ loomulike teisenduste vahel ja $(L, (p_i)_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F))$. Kui ka $(Q, (q_i)_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F))$, siis $(Q(j), ((q_i)_j)_{i\in I}) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cone}(F(\_\_)(j)))$ iga $j \in J$ korral, mis annab sellise üheselt määratud morfismi $m_j : Q(j) \to L(j)$, et $p_i^j \circ m_j = (q_i)_j$ iga $i \in I$ korral.

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "q_{i'}"] & \\
 & L \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_{i'}"'] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(i')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Q(j) \arrow[dl, "(q_i)_j"'] \arrow[d, dashed, "m_j"] \arrow[dr, "(q_{i'})_j"] & \\
 & L(j) \arrow[dl, "p_i^j"] \arrow[dr, "p_{i'}^j"'] & \\
F(i)(j) \arrow[rr, "F(d)_j"'] & & F(i')(j)
\end{tikzcd}$$

Siis $m = (m_j)_{j\in J} : Q \Rightarrow L$ on loomulik teisendus, sest $\mathcal{C}$ iga morfismi $c : j \to j'$ korral

$$p_i^{j'} \circ L(c) \circ m_j = (F(i)(c)) \circ p_i^j \circ m_j = (F(i)(c)) \circ (q_i)_j = (q_i)_{j'} \circ Q(c) = p_i^{j'} \circ m_{j'} \circ Q(c)$$

ja seega $L(c) \circ m_j = m_{j'} \circ Q(c)$. Teisendus m rahuldab võrdust $p_i \circ m = q_i$.

$$\begin{tikzcd} Q(j) \arrow[r, "m_j"] \arrow[d, "Q(c)"'] & L(j) \arrow[d, "L(c)"] \\ Q(j') \arrow[r, "m_{j'}"'] & L(j') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q(j) \arrow[r, "(q_i)_j"] \arrow[d, "Q(c)"'] & F(i)(j) \arrow[d, "F(i)(c)"] \\ Q(j') \arrow[r, "(q_i)_{j'}"'] & F(i)(j') \end{tikzcd}$$

Kui ka $n = (n_j)_{j\in J} : Q \Rightarrow L$ on selline loomulik teisendus, et $p_i \circ n = q_i$, siis $p_i^j \circ n_j = (q_i)_j$ iga $j \in J$ korral. Morfismide m_j ühesuse tõttu $m_j = n_j$ iga $j \in J$ korral, s.t. $m = n$. ■

Tõestatud lausest järeldub vahetult järgmine tulemus.

Teoreem 5.108. *Kui $\mathcal{A}$ on täielik kategooria ja $\mathcal{C}$ väike kategooria, siis kategooria $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ on täielik.*

Näide 5.109. Olgu $\mathcal{D} = \{1 \xrightarrow{d_1} 0 \xleftarrow{d_2} 2\}$ tagasitõmbajaid defineeriv kategooria näitest 5.69 (5). Vaatleme funktorit $F : \mathcal{D} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$

$$F : \begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "d_2"] \\ 1 \arrow[r, "d_1"'] & 0 \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} & K \arrow[d, "\beta"] \\ G \arrow[r, "\alpha"'] & H \end{tikzcd}$$

Siis lause 5.107 ütleb seda, et funktori F piiriks on kolmik (P, π, ρ), kus funktor $P : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ on objektidel $j \in J$ defineeritud kui funktori $F(\_)(j) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$

$$F(\_)(j) : \begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "d_2"] \\ 1 \arrow[r, "d_1"'] & 0 \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} & K(j) \arrow[d, "\beta_j"] \\ G(j) \arrow[r, "\alpha_j"'] & H(j) \end{tikzcd}$$

piir, s.t. $P(j)$ (koos projektsioonidega p_1^j, p_2^j) on morfismide α_j, β_j tagasitõmbaja kategoorias $\mathcal{A}$. Projektsioonid $\pi : P \Rightarrow G$ ja $\rho : P \Rightarrow K$ on aga $\pi = p_1 = (p_1^j)_{j\in J}$, $\rho = p_2 = (p_2^j)_{j\in J}$. Seega

$$\begin{tikzcd} P(j) \arrow[r, "p_2^j"] \arrow[d, "p_1^j"'] & K(j) \arrow[d, "\beta_j"] \\ G(j) \arrow[r, "\alpha_j"'] & H(j) \end{tikzcd} \begin{array}{c} \text{on konservatiivne ruut} \\ \text{kategoorias } \mathcal{A} \\ \text{iga } j \in J \text{ korral} \end{array} \Longrightarrow \begin{tikzcd} P \arrow[r, "(p_2^j)_{j\in J}"] \arrow[d, "(p_1^j)_{j\in J}"'] & K \arrow[d, "\beta"] \\ G \arrow[r, "\alpha"'] & H \end{tikzcd} \begin{array}{c} \text{on konservatiivne ruut} \\ \text{kategoorias } \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}). \end{array}$$

□

Lause 5.110. *Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{C}$ ja kovariantset Yoneda sisestust $Y : \mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$, mis on antud järgmiselt:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, C) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, f)"] \\ C' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, C') \end{tikzcd} .$$

Funktor Y säilitab piire.

Tõestus. Olgu $\mathcal{D}$ väike kategooria, $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ja $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor, mille piir on $(P, (p_i)_{i\in I})$. Tuleb tõestada, et $(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, P), (\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, p_i))_{i\in I}) \approx \lim(Y \circ F)$. Tänu lausele 5.84 säilitab funktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \_) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ piire (selles lauses esineva funktori F asemel vaatleme funktorit $Y \circ F$). Järelikult on iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral

$$(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, P), (\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, p_i))_{i\in I}) \approx \lim(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \_) \circ F).$$

Kuna $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \_) \circ F = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, F(\_)) = (Y \circ F)(\_)(C) : \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$, siis lause 5.107 tõestuse põhjal on funktori $Y \circ F$ piiriks $(L, (l_i)_{i\in I})$, kus $l_i = (\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, p_i))_{C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ ja $L : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ on funktor, mis on defineeritud nii, et $L(C) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, P)$ ja kui $c : C \to C'$ kategoorias $\mathcal{C}$, siis $L(c) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', P) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, P)$ on (vt. (5.15)) üheselt määratud morfism, mille korral $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', p_i) \circ L(c) = (Y \circ F)(i)(c) \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, p_i)$ ehk

$$(p_i \circ \_) \circ L(c) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, F(i)) \circ (p_i \circ \_) = (\_ \circ c) \circ (p_i \circ \_).$$

See tähendab, et $L(c) = \_ \circ c : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', P) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, P)$ ja seega $L = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, P)$. Samuti $l_i = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, p_i)$, sest $(l_i)_C = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, p_i) = p_i \circ \_ = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, p_i)_C$ (vt. näidet 4.5). ■

Teoreem 5.111. *Olgu $\mathcal{C}$ väike kategooria. Iga funktor $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ on esitatav mor-funktoritest ja nendevahelistest loomulikest teisendustest koosneva diagrammi kopiirina.*

Tõestus. Vaatleme liitfunktorit

$$\mathsf{el}(F) \xrightarrow{U_F} \mathcal{C} \xrightarrow{Y^{\mathrm{op}}} \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}),$$

kus $\mathsf{el}(F)$ on funktori F elementide kategooria (vt. näidet 3.18), U_F on vastav unustav funktor ja Y^{op} on kontravariantne Yoneda sisestus. Meenutame, et $\mathsf{el}(F)$ objektid on paarid (c, C), kus $c \in F(C)$ ja morfismid $f : (c, C) \to (c', C')$ on sellised morfismid $f : C \to C'$ kategoorias $\mathcal{C}$, mille korral $F(f)(c) = c'$. Me näitame, et F on kontravariantse funktori $Y^{\mathrm{op}} \circ U_F : \mathsf{el}(F) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$ kopiirobjekt.

Yoneda lemma (teoreem 4.12) põhjal vastab igale $\mathsf{el}(F)$ objektile (c, C) loomulik teisendus $\alpha^{(c,C)} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, \_) \Rightarrow F$, nii et $\theta_{F,C}(\alpha^{(c,C)}) = c$ ehk $\alpha^{(c,C)}_C(\mathrm{id}_C) = c$. Et $(\theta_{F,C})_{C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} : N \Rightarrow F$ on loomulik teisendus, siis kategooria $\mathsf{el}(F)$ iga morfismi $f : (c, C) \to (c', C')$ korral on diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, _), F) \arrow[r, "\theta_{F,C}"] \arrow[d, "N(f)"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', _), F) \arrow[r, "\theta_{F,C'}"'] & F(C')
\end{tikzcd}$$

kommutatiivne ning järelikult

$$\begin{aligned}
\theta_{F,C'}\left(\alpha^{(c,C)} \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, _)\right) &= \theta_{F,C'}\left(N(f)\left(\alpha^{(c,C)}\right)\right) = (F(f) \circ \theta_{F,C})\left(\alpha^{(c,C)}\right) = F(f)(c) = c' \\
&= \theta_{F,C'}\left(\alpha^{(c',C')}\right),
\end{aligned}$$

millest kujutuse $\theta_{F,C'}$ üksühesuse tõttu $\alpha^{(c,C)} \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, \_) = \alpha^{(c',C')}$. Seega $\left(F, \left(\alpha^{(c,C)}\right)_{(c,C)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{el}(F))}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cocone}(Y^{\mathrm{op}} \circ U_F))$. Olgu ka

$$\left(G, \left(\beta^{(c,C)}\right)_{(c,C)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{el}(F))}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{cocone}(Y^{\mathrm{op}} \circ U_F)). \tag{5.16}$$

$$\begin{tikzcd}
& G & \\
& F \arrow[u, dashed, "\mu"] & \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, _) \arrow[uur, "\beta_{(c,C)}"] \arrow[ur, "\alpha^{(c,C)}"] & & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', _) \arrow[ll, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, _)"] \arrow[uul, "\beta_{(c',C')}"'] \arrow[ul, "\alpha^{(c',C')}"']
\end{tikzcd}$$

Selleks, et saada loomulikku teisendust $\mu : F \Rightarrow G$ oleks iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jaoks vaja defineerida kujutus $\mu_C : F(C) \to G(C)$. Kui $x \in F(C)$, siis defineerime

$$\mu_C(x) := \theta_{G,C}\left(\beta_{(x,C)}\right).$$

Kui $g : C \to D$ kategoorias $\mathcal{C}$ ja $x \in F(C)$, siis $g : (x, C) \to (F(g)(x), D)$ kategoorias $\mathsf{el}(F)$. Kuna kehtib (5.16), siis $\beta_{(x,C)} \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g, \_) = \beta_{(F(g)(x),D)}$. Et diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, _), G) \arrow[r, "\theta_{G,C}"] \arrow[d, "N(g)"'] & G(C) \arrow[d, "G(g)"] \\
\mathsf{Nat}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(D, _), G) \arrow[r, "\theta_{G,D}"'] & G(D)
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivne, siis

$$\begin{aligned}
G(g)(\mu_C(x)) &= G(g)\left(\theta_{G,C}\left(\beta_{(x,C)}\right)\right) = (G(g) \circ \theta_{G,C})\left(\beta_{(x,C)}\right) = (\theta_{G,D} \circ N(g))\left(\beta_{(x,C)}\right) \\
&= \theta_{G,D}\left(\beta_{(x,C)} \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g, _)\right) = \theta_{G,D}\left(\beta_{(F(g)(x),D)}\right) = \mu_D(F(g)(x)).
\end{aligned}$$

Järelikult $\mu : F \Rightarrow G$ on loomulik teisendus.

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "F(g)"'] & G(C) \arrow[d, "G(g)"] \\
F(D) \arrow[r, "\mu_D"'] & G(D)
\end{tikzcd}$$

Kuna

$$\theta_{G,C}\left(\mu \circ \alpha^{(c,C)}\right) = \left(\mu_C \circ \alpha_C^{(c,C)}\right)(\mathrm{id}_C) = \mu_C\left(\alpha_C^{(c,C)}(\mathrm{id}_C)\right) = \mu_C(c) = \theta_{G,C}\left(\beta_{(c,C)}\right),$$

siis kujutuse $\theta_{G,C}$ üksühesuse tõttu $\mu \circ \alpha^{(c,C)} = \beta_{(c,C)}$. Kui ka $\nu \circ \alpha^{(c,C)} = \beta_{(c,C)}$ iga $(c, C) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{el}(F))$ korral, siis

$$\mu_C(c) = \theta_{G,C}\left(\mu \circ \alpha^{(c,C)}\right) = \theta_{G,C}\left(\nu \circ \alpha^{(c,C)}\right) = \nu_C(c),$$

millest järeldub $\mu = \nu$. ■

5.10. Ülesanded

Ülesanded 5.112.
1. Kas sinu lemmikkategoorias on olemas (ko)korrutised, (ko)võrdsustajad või tagasitõmbajad? Kas ta on (ko)täielik?
2. Olgu $\mathcal{C}$ lõplike korrutistega kategooria. Näidata, et leidub funktor $\_ \times \_ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mis on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned}
(_ \times _)(A, B) &:= A \times B, \\
(_ \times _)(f, g) &:= f \times g : \quad A \times B \to A' \times B',
\end{aligned}$$

kus $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ kategoorias $\mathcal{C}$ ja $f \times g$ on üheselt määratud morfism, mis muudab diagrammi

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, dashed, "f \times g"] & B \arrow[d, "g"] \\
A' & A' \times B' \arrow[l, "p_{A'}"] \arrow[r, "p_{B'}"'] & B'
\end{tikzcd}$$

kommutatiivseks. (Funktorit kahe kategooria korrutisest kolmandasse kategooriasse nimetatakse tihti **bifunktoriks**[101].)
3. Näidatata, et üheski mittetriviaalses rühmas, mida vaadeldakse üheobjektilise kategooriana, ei ole binaarseid korrutisi.

[101] *bifunctor*

4. Olgu (E, e) morfismide $f, g : A \to B$ võrdsustaja. Tõestada, et e on isomorfism parajasti siis, kui $f = g$.
5. Tuua näide kategooriast $\mathcal{C}$, kus on kaks morfismi $f, g : A \to B$, millel ei leidu kovõrdsustajat kategoorias $\mathcal{C}$. (Näpunäide: võib vaadelda kategooria Set alamkategooriaid.)
6. Tõestada, et tuumapaaride projektsioonid on retraktsioonid.
7. Defineerida koonuste morfismi mõiste loomulike teisenduste abil.
8. Tõestada, et kui f on monomorfism ja (P, p_1, p_2) on morfismide f ja g tagasitõmbaja, siis p_2 on monomorfism.
9. Tõestada otse, et konservatiivsed ruudud saab (kanooniliselt) konstrueerida korrutiste ja võrdsustajate abil. Täpsemalt, olgu $f : A \to C$ ja $g : B \to C$ kaks morfismi kategoorias $\mathcal{C}$. Tõestada, et kui $(A \times B, p_A, p_B)$ on A ja B korrutis ja kui (E, e) on $f \circ p_A$ ja $g \circ p_B$ võrdsustaja, siis välimine ruut diagrammis

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "p_B \circ e"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, "p_A \circ e"'] & & B \arrow[dd, "g"] \\
& A \times B \arrow[ur, "p_B"'] \arrow[dl, "p_A"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

on konservatiivne.
10. Tõestada, et kui $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ säilitavad kõik piirid, siis ka $H \circ G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ säilitab kõik piirid.
11. Kategooria $\mathcal{A}$ ja fikseeritud objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ jaoks anda funktori $(A \times \_) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definitsioon analoogiliselt ülesandega 2. Tõestada, et kui $\mathcal{A}$ on lõplikult täielik, siis $A \times \_$ säilitab võrdsustajad.
12. Olgu kategooria $\mathcal{D}$ selline, kus $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \{1, 0\}$ ja $\mathrm{Mor}_{(}\mathcal{D}) = \{\mathrm{id}_0, \mathrm{id}_1, 0 \longrightarrow 1\}$. Vaatleme kategooriat $\mathcal{B}$, mis on antud järgneval diagrammil (ühikmorfisme pole märgitud):

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f & e \arrow[l] \arrow[r] & g \\
c \arrow[u] & b \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[ur] & d \arrow[u]
\end{tikzcd}.$$

Vaatleme kategoorias $\mathsf{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ on funktoreid F ja G, mille korral $F(0) = c$, $F(1) = f$ ja $G(0) = d$, $G(1) = g$. Tõestage, et F ja G korrutiseks on funktor H, kus $H(0) = b$ ja $H(1) = e$.
Märgime, et see korrutis pole punktiviisiliselt arvutatav, kuna kategoorias $\mathcal{B}$ ei leidu korrutist $f \times g$.

6. Kaasfunktorid

6.1. Motiveerivad näited

Vaatleme vektorruumide (üle korpuse K) kategooriat Vec_K, kus morfismideks on lineaarkujutused. Unustav funktor $U : \mathsf{Vec}_K \to \mathsf{Set}$ viib iga vektorruumi V tema elementide hulgaks. Iga hulga X korral leidub vektorruum V_X, mille jaoks X on baasivektorite hulk: see koosneb kõigist X elementide formaalsetest lineaarkombinatsioonidest $k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$, $k_1, \ldots, k_n \in K$, koos loomulikul viisil defineeritud tehetega. Iga kujutuse $f : X \to Y$ saab laiendada lineaarkujutuseks $V_X \to V_Y$ nii, et tulemuseks on funktor $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Vec}_K$. See funktor on objektidel defineeritud võrdusega $F(X) = V_X$, kus X on hulk, ja morfismidel võrdusega

$$F(f)(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n) := k_1f(x_1) + \ldots + k_nf(x_n).$$

Iga hulga X ja vektorruumi W korral leidub bijektiivne kujutus

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{X,W} : \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(F(X), W) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, U(W)), \\ f & \mapsto & f|_X. \end{array} \tag{6.1}$$

Selle pöördkujutus $\psi_{X,W} : \ \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, U(W)) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(F(X), W)$ laiendab iga kujutuse $g : X \to U(W)$ üheselt määratud lineaarkujutuseks $\psi_{X,W}(g) =: f_g : F(X) \to W$, mis ilmutatult on antud võrdusega

$$f_g(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n) = k_1g(x_1) + \ldots + k_ng(x_n) \tag{6.2}$$

(seega f_g viib formaalsed lineaarkombinatsioonid vektorruumis $F(X)$ tegelikeks lineaarkombinatsioonideks vektorruumis W). Osutub, et kujutused $\varphi_{X,W}$ on loomuliku teisenduse φ komponendid, kui (6.1) mõlemaid pooli vaadelda funktoritena X ja W suhtes. Selles veendumiseks piisab, kui kontrollida loomulikkust X ja W suhtes eraldi (vt. ülesnnet 6.57 (1)). Loomulikkus X suhtes tähendab, et iga kujutuse $k : X' \to X$ korral diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(F(X), W) \arrow[r, "\varphi_{X,W}"] \arrow[d, "\_\_\circ F(k)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, U(W)) \arrow[d, "\_\_\circ k"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vec}_K}(F(X'), W) \arrow[r, "\varphi_{X',W}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X', U(W)) \end{tikzcd}$$

on kommutatiivne. Tõepoolest, iga lineaarkujutuse $f : F(X) \to W$ ja iga elemendi $x \in X'$ korral

$$\begin{aligned} [(\_\_\circ k) \circ \varphi_{X,W}](f)(x) &= (\varphi_{X,W}(f) \circ k)(x) = f|_X(k(x)) = f(k(x)) = f(F(k)(x)) = (f \circ F(k))|_{X'}(x) \\ &= [\varphi_{X',W}(f \circ F(k))](x) = [\varphi_{X',W} \circ (\_\_\circ F(k))](f)(x). \end{aligned}$$

Sarnane arutlus annab, et φ on loomulik W suhtes. Veelgi enam, kujutus, mis saadab iga $x \in X$ samaks elemendiks x, mida vaadeldakse V_X vektorina, on morfism $\iota_X : X \to U(V_X) = (U \circ F)(X)$ kategoorias Set. Mistahes vektorruumi W ja kujutuse $g : X \to U(W)$ korral on lineaarkujutused $f_g : V_X \to W$ üheselt määratud lineaarkujutused, mis laiendavad kujutust g, s.t. muudavad kolmnurga

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[dr, "g"'] & U(V_X) \arrow[d, dashed, "U(f_g)"] & V_X \arrow[d, dashed, "f_g"'] \\ & U(W) & W \end{tikzcd}$$

kommutatiivseks.

On veel teisi sarnaseid näiteid. Hulkade S, T ja R korral leiduvad bijektiivsed kujutused

$$\varphi_{S,R} : \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(S \times T, R) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(S, \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(T, R)),$$

mis on antud võrdusega

$$[\varphi_{S,R}(f)(s)](t) := f(s, t)$$

iga kujutuse $f : S \times T \to R$ ja mistahes elementide $s \in S$, $t \in T, r \in R$ korral. Selline φ on loomulik S ja R (aga ka T) suhtes. Kui hulk T on fikseeritud ja defineerime $F, G : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ kui funktorid $F := \_ \times T$ ja $G := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(T, \_)$, siis bijektsioon võtab kuju

$$\varphi_{S,R} : \ \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(F(S), R) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(S, G(R)).$$

Saab näidata, et moodulite A, B jaoks üle kommutatiivse ringi R ja Abeli rühma C jaoks leidub isomorfism

$$\varphi_{A,C} : \ \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(A \otimes_R B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(A, \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(B, C)).$$

6.2. Kaasfunktorid

Definitsioon 6.1. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad. **Adjunktsioon**[102] kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ on kolmik $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, kus $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ on funktorid ja $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B)\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\times \mathrm{Ob}(\mathcal{B})}$ on bijektiivsete kujutuste

$$\varphi_{A,B} : \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \tag{6.3}$$

süsteem, mis on loomulik A ja B suhtes. Kui $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on adjunktsioon, siis ütleme et F on G **vasakpoolne kaasfunktor**[103] ja G on F **parempoolne kaasfunktor** ning kirjutame $F \dashv G$.

Funktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(\_), \_)$ avaldise (6.3) vasakul poolel on bifunktor

$$\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \xrightarrow{F\times \mathrm{id}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\mathrm{hom}} \mathsf{Set},$$

mis tegutseb järgmiselt:

$$\begin{tikzcd}
(A, B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(k^{\mathrm{op}}, h)}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[d, "h\circ_\circ F(k)"] \\
(A', B') \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A'), B')
\end{tikzcd} .$$

Bifunktor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_, G(\_)) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \to \mathsf{Set}$ on defineeritud analoogiliselt. Seega bijektsioonide φ loomulikkus tähendab, et mistahes morfismide $k : A' \to A$ ja $h : B \to B'$ korral diagrammmid

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "_\circ F(k)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[d, "_\circ k"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A'), B) \arrow[r, "\varphi_{A',B}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A', G(B))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "h\circ_"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[d, "G(h)\circ_"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B'))
\end{tikzcd}$$

kommuteeruvad (vt. ülesannet 6.57 (1)). See tähendab, et kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A' \to A$ ja kategooria $\mathcal{B}$ mistahes morfismide $h : B \to B'$ ja $f : F(A) \to B$ korral

$$\varphi_{A',B}(f \circ F(k)) \quad = \quad \varphi_{A,B}(f) \circ k, \tag{6.4}$$

$$\varphi_{A,B'}(h \circ f) \quad = \quad G(h) \circ \varphi_{A,B}(f). \tag{6.5}$$

Definitsioon 6.2. Olgu $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktor ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. **Universaalne morfism**[104] objektist A funktorisse G on objekti A G-aluste objektide kategooria $(A \downarrow G)$ algobjekt (vt. näidet 3.17).

Seega universaalne morfism objektist A funktorisse G on paar (u, B), mis koosneb objektist $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja kategooria $\mathcal{A}$ morfismist $u : A \to G(B)$, nii et iga paari (g, B'), kus $B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $g : A \to G(B')$, jaoks leidub selline üheselt määratud morfism $f : B \to B'$ kategoorias $\mathcal{B}$, et $G(f) \circ u = g$. Teiste sõnadega, iga morfism $A \to G(B')$, $B' \in \mathcal{B}$, tegurdub üheselt läbi universaalse morfismi u.

[102] *adjunction*
[103] *left adjoint*
[104] *universal morphism*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g"'] & G(B) \arrow[d, dashed, "G(f)"] & B \arrow[d, dashed, "f"'] \\
& G(B') & B'
\end{tikzcd}$$

Duaalselt saab defineerida universaalsed morfismid funktorist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ objekti $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Kuna alg- ja lõppobjektid on ühesed isomorfismi täpsuseni, siis ka universaalsed morfismid on ühesed isomorfismi täpsuseni.

Teoreem 6.3. *Adjunktsioon* $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *määrab ära*

1. *loomuliku teisenduse* $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$, *nii et iga objekti* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ *korral paar* $(\eta_A, F(A))$ *on universaalne morfism objektist* A *funktorisse* G *ja iga* $f : F(A) \to B$ *korral*
$$\varphi_{A,B}(f) = G(f) \circ \eta_A : \quad A \to G(B); \tag{6.6}$$
2. *loomuliku teisenduse* $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, *nii et iga objekti* $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ *korral paar* $(G(B), \varepsilon_B)$ *on universaalne morfism funktorist* F *objekti* B *ja iga* $g : A \to G(B)$ *korral*
$$\varphi^{-1}_{A,B}(g) = \varepsilon_B \circ F(g) : \quad F(A) \to B. \tag{6.7}$$

Veelgi enam, kompositsioonid $(\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G)$ *ja* $(\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta)$ *on samasusteisendused vastavalt funktoril* G *ja* F.

$$G \xRightarrow{\eta * \mathrm{id}_G} G \circ F \circ G \xRightarrow{\mathrm{id}_G * \varepsilon} G, \qquad F \xRightarrow{\mathrm{id}_F * \eta} F \circ G \circ F \xRightarrow{\varepsilon * \mathrm{id}_F} F. \tag{6.8}$$

Loomuikku teisendust η nimetatakse selle **adjunktsiooni ühikuks**[105] ja loomulikku teisendust ε **koühikuks**.

Märgime, et (4.1) ja (4.2) põhjal teiseneb tingimus (6.8) niinimetatud **kolmnurksamasusteks**[106]

$$G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = \mathrm{id}_{G(B)}, \qquad \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \mathrm{id}_{F(A)}, \tag{6.9}$$

kus $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, s.t. kolmnurkade

$$\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{G(B)}"'] & (G \circ F \circ G)(B) \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] \\
& G(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F(A)}"'] & (F \circ G \circ F)(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd} \tag{6.10}$$

kommutatiivsuseks.

TÕESTUS. 1. Iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral võtame avaldises (6.3) $B := F(A)$ ja defineerime morfismi $\eta_A : A \to (G \circ F)(A)$ võrdusega
$$\eta_A := \varphi_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)}). \tag{6.11}$$

Võrdusest (6.5) järeldub siis, et iga morfismi $f : F(A) \to B$ korral

$$\varphi_{A,B}(f) = \varphi_{A,B}(f \circ \mathrm{id}_{F(A)}) = G(f) \circ \varphi_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)}) = G(f) \circ \eta_A.$$

Et tõestada $(\eta_A, F(A))$ universaalsus oletame, et $g : A \to G(B)$ on morfism kategoorias $\mathcal{A}$. Siis $\varphi^{-1}_{A,B}(g) : F(A) \to B$ kategoorias $\mathcal{B}$ ja võrdust (6.6) kasutades saame, et

$$G(\varphi^{-1}_{A,B}(g)) \circ \eta_A = \varphi_{A,B}(\varphi^{-1}_{A,B}(g)) = g.$$

[105] *unit (of the adjunction)*
[106] *triangle identities*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & (G\circ F)(A) \arrow[d, dashed, "G(\varphi^{-1}_{A,B}(g))"] & F(A) \arrow[d, dashed, "\varphi^{-1}_{A,B}(g)"] \\
& G(B) & B
\end{tikzcd}
$$

Kui ka $G(h) \circ \eta_A = g$ mingi morfismi $h : F(A) \to B$ korral, siis võrdusest $g = \varphi_{A,B}(h)$ järeldub $\varphi^{-1}_{A,B}(g) = h$. Seega η_A on universaalne morfism objektist A funktorisse G.
Tõestamaks, et $\eta = (\eta_A)_{A\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ on loomulik teisendus, vaatleme kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $k : A' \to A$ korral diagrammi

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "k"'] & (G\circ F)(A') \arrow[d, "(G\circ F)(k)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"'] & (G\circ F)(A)
\end{tikzcd}
$$

Selle kommutatiivsus järeldub võrduste ahelast

$$
\begin{aligned}
(G\circ F)(k) \circ \eta_{A'} &= (G\circ F)(k) \circ \varphi_{A',F(A')}(\mathrm{id}_{F(A')}) = \varphi_{A',F(A)}(F(k) \circ \mathrm{id}_{F(A')}) \\
&= \varphi_{A',F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)} \circ F(k)) = \varphi_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)}) \circ k = \eta_A \circ k,
\end{aligned}
$$

kus me oleme kasutanud võrdusi (6.11), (6.5) ja (6.4). Neid arvutusi võib illustreerida järgneva kommutatiivse diagrammi abil:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A'), F(A')) \arrow[r, "F(k)\circ\_\_"] \arrow[d, "\varphi_{A',F(A')}"'] & \boldsymbol{\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A'), F(A))} \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi_{A',F(A)}}"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A)) \arrow[l, "\_\_\circ F(k)"'] \arrow[d, "\varphi_{A,F(A)}"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A', (G\circ F)(A')) \arrow[r, "(G\circ F)(k)\circ\_\_"'] & \boldsymbol{\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A', (G\circ F)(A))} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, (G\circ F)(A)) \arrow[l, "\_\_\circ k"]
\end{tikzcd}
.
$$

2. Iga $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral võtame avaldises (6.3) $A := G(B)$ ja defineerime morfismi $\varepsilon_B : (F \circ G)(B) \to B$ võrdusega
$$\varepsilon_B := \varphi^{-1}_{G(B),B}(\mathrm{id}_{G(B)}). \tag{6.12}$$
See osutub universaalseks morfismiks funktorist F objekti B ja saab näidata, et $\varphi^{-1}_{A,B}(g) = \varepsilon_B \circ F(g)$ iga $g : A \to G(B)$ korral.

Lõpuks, kolmnurgad (6.10) kommuteeruvad, sest võrduste (6.12), (6.6), (6.11) ja (6.7) tõttu

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_{G(B)} &= \varphi_{G(B),B}(\varepsilon_B) = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)}, \\
\mathrm{id}_{F(A)} &= \varphi^{-1}_{A,F(A)}(\eta_A) = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A),
\end{aligned}
$$

mis tõestab antud teoreemi. ■

Osutub, et funktori (vasakpoolne või parempoolne) kaasfunktor on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud (kui ta leidub).

Lause 6.4. *Kui $F \dashv G$ ja $F' \dashv G$, siis $F \cong F'$.*

Tõestus. Olgu $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\eta' : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F'$ vaadeldavate adjunktsioonide ühikud. Kuna iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on $(\eta_A, F(A))$ ja ja $(\eta'_A, F'(A))$ universaalsed morfismid objektist A funktorisse G, siis on nad mõlemad kategooria $A \downarrow G$ algobjektid ja seega isomorfsed selles kategoorias. See tähendab, et leiduvad sellised üksteise pöördmorfismid $g_A : F(A) \to F'(A)$ ja $h_A : F'(A) \to F(A)$, et

$$G(g_A) \circ \eta_A = \eta'_A \quad \text{ja} \quad G(h_A) \circ \eta'_A = \eta_A.$$

Tõestamaks, et $g = (g_A)_{A\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} : F \Rightarrow F'$ on loomulik teisendus, peame veenduma, et diagramm

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "g_A"] \arrow[d, "F(k)"'] & F'(A) \arrow[d, "F'(k)"] \\ F(A') \arrow[r, "g_{A'}"'] & F'(A') \end{tikzcd}$$

on kommutatiivne kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A \to A'$ korral. Tänu η_A universaalsusele leidub üheselt määratud morfism $b : F(A) \to F'(A')$ nii, et $G(b) \circ \eta_A = \eta'_{A'} \circ k$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "k"'] & G(F(A)) \arrow[d, dashed, "G(b)"] & F(A) \arrow[d, dashed, "b"] \\ A' \arrow[r, "\eta'_{A'}"'] & G(F'(A')) & F'(A') \end{tikzcd}$$

Kasutades η ja η' loomulikkust diagrammide

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[d, "k"'] & (G\circ F')(A) \arrow[d, "(G\circ F')(k)"] & A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "k"'] & (G\circ F)(A) \arrow[d, "(G\circ F)(k)"] \\ A' \arrow[r, "\eta'_{A'}"'] & (G\circ F')(A') & A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & (G\circ F)(A') \end{tikzcd}$$

kommutatiivsuse näol saame aga, et

$$\begin{aligned} G(F'(k)\circ g_A)\circ \eta_A &= (G\circ F')(k)\circ G(g_A)\circ \eta_A = (G\circ F')(k)\circ \eta'_A = \eta'_{A'}\circ k, \\ G(g_{A'}\circ F(k))\circ \eta_A &= G(g_{A'})\circ (G\circ F)(k)\circ \eta_A = G(g_{A'})\circ \eta_{A'}\circ k = \eta'_{A'}\circ k, \end{aligned}$$

millest b ühesuse tõttu järeldubki, et $F'(k)\circ g_A = b = g_{A'}\circ F(k)$. ■

Teoreem 6.5. *Iga adjunktsioon $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on täielikult ära määratud järgmise loetelu iga punkti poolt.*

1. *Funktorid F, G ja selline loomulik teisendus $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G\circ F$, et iga $\eta_A : A \to (G\circ F)(A)$ on universaalne morfism objektist A funktorisse G. Siis φ on defineeritud võrdusega (6.6).*
2. *Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ja iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral objekt $F_0(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ning universaalne morfism $\eta_A : A \to G(F_0(A))$ objektist A funktorisse G. Siis funktor F on objektidel antud kujutusega F_0 ja morfismidel $k : A \to A'$ on defineeritud võrdusega $G(F(k))\circ \eta_A = \eta_{A'}\circ k$.*
3. *Funktorid F, G ja selline loomulik teisendus $\varepsilon : F\circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, et iga $\varepsilon_B : (F\circ G)(B) \to B$ on universaalne morfism funktorist F objekti B. Siis φ^{-1} on defineeritud võrdusega (6.7).*
4. *Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja iga $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral objekt $G_0(B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ning universaalne morfism $\varepsilon_B : F(G_0(B)) \to B$ funktorist F objekti B.*
5. *Funktorid F, G ja sellised loomulikud teisendused $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G\circ F$ ja $\varepsilon : F\circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, et mõlemad kompositsioonid (6.8) on samasusteisendused. Siis φ on defineeritud võrdusega (6.6) ja φ^{-1} võrdusega (6.7).*

TÕESTUS. 1. Olgu $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Morfismi $\eta_A : A \to (G\circ F)(A)$ universaalsus tähendab, et iga morfismi $g : A \to G(B)$ jaoks leidub täpselt üks morfism $f : F(A) \to B$, mis muudab kolmnurga

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & (G\circ F)(A) \arrow[d, dashed, "G(f)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

kommutatiivseks. See tähendab täpselt seda, et võrdus

$$\psi_{A,B}(f) := G(f) \circ \eta_A$$

defineerib bijektsiooni $\psi_{A,B} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$.
Kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A' \to A$ korral on diagramm

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "k"'] & (G \circ F)(A') \arrow[d, "(G\circ F)(k)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"'] & (G \circ F)(A)
\end{tikzcd}$$

kommutatiivne ning järelikult iga $\mathcal{B}$ morfismi $f : F(A) \to B$ korral

$$\psi_{A,B}(f) \circ k = G(f) \circ \eta_A \circ k = G(f) \circ (G \circ F)(k) \circ \eta_{A'} = G(f \circ F(k)) \circ \eta_{A'} = \psi_{A',B}(f \circ F(k)).$$

Seega ψ on loomulik A suhtes. Mistahes morfismide $h : B \to B'$ ja $f : F(A) \to B$ korral kategoorias $\mathcal{B}$

$$G(h) \circ \psi_{A,B}(f) = G(h) \circ G(f) \circ \eta_A = G(h \circ f) \circ \eta_A = \psi_{A,B'}(h \circ f)$$

ja seega ψ on loomulik ka B suhtes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r, "\psi_{A,B}"] \arrow[d, "__\circ F(k)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[d, "__\circ k"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A'), B) \arrow[r, "\psi_{A',B}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A', G(B))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r, "\psi_{A,B}"] \arrow[d, "h\circ__"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[d, "G(h)\circ__"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B') \arrow[r, "\psi_{A,B'}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B'))
\end{tikzcd}$$

Niisiis oleme saanud adjunktsiooni $\langle F, G, \psi \rangle$. Juhul kui η oli ühik, mis oli saadud adjunktsioonist $\langle F, G, \varphi \rangle$, siis $\psi = \varphi$, sest võrduse (6.6) tõttu $\psi_{A,B}(f) = G(f) \circ \eta_A = \varphi_{A,B}(f)$ iga morfismi $f : F(A) \to B$ korral.

2. Näitame, et punkti 2 andmeid saab täiendada punkti 1 andmeteks ja seega nad määravad ära adjunktsiooni. Punktis 2 on meil antud ainult universaalne morfism $(\eta_A, F_0(A))$ iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral. Näitame, et on täpselt üks võimalus muuta F_0 funktoriks $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, mille korral $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ oleks loomulik teisendus. Kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $k : A \to A'$ korral järeldub η_A universaalsusest, et leidub ühene morfism $F_0(A) \to F_0(A')$, mida tähistame $F(k)$, nii et diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "k"'] & G(F_0(A)) \arrow[d, dashed, "G(F(k))"] & F_0(A) \arrow[d, dashed, "F(k)"'] \\
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(F_0(A')) & F_0(A')
\end{tikzcd}$$

kommuteerub. Kui $l : A' \to A''$ on ka $\mathcal{A}$ morfism siis vaatleme kommutatiivset diagrammi

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "k"'] & G(F_0(A)) \arrow[d, dashed, "G(F(k))"] & F_0(A) \arrow[d, dashed, "F(k)"'] \\
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] \arrow[d, "l"'] & G(F_0(A')) \arrow[d, dashed, "G(F(l))"] & F_0(A') \arrow[d, dashed, "F(l)"'] \\
A'' \arrow[r, "\eta_{A''}"'] & G(F_0(A'')) & F_0(A'')
\end{tikzcd} .$$

Kuna $F(l \circ k) : F_0(A) \to F_0(A'')$ on ühene morfism, mille korral $\eta_{A''} \circ l \circ k = F(l \circ k) \circ \eta_A$, aga teisest küljest ka

$$\eta_{A''} \circ l \circ k = G(F(l)) \circ \eta_{A'} \circ k = G(F(l)) \circ G(F(k)) \circ \eta_A = G(F(l) \circ F(k)) \circ \eta_A,$$

siis peab kehtima võrdus $F(l)\circ F(k)=F(l\circ k)$. Ilmselt $F(\mathrm{id}_A)=\mathrm{id}_{F_0(A)}$ ning seega F on funktor. Tänu F definitsioonile on $\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\Rightarrow G\circ F$ loomulik teisendus.
3. Duaalne väitega 1.
4. Duaalne väitega 2.
5. Iga $A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral defineerime kaks kujutust

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A),B)\underset{\theta_{A,B}}{\overset{\varphi_{A,B}}{\rightleftarrows}}\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,G(B))$$

võrdustega

$$\begin{aligned}\varphi_{A,B}(f) &:= G(f)\circ\eta_A,\\ \theta_{A,B}(g) &:= \varepsilon_B\circ F(g),\end{aligned}$$

$f:F(A)\to B$, $g:A\to G(B)$. Kasutades G funktoriaalsust, η loomulikkust ja esimest kolmnurksamasust (6.9) saame

$$\begin{aligned}(\varphi_{A,B}\circ\theta_{A,B})(g) &= \varphi_{A,B}(\varepsilon_B\circ F(g))=G(\varepsilon_B\circ F(g))\circ\eta_A=G(\varepsilon_B)\circ(G\circ F)(g)\circ\eta_A\\ &= G(\varepsilon_B)\circ\eta_{G(B)}\circ g=\mathrm{id}_{G(B)}\circ g=g.\end{aligned}$$

Seega $\varphi_{A,B}\circ\theta_{A,B}=\mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,G(B))}$. Duaalselt $\theta_{A,B}\circ\varphi_{A,B}=\mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A),B)}$ ning seega on $\varphi_{A,B}$ bijektsioon. Et veenduda φ loomulikkuses, see tähendab, võrduste (6.4) ja (6.5) kehtimises suvaliste morfismide $k:A'\to A$, $h:B\to B'$ ja $f:F(A)\to B$ korral, paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\varphi_{A',B}(f\circ F(k)) &= G(f\circ F(k))\circ\eta_{A'}=G(f)\circ(G\circ F)(k)\circ\eta_{A'}=G(f)\circ\eta_A\circ k=\varphi_{A,B}(f)\circ k,\\ \varphi_{A,B'}(h\circ f) &= G(h\circ f)\circ\eta_A=G(h)\circ G(f)\circ\eta_A=G(h)\circ\varphi_{A,B}(f).\end{aligned}$$

Järelikult oleme saanud adjunktsiooni (ja kui alustasime mingi adjunktsiooniga, siis on see täpselt sama, millest alustasime). ■

Teoreem 6.5 on väga kasulik. Näiteks osa 2 lubab konstrueerida adjunktsiooni, kui leidub universaalne morfism $\mathcal{A}$ igast objektist A funktorisse $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$. Vaatleme näiteks kategooriat $\mathcal{B}$ ja **diagonaalfunktorit**[107]

$$\Delta:\mathcal{B}\to\mathcal{B}\times\mathcal{B},\quad B\mapsto(B,B),\quad f\mapsto(f,f).$$

Kui kategoorias $\mathcal{B}$ on olemas lõplikud kokorrutised, siis iga paari $(B,B')\in\mathrm{Ob}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ jaoks leidub universaalne morfism $(u_B,u_{B'}):(B,B')\to\Delta(B\coprod B')$, nimelt morfsimideks $u_B:B\to B\coprod B'$ ja $u_{B'}:B'\to B\coprod B'$ võib võtta kokorrutise sisestused. Teoreemi 6.5 põhjal järeldame, et kujutus $(B,B')\mapsto B\coprod B'$ defineerib funktori $\_\coprod\_:\mathcal{B}\times\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ objektidel ja saadud funktor on diagonaalfunktori $\Delta:\mathcal{B}\to\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ vasakpoolne kaasfunktor, $\_\coprod\_\dashv\Delta$:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\left(B\coprod B',C\right)\cong\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}\left((B,B'),\Delta(C)\right)=\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B,C)\times\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B',C).$$

Analoogiliselt, kui kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas lõplikud korrutised, siis defineerivad nad funktori $\_\times\_:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ nii, et $\Delta\dashv\_\times\_$:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}}\left(\Delta(C),(A,A')\right)\cong\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C,A\times A').$$

Vaatleme näitena veel kahte järjestatud hulka A ja B kui kategooriaid (vt. näidet 1.11(2)). Järjestust säilitavad kujutused A ja B vahel on kovariantsed funktorid ja järjestust pööravad kujutused on kontravariantsed funktorid. Vaatleme kahte järjestust pööravat kujutust $f:A\to B$, $g:B\to A$ kui kovariantseid funktoreid

$$A\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}B^{\mathrm{op}}$$

(vt. lauset 3.3). Siis $f\dashv g$, kui

$$a\leqslant(g\circ f)(a)\ \text{ kategoorias } A\ \text{ ja } (f\circ g)(b)\leqslant b\ \text{ kategoorias } B^{\mathrm{op}}\ (\text{ehk } b\leqslant(f\circ g)(b)\ \text{ kategoorias } B)\tag{6.13}$$

[107] *diagonal functor*

iga $a \in A$ ja $b \in B$ korral. See järeldub teoreemist 6.5 (5): loomulikkuse tingimused ja kolmnurksamasused on automaatselt rahuldatud, sest järjestatud hulgas on kahe objekti vahel ülimalt üks morfism. Seega tingimus (6.13) on samaväärne bijektsiooni $\mathrm{Mor}_{B^{\mathrm{op}}}(f(a), b) \to \mathrm{Mor}_A(a, g(b))$ leidumisega, mis taandub sellele, et

$$b \leqslant f(a) \text{ kategoorias } B \iff a \leqslant g(b) \text{ kategoorias } A$$

iga $a \in A$, $b \in B$ korral. Sellist olukorda järjestatud hulkade vahel nimetatakse **Galois'**[108] **vastavuseks**[109].

6.3. Kaasfunktorite näited

Järgmine tabel loetleb mõned kaasfuntorite näited.

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$	adjunktsiooni ühik
1	Set	Vec_K	$X \mapsto V_X$, vektorruum baasiga X	U unustav funktor	$\iota_X : X \to U(V_X)$, tekitajate sisestus (vt. 6.1)
2	Set	Grp	$X \mapsto F(X)$, vaba rühm tekitajate hulgaga X	U unustav funktor	$X \to U(F(X))$, tekitajate sisestus
3	Grp	Ab	$A \mapsto A/A'$, abelistamise funktor (vt. näidet 3.4 (6))	J sisestusfunktor	$A \to A/A'$, projektsioon faktorile
4	Dom_m	Field	$D \mapsto Q(D)$, jagatiste korpus	U unustav funktor	$\iota_D : D \to U(Q(D))$, D sisestus: $a \mapsto \frac{a}{1}$
5	Met	Cmet	meetrilise ruumi täielikustamine	J sisestusfunktor	$X \to \overline{X}$, X sisestus tema täieldisse
6	Set	Top	$X \mapsto (X, \tau)$, τ diskreetne (diskreetse ruumi funktor)	U unustav funktor	$\mathrm{id}_X : X \to X$
7	Top	Haus	$(X,\tau) \mapsto (X,\tau)/\overline{\Delta_X}$, faktor diagonaali sulundi järgi	J sisestusfunktor	$(X,\tau) \to (X,\tau)/\overline{\Delta_X}$, projektsioon faktorile
8	Set	Set	$\_ \times T$, T on fikseeritud hulk	$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(T, \_) = (\_)^T$, T on fikseeritud hulk	$S \to \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(T, S \times T)$, $s \mapsto f_s$, kus $f_s(t) = (s,t)$
9	Mod_R	Ab	$\_ \otimes_R B$, B on fikseeritud R-moodul	$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(B, \_)$, B on fikseeritud R-moodul	$A \to \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(B, A \otimes B)$, $a \mapsto f_a$, kus $f_a(b) = a \otimes b$
10	$\mathcal{B}^2$	$\mathcal{B}$	$\coprod : (B, B') \mapsto B \coprod B'$, kokorrutis	$\Delta : B \mapsto (B, B)$, diagonaalfunktor	sisestuste paar $u_B : B \to B \coprod B'$, $u_{B'} : B' \to B \coprod B'$
11	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}^2$	$\Delta : A \mapsto (A, A)$, diagonaalfunktor	$\prod : (A, A') \mapsto A \times A'$, korrutisfunktor	$\delta_A : A \to A \times A$

Tabelis on ära toodud ainult adjunktsiooni ühikud. Sarnased kirjeldused on olemas koühikute jaoks. Näiteks vektorruumis V_X baasiga X, kui $\iota_X(x) = \overline{x} \in V_X$ iga $x \in X$ korral (et eristada V_X vektoreid hulga X elementidest), siis V_X elemendid on lineaarkombinatsioonid $k_1\overline{x}_1 + \ldots + k_n\overline{x}_n$, $k_i \in K$, $x_i \in X$. Siis iga vektorruumi A korral on koühik $\varepsilon_A : V_{U(A)} \to A$ defineeritud võrdusega $\varepsilon_A = \varphi^{-1}_{U(A),A}(\mathrm{id}_{U(A)})$, kus $\varphi^{-1}_{U(A),A} = \psi_{U(A),A}$ on antud võrdusega (6.2). Seega $\varepsilon_A = \psi_{U(A),A}(\mathrm{id}_{U(A)}) = f_{\mathrm{id}_{U(A)}}$ (vt. (6.12) ja (6.1)) ja

$$\varepsilon_A(k_1\overline{a}_1 + \ldots + k_n\overline{a}_n) = k_1\,\mathrm{id}_{U(A)}(a_1) + \ldots + k_n\,\mathrm{id}_{U(A)}(a_n) = k_1a_1 + \ldots + k_na_n.$$

Adjunktsioonis 4 on Dom_m kõigi integriteetkondade kategooria, kus morfismideks on integriteetkondade monomorfismid (märgime, et iga korpuste homomorfism on kindlasti monomorfism). Iga integriteetkonna D korral annab tuntud konstruktsioon D jagatiste korpuse $Q(D)$ koos monomorfismiga $\iota_D : D \to Q(D)$, $a \mapsto \frac{a}{1}$. Kui K on mistahes korpus ja $g : D \to U(K)$ on monomorfism, siis leidub

[108] Évariste Galois (1811–1832) – prantsuse matemaatik
[109] *Galois connection*

üheselt määratud homomorfism $f : Q(D) \to K$, nii et $U(f) \circ \iota_D = g$. Seega ι_D on universaalne morfism objektist D funktorisse U. Samas suuremas kategoorias Dom, kus morfismid on kõik integriteetkondade homomorfismid, ei leidu universaalset homomorfismi (näiteks) objektist $\mathbb{Z}$ unustavasse funktorisse U. See järeldub faktist, et iga algarvu p jaoks leidub sürjektiivne homomorfism $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$.

Adjunktsioonis 5 on Met kõigi meetriliste ruumide kategooria, kus morfismideks on kaugust säilitavad kujutused (need peavad kindlasti olema injektiivsed). Kategooria Cmet on kategooria Met täielik alamkategooria, kus objektid on täielikud meetrilised ruumid. Meetriliste ruumide täielikustamisprotsess indutseerib funktori $\mathsf{Met} \to \mathsf{Cmet}$, mis on vasakpoolne kaasfunktor sisestusfunktorile $\mathsf{Cmet} \to \mathsf{Met}$. Harilik meetrilise ruumi sisestus $X \to \overline{X}$ tema täieldisse on selle adjunktsiooni ühik.

Adjunktsioonis 6 viib unustava funktori $\mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ vasakpoolne kaasfunktor iga hulga X topoloogiliseks ruumiks (X, τ), kus τ on diskreetne topoloogia hulgal X.

Adjunktsioonis 7 on Haus kategooria Top täielik alamkategooria, mis koosneb kõigist Hausdorffi ruumidest. Topoloogiline ruum (X, τ) on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui tema diagonaal $\Delta_X \subseteq X \times X$ on kinnine. Sisestusfunktoril $\mathsf{Haus} \to \mathsf{Top}$ on vasakpoolne kaasfunktor $F : \mathsf{Top} \to \mathsf{Haus}$, kus $F(X, \tau) = (X, \tau)/\overline{\Delta_X}$ on topoloogilise ruumi (X, τ) faktor tema diagonaali sulundi $\overline{\Delta_X} \subseteq X \times X$ järgi, mis tõepoolest on ekvivalentsiseos.

6.4. Kaasfunktoriteoreem

Lause 6.6. *Kui funktoril $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor, siis G säilitab kõiki piire, mis kategoorias $\mathcal{B}$ olemas on.*

Tõestus. Olgu $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ adjunktsioon. Vaatleme kategooriat $\mathcal{D}$ ja kirjutame $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Oletame, et $(L, (p_i)_{i \in I})$ on funktori $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ piir. Peame tõestama, et $(G(L), G(p_i)_{i \in I})$ on funktori $G \circ D$ piir. Selleks piisab tõestada universaalomadus.

Vaatleme koonust $(A, (q_i)_{i \in I})$ funktoril $G \circ D$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[d, dashed, "q"] \arrow[dr, "q_j"] & \\
 & G(L) \arrow[dl, "G(p_i)"] \arrow[dr, "G(p_j)"'] & \\
(G \circ D)(i) \arrow[rr, "(G \circ D)(d)"'] & & (G \circ D)(j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(A) \arrow[dl, "r_i"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "r_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(d)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Iga $i \in I$ korral $r_i := \varphi^{-1}_{A, D(i)}(q_i) : F(A) \to D(i)$ on morfism kategoorias $\mathcal{B}$. Siis kategooria $\mathcal{D}$ iga morfismi $d : i \to j$ korral järeldub ruudu

$$\begin{tikzcd}
r_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), D(i)) \arrow[d, "D(d)\circ__"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, (G \circ D)(i)) \ni q_i \arrow[l, "\varphi^{-1}_{A,D(i)}"'] \arrow[d, "(G\circ D)(d)\circ__"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), D(j)) & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, (G \circ D)(j)) \arrow[l, "\varphi^{-1}_{A,D(j)}"]
\end{tikzcd}$$

kommutatiivsusest see, et

$$r_j = \varphi^{-1}_{A,D(j)}(q_j) = \varphi^{-1}_{A,D(j)}((G \circ D)(d) \circ q_i) = D(d) \circ \varphi^{-1}_{A,D(i)}(q_i) = D(d) \circ r_i,$$

ning seega $(F(A), (r_i)_{i \in I})$ on koonus funktoril D. Järelikult leidub selline üheselt määratud morfism $r : F(A) \to L$, et $p_i \circ r = r_i$ iga $i \in I$ korral. Tähistades $q := \varphi_{A,L}(r) : A \to G(L)$ ja kasutades ruudu

$$\begin{tikzcd}
r \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), L) \arrow[r, "\varphi_{A,L}"] \arrow[d, "p_i\circ__"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(L)) \ni q \arrow[d, "G(p_i)\circ__"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), D(i)) \arrow[r, "\varphi_{A,D(i)}"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(D(i)))
\end{tikzcd}$$

kommutatiivsust saame, et

$$G(p_i) \circ q = G(p_i) \circ \varphi_{A,L}(r) = \varphi_{A,D(i)}(p_i \circ r) = \varphi_{A,D(i)}(r_i) = q_i.$$

Kui ka $q' : A \to G(L)$ on selline, et $G(p_i) \circ q' = q_i$ iga $i \in I$ korral, siis kasutades veelkord eelneva ruudu kommutatiivsust saame

$$\varphi_{A,D(i)}(p_i \circ \varphi^{-1}_{A,L}(q')) = G(p_i) \circ q' = q_i = \varphi_{A,D(i)}(r_i),$$

millest kujutuse $\varphi_{A,D(i)}$ injektiivsuse tõttu järeldub, et $p_i \circ \varphi^{-1}_{A,L}(q') = r_i$ iga $i \in I$ korral. Tänu r ühesusele saame $\varphi^{-1}_{A,L}(q') = r$, mis tähendab, et $q' = \varphi_{A,L}(r) = q$. ■

Toome ära ka lause 6.6 duaalse lause.

Lause 6.7. *Kui funktoril $F \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ leidub parempoolne funktor, siis F säilitab kõiki kopiire, mis kategoorias $\mathcal{A}$ olemas on.* $\boxed{D}$

Seega ülaltoodud näidete tabeli neljanda veeru funktorid F säilitavad kõiki kopiire.

Teoreem 6.8. *Olgu $\mathcal{C}$ täielik kategooria. Siis kategoorias $\mathcal{C}$ leidub algobjekt parajasti siis, kui ta rahuldab järgmist tingimust.*
Lahendihulga tingimus[110]**.** *Leidub selline hulk $S \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, et iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral leidub morfism $A \to C$, kus $A \in S$.*

Igal väiksel kategoorial $\mathcal{C}$ on olemas lahendihulk $S = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Tõestus. **Tarvilikkus.** Kui $\mathbf{0}$ on $\mathcal{C}$ algobjekt, siis võime võtta $S = \{\mathbf{0}\}$.

Piisavus. Olgu $S = \{A_i \mid i \in I\}$ lahendihulk $\mathcal{C}$ jaoks. Olgu $(P, (p_i)_{i\in I})$ objektide A_i, $i \in I$, korrutis ja (E, e) objekti P endomorfismide hulga hulgivõrdsustaja.

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[d, "l"'] & P \arrow[l, "p_j"'] \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[r, shift right, "e\circ k\circ l\circ p_j"'] & P \arrow[r, "p_i"] & A_i \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, "k"] & E \arrow[u, "e"'] \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[rr, shift right, "h"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Väidame, et E on kategooria $\mathcal{C}$ algobjekt. Kui $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, siis leidub morfism $f : A_i \to C$ mingi $i \in I$ korral. Seega leidub vähemalt üks morfism $f \circ p_i \circ e : E \to C$ objektist E objekti C. Oletame, et leiduvad morfismid $g, h : E \to C$ ja vaatleme nende võrdsustajat (K, k). Lahendihulga tingimuse põhjal leidub morfism $l : A_j \to K$ mingi $j \in J$ korral. Seega nii id_P kui $e \circ k \circ l \circ p_j$ on P endomorfismid, millest järeldub

$$e \circ k \circ l \circ p_j \circ e = \mathrm{id}_P \circ e = e \circ \mathrm{id}_E .$$

Kuna e on monomorfism lause 5.31 üldistuse põhjal, siis saame $k \circ l \circ p_j \circ e = \mathrm{id}_E$. Seega k on retraktsioon ning võrdusest $g \circ k = h \circ k$ järeldub võrdus $g = h$. ■

Lemma 6.9. *Kui $\mathcal{B}$ on täielik kategooria ja funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ säilitab korrutisi (võrdsustajaid), siis iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on objekti A G-aluste objektide kategoorias $(A \downarrow G)$ olemas korrutised (võrdsustajad).*

Tõestus. 1. Näitame, et kategoorias $(A \downarrow G)$ on olemas korrutised. Olgu I hulk ja $(f_i : A \to G(B_i), B_i)_{i\in I}$ kategooria $(A \downarrow G)$ objektide süsteem. Olgu $(P, (p_i)_{i\in I})$ objektide B_i, $i \in I$, korrutis kategoorias $\mathcal{B}$. Kuna G säilitab korrutised, siis $(G(P), G(p_i)_{i\in I})$ on objektide $G(B_i)$, $i \in I$,

[110] *solution set condition*

korrutis kategoorias $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddl, "q"'] & \\
& G(P) \arrow[r, "G(p_i)"] & G(B_i) \\
G(Q) \arrow[ur, dashed, "G(m)"] \arrow[urr, "G(q_i)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Seega leidub ühene morfism $f : A \to G(P)$ nii, et $G(p_i) \circ f = f_i$ iga $i \in I$ korral. See tähendab, et $p_i : (f, P) \to (f_i, B_i)$ kategoorias $(A \downarrow G)$. Näitame, et $((f, P), (p_i)_{i \in I})$ on objektide (f_i, B_i), $i \in I$, korrutis kategoorias $(A \downarrow G)$. Selleks oletame, et $q_i : (q, Q) \to (f_i, B_i)$, $i \in I$, on morfismide süsteem kateoorias $(A \downarrow G)$, seega $q_i : Q \to B_i$ ja $G(q_i) \circ q = f_i$ iga $i \in I$ korral. Kuna P on objektide B_i, $i \in I$, korrutis, siis leidub ühene morfism $m : Q \to P$ nii, et $p_i \circ m = q_i$. Seega

$$G(p_i) \circ G(m) \circ q = G(q_i) \circ q = f_i = G(p_i) \circ f$$

iga $i \in I$ korral. Lause 5.5 põhjal $G(m) \circ q = f$ ehk $m : (q, Q) \to (f, P)$ kategoorias $(A \downarrow G)$.

Kui $n : (q, Q) \to (f, P)$ on kategooria $(A \downarrow G)$ selline morfism, et $p_i \circ n = q_i$ iga $i \in I$ korral, siis $m = n$ korrutise P universaalomaduse põhjal.

Kategoorias $(A \downarrow G)$: $\begin{tikzcd}
(q,Q) \arrow[d, shift right, "m"'] \arrow[d, shift left, "n"] \arrow[dr, "q_i"] & \\
(f,P) \arrow[r, "p_i"'] & (f_i,B_i)
\end{tikzcd}$ Kategoorias $\mathcal{B}$: $\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, shift right, "m"'] \arrow[d, shift left, "n"] \arrow[dr, "q_i"] & \\
P \arrow[r, "p_i"'] & B_i
\end{tikzcd}$

2. Näitame, et kategoorias $(A \downarrow G)$ leiduvad võrdsustajad. Vaatleme morfisme $s, t : (f, B) \to (g, C)$ kategoorias $(A \downarrow G)$. Olgu $e : E \to B$ morfismide $s, t : B \to C$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{B}$. Siis muuhulgas $s \circ e = t \circ e$. Kuna G säilitab võrdsustajaid, siis $G(e) : G(E) \to G(B)$ on morfismide $G(s), G(t)$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
G(E) \arrow[r, "G(e)"] & G(B) \arrow[r, shift left, "G(s)"] \arrow[r, shift right, "G(t)"'] & G(C) \\
& A \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Et $G(s) \circ f = g = G(t) \circ f$, siis leidub ühene morfism $h : A \to G(E)$ nii, et $G(e) \circ h = f$. Teiste sõnadega, $e : (h, E) \to (f, B)$ kategoorias $(A \downarrow G)$.

$$\begin{tikzcd}
(h,E) \arrow[r, "e"] & (f,B) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & (g,C) \\
(d,D) \arrow[u, dashed, "l"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Näitamaks, et e on s, t võrdsustaja kategoorias $(A \downarrow G)$, vaatleme morfismi $k : (d, D) \to (f, B)$ kategoorias $(A \downarrow G)$, mille korral $s \circ k = t \circ k$. Kuna e on s, t võrdsustaja kategoorias $\mathcal{B}$, siis leidub ühene morfism $l : D \to E$ kategoorias $\mathcal{B}$ nii, et $e \circ l = k$. Kuna

$$G(e) \circ G(l) \circ d = G(e \circ l) \circ d = G(k) \circ d = f,$$

siis h ühesusest järeldub, et $G(l) \circ d = h$, seega $l : (d, D) \to (h, E)$ kategoorias $(A \downarrow G)$. Selle l ühesus kategoorias $(A \downarrow G)$ järeldub tema ühesusest kategoorias $\mathcal{B}$. ■

Järeldus 6.10. *Kui $\mathcal{B}$ on täielik kategooria ja funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ säilitab piire, siis kategooria $(A \downarrow G)$ on täielik.*

Teoreem 6.11 (Kaasfunktoriteoreem). *Olgu $\mathcal{B}$ täielik kategooria. Funktoril $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor parajasti siis, kui G säilitab piire ja kategooria $(A \downarrow G)$ rahuldab lahendihulga tingimust iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral.*

Märgime, et ilmutatult tähendab lahendihulga tingimus kategooria $(A \downarrow G)$ jaoks seda, et leidub objektide hulk $S_A \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ nii, et

$$\forall B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})\, \forall (f : A \to G(B))\, \exists B' \in S_A\, \exists (f' : A \to G(B'))\, \exists (h : B' \to B) : \quad G(h) \circ f' = f.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & G(B') \arrow[d, dashed, "G(h)"] & B' \arrow[d, dashed, "h"'] \\
 & G(B) & B
\end{tikzcd}$$

TÕESTUS. **Tarvilikkus.** Funktor G säilitab kõiki piire lause 6.6 põhjal. Kui $F \dashv G$, siis võime võtta $S_A := \{F(A)\}$ ja kasutada universaalset morfismi $\eta_A : A \to (G \circ F)(A)$.

Piisavus. Teoreemi 6.5 (2), põhjal piisab konstrueerida iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ jaoks objekt $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja universaalne morfism $\eta_A : A \to G(B)$ objektist A funktorisse G. Teiste sõnadega, peame näitama, et kategoorias $(A \downarrow G)$ leidub algobjekt iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral. Kuna teame, et $(A \downarrow G)$ rahuldab lahendihulga tingimust, siis teoreemi 6.8 rakendamiseks peame tõestama ainult seda, et $(A \downarrow G)$ on täielik kui seda on $\mathcal{B}$. See aga järeldub eelmisest lemmast. ■

Näide 6.12. Olgu A ja B kategooriatena vaadeldud järjestatud hulgad ja olgu B täielik, see tähendab, et hulgas B on olemas kõikvõimalikud alumised rajad. Kovariantsel funktoril (s.t. järjestust säilitaval kujutusel) $g : B \to A$ on olemas vasakpoolne kaasfunktor parajasti siis, kui g säilitab kõik alumised rajad. Lahendihulga tingimus on rahuldatud, sest kategooria $(a \downarrow g)$ on väike iga $a \in A$ korral. □

6.5. Kategooriate ekvivalentsus

Meenutame, et funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ on täielik ja täpne (vt. definitsiooni 3.8), kui mistahes objektide $B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral on kujutus

$$G_1^{B,B'} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(G(B), G(B')), \quad h \mapsto G(h)$$

bijektiivne.

Lause 6.13. *Olgu $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ adjunktsioon ning olgu $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ selle adjunktsiooni ühik ja koühik (vt. teoreemi 6.3). Siis*

1. *G on täielik ja täpne parajasti siis, kui ε on loomulik isomorfism;*
2. *kui ε on loomulik isomorfism, siis ka $\eta * \mathrm{id}_G$ ja $\mathrm{id}_F * \eta$ on loomulikud isomorfismid.*

TÕESTUS. 1. **Tarvilikkus.** Peame näitama, et iga $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral $\varepsilon_B : (F \circ G)(B) \to B$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{B}$. Olgu $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Siis kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $\eta_{G(B)} : G(B) \to (G \circ F \circ G)(B)$ jaoks leidub G täielikkuse tõttu selline morfism $h_B : B \to (F \circ G)(B)$, et $\eta_{G(B)} = G(h_B)$. Järelikult

$$G(\varepsilon_B \circ h_B) = G(\varepsilon_B) \circ G(h_B) = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = \mathrm{id}_{G(B)} = G(\mathrm{id}_B),$$

kus eelviimane võrdus kehtib kolmnurksamasuse (6.9) tõttu. Tänu G täpsusele saame võrduse $\varepsilon_B \circ h_B = \mathrm{id}_B$. Kasutades võrdusi (6.6) ja (6.9) saame

$$\begin{aligned}
\varphi_{G(B),(F\circ G)(B)}(h_B \circ \varepsilon_B) &= G(h_B \circ \varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = G(h_B) \circ G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = G(h_B) \circ \mathrm{id}_{G(B)} \\
&= \eta_{G(B)} = \mathrm{id}_{(G\circ F\circ G)(B)} \circ \eta_{G(B)} = G\left(\mathrm{id}_{(F\circ G)(B)}\right) \circ \eta_{G(B)} \\
&= \varphi_{G(B),(F\circ G)(B)}\left(\mathrm{id}_{(F\circ G)(B)}\right),
\end{aligned}$$

kust $h_B \circ \varepsilon_B = \mathrm{id}_{(F\circ G)(B)}$ kujutuse $\varphi_{G(B),(F\circ G)(B)}$ injektiivsuse tõttu. Seega ε_B on isomorfism.
Piisavus. Kui ε on loomulik isomorfism, siis iga $B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral on kujutus $\_ \circ \varepsilon_B$: $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}((F \circ G)(B), B')$ bijektiivne (tema pöördkujutus on $\_ \circ \varepsilon_B^{-1}$), seega ka kompositsioon

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') \xrightarrow{\_\circ\varepsilon_B} \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}((F \circ G)(B), B') \xrightarrow{\varphi_{G(B),B'}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(G(B), G(B'))$$

on bijektiivne. Osutub, et see kompositsioon ongi $G_1^{B,B'}$, sest

$$(\varphi_{G(B),B'} \circ (\_ \circ \varepsilon_B))(b) = \varphi_{G(B),B'}(b \circ \varepsilon_B) = G(b \circ \varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = G(b) \circ G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = G(b).$$

iga morfismi $b : B \to B'$ korral.

2. Kui ε on loomulik isomorfism, siis iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral ε_B ja $\varepsilon_{F(A)}$ on isomorfismid ja seega kolmnurksamasustest $G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = \mathrm{id}_{G(B)}$ ja $\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ järeldub, et ka $(\eta * \mathrm{id}_G)_B = \eta_{G(B)}$ ja $(\mathrm{id}_F * \eta)_A = F(\eta_A)$ on isomorfismid. ■

Lause 6.14. *Olgu $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ adjunktsioon ning olgu $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ selle adjunktsiooni ühik ja koühik (vt. teoreemi 6.3). Siis*
1. *F on täielik ja täpne parajasti siis, kui η on loomulik isomorfism;*
2. *kui η on loomulik isomorfism, siis ka $\mathrm{id}_G * \varepsilon$ ja $\varepsilon * \mathrm{id}_F$ on loomulikud isomorfismid.* $\boxed{D}$

Definitsioon 6.15. Funktorit $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ nimetatakse **kategooriate ekvivalentsiks**[111], kui leidub funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ning loomulikud isomorfismid $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. Sellisel juhul öeldakse, et kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on **ekvivalentsed**, ekvivalentsust tähistame $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$.

Definitsioon 6.16. Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ on **tihe**[112], kui iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral leidub selline $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, et $G(B) \cong A$.

Teoreem 6.17. *Funktori $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ jaoks on järgmised väited samaväärsed.*
1. *Funktor G on kategooriate ekvivalents.*
2. *Funktoril G leidub selline vasakpoolne kaasfunktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, et adjunktsiooni ühik $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G\circ F$ ja koühik $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ on loomulikud isomorfismid.*
3. *Funktor G on täielik ja täpne ning tal leidub täielik ja täpne vasakpoolne kaasfunktor F.*
4. *Funktor G on täielik, täpne ja tihe.*

TÕESTUS. (3. ⇒ 2.). See järeldub lausest 6.13 ja tema duaalsest lausest.
(2. ⇒ 1.). See on ilmne.
(1. ⇒ 4.). Leidugu funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja loomulikud isomorfismid $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. Siis iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on isomorfne objektiga $G(F(A))$, kus $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, ja seega G on tihe.

Näitame, et F on täpne. Selleks oletame, et $F(f) = F(g)$, kus $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$. Siis ka $(G\circ F)(f) = (G \circ F)(g)$. Et η on loomulik teisendus, siis

$$\eta_{A'} \circ f = (G \circ F)(f) \circ \eta_A = (G \circ F)(g) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ g.$$

Kuna $\eta_{A'}$ on isomorfism, siis saame, et $f = g$. Seega F on täpne. Analoogiliselt saab näidata, et G on täpne.

Tõestame veel, et F on täielik. Olgu $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$. Vaatleme morfismi

$$f := \eta_{A'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_A : \ A \to A'.$$

Kuna η on loomulik teisendus, siis on diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(A) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & (G \circ F)(A') \end{tikzcd}$$

[111] *equivalence of categories*
[112] *dense* või *essentially surjective*

kommutatiivne. Järelikult

$$G(g) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ f = (G \circ F)(f) \circ \eta_A.$$

Kuna η_A on isomorfism, siis saame siit, et $G(g) = (G \circ F)(f) = G(F(f))$. Funktori G täpsuse tõttu $g = F(f)$, millega on näidatud F täielikkus. Funktori G jaoks on tõestus analoogiline.

(4. $\Rightarrow$ 3.). Olgu G täielik, täpne ja tihe. Peame konstrueerima G vasakpoolse kaasfunktori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Selleks kasutame teoreemi 6.5 tingimust 2. Funktori G tiheduse tõttu saame iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ jaoks valida objekti $F_0(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja isomorfismi $\eta_A : A \to G(F_0(A))$. Veendume, et η_A on universaalne morfism objektist A funktorisse G. Olgu $g : A \to G(B)$ mingi morfism kategoorias $\mathcal{A}$. Siis $g \circ \eta_A^{-1} : G(F_0(A)) \to G(B)$ ning seega G täpsuse ja täielikkuse tõttu leidub selline üheselt määratud morfism $f : F_0(A) \to B$, et $G(f) = g \circ \eta_A^{-1}$ ehk $G(f) \circ \eta_A = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & G(F_0(A)) \arrow[d, dashed, "G(f)"] \\ & G(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_0(A) \arrow[d, dashed, "f"'] \\ B \end{tikzcd}$$

Kui ka $G(f') \circ \eta_A = g$, kus $f' : F_0(A) \to B$, siis $G(f) = g \circ \eta_A^{-1} = G(f')$, kust $f = f'$, sest G on täpne. Teoreemi 6.5 tingimuse 2 põhjal leidub adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle$, mille ühik on η. Tänu morfismide η_A valikule on $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$ loomulik isomorfism ja seega lause 6.14 põhjal on F täielik ja täpne. ■

Järeldus 6.18. *Kui funktorid $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ja $G\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ on kategooriate ekvivalentsid, siis kehtib $F \dashv G$ ja $G \dashv F$.*

Seega funktori $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ jaoks kehtivad järgmised implikatsioonid:

$$G \text{ on isomorfism } \Rightarrow G \text{ on ekvivalents } \Rightarrow G \text{ omab vasakpoolset kaasfunktorit.}$$

Järgnevalt toome ära kaks – loodetavasti huvitavat – näidet ekvivalentsete kategooriate kohta.

Näited 6.19. 1. Kõigi lõplike hulkade kategooria FinSet on ekvivalentne oma täieliku alamkategooriaga $\mathsf{Set}_{\mathbb{N}}$, mille objektid on hulgad $\mathbb{N}_{(n)} := \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_1$, ja tühi hulk $\varnothing =: \mathbb{N}_{(0)}$.
Iga lõpliku hulga A jaoks valime välja ühe bijektsiooni $\eta_A : A \to \mathbb{N}_{(\#(A))}$. See valik tuleks teha nii, et kui $A = \mathbb{N}_{(n)}$, siis $\eta_A = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_{(n)}}$. Vaatleme sisestusfunktorit $J : \mathsf{Set}_{\mathbb{N}} \to \mathsf{FinSet}$ ja funktorit $F : \mathsf{FinSet} \to \mathsf{Set}_{\mathbb{N}}$, mis on defineeritud eeskirjaga

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N}_{(\#(A))} \arrow[d, "\eta_B \circ f \circ \eta_A^{-1}"] \\ B \arrow[r, mapsto] & \mathbb{N}_{(\#(B))} \end{tikzcd}.$$

On lihtne näha, et $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FinSet})} : \mathrm{id}_{\mathsf{FinSet}} \Rightarrow J \circ F$ ja $\varepsilon = (\mathrm{id}_{\mathbb{N}_{(n)}})_{\mathbb{N}_{(n)} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}_{\mathbb{N}})} : F \circ J \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{Set}_{\mathbb{N}}}$ on loomulikud isomorfismid.

2. Olgu K korpus, Vec'_K kõigi lõplikumõõtmeliste vektorruumide (välja arvatud nullruum) kategooria üle K ja Mat_K kategooria, mille objektideks on (positiivsed) naturaalarvud, morfismide hulk $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Mat}_K}(m, n)$ koosneb $(m \times n)$-maatriksitest üle K ja morfismide komponeerimine on maatriksite korrutamine (vt. näidet 1.11 (1)). Näitame, et need kategooriad on duaalselt ekvivalentsed, s.t. Vec'_K on ekvivalentne kategooria Mat_K duaalse kategooriaga.
Selleks fikseerime igas mittetriviaalses lõplikumõõtmelises vektorruumis V mingi baasi e^V ja defineerime kontravariantsed funktorid

$$F : \mathsf{Vec}'_K \longrightarrow \mathsf{Mat}_K \qquad\qquad G : \mathsf{Mat}_K \longrightarrow \mathsf{Vec}'_K$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \dim V \\ U \arrow[r, mapsto] & \dim U \arrow[u, "A_f^{e^V, e^U}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} m \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "A"'] & K^m \\ n \arrow[r, mapsto] & K^n \arrow[u, "(A \cdot (\_\_)^T)^T"'] \end{tikzcd},$$

kus $A_f^{e^V,e^U}$ on lineaarkujutuse $f : V \to U$ maatriks baaside e^V ja e^U suhtes. Defineerides iga mittetriviaalse lõplikumõõtmelise vektorruumi V korral morfismi $\eta_V : V \to (G \circ F)(V) = K^{\dim V}$ kui lineaarkujutuse, mis viib vektori $a \in V$ tema koordinaatide vektoriks baasi e^V suhtes, ja iga naturaalarvu $m \in \mathbb{N}_1$ korral morfismi $\varepsilon_m : (F \circ G)(m) = m \to m$ kui m-ndat järku ühikmaatriksi E_m saame nõutavad loomulikud isomorfismid. $\square$

Kuigi kategooriate ekvivalentsus on nõrgem seos kui isomorfsus, on see siiski piisavalt tugev, et kõik kategoorselt olulised omadused kanduksid mingilt kategoorialt üle temaga ekvivalentsetele kategooriatele. Järgnevas näitame, et kui mingis kategoorias on olemas teatud tüüpi piirid, siis temaga ekvivalentses kategoorias on olemas sama tüüpi piirid.

Lemma 6.20. *Kui funktorid $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on loomulikult isomorfsed, siis kategooriad $\mathsf{cone}(F)$ ja $\mathsf{cone}(G)$ on isomorfsed.*

Tõestus. Olgu $\alpha : F \Rightarrow G$ loomulik isomorfism ja tähistame $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Defineerime funktorid

$$\begin{tikzcd}
M : \mathsf{cone}(F) \arrow[r] & \mathsf{cone}(G) \\
(B,(q_i)_{i\in I}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (B,(\alpha_i \circ q_i)_{i\in I}) \arrow[d, "f"] \\
(C,(p_i)_{i\in I}) \arrow[r, mapsto] & (C,(\alpha_i \circ p_i)_{i\in I})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N : \mathsf{cone}(G) \arrow[r] & \mathsf{cone}(F) \\
(B,(s_i)_{i\in I}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (B,(\alpha_i^{-1} \circ s_i)_{i\in I}) \arrow[d, "f"] \\
(C,(r_i)_{i\in I}) \arrow[r, mapsto] & (C,(\alpha_i^{-1} \circ r_i)_{i\in I}).
\end{tikzcd}$$

Kui $(B,(q_i)_{i\in I}) \in \mathsf{cone}(F)$, siis $(B,(\alpha_i \circ q_i)_{i\in I}) \in \mathsf{cone}(G)$ teisenduse α loomulikkuse tõttu (vt. vasakpoolset joonist allpool). Samuti on lihtne näha, et kui $f : (B,(q_i)_{i\in I}) \longrightarrow (C,(p_i)_{i\in I})$ kategoorias $\mathsf{cone}(F)$, siis $f : (B,(\alpha_i \circ q_i)_{i\in I}) \longrightarrow (C,(\alpha_i \circ p_i)_{i\in I})$ kategoorias $\mathsf{cone}(G)$. On selge, et M ja N on funktorid ning $M \circ N = \mathrm{id}_{\mathsf{cone}(G)}$ ja $N \circ M = \mathrm{id}_{\mathsf{cone}(F)}$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
 & C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] \arrow[d, "\alpha_i"'] & & F(j) \arrow[d, "\alpha_j"] \\
G(i) \arrow[rr, "G(d)"] & & G(j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[ddl, "s_i"'] \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "s_j"] & \\
 & C \arrow[dl, "r_i"'] \arrow[dr, "r_j"] & \\
G(i) \arrow[rr, "G(d)"'] \arrow[d, "\alpha_i^{-1}"'] & & G(j) \arrow[d, "\alpha_j^{-1}"] \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"] & & F(j)
\end{tikzcd}$$
$\blacksquare$

Lemma 6.21. *Kui funktorid $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ on loomulikult isomorfsed, siis kategooriad $\mathsf{cone}(F)$ ja $\mathsf{cocone}(G)$ on isomorfsed.* $\boxed{D}$

Lause 6.22. *Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on ekvivalentsed kategooriad ja kategoorias $\mathcal{B}$ on olemas $\mathcal{D}$-piirid, kus $\mathcal{D}$ on väike kategooria, siis ka kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas $\mathcal{D}$-piirid.*

Tõestus. Eelduse põhjal leiduvad funktorid $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ning loomulikud isomorfismid $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktorit $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Siis funktoril $F \circ H : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ on olemas piir. Teoreemi 6.17 põhjal on funktoril G olemas vasakpoolne kaasfunktor (see on F) ja seega lause 6.6 tõttu säilitab G funktori $F \circ H$ piiri, s.t. viib selle funktori $G \circ F \circ H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ piiriks, mis on kategooria $\mathsf{cone}(G \circ F \circ H)$ lõppobjekt. Funktor $G \circ F \circ H$ on aga loomulikult isomorfne funktoriga H, sest on olemas loomulik isomorfism $\eta * \mathrm{id}_H : H \Rightarrow G \circ F \circ H$. Lemma 6.20 tõttu on kategooriad $\mathsf{cone}(G \circ F \circ H)$ ja $\mathsf{cone}(H)$ isomorfsed. Järelikult on ka kategoorias $\mathsf{cone}(H)$ olemas lõppobjekt, s.t. funktoril H on olemas piir kategoorias $\mathcal{A}$. $\blacksquare$

Lause 6.23. *Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on ekvivalentsed kategooriad ja kategoorias $\mathcal{B}$ on olemas $\mathcal{D}$-kopiirid, kus $\mathcal{D}$ on väike kategooria, siis ka kategoorias $\mathcal{A}$ on olemas $\mathcal{D}$-kopiirid.* $\boxed{D}$

6.5.1. Adjunktsioonide komponeerimine

Lõpetuseks ütleme veel mõne sõna adjunktsioonide komponeerimise kohta.

Lause 6.24. *Olgu* $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *adjunktsioon ühikuga* η *ja koühikuga* ε *ning* $\langle F', G', \varphi'\rangle : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *adjunktsioon ühikuga* η' *ja koühikuga* ε'. *Siis* $\langle F' \circ F, G \circ G', \varphi \circ \varphi'\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *on adjunktsioon, mille ühik on* $(\mathrm{id}_G * \eta' * \mathrm{id}_F) \circ \eta$ *ja koühik on* $\varepsilon' \circ (\mathrm{id}_{F'} * \varepsilon * \mathrm{id}_{G'})$.

TÕESTUS. Märgime, et iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral

$$((\mathrm{id}_G * \eta' * \mathrm{id}_F) \circ \eta)_A = G(\eta'_{F(A)}) \circ \eta_A,$$
$$(\varepsilon' \circ (\mathrm{id}_{F'} * \varepsilon * \mathrm{id}_{G'}))_C = \varepsilon'_C \circ F'(\varepsilon_{G'(C)}).$$

Meil on bijektsioonid

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F'(F(A)), C) \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), G'(C)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(G'(C))),$$

mis on loomulikud A ja C suhtes, seega $F' \circ F \dashv G \circ G'$. Selle adjunktsiooni ühiku A-komponendi saame, kui võtame $C := F'(F(A))$ ja rakendame kompositsiooni $\varphi \circ \varphi'$ ühikmorfismile (vt. valemit (6.11)) ning lisaks sellele kasutame veel omadust (6.6):

$$\varphi(\varphi'(\mathrm{id}_{F'(F(A))})) = \varphi(\eta'_{F(A)}) = G(\eta'_{F(A)}) \circ \eta_A.$$

Seega adjunktsiooni $F' \circ F \dashv G \circ G'$ ühik on $(\mathrm{id}_G * \eta' * \mathrm{id}_F) \circ \eta$. Analoogiliselt saab tõestada väite koühiku kohta. ■

Järeldus 6.25. *Kategooriate ekvivalentsus on ekvivalentsiseos.*

TÕESTUS. On lihtne näha, et kategooriate ekvivalentsus on refleksiivne ja sümmeetriline. Näitame, et ta on transitiivne. Selleks oletame, et kategooria $\mathcal{A}$ on ekvivalentne kategooriaga $\mathcal{B}$ ja kategooria $\mathcal{B}$ on ekvivalentne kategooriaga $\mathcal{C}$, kusjuures nende vahel on funktorid F, F', G, G' nii nagu eelmises lauses. Siis η,η', ε ja ε' on loomulikud isomorfismid. Järelikult ka adjunktsiooni $F' \circ F \dashv G \circ G'$ ühik ja koühik on loomulikud isomorfismid, sest nad on saadud loomulike isomorfismide komponeerimisel. Seega kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}$ on ekvivalentsed teoreemi 6.17 põhjal. ■

6.5.2. Skeletid

Järgnevalt tutvume kategooria skeleti mõistega.

Definitsioon 6.26. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Kategooria $\mathcal{C}$ **skeletiks**[113] nimetatakse tema täielikku alamkategooriat $\mathcal{S}$, mille korral

- iga objekti $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jaoks leidub objekt $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ nii, et C ja S on isomorfsed kategoorias $\mathcal{C}$;
- iga $S, S' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ korral sellest, et S ja S' on isomorfsed kategoorias $\mathcal{S}$, järeldub $S = S'$.

Kategooriat, mis on isomorfne oma skeletiga nimetatakse **skeletlikuks**[114]. Seega skeletlikus kategoorias ei leidu erinevaid isomorfseid objekte.

Lause 6.27. *Igal kategoorial leidub skelett, kui kehtib klasside Valikuaksioom 1.5.*

TÕESTUS. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Paneme tähele, et objektide isomorfsuseseos $\cong$ in ekvivalentsiseos klassil $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Oletame, et kehtib klasside Valikuaksioom 1.5. Vaatleme ekvivalentsiklasse

$$[A]_{\cong} := \{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \mid B \cong A\}.$$

Kasutades Valikuaksioomi 1.5 valime igast ekvivalentsiklassist $[A]_{\cong}$, $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, välja esindaja A. Nendest esindajates koosnev täielik alamkategooria ongi kategooria $\mathcal{C}$ skelett. ■

Märgime, et kui $\mathcal{C}$ on väike kategooria, siis piisab skeleti leidumiseks tavalise Valikuaksioomi eeldamisest.

[113] *skeleton*
[114] *skeletal*

Lemma 6.28. *Kaks ekvivalentset skeletlikku kategooriat on isomorfsed.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{S}_1$ ja $\mathcal{S}_2$ sellised skeletlikud kategooriad, et $\mathcal{S}_1 \approx \mathcal{S}_2$. Olgu $F\colon \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ ja $G\colon \mathcal{S}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_1$ kaasfunktorid ja kategooriate ekvivalentsid. Sel juhul $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{S}_2}$ ja $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{S}_1}$. Seega, iga objekti $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_2)$ korral

$$(F \circ G)(S) \cong \mathrm{id}_{\mathcal{S}_2}(S) = S,$$

kuna skeletlikus kategoorias ei leidu mitut isomorfset objekti, saame $S = (F \circ G)(S)$. Seega $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_2}$. Analoogiliselt kehtib ka $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{S}_1}$, mis tõestabki, et funktorid F ja G on isomorfismid. ■

Lause 6.29. *Kategooria $\mathcal{C}$ skelett on kategooriaga $\mathcal{C}$ ekvivalentne.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{S}$ kategooria $\mathcal{C}$ skelett. Vaatleme sisestusfunktorit $J\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$. Funktor J on täielik ja täpne kuna $\mathcal{S}$ on täielik alamkategooria. Funktor J on tihe, kuna vastavalt skeleti definitsioonile leidub iga $C \in \mathrm{Ob}(C)$ korral objekt $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ nii, et $J(S) = S \cong C$. Tänu teoreemi 6.17 väitele 4. on J kategooriate ekvivialents. ■

Lause 6.30. *Kategooria $\mathcal{C}$ skelett on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ning $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tema kaks skeletti. Tänu lausele 6.29, saame $\mathcal{A} \approx \mathcal{C} \approx \mathcal{B}$, millest tänu kategooriate ekvivalentsusele (järeldus 6.25) saame ekvivalentsi $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$. Lemma 6.28 on nüüd skeletid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ isomorfsed kategooriad. ■

Nüüd oleme valmis tõestama kategooriate ekvivalentsi kirjeldust skeletide abil. Järgnev teoreem eeldab klasside Valikuaksioomi 1.5.

Teoreem 6.31. *Kaks kategooriat on ekvivalentsed parajasti siis, kui nende skeletid on isomorfsed.*

Tõestus. **Tarvilikkus.** Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ekvivalentsed kategooriad ja $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ ja $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ nende skeletid. Tänu lausele 6.29 kehtivad kategooriate ekvivalentsid $\mathcal{A} \approx \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ ja $\mathcal{B} \approx \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. Tulenevalt kategooriate ekvivalentsi transitiivsusest (järeldus 6.25) saame $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \approx \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. Tänu lausele 6.28 on skeletid $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ ja $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ isomorfsed.

Piisavus. Olgu kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ skeletid $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ ja $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ isomorfsed. Järelikult on skeletid $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ ja $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ ekvivalentsed. Kasutades nüüd lauset 6.29 ja kategooriate ekvivalentsuse transitiivsust saame $\mathcal{A} \approx \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \approx \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}$. ■

Näited 6.32. 1. Hulkade kategooria Set skeletiks on kõikide kardinaalarvude kategooria CARD.
2. Kõikide vektorruumide üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ kategooria $\mathsf{Vec}_{\mathbb{R}}$ skeletiks on täielik alamkategooria, mille objektid on kujul $\mathbb{R}^{\kappa}$, kus κ on mingi kardinaalarv. □

6.6. Reflektiivsed alamkategooriad

Definitsioon 6.33. Kategooria $\mathcal{A}$ täielikku alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse **reflektiivseks alamkategooriaks**[115], kui
1. sisestusfunktoril $J : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}$ sisaldab koos iga objektiga B kõik sellega isomorfsed $\mathcal{A}$ objektid (kui $B \cong A$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, siis $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$).

Funktorit $R\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ eelmisest definitsioonist nimetatakse kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivse alamkategooria $\mathcal{B}$ **reflektoriks**[116]. Täielikku alamkategooriat, mis rahuldab eelmises definitsioonis tingimust 2., nimetatakse **täis**[117] olevaks.

Tulenevalt kaasfunktorite kirjeldusest universaalsete mofismide järgi võib öelda, et kategooria $\mathcal{A}$ täielik alamkategooria $\mathcal{B}$ on reflektiivne parajasti siis, kui iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ jaoks leiduvad $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $r_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ nii, et

$$\forall B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})\, \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B')\, \exists! f' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B')\colon \quad f' \circ r_A = f.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}: & A \arrow[d, "r_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{B}: & B \arrow[r, dashed, "f'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

[115] *reflective subcategory*
[116] *reflector*
[117] *replete*

Lause 6.34. *Kui $\mathcal{B}$ on täieliku kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivne alamkategooria, siis $\mathcal{B}$ on täielik.*

TÕESTUS. Olgu $R \dashv J$, kus $J : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ on sisestusfunktor. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktorit $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$.

Kategooria $\mathcal{A}$ täielikkuse tõttu leidub funktoril $J \circ D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ piir $(L, (p_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})})$ kategoorias $\mathcal{A}$. Olgu adjunktsiooni $R \dashv J$ ühik $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow J \circ R$. Teoreemi 6.3 tõttu on $\eta_L : L \to J(R(L))$ universaalne morfism objektist L funktorisse J.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[dr, "p_i"'] & J(R(L)) \arrow[d, dashed, "J(q_i)"] & R(L) \arrow[d, dashed, "q_i"'] \\
 & J(D(i)) & D(i)
\end{tikzcd}$$

Seega iga $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral leidub üheselt määratud morfism $q_i : R(L) \to D(i)$ kategoorias $\mathcal{B}$ nii, et

$$J(q_i) \circ \eta_L = p_i.$$

Kui $d : i \to j$ kategorrias $\mathcal{D}$, siis

$$J(D(d) \circ q_i) \circ \eta_L = J(D(d)) \circ J(q_i) \circ \eta_L = J(D(d)) \circ p_i = p_j.$$

Kuna q_j on üheselt määratud morfism, mille korral $J(q_j) \circ \eta_L = p_j$, siis $D(d) \circ q_i = q_j$. See tähendab, et $\big(R(L), (q_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}\big) \in \mathsf{cone}(D)$.

$$\begin{tikzcd}
 & R(L) \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(d)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Järelikult $\big(J(R(L)), (J(q_i))_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}\big) \in \mathsf{cone}(J \circ D)$.

$$\begin{tikzcd}
 & J(R(L)) \arrow[ddl, "J(q_i)"'] \arrow[ddr, "J(q_j)"] \arrow[d, dashed, "\mu_L"] & \\
 & L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
J(D(i)) \arrow[rr, "J(D(d))"'] & & J(D(j))
\end{tikzcd}$$

Universaalomaduse põhjal leidub üheselt määratud morfism $\mu_L : J(R(L)) \to L$ nii, et $p_i \circ \mu_L = J(q_i)$ iga $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral. Siis aga

$$p_i \circ \mu_L \circ \eta_L = J(q_i) \circ \eta_L = p_i = p_i \circ \mathrm{id}_L,$$

millest järeldub võrdus $\mu_L \circ \eta_L = \mathrm{id}_L$.

Teisest küljest, kuna funktor J on täielik ja täpne, siis morfismi $\eta_L \circ \mu_L : J(R(L)) \to J(R(L))$ jaoks leidub üheselt määratud morfism $\nu_L : R(L) \to R(L)$ nii, et $\eta_L \circ \mu_L = J(\nu_L)$. Siis aga

$$J(\nu_L) \circ \eta_L = (\eta_L \circ \mu_L) \circ \eta_L = \eta_L \circ (\mu_L \circ \eta_L) = \eta_L.$$

Kuna kommutatiivses diagrammis

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[dr, "\eta_L"'] & J(R(L)) \arrow[d, dashed, "J(\nu_L)"] & R(L) \arrow[d, dashed, "\nu_L"'] \\
 & J(R(L)) & R(L)
\end{tikzcd}$$

on ν_L üheselt määratud ja tema ossa sobib ka $\mathrm{id}_{R(L)}$, siis $\nu_L = \mathrm{id}_{R(L)}$. Seega $\eta_L \circ \mu_L = J(\mathrm{id}_{R(L)}) = \mathrm{id}_{J(R(L))}$ ja η_L on isomorfism kategoorias $\mathcal{A}$. Kuna

$$L \cong J(R(L)) = R(L) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}),$$

siis reflektiivse alamkategooria definitsiooni põhjal $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ning samuti morfismid p_i kuuluvad kategooriasse $\mathcal{B}$. Järelikult $(L, (p_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}) \approx \lim D$. ■

Märkus 6.35. Tõestatud lause näitab, et täieliku kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivses alamkategoorias $\mathcal{B}$ saab piire konstrueerida samamoodi nagu kategoorias $\mathcal{A}$.

Lause 6.36. *Kui $\mathcal{B}$ on kotäieliku kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivne alamkategooria, siis $\mathcal{B}$ on kotäielik.*

TÕESTUS. Olgu $R \dashv J$, kus $J : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ on sisestusfunktor. Vaatleme väikest kategooriat $\mathcal{D}$ ja funktorit $D : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$. Kuna $\mathcal{A}$ on kotäielik, siis funktoril $J \circ D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ leidub kopiir, olgu see $(L, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})})$. Et vasakpoolne kaasfunktor säilitab kopiire, siis

$$(R(L), (R(u_i))_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}) \approx \mathrm{colim}(R \circ J \circ D).$$

Funktor J on täielik ja täpne, seega adjunktsiooni $R \dashv J$ koühik $R \circ J \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ on loomulik isomorfism (vt. lauset 6.13). Seega $R \circ J \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ ja $R \circ J \circ D \cong D$. Kasutades lemmat 6.21 saame öelda, et kategooriad $\mathsf{cocone}(R \circ J \circ D)$ ja $\mathsf{cocone}(D)$ on isomorfsed. Kuna kategoorias $\mathsf{cocone}(R \circ J \circ D)$ leidub algobjekt, siis ka kategoorias $\mathsf{cocone}(D)$ leidub algobjekt ehk teiste sõnadega funktoril D on olemas kopiir. ■

Märkus 6.37. Eelmise lause tõestusest tuleb välja, et kui tahame leida mingi diagrammi kopiiri kategoorias $\mathcal{B}$, siis vaatleme seda diagrammina kategoorias $\mathcal{A}$, leiame vastava kopiiri ja rakendame tulemusele reflektorit R.

Näide 6.38. Osutub, et täielike meetriliste ruumide kategooria CMet on meetriliste ruumide kategooria Met reflektiivne alamkategooria. Mõlemas kategoorias on morfismideks isomeetriad (kaugust säilitavad kujutused). Kui (X, d) ja (X', d') on meetrilised ruumid, siis kujutust $f : X \to Y$ nimetatakse **isomeetriaks**[118], kui

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

mistahes $x, y \in X$ korral.

Meetriline ruum (X, d) on **täielik**[119], kui iga Cauchy jada selles ruumis koondub. Teiste sõnadega:

$$\lim_{m,n \to \infty} d(x_m, x_n) = 0 \implies \exists y \in X\colon \lim_{n \to \infty} d(x_n, y) = 0.$$

Iga meetrilise ruumi (X, d) jaoks on võimalik konstrueerida tema täield, mida me tähistame (X^*, d^*). See konstruktsioon on järgmine. Olgu $C(X)$ kõigi Cauchy jadade hulk ruumis X. Defineerime sellel hulgal seose $\sim$ järgmiselt:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Saab näidata, et $\sim$ on ekvivalentsiseos. Tähistame faktorhulka

$$X^* := C(X)/\sim\, = \{[(x_n)] \mid (x_n) \in C(X)\}.$$

Sellel hulgal saab defineerida meetrika $d^* : X^* \times X^* \to [0, \infty)$ võrdusega

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$

nii et tulemuseks on meetriline ruum (X^*, d^*).

Defineerime funktori $R : \mathsf{Met} \to \mathsf{CMet}$ järgmiselt:

$$\begin{tikzcd}
(X_1, d_1) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (X_1^*, d_1^*) \arrow[d, "f^*"] \\
(X_2, d_2) \arrow[r, mapsto] & (X_2^*, d_2^*)
\end{tikzcd},$$

kus

$$f^*([(x_n)]) := [(f(x_n))].$$

Saab näidata, et R on sisestusfunktori $J : \mathsf{CMet} \to \mathsf{Met}$ vasakpoolne kaasfunktor. □

[118] *isometry*
[119] *complete*

Näited 6.39. 1. Abeli rühmade kategooria Ab on kõigi rühmade kategooria Grp reflektiivne alamkategooria, kusjuures reflektor $R\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Ab}$ on abelistamise funktor, mis on kirjeldatud näites 3.4 (6).

2. Monoidide kategooria Mon on poolrühmade kategooria Sgr reflektiivne alamkategooria. Kusjuures reflektor $\mathbb{R}\colon \mathsf{Sgr} \longrightarrow \mathsf{Mon}$ on nö. **ühikeelmendi lisamise**[120] funktor, mis käitub järgnevalt:

$$R(S) = S \sqcup \{1\} =: S^1,$$
$$R(f)\colon S^1 \longrightarrow T^1, \quad \left(s \mapsto \begin{cases} f(s), & (s \in S) \\ 1, & (s = 1) \end{cases}\right),$$

kus $f\colon S \longrightarrow T$ ja $S, T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sgr})$.

3. Ühikelemendiga ringide kategooria Ring on ühikelemendita ringide Rng reflektiivne alamkategooria. Reflektor $R\colon \mathsf{Rng} \longrightarrow \mathsf{Ring}$ on funktor, mis igale ringile $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Rng})$ seab vastavusse tema **Dorroh**[121] **laiendi**[122]. Ühikelemendita ringi $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Rng})$ Dorroh laiendiks on otsekorrutis $S' := S \times \mathbb{Z}$, kus tehted on defineeritud:

$$(s, z) + (s', z') = (s + s', z + z'),$$
$$(s, z) \cdot (s', z') = (ss' + zs' + z's, zz').$$

Selliste tehetega on S' ring, milles on ühikelement $(0, 1)$. Seega reflektor $R\colon \mathsf{Rng} \longrightarrow \mathsf{Ring}$ tegutseb $S \mapsto S'$ ja $f \mapsto f \times \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. □

Toome ära ka reflektiivsete alamkategooriate duaalse mõiste

Definitsioon 6.40. Kategooria $\mathcal{A}$ täielikku alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse **koreflektiivseks alamkategooriaks**, kui

1. sisestusfunktoril $J : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ leidub parempoolne kaasfunktor $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$,
2. $\mathcal{B}$ sisaldab koos iga objektiga B kõik sellega isomorfsed $\mathcal{A}$ objektid (kui $B \cong A$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, siis $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$).

Lause 6.41. *Kui $\mathcal{B}$ on (ko)täieliku kategooria $\mathcal{A}$ koreflektiivne alamkategooria, siis $\mathcal{B}$ on (ko)täielik.* $\boxed{D}$

Näited 6.42. 1. Vaatleme kategooriat REL, mille objektideks on paarid (X, ρ), kus X on mingi hulk ja ρ on mingi binaarne seos (s.t. $\rho \subseteq X \times X$). Morfismid kategoorias REL on hulkade kujutused, mis säilitavad seoseid, s.t. $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{REL}}((X, \rho), (Y, \xi))$ parajasti siis, kui $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$ ja

$$x \rho x' \implies f(x) \xi f(x')$$

iga $x, x' \in X$. Vaatleme alamkategooriat SYM, mis koosneb paaridest (X, σ), kus σ on sümmeetriline seos. Alamkategooria SYM on kategooria REL reflektiivne almkategooria reflektoriga $R\colon \mathsf{REL} \longrightarrow \mathsf{SYM}$, mis tegutseb $(X, \rho) \mapsto (X, \rho \cup \rho^{-1})$ ja $f \mapsto f$. Kuid kategooria SYM on ka kategooria REL koreflektiivne alamkategooria koreflektoriga $C\colon \mathsf{REL} \longrightarrow \mathsf{SYM}$, mis tegutseb $(X, \rho) \mapsto (X, \rho \cap \rho^{-1})$ ja $f \mapsto f$. Seega on siinkohal tegemist haruldase näitega alamkategooriast, mis on korraga reflektiivne ja koreflektiivne.

2. Rühmade kategooria Grp on monoidide kategooria Mon koreflektiivne alamkategooria koreflektoriga $C\colon \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Grp}$, mis tegutseb

$$M \mapsto U(M) := \{m \in M \mid \exists -m\colon \quad -m + m = m + (-m) = 0\},$$
$$f \mapsto f|_{U(M)},$$

kus $M, M' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mon})$ ja $f\colon M \longrightarrow M'$. Ühesõnaga, funktor C viib monoidi oma pööratavate elementide alamrühmaks ja morfismid vastavateks ahenditeks. □

Siiski toome ära veel ühe näite olukorrast, kus alamkategooria on nii reflektiivne kui ka koreflektiivne.

[120] *adjoining an identity*
[121] Joe Lee Dorroh – USA matemaatik
[122] *Dorroh extension*

Näide 6.43. Vaatleme järjestatud hulka $(\mathbb{R}, \leq)$, kus $\leq$ on tavaline järjestus, kui kategooriat (vt. näide 1.11 (2)). Alamkategooria $(\mathbb{Z}, \leq)$ on tema reflektiivne ja korefrlektiivne alamkategooria, kusjuures reflektor ja koreflektor on vastavalt lae ja põranda funktsioonid:

$$\lfloor \_ \rfloor \dashv J \dashv \lceil \_ \rceil.$$

Näitame, et kehtib vasakpoolne adjunktsioon. Esiteks, kujutus $\lfloor \_ \rfloor \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ on tõesti funktor, kuna säilitab järjestust. Paneme tähele, et iga $z \in \mathbb{Z}$ ja $r \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$z \leq \lfloor r \rfloor \iff J(z) = z \leq r.$$

See samaväärsus annabki vajaliku isomorfismi vastavate Mor-hulkade vahel. Adjunktsioon $J \dashv \lceil \_ \rceil$ tõestatakse analoogiliselt. $\square$

6.6.1. Lokalisatsioonid ja essentsiaalsed lokalisatsioonid

Definitsioon 6.44. Lõplikult täieliku kategooria $\mathcal{A}$ **lokalisatsiooniks**[123] nimetatakse $\mathcal{A}$ reflektiivset alamkategooriat $\mathcal{B}$, mille reflektor säilitab lõplike piire.

Definitsioon 6.45. Kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivset alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse kategooria $\mathcal{A}$ **essentsiaalseks lokalisatsiooniks**[124], kui reflektoril $R\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor.

Paneme tähele, et vasakpoolse kaasfunktoriga funktor säilitab kõiki piire (lause 6.6), mistõttu saame, et kui $\mathcal{A}$ on lõplikult täielik, siis iga tema essentsiaalne lokalisatsioon on samuti ka kategooria $\mathcal{A}$ lokalisatsioon. Lisaks, kui $J\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ on sisestus ja leiduvad funktorid $L\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ ja $R\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nii, et $L \dashv R \dashv J$, siis on ka funktor L täielik ja täpne. Seega on täielik alamkategooria $L(\mathcal{B})$ kategooria $\mathcal{A}$ koreflektiivne alamkategooria.

6.7. Kani laiendid*

Lemma 6.46. *Kui $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $K, H, L : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ on funktorid ja $\gamma : K \Rightarrow H$ ja $\delta : H \Rightarrow L$ loomulikud teisendused, siis*

$$(\delta \circ \gamma) * \mathrm{id}_F = (\delta * \mathrm{id}_F) \circ (\gamma * \mathrm{id}_F).$$

Tõestus. Iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral

$$((\delta \circ \gamma) * \mathrm{id}_F)_A = (\delta \circ \gamma)_{F(A)} = \delta_{F(A)} \circ \gamma_{F(A)} = (\delta * \mathrm{id}_F)_A \circ (\gamma * \mathrm{id}_F)_A = ((\delta * \mathrm{id}_F) \circ (\gamma * \mathrm{id}_F))_A. \quad \blacksquare$$

Järeldus 6.47. *Kui $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ on väiksed kategooriad, siis iga funktori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja kategooria $\mathcal{C}$ korral defineerib eeskiri*

$$F^* : \quad \mathsf{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\gamma"'] & K \circ F \arrow[d, "\gamma * \mathrm{id}_F"] \\ H \arrow[r, mapsto] & H \circ F \end{tikzcd}$$

funktori.

Definitsioon 6.48. Vaatleme funktoreid $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. Funktori G vasakpoolne **Kani**[125] **laiend**[126] piki funktorit F on paar (α, K), kus

- $K : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ on funktor,
- $\alpha : G \Rightarrow K \circ F$ on loomulik teisendus,

mille korral kehtib järgmine universaalomadus: kui (β, H) on selline paar, et

- $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ on funktor,

[123] *locaalization*
[124] *essential localization*
[125] Ameerika matemaatiku Daniel Marinus Kani järgi.
[126] *Kan extension*

- $\beta : G \Rightarrow H \circ F$ on loomulik teisendus,

siis leidub üheselt määratud loomulik teisendus $\gamma : K \Rightarrow H$ nii, et kehtib võrdus $(\gamma * \mathrm{id}_F) \circ \alpha = \beta$, s.t. $\gamma_{F(A)} \circ \alpha_A = \beta_A$ iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{B} \arrow[dl, "K"'] \arrow[dl, shift left=1.5, "H"] \\
\mathcal{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[dr, "\beta_A"'] & (K \circ F)(A) \arrow[d, "\gamma_{F(A)}"] \\
& (H \circ F)(A)
\end{tikzcd}
$$

Funktori K asemel kirjutatakse tihti $\mathsf{Lan}_F G$. Duaalselt defineeritakse parempoolsed Kani laiendid ja kasutatakse tähistust $\mathsf{Ran}_F G$.

Definitsioon ütleb, et Kani laiend $(\alpha, \mathsf{Lan}_F G)$ on universaalne morfism $\alpha : G \Rightarrow F^*(\mathsf{Lan}_F G)$ kategooria $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ objektist G funktorisse F^*.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\alpha_G"] \arrow[dr, "\beta"'] & F^*(K) = K \circ F \arrow[d, dashed, "F^*(\gamma) = \gamma * \mathrm{id}_F"] \\
& F^*(H) = H \circ F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\
H
\end{tikzcd}
$$

Kui selline Kani laiend $(\alpha_G, \mathsf{Lan}_F G)$ leidub iga funktori $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ jaoks, siis teoreemi 6.5 osa 2 ütleb, et funktoril F^* leidub vasakpoolne kaasfunktor $\mathsf{Lan}_F : \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, mis viib funktori $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funktoriks $\mathsf{Lan}_F G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ja mis morfismil $\mu : G \Rightarrow G'$ on defineeritud kui üheselt määratud loomulik teisendus $\mathsf{Lan}_F \mu : \mathsf{Lan}_F G \Rightarrow \mathsf{Lan}_F G'$, mis rahuldab võrdust $F^*(\mathsf{Lan}_F \mu) \circ \alpha_G = \alpha_{G'} \circ \mu$ ehk $(\mathsf{Lan}_F \mu * \mathrm{id}_F) \circ \alpha_G = \alpha_{G'} \circ \mu$.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\alpha_G"] \arrow[d, "\mu"'] & (\mathsf{Lan}_F G) \circ F \arrow[d, "(\mathsf{Lan}_F \mu) * \mathrm{id}_F"] \\
G' \arrow[r, "\alpha_{G'}"'] & (\mathsf{Lan}_F G') \circ F
\end{tikzcd}
$$

Muuhulgas tähendab fakt, et $\mathsf{Lan}_F \dashv F^*$, seda, et

$$
\mathsf{Nat}(\mathsf{Lan}_F G, H) \cong \mathsf{Nat}(G, H \circ F) \tag{6.14}
$$

mistahes funktorite $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ja $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ korral ja need isomorfismid on loomulikud G ja H suhtes.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{Lan}_F G"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Lause 6.49. *Kani laiendid on määratud üheselt isomorfismi täpsuseni.*

Tõestus. Vasakpoolsed Kani laiendid on universaalsed morfismid objektist $G \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$ funktorisse F^*, seega kategooria $(G \downarrow F^*)$ algobjektid. Algobjektid on lause 2.37 määratud üheselt isomorfismi täpsuseni. ■

Teoreem 6.50. *Olgu $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funktorid, kus $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on väiksed ja $\mathcal{C}$ kotäielik kategooria. Siis funktoril G on olemas vasakpoolne Kani laiend piki funktorit F.*

Tõestus. Et defineerida funktorit $K : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ objektil $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ vaatleme kontravariantse funktori $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(\_), B) : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ elementide kategooriat $\mathcal{E}_B := \mathsf{el}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(\_), B))$ (vt. näidet 3.18) ja unustavat funktorit $U_B : \mathcal{E}_B \to \mathcal{A}$. Paneme tähele, et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B) &= \{(b, A) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}), b \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B)\}, \\
a \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{E}_B}((b, A), (b', A')) &\iff a \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \ \& \ b = b' \circ F(a),
\end{aligned}
$$

sest $(\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(\_), B)(a))(b') = b' \circ F(a)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_B \arrow[r, "U_B"] & \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{B} \arrow[dl, "K"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

Kuna $\mathcal{A}$ on väike, siis ka $\mathcal{E}_B$ on väike kategooria. Olgu

$$\left(K(B), \left(u^B_{(b,A)}\right)_{(b,A)\in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)}\right) \approx \mathrm{colim}(G \circ U_B). \tag{6.15}$$

Sellega oleme defineerinud K objektidel.

Olgu $h : B \to B'$ morfism kategoorias $\mathcal{B}$. Kui $(b, A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)$, siis $h \circ b : F(A) \to B'$ ja seega $(h \circ b, A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_{B'})$. Kui $a : (b, A) \to (b', A')$ kategoorias $\mathcal{E}_B$, siis $h \circ b = h \circ b' \circ F(a)$, mis tähendab, et $a : (h \circ b, A) \to (h \circ b', A')$ kategoorias $\mathcal{E}_{B'}$. Seega

$$\left(K(B'), \left(u^{B'}_{(hb,A)}\right)_{(b,A)\in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)}\right) \in \mathsf{cocone}(G \circ U_B).$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & K(B') & & \\ & & K(B) \arrow[u, dashed, "K(h)"'] & & \\ (G \circ U_{B'})(h \circ b, A) = G(A) = (G \circ U_B)(b, A) \arrow[uurr, "u^{B'}_{(h\circ b,A)}"] \arrow[urr, "u^B_{(b,A)}"'] \arrow[rrrr, "G(a)"] & & & & (G \circ U_B)(b', A') = G(A') = (G \circ U_{B'})(h \circ b', A') \arrow[uull, "u^{B'}_{(h\circ b',A')}"'] \arrow[ull, "u^B_{(b',A')}"] \end{tikzcd}$$

Kuna kehtib (6.15), siis leidub üheselt määratud morfism $K(h) : K(B) \to K(B')$ nii, et $K(h) \circ u^B_{(b,A)} = u^{B'}_{(h\circ b,A)}$ iga $(b, A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)$ korral. Nii on K defineeritud morfismidel. Ühesusest morfismi $K(h)$ defineerimisel järeldub kergesti, et K on funktor.

Et saada loomulikku teisendust $\alpha : G \Rightarrow K \circ F$, defineerime iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $\alpha_A : G(A) \to (K \circ F)(A)$ võrdusega

$$\alpha_A := u^{F(A)}_{(\mathrm{id}_{F(A)},A)}.$$

Siis $\alpha = (\alpha_A)_{A\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} : G \Rightarrow K \circ F$ on loomulik teisendus, sest kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $a : A \to A'$ korral

$$(K \circ F)(a) \circ u^{F(A)}_{(\mathrm{id}_{F(A)},A)} = u^{F(A')}_{(F(a),A)} = u^{F(A')}_{(\mathrm{id}_{F(A')},A')} \circ G(a),$$

kus esimene võrdus kehtib $K(F(a))$ definitsiooni tõttu ja teine võrdus tänu sellele, et $a : (F(a), A) \to (\mathrm{id}_{F(A')}, A')$ kategoorias $\mathcal{E}_{F(A')}$ ja kehtib (6.15).

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "G(a)"'] & (K \circ F)(A) \arrow[d, "(K\circ F)(a)"] \\ G(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & (K \circ F)(A') \end{tikzcd}$$

Vaatleme nüüd funktorit $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ja loomulikku teisendust $\beta : G \Rightarrow H \circ F$. Et konstrueerida loomulik teisendus $\gamma : K \Rightarrow H$ vaatleme objekti $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Iga $(b, A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)$ korral vaatleme kategoorias $\mathcal{C}$ kompositsiooni

$$(G \circ U_B)(b, A) = G(A) \xrightarrow{\beta_A} (H \circ F)(A) \xrightarrow{H(b)} H(B).$$

Siis $\big(H(B), (H(b) \circ \beta_A)_{(b,A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)}\big) \in \mathsf{cocone}(G \circ U_B)$, sest kategooria $\mathcal{E}_B$ iga morfismi $a : (b, A) \to (b', A')$ korral

$$H(b') \circ \beta_{A'} \circ G(a) = H(b') \circ H(F(a)) \circ \beta_A = H(b' \circ F(a)) \circ \beta_A = H(b) \circ \beta_A.$$

$$\begin{tikzcd}
 & H(B) & \\
H(F(A)) \arrow[ur, "H(b)"] & K(B) \arrow[u, dashed, "\gamma_B"'] & H(F(A')) \arrow[ul, "H(b')"'] \\
(G \circ U_B)(b, A) = G(A) \arrow[u, "\beta_A"] \arrow[ur, "u^B_{(b,A)}"] \arrow[rr, "G(a)"] & & G(A') = (G \circ U_B)(b', A') \arrow[u, "\beta_{A'}"'] \arrow[ul, "u^B_{(b',A')}"']
\end{tikzcd}$$

Järelikult leidub üheselt määratud morfism $\gamma_B : K(B) \to H(B)$ nii, et

$$\gamma_B \circ u^B_{(b,A)} = H(b) \circ \beta_A. \tag{6.16}$$

Tõestamaks teisenduse $\gamma = (\gamma_B)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})} : K \Rightarrow H$ loomulikkust vaatleme morfismi $h : B \to B'$ ja objekti $(b, A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}_B)$. Siis

$$H(h) \circ \gamma_B \circ u^B_{(b,A)} = H(h) \circ H(b) \circ \beta_A = H(h \circ b) \circ \beta_A = \gamma_{B'} \circ u^{B'}_{(h \circ b, A)} = \gamma_{B'} \circ K(h) \circ u^B_{(b,A)}.$$

Taandades paremalt kopiiri sisestused $u^B_{(b,A)}$ (seda lubab teha lausega 5.66 duaalne tulemus) saame $H(h) \circ \gamma_B = \gamma_{B'} \circ K(h)$, nagu vaja.

$$\begin{tikzcd}
K(B) \arrow[r, "\gamma_B"] \arrow[d, "K(h)"'] & H(B) \arrow[d, "H(h)"] \\
K(B') \arrow[r, "\gamma_{B'}"'] & H(B')
\end{tikzcd}$$

Iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral kehtib tänu võrdusele (6.16)

$$\gamma_{F(A)} \circ \alpha_A = \gamma_{F(A)} \circ u^{F(A)}_{(\mathrm{id}_{F(A)}, A)} = H(\mathrm{id}_{F(A)}) \circ \beta_A = \beta_A,$$

mis tähendab, et $(\gamma * \mathrm{id}_F) \circ \alpha = \beta$. Sellise γ ühesus taandub morfismide $\gamma_{F(A)}$ ühesusele võrduses (6.16).■

Järgnev lause ja tema lause teoreem näitavad, et kõikvõimalikke (ko)piire on võimalik kirjeldada Kani laiendite abil.

Lause 6.51. *Olgu $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funktor, kus $\mathcal{A}$ on väike kategooria, olgu $\mathbf{1}$ diskreetne kategooria ühe objektiga $*$ ja olgu $F : \mathcal{A} \to \mathbf{1}$ konstantne funktor. Siis funktoril G on olemas kopiir parajasti siis, kui leidub funktori G vasakpoolne Kani laiend piki funktorit F.*

Tõestus. **Tarvilikkus.** Kasutades teoreemi 6.50 tähistusi on kategooria $\mathcal{E}_*$ isomorfne kategooriaga $\mathcal{A}$. Seega kui $\operatorname{colim} G$ eksisteerib, siis eksisteerib ka $\operatorname{colim}(G \circ U_*)$ ja me saame $\mathsf{Lan}_F G$ konstrueerida nii nagu teoreemi 6.50 tõestuses.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_* \overset{U_*}{\cong} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathbf{1} \arrow[dl, "\mathsf{Lan}_F G"] \\
\mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

Piisavus. Kui $\mathsf{Lan}_F G$ on olemas, siis on see mingi konstantne funktor $\Delta^{\mathbf{1}}_L : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$, $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, koos loomuliku teisendusega $G \Rightarrow \Delta^{\mathcal{A}}_L = \Delta^{\mathbf{1}}_L \circ F$, s.t. koos kokoonusega, mille tipp on L. Selle kokoonuse universaalsus on täpselt $\mathsf{Lan}_F G$ universaalsuse omadus. ■

Lause 6.52. *Olgu $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ funktor, kus $\mathcal{A}$ on väike kategooria, olgu $\mathbf{1}$ diskreetne kategooria ühe objektiga $*$ ja olgu $F : \mathcal{A} \to \mathbf{1}$ konstantne funktor. Siis funktoril G on olemas piir parajasti siis, kui leidub funktori G parempoolne Kani laiend piki funktorit F.* $\boxed{D}$

Lause 6.53. *Kui $\langle L, R, \varphi \rangle : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ on adjunktsioon, siis mistahes funktorite $H : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ ja $M : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ korral leidub üksühene vastavus*

$$\mathsf{Nat}(L \circ M, H) \cong \mathsf{Nat}(M, R \circ H), \tag{6.17}$$

kusjuures need bijektsioonid on loomulikud M ja H suhtes.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dl, "M"'] \arrow[dr, "H"] & \\
\mathcal{C} \arrow[rr, shift left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{E} \arrow[ll, shift left, "R"]
\end{tikzcd}$$

Tõestus. Defineerime kujutused

$$\begin{aligned}
f :&\quad \mathsf{Nat}(L \circ M, H) \longrightarrow \mathsf{Nat}(M, R \circ H),\\
g :&\quad \mathsf{Nat}(M, R \circ H) \longrightarrow \mathsf{Nat}(L \circ M, H)
\end{aligned}$$

võrdustega

$$\begin{aligned}
f(\mu) &:= \left(\varphi_{M(B),H(B)}(\mu_B)\right)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})},\\
g(\nu) &:= \left(\varphi^{-1}_{M(B),H(B)}(\nu_B)\right)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})},
\end{aligned}$$

kus

$$\varphi_{M(B),H(B)} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{E}}(L(M(B)), H(B)) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M(B), R(H(B))).$$

Ei ole raske näha, et f, g on nõutavate omadustega bijektsioonid. ■

Teoreem 6.54. *Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{E}$ kategooriad, kusjuures $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on väiksed. Vaatleme funktoreid $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $L : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ja $R : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, kusjuures $L \dashv R$ ning $\mathsf{Lan}_F G$ ja $\mathsf{Lan}_F(L \circ G)$ on olemas. Siis*

$$L \circ \mathsf{Lan}_F G \cong \mathsf{Lan}_F(L \circ G).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{B} \arrow[dl, "\mathsf{Lan}_F G"'] \arrow[ddl, "\mathsf{Lan}_F(L \circ G)"] \\
\mathcal{C} \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \\
\mathcal{E} \arrow[u, shift right, "R"'] &
\end{tikzcd}$$

Tõestus. Kasutades isomorfisme (6.17) ja (6.14) kaks korda saame mistahes $H : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ korral

$$\mathsf{Nat}(L \circ \mathsf{Lan}_F G, H) \cong \mathsf{Nat}(\mathsf{Lan}_F G, R \circ H) \cong \mathsf{Nat}(G, R \circ H \circ F) \cong \mathsf{Nat}(L \circ G, H \circ F) \cong \mathsf{Nat}(\mathsf{Lan}_F(L \circ G), H),$$

kusjuures kõik need bijektsioonid on loomulikud H (ja G) suhtes. Olgu

$$\varphi_H : \mathsf{Nat}(L \circ \mathsf{Lan}_F G, H) \longrightarrow \mathsf{Nat}(\mathsf{Lan}_F(L \circ G), H)$$

H suhtes loomulik bijektsioon ja vaatleme loomulikke teisendusi

$$\varphi_{L \circ \mathsf{Lan}_F G}(\mathrm{id}_{L \circ \mathsf{Lan}_F G}) : \mathsf{Lan}_F(L \circ G) \Rightarrow L \circ \mathsf{Lan}_F G,$$

$$\varphi^{-1}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\left(\mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\right) : L\circ \mathsf{Lan}_F G \Rightarrow \mathsf{Lan}_F(L\circ G).$$

Siis φ loomulikkuse tõttu on ruut

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(L\circ\mathsf{Lan}_F G, L\circ\mathsf{Lan}_F G) \arrow[r, "\varphi_{L\circ\mathsf{Lan}_F G}"] \arrow[d, "\varphi^{-1}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}(\mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)})\circ__"'] & \mathsf{Nat}(\mathsf{Lan}_F(L\circ G), L\circ\mathsf{Lan}_F G) \arrow[d, "\varphi^{-1}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}(\mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)})\circ__"] \\
\mathsf{Nat}(L\circ\mathsf{Lan}_F G, \mathsf{Lan}_F(L\circ G)) \arrow[r, "\varphi_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}"'] & \mathsf{Nat}(\mathsf{Lan}_F(L\circ G), \mathsf{Lan}_F(L\circ G))
\end{tikzcd}$$

kommutatiivne ja seega

$$\varphi^{-1}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\left(\mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\right)\circ\varphi_{L\circ\mathsf{Lan}_F G}\left(\mathrm{id}_{L\circ\mathsf{Lan}_F G}\right) = \varphi_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\left(\varphi^{-1}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\left(\mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\right)\right) = \mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}.$$

Analoogiliselt saab tõestada, et

$$\varphi_{L\circ\mathsf{Lan}_F G}\left(\mathrm{id}_{L\circ\mathsf{Lan}_F G}\right)\circ\varphi^{-1}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\left(\mathrm{id}_{\mathsf{Lan}_F(L\circ G)}\right) = \mathrm{id}_{L\circ\mathsf{Lan}_F G}$$

ja seega $L\circ\mathsf{Lan}_F G\cong\mathsf{Lan}_F(L\circ G)$ kategoorias $\mathsf{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{E})$. ■

Järgnevas lauses tähendab fraas "kehtib isomorfism $L\circ\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}\cong\mathsf{Lan}_F L$" seda, et kui $(\eta,\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A})$ on funktori $\mathrm{id}_\mathcal{A}$ vasakpoolne Kani laiend piki funktorit F, siis $(\mathrm{id}_L*\eta, L\circ\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A})$ on funktori L vasakpoolne Kani laiend piki funktorit F. Järgimine lause koos oma duaalse lausega annab kaasfunktorite kirjelduse Kani laiendite abil

Lause 6.55. *Olgu $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ väiksed kategooriad ja $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ funktor. Siis järgmised väited on samaväärsed.*

1. *Funktoril F leidub parempoolne kaasfunktor.*
2. *Leidub Kani laiend $\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}$ ja iga funktori $L:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ korral kehtib isomorfism $L\circ\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}\cong\mathsf{Lan}_F L$.*
3. *Leidub Kani laiend $\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}$ ja kehtib isomorfism $F\circ\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}\cong\mathsf{Lan}_F F$.*

Tõestus. (1. $\Rightarrow$ 2.). Olgu $F\dashv G$ ja $\eta:\mathrm{id}_\mathcal{A}\Rightarrow G\circ F$, $\varepsilon:F\circ G\Rightarrow\mathrm{id}_\mathcal{B}$ adjunktsiooni ühik ja koühik. Siis $\alpha:=\mathrm{id}_L*\eta:L\Rightarrow L\circ G\circ F$. Näitame, et $(\mathrm{id}_L*\eta, L\circ G)$ on funktori $L:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ vasakpoolne Kani laiend piki funktorit F (s.o. $L\circ G\cong\mathsf{Lan}_F L$). Muuhulgas $L=\mathrm{id}_\mathcal{A}$ korral saame, et (η,G) on funktori $\mathrm{id}_\mathcal{A}$ vasakpoolne Kani laiend piki funktorit F (s.o. $G\cong\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}$). Sellest järeldub, et $L\circ\mathsf{Lan}_F\,\mathrm{id}_\mathcal{A}\cong L\circ G\cong\mathsf{Lan}_F L$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[dl, "L\circ G\cong\mathsf{Lan}_F L"] \\
\mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

Kui $H:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ on funktor ja $\beta:L\Rightarrow H\circ F$ loomulik teisendus, siis vaatleme kompositsiooni

$$\gamma:=(\mathrm{id}_H*\varepsilon)\circ(\beta*\mathrm{id}_G):\ L\circ G\Rightarrow H\circ F\circ G\Rightarrow H.$$

Kasutades lemmat 6.46 ja tema analoogi, diagrammi

$$\begin{tikzcd}
L(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "L(\eta_A)"'] & (H\circ F)(A) \arrow[d, "(H\circ F)(\eta_A)"] \\
(L\circ G\circ F)(A) \arrow[r, "\beta_{(G\circ F)(A)}"'] & (H\circ F\circ G\circ F)(A)
\end{tikzcd}$$

kommutatiivsust ja kolmnurksamasust (6.8) saame

$$(\gamma*\mathrm{id}_F)\circ\alpha = (((\mathrm{id}_H*\varepsilon)\circ(\beta*\mathrm{id}_G))*\mathrm{id}_F)\circ\alpha = (\mathrm{id}_H*\varepsilon*\mathrm{id}_F)\circ(\beta*\mathrm{id}_G*\mathrm{id}_F)\circ(\mathrm{id}_L*\eta)$$

$$= (\mathrm{id}_H * \varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F * \eta) \circ \beta = \mathrm{id}_H * ((\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta)) \circ \beta = (\mathrm{id}_H * \mathrm{id}_F) \circ \beta = \beta.$$

Kui ka $\gamma' : L \circ G \Rightarrow H$ on selline, et $(\gamma' * \mathrm{id}_F) \circ \alpha = \beta$, siis

$$\begin{aligned}
\gamma &= (\mathrm{id}_H * \varepsilon) \circ (\beta * \mathrm{id}_G) = (\mathrm{id}_H * \varepsilon) \circ (((\gamma' * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_L * \eta)) * \mathrm{id}_G) \\
&= (\mathrm{id}_H * \varepsilon) \circ (\gamma' * \mathrm{id}_F * \mathrm{id}_G) \circ (\mathrm{id}_L * \eta * \mathrm{id}_G) = \gamma' \circ (\mathrm{id}_L * \mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\mathrm{id}_L * \eta * \mathrm{id}_G) \\
&= \gamma' \circ (\mathrm{id}_L * ((\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G))) = \gamma' \circ (\mathrm{id}_L * \mathrm{id}_G) = \gamma'.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
(L \circ G \circ F \circ G)(B) \arrow[r, "\gamma'_{(F \circ G)(B)}"] \arrow[d, "(L \circ G)(\varepsilon_B)"'] & (H \circ F \circ G)(B) \arrow[d, "H(\varepsilon_B)"] \\
(L \circ G)(B) \arrow[r, "\gamma'_B"'] & H(B)
\end{tikzcd}$$

Järelikult iga funktori L korral $(\mathrm{id}_L * \eta, L \circ G)$ on funktori L Kani laiend piki funktorit F.

(2. $\Rightarrow$ 3.). See on ilmne.

(3. $\Rightarrow$ 1.). Olgu (η, G) funktori $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ Kani laiend piki funktorit F. Eelduse põhjal $(\mathrm{id}_F * \eta, F \circ G)$ on funktori F Kani laiend piki funktorit F.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[dl, "G \cong \mathsf{Lan}_F\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}}"'] \arrow[ddl, "F \circ G \cong \mathsf{Lan}_F F"] \\
\mathcal{A} \arrow[d, "F"'] & \\
\mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

Vaadeldes funktorit $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ ja samasusteisendust $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \circ F$ annab $\mathsf{Lan}_F F$ definitsioon loomuliku teisenduse $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, mis rahuldab tingimust $(\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta) = \mathrm{id}_F$. Kasutades η loomulikkust ja juba tõestatud kolmnurksamasust saame

$$\begin{aligned}
(((\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G)) * \mathrm{id}_F) \circ \eta &= (\mathrm{id}_G * \varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\eta * \mathrm{id}_G * \mathrm{id}_F) \circ \eta \\
&= (\mathrm{id}_G * \varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_G * \mathrm{id}_F * \eta) \circ \eta \\
&= \mathrm{id}_G * ((\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \eta)) \circ \eta = (\mathrm{id}_G * \mathrm{id}_F) \circ \eta = \eta.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & (G \circ F)(A) \arrow[d, "(G \circ F)(\eta_A)"] \\
(G \circ F)(A) \arrow[r, "\eta_{(G \circ F)(A)}"'] & (G \circ F \circ G \circ F)(A)
\end{tikzcd}$$

Et ka võrdus $(\mathrm{id}_G * \mathrm{id}_F) \circ \eta = \eta$ kehtib, siis tänu ühesuse tingimusele $\mathsf{Lan}_F\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ definitsioonis kehtib võrdus $(\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_G$. ■

Lause 6.56. *Olgu $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ väiksed kategooriad ja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor. Siis järgmised väited on samaväärsed.*

1. *Funktoril F leidub vasakpoolne kaasfunktor.*
2. *Leidub Kani laiend $\mathsf{Ran}_F\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ ja iga funktori $L : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ korral kehtib isomorfism $(\mathsf{Ran}_F\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}}) \circ L \cong \mathsf{Ran}_F L$.*
3. *Leidub Kani laiend $\mathsf{Ran}_F\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ ja kehtib isomorfism $(\mathsf{Ran}_F\, \mathrm{id}_{\mathcal{A}}) \circ F \cong \mathsf{Ran}_F F$.* $\boxed{D}$

Kokkuvõttes oleme me näidanud, et nii piiri kui ka kaasfunktori mõisted on täielikult kirjeldatavad Kani laiendite abil. Seetõttu on Kategooriateooria rajaja Saunders Mac Lane oma fundamentaalses raamatus [3] väitnud: „Kõik kontseptsioonid on Kani laiendid.[127]"

[127]"All concepts are Kan extensions" ([3, Par. X.7])

6.8. Ülesanded

Ülesanded 6.57. 1. Tõestada, et kui $F, G : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ on bifunktorid ja $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B)\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})} : F \Rightarrow G$ on loomulik A ja B suhtes, siis ta on loomulik (A, B) suhtes.

2. Valida mingi konkreetne adjunktsioon ja kirjutada ilmutatult välja selle ühik, koühik ja bijektsioon φ. Tõestada, et selles adjunktsioonis kehtivad kolmnurksamasused.
3. Tõestada, et filtreeritud kategooriaga ekvivalentne kategooria on ka filtreeritud.
4. Vaatleme üheobjektilist kategooriat $\mathcal{C}$, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{\star\}$, milles on kaks morfismi: $\mathrm{id}_\star$ ja morfism $f : \star \longrightarrow \star$, mille korral $f \circ f = \mathrm{id}_\star$. Tõestage, et morfism f määrab loomuliku teisenduse $\phi\colon \mathrm{id}_\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{id}_\mathcal{C}$, $\phi_\star = f$. Tõestage, et ühikfunktor $\mathrm{id}_\mathcal{C}$ on iseenda vasakpoolne kaasfunktor ning selle adjunktsiooni ühikuks $\eta\colon \mathrm{id}_\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{id}_\mathcal{C} \circ \mathrm{id}_\mathcal{C}$ ja koühikuks $\varepsilon\colon \mathrm{id}_\mathcal{C} \circ \mathrm{id}_\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{id}_\mathcal{C}$ võib võtta funktori $\mathrm{id}_\mathcal{C}$ samasusteisenduse. Näidake, et ühikuks η ja koühikuks ε võib võtta ka loomuliku teisenduse ϕ.

7. Abeli kategooriad

7.1. Ab-kategooriad

Lisaks harilikele kategooriatele on tihti kasulik vaadelda niinimetatud **rikastatud kategooriaid**[128]. Need on sellised kategooriad, mille morfismihulkadel on antud teatud lisastruktuur (näiteks algebraline, topoloogiline või järjestusstruktuur) ning see lisastruktuur peab olema kooskõlas morfismide komponeerimisega. Me vaatleme siin rikastatud kategooriate ühte tähtsamat juhtu — kategooriaid, mis on rikastatud Abeli rühmade abil.

Definitsioon 7.1. Kategooriat $\mathcal{A}$ nimetatakse **Ab-kategooriaks** ehk **eeladitiivseks kategooriaks**[129], kui iga mor-hulk $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ on Abeli rühm ja

$$\begin{aligned}(f+g)\circ h &= f\circ h + g\circ h,\\ k\circ(f+g) &= k\circ f + k\circ g\end{aligned}$$

mistahes morfismide $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, A)$ ja $k \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, D)$ korral.

Kui $\mathcal{A}$ on Ab-kategooria, siis kõigi Abeli rühmade $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ (mis on erinevad) tehet me tähistame ühtemoodi sümboliga $+$. Igas sellises Abeli rühmas leidub nullelement, mida me tähistame sümboliga 0.

Näide 7.2. Abeli rühmade kategooria Ab, vektorruumide (üle korpuse K) kategooria Vec_K ja ringide kategooria Ring on Ab-kategooriad. Kui näiteks A ja B on Abeli rühmad, siis homomorfismide hulga $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(A, B)$ saab muuta Abeli rühmaks, kui liitmine defineerida punktiviisiliselt:

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a),$$

$f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(A, B)$ ja $a \in A$. □

Lemma 7.3. *Kui $\mathcal{A}$ on Ab-kategooria ja $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$, siis*

$$0 \circ f = 0 \quad \textit{ja} \quad f \circ 0 = 0.$$

Tõestus. Vaatleme morfisme

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} C.$$

Siis

$$0 \circ f = (0+0)\circ f = 0\circ f + 0 \circ f.$$

Liites selle võrduse mõlemale poolele morfismi $-(0\circ f) : A \to C$ saame, et $0 \circ f = 0 : A \to C$. Võrduse $f \circ 0 = 0$ tõestus on analoogiline. ■

Meenutame, et nullobjekt on objekt, mis on samaaegselt alg- ja lõppobjekt. Nullobjekti tähistatakse enamasti sümboliga $\mathbf{0}$, kuid segaduse vältimiseks algobjekti tähistusega, tähistame me nullobjekti edaspidi sümboliga $\tilde{\mathbf{0}}$.

Lause 7.4. Ab-*kategooria $\mathcal{A}$ objekti A jaoks on järgmised väited samaväärsed:*
1. *A on algobjekt;*
2. *A on lõppobjekt;*
3. *A on nullobjekt.*

Tõestus. Definitsiooni põhjal $3 \Rightarrow 1$ ja $3 \Rightarrow 2$. Duaalsuse tõttu piisab näidata, et $1 \Rightarrow 3$. Olgu A algobjekt. Siis hulk $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A)$ on ühe-elemendiline ja seega id_A on Abeli rühma $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A)$ nullelement. Kui $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, siis $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A)$ sisaldab vähemalt ühte elementi — rühma $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A)$ nullelementi. Kui aga $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A)$ on suvaline morfism, siis

$$f = \mathrm{id}_A \circ f = (\mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A)\circ f = \mathrm{id}_A \circ f + \mathrm{id}_A \circ f = f + f$$

Abeli rühmas $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A)$. Liites võrduse $f = f + f$ mõlemale poolele elemendi $-f$ saame, et f on rühma $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A)$ nullelement. Järelikult $\#(\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, A)) = 1$ iga $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral, mis tähendab, et A on lõppobjekt ning seega ka nullobjekt. ■

[128] *enriched category*
[129] *preadditive category*

Definitsioon 7.5. Olgu $\mathcal{A}$ Ab-kategooria. Morfismi $f : A \to B$ **(ko)tuumaks**[130] nimetatakse morfismidepaari $f, 0 : A \to B$ (ko)võrdsustajat.

Seega paar (E, e), kus $e : E \to A$, on morfismi $f : A \to B$ tuum (tähistatakse $(E, e) \approx \operatorname{Ker} f$ või isegi $e = \operatorname{Ker} f$), kui $f \circ e = 0$ ja iga morfismi $e' : E' \to A$ korral, kui $f \circ e' = 0$, siis leidub üheselt määratud morfism $k : E' \to E$ nii, et $e \circ k = e'$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "0"] & & \\
 & A \arrow[r, "f"] & B \\
E' \arrow[uu, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Morfismi f kotuuma korral kasutatakse tähistust $(C, c) \approx \operatorname{Coker} f$ või $c = \operatorname{Coker} f$.

Näide 7.6. Abeli rühmade kategoorias Ab on morfismi $f : A \to B$ kanooniline tuum paar $(\ker f, \iota)$, kus $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ ja $\iota : \ker f \to A$ on sisestus. Morfismi $f : A \to B$ kanooniline kotuum on paar $(B/f(A), \kappa)$, kus $B/f(A)$ on rühma B faktorrühm alamrühma $f(A)$ järgi ja $\kappa : B \to B/f(A), b \mapsto b + f(A)$ on loomulik projektsioon. □

Lause 7.7. *Igas* Ab*-kategoorias* $\mathcal{A}$ *on võrdsustajad tuumad ja kovõrdsustajad kotuumad.*

Tõestus. Olgu $f, g : A \to B$ kategoorias $\mathcal{A}$. Näitame, et

$$(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f, g) \iff (E, e) \approx \mathsf{Eq}(f - g, 0).$$

(Kovõrdsustajate jaoks on tõestus analoogiline.)

Eeldame, et $(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f, g)$. Siis leidub morfism $f - g$ Abeli rühmas $\operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ja

$$(f - g) \circ e = f \circ e - g \circ e = 0.$$

Kui ka $e' : E' \to A$ on selline, et $(f - g) \circ e' = 0$, siis $f \circ e' = g \circ e'$ ja seega leidub üheselt määratud morfism $k : E' \to E$ nii, et $e \circ k = e'$. Sellega oleme näidanud, et $(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f - g, 0)$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "0"] & & \\
 & A \arrow[r, "f-g"] & B \\
E' \arrow[uu, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "e"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
 & E' \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Eeldame nüüd, et $(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f - g, 0)$. Siis

$$0 = (f - g) \circ e = f \circ e - g \circ e.$$

Liites selle võrduse mõlemale poolele morfismi $g \circ e$ saame võrduse $f \circ e = g \circ e$. Kui $e' : E' \to A$ on selline, et $f \circ e' = g \circ e'$, siis $(f - g) \circ e' = f \circ e' - g \circ e' = 0$. Järelikult leidub üheselt määratud morfism $k : E' \to E$ nii, et $e \circ k = e'$. Sellega oleme näidanud, et $(E, e) \approx \mathsf{Eq}(f, g)$. ■

Definitsioon 7.8. Ab-kategooria $\mathcal{A}$ objektide A, B **bikorrutis**[131] on viisik (P, p_A, p_B, u_A, u_B), kus

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift right, "u_A"'] & P \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "u_B"]
\end{tikzcd}$$

ja

$$p_A \circ u_A = \mathrm{id}_A, \qquad p_B \circ u_B = \mathrm{id}_B, \qquad u_A \circ p_A + u_B \circ p_B = \mathrm{id}_P\,.$$

Objektide A ja B bikorrutise objekti P tähistatakse tavaliselt $A \oplus B$.

[130] *kernel*
[131] *biproduct*

Näide 7.9. Abeli rühmade A ja B korral võib otsekorrutisel $P := A \times B$ defineerida liitmise komponenthaaval:

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b').$$

Vaadeldes homomorfisme

$$\begin{aligned} p_A &: P \to A, \quad (a,b) \mapsto a, \\ p_B &: P \to A, \quad (a,b) \mapsto b, \\ u_A &: A \to P, \quad a \mapsto (a,0), \\ u_B &: B \to P, \quad b \mapsto (0,b) \end{aligned}$$

näeme, et (P, p_A, p_B, u_A, u_B) on Abeli rühmade A ja B bikorrutis, sest

$$\begin{aligned} p_A(u_A(a)) &= p_A(a,0) = a, \\ p_B(u_B(b)) &= p_B(0,b) = b, \\ (u_A \circ p_A + u_B \circ p_B)(a,b) &= u_A(p_A(a,b)) + u_B(p_B(a,b)) = u_A(a) + u_B(b) = (a,0) + (0,b) = (a,b) \end{aligned}$$

mistahes $a \in A$ ja $b \in B$ korral. □

Teoreem 7.10. Ab*-kategooria objektide A ja B jaoks on järgmised väited samaväärsed:*

1. *leidub A ja B bikorrutis;*
2. *leidub A ja B korrutis;*
3. *leidub A ja B kokorrutis.*

TÕESTUS. (1. ⇒ 2.). Olgu (P, p_A, p_B, u_A, u_B) objektide A ja B bikorrutis. Siis

$$p_A \circ u_B = p_A \circ (u_A \circ p_A + u_B \circ p_B) \circ u_B = p_A \circ u_A \circ p_A \circ u_B + p_A \circ u_B \circ p_B \circ u_B = p_A \circ u_B + p_A \circ u_B,$$

kust $p_A \circ u_B = 0$ ja sümmeetriliselt $p_B \circ u_A = 0$. Kui nüüd $f_A : Q \to A$ ja $f_B : Q \to B$, siis võttes $m := u_A \circ f_A + u_B \circ f_B : Q \to P$ kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} p_A \circ m &= p_A \circ u_A \circ f_A + p_A \circ u_B \circ f_B = \mathrm{id}_A \circ f_A + 0 \circ f_B = f_A, \\ p_B \circ m &= p_B \circ u_A \circ f_A + p_B \circ u_B \circ f_B = 0 \circ f_A + \mathrm{id}_B \circ f_B = f_B. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Kui ka $m' : Q \to P$ on selline, et $p_A \circ m' = f_A$ ja $p_B \circ m' = f_B$, siis

$$m' = (u_A \circ p_A + u_B \circ p_B) \circ m' = u_A \circ p_A \circ m' + u_B \circ p_B \circ m' = u_A \circ f_A + u_B \circ f_B = m.$$

Järelikult (P, p_A, p_B) on objektide A ja B korrutis.

(2. ⇒ 1.). Olgu (P, p_A, p_B) objektide A ja B korrutis.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[d, dashed, "u_A"] \arrow[dr, "0"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "0"'] \arrow[d, dashed, "u_B"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Siis leiduvad sellised üheselt määratud morfismid $u_A : A \to P$ ja $u_B : B \to P$, et $p_A \circ u_A = \mathrm{id}_A$, $p_B \circ u_A = 0$, $p_A \circ u_B = 0$ ja $p_B \circ u_B = \mathrm{id}_B$. Seega

$$\begin{aligned} p_A \circ (u_A \circ p_A + u_B \circ p_B) &= p_A \circ u_A \circ p_A + p_A \circ u_B \circ p_B = \mathrm{id}_A \circ p_A + 0 \circ p_B = p_A, \\ p_B \circ (u_A \circ p_A + u_B \circ p_B) &= p_B \circ u_A \circ p_A + p_B \circ u_B \circ p_B = 0 \circ p_A + \mathrm{id}_B \circ p_B = p_B, \end{aligned}$$

millest järeldub võrdus $u_A \circ p_A + u_B \circ p_B = \mathrm{id}_P$.

(1. ⇔ 3.). Tõestus on analoogiline. ■

Definitsioon 7.11. Eeladitiivset kategooriat nimetatakse **aditiivseks**[132], kui temas leiduvad nullobjekt ja kõikvõimalikud binaarsed bikorrutised.

[132] *additive category*

7.2. Abeli kategooriad

Definitsioon 7.12. Abeli kategooria[133] on Ab-kategooria, milles

1. leidub nullobjekt,
2. leiduvad binaarsed bikorrutised,
3. igal morfismil leidub tuum ja kotuum,
4. iga monomorfism on tuum ja iga epimorfism on kotuum.

Paneme tähele, et Abeli kategooria võib defineerida ka kui aditiivse kategooria, milles kehtivad tingimused 3 ja 4 eelmisest definitsioonist.

Näide 7.13. Näitame, et Abeli rühmade kategooria Ab on Abeli kategooria.

Nullobjektiks selles kategoorias on ühe-elemendiline Abeli rühm $\{0\}$. Binaarsete bikorrutiste olemasolu on tõestatud näites 7.9. Tänu näitele 7.6 on igal morfismil olemas tuum ja kotuum.

Tõestame, et igal monomorfismil on tuum ja iga epimorfism on kotuum. Meenutame, et kategoorias Ab on monomorfismideks injektiivsed rühmade homomorfismid ja epimorfismideks on sürjektiivsed rühmade homomorfismid.

Olgu $f : A \rightarrowtail B$ suvaline monomorfism kategoorias Ab. Näitame, et f on loomuliku projektsiooni $\kappa : B \to B/f(A)$ tuum.

1. Iga $a \in A$ korral
$$(\kappa \circ f)(a) = \kappa(f(a)) = f(a) + f(A) = f(A) = 0(a),$$
seega $\kappa \circ f = 0$.
2. Olgu $g : C \to B$ selline morfism, et $\kappa \circ g = 0$. Siis $g(c) + f(A) = f(A)$ ehk $g(c) \in f(A)$ iga $c \in C$ korral. Defineerime kujutuse $k : C \to A$ võrdusega
$$k(c) := a,$$
kus $a \in A$ on selline element, et $g(c) = f(a)$. Kui $g(c) = f(a) = f(a')$, $a, a' \in A$, siis f injektiivsuse tõttu $a = a'$. See tähendab, et k on korrektselt defineeritud. Lihtne on veenduda, et k on üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism, mille korral $f \circ k = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] & B/f(A) \\ & C \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Olgu nüüd $f : A \twoheadrightarrow B$ suvaline epimorfism kategoorias Ab. Näitame, et f on sisestuse $\iota : \ker f \to A$, kus $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, kotuum.

1. On selge, et $f \circ \iota = 0$.
2. Olgu $g : A \to C$ selline morfism, et $g \circ \iota = 0$. Defineerime kujutuse $k : B \to C$ võrdusega
$$k(b) := g(a),$$
kus $a \in A$ on selline element, et $f(a) = b$ (selline a leidub f sürjektiivsuse tõttu). Kui $b = f(a) = f(a')$, siis $f(a - a') = 0$ ja $a - a' \in \ker f$. Seega
$$0 = (g \circ \iota)(a - a') = g(\iota(a - a')) = g(a - a') = g(a) - g(a'),$$
kust $g(a) = g(a')$. Seega k on korrektselt defineeritud. Saab näidata, et k on üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism, mille korral $k \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "k"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Sellega on näidatud, et Ab on Abeli kategooria. Analoogiliselt saab näidata, et Vec_K, Ring ja Mod_S on Abeli kategooriad (kus $K \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Field})$ ja $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Rng})$). □

[133] *abelian category*

Lause 7.14. *Abeli kategooria on lõplikult täielik ja kotäielik.*

TÕESTUS. Definitsiooni tingimuste 1 ja 2, lause 7.4 ja teoreemi 7.10 põhjal leiduvad lõplikud korrutised ja kokorrutised. Definitsiooni tingimuse 3 ja lause 7.7 põhjal leiduvad võrdsustajad ja kovõrdsustajad. Teoreemi 5.74 ja tema duaalse teoreemi põhjal on see kategooria täielik ja kotäielik. ■

Lause 7.15. *Kui m on Abeli kategooria $\mathcal{A}$ monomorfism, siis*

$$m = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} m).$$

TÕESTUS. Olgu $m : A \rightarrowtail B$ monomorfism. Siis m on mingi morfismi $f : B \to C$ tuum. Olgu $q : B \to D$ morfismi m kotuum, $q = \operatorname{Coker} m$. Vaja oleks näidata, et

$$m = \operatorname{Ker} q.$$

Kuna $q = \operatorname{Coker} m$, siis $q \circ m = 0$ ja kuna ka $f \circ m = 0$, siis kovõrdsustaja definitsiooni tõttu leidub üheselt määratud morfism $p : D \to C$ nii, et $f = p \circ q$. Universaalomaduse kontrollimiseks oletame, et $q \circ k = 0$, kus $k : K \to B$. Siis $f \circ k = p \circ q \circ k = p \circ 0 = 0$ ja kuna $m = \operatorname{Ker} f$, siis leidub selline üheselt määratud morfism $l : K \to A$, et $k = m \circ l$. Sellega olemegi näidanud, et $m = \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} m)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, tail, "m"] & & B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & C \\
& K \arrow[ul, dashed, "l"] \arrow[ur, "k"'] & & D \arrow[ur, dashed, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

■

Duaalselt saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 7.16. *Kui e on Abeli kategooria $\mathcal{A}$ epimorfism, siis*

$$e = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} e).$$

$\boxed{D}$

Järgnevalt tõestame, et kõik Abeli kategooriad on tasakaalustatud.

Lause 7.17. *Abeli kategoorias on kõik bimorfismid isomorfismid.*

TÕESTUS. Olgu $f : A \to B$ bimorfism Abeli kategoorias $\mathcal{A}$, mille nullobjekt on $\tilde{\mathbf{0}}$. Siis morfismide hulk $\operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(B, \tilde{\mathbf{0}})$ koosneb täpselt ühest morfismist, milleks peab olema nullmorfism $0 : B \to \tilde{\mathbf{0}}$ (vastava Abeli rühma nullelement). Lihtne on veenduda, et $0 : B \to \tilde{\mathbf{0}}$ on morfismi f kotuum. Kuna f on monomorfism, siis lause 7.15 põhjal on f morfismi $0 : B \to \tilde{\mathbf{0}}$ tuum. Kuna $0 \circ \mathrm{id}_B = 0 : B \to \tilde{\mathbf{0}}$, siis tuuma definitsiooni põhjal leidub üheselt määratud morfism $g : B \to A$ nii, et $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, tail, two heads, "f"] & & B \arrow[r, "0"] & \tilde{\mathbf{0}} \\
& B \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Duaalselt on $0 : \tilde{\mathbf{0}} \to A$ morfismi f tuum. Kuna f on epimorfism, siis lause 7.16 põhjal on f morfismi $0 : \tilde{\mathbf{0}} \to A$ kotuum. Kuna $\mathrm{id}_A \circ 0 = 0 : \tilde{\mathbf{0}} \to A$, siis leidub üheselt määratud morfism $h : B \to A$ nii, et $h \circ f = \mathrm{id}_A$.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r, "0"] & A \arrow[rr, tail, two heads, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

Siis aga

$$h = h \circ \mathrm{id}_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{id}_A \circ g = g$$

ja f on isomorfism. ■

Järgmine tulemus üldistab muuhulgas Abeli rühmade homomorfismiteoreemi.

Teoreem 7.18. *Abeli kategooria iga morfism f tegurdub kujul*

$$f = m \circ e,$$

kus m on monomorfism ja e epimorfism. Veelgi enam,

$$m = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f) \quad \textit{ja} \quad e = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f).$$

Kui ka $f = m' \circ e'$, kus m' on monomorfism ja e' on epimorfism, siis leidub üheselt määratud morfism k nii, et $k \circ e = e'$ ja $m' \circ k = m$.

Tõestus. Olgu $f : A \to B$ Abeli kategoorias $\mathcal{A}$. Siis tal leidub kotuum $\operatorname{Coker} f : B \to C$. Võtame $m := \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f) : E \to B$. Siis m kui võrdsustaja on monomorfism. Kuna $(\operatorname{Coker} f) \circ f = 0$ ja m on $\operatorname{Coker} f$ tuum, siis leidub selline üheselt määratud morfism $e : A \to E$, et $f = m \circ e$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "e'"'] \arrow[dr, dashed, "e"] & B \arrow[r, "\operatorname{Coker} f"] & C \\
D \arrow[r, "d"] & E \arrow[u, "m"'] \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & F
\end{tikzcd}$$

Näitame, et e on epimorfism. Selleks oletame, et $r \circ e = s \circ e$, kus $r, s : E \to F$. Lause 7.14 tõttu leiduvad kategoorias $\mathcal{A}$ võrdsustajad. Olgu $(D, d) \approx \mathsf{Eq}(r, s)$, muuhulgas $r \circ d = s \circ d$. Siis leidub üheselt määratud $e' : A \to D$ nii, et $d \circ e' = e$. Järelikult

$$f = m \circ e = m \circ d \circ e' = m' \circ e',$$

kus $m' := m \circ d : D \to B$ kui kahe monomorfismi korrutis on monomorfism ning seega mingi morfismi $p : B \to K$ tuum, $m' = \operatorname{Ker} p$. Siis

$$p \circ f = p \circ (m' \circ e') = (p \circ m') \circ e' = 0 \circ e' = 0$$

ja seega leidub selline üheselt määratud morfism $q : C \to K$, et $q \circ (\operatorname{Coker} f) = p$. Kuna $m = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f)$, siis $(\operatorname{Coker} f) \circ m = 0$. Järelikult

$$p \circ m = q \circ (\operatorname{Coker} f) \circ m = q \circ 0 = 0$$

ja seega võrduse $m' = \operatorname{Ker} p$ tõttu leidub üheselt määratud morfism $t : E \to D$ nii, et $m = m' \circ t$. Siis aga $m = m' \circ t = m \circ d \circ t$, kust $d \circ t = \mathrm{id}_E$, sest m on monomorfism. Korrutades võrdust $r \circ d = s \circ d$ paremalt morfismiga t saame võrduse $r = s$. Sellega oleme näidanud, et e on epimorfism.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e'"'] & B \arrow[r, "\operatorname{Coker} f"] \arrow[dr, "p"] & C \arrow[d, dashed, "q"] \\
D \arrow[ur, "m'"] & E \arrow[u, "m"'] \arrow[l, dashed, "t"'] & K
\end{tikzcd}$$

Olgu $u = \operatorname{Ker} f : U \to A$. Näitame, et $u = \operatorname{Ker} e$. Paneme tähele, et $m \circ e \circ u = f \circ u = 0 = m \circ 0$. Et m on monomorfism, siis $e \circ u = 0$. Kui ka $e \circ u' = 0$, kus $u' : U' \to A$, siis $0 = m \circ 0 = m \circ e \circ u' = f \circ u'$. Kuna $u = \operatorname{Ker} f$, siis leidub üheselt määratud morfism $v : U' \to U$ nii, et $u \circ v = u'$. Seega $u = \operatorname{Ker} e$. Kuna e on epimorfism, siis lause 7.16 põhjal

$$e = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} e) = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f).$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "e"] & B \\
U' \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & & E \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Olgu ka $f = m' \circ e'$, kus m' on monomorfism ja e' on epimorfism, ning olgu $u = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} e$. Siis $e = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Coker} u$. Kuna

$$m' \circ 0 = 0 = f \circ u = (m' \circ e') \circ u = m' \circ (e' \circ u),$$

siis $e' \circ u = 0$ ja seega leidub üheselt määratud morfism $k : E \to E'$ nii, et

$$k \circ e = e'.$$

Siis ka $m' \circ k \circ e = m' \circ e' = f = m \circ e$, kust

$$m' \circ k = m,$$

sest e on epimorfism.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"] \arrow[ddr, two heads, "e'"'] & & B \\
& & E \arrow[ur, tail, "m"] \arrow[d, dashed, "k"] & \\
& & E' \arrow[uur, tail, "m'"'] &
\end{tikzcd}$$

■

Märkus 7.19. Teoreemi tõestuse käigus näitasime, et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} e$. Duaalselt saab näidata, et

$$\operatorname{Coker} f = \operatorname{Coker} m. \tag{7.1}$$

7.2.1. Täpsed jadad

Järgnevas definitsioonis kasutame alam- ja faktorobjektide mõisteid, millega tutvusima alampeatükis 2.3.

Definitsioon 7.20. Kui Abeli kategooria $\mathcal{A}$ morfism $f : A \to B$ tegurdub kujul $f = m \circ e$, kus m on monomorfism ja e on epimorfism, siis objekti B alamobjekti ekvivalentsiklass $[(\operatorname{dom}(m), m)] \in \operatorname{Sub}_{\mathcal{A}}(B)$ nimetatakse f **kujutiseks**[134] (täh. $m = \operatorname{Im} f$) ja objekti A faktorobjekti ekvivalentsiklassi $[(\operatorname{cod}(e), e)] \in \operatorname{Quot}_{\mathcal{A}}(A)$ nimetatakse f **kokujutiseks** (täh. $e = \operatorname{Coim} f$).

Definitsiooni põhjal on kohe selge, et kehtib järgmine lause.

Lause 7.21. *Abeli kategoorias kui m on monomorfism, siis $m = \operatorname{Im} m$ ja kui e on epimorfism, siis $e = \operatorname{Coim} e$.*

Definitsioon 7.22. Morfismide paari

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

nimetatakse **täpseks** kohal B, kui $\operatorname{Im} f \equiv \operatorname{Ker} g$ (ekvivalentsed kui B alamobjektid). Jada

$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \cdots \tag{7.2}$$

nimetatakse **täpseks**[135] (vahel ka **eksaktseks**), kui ta on täpne igal kohal.

Jada (7.2) täpsusest järeldub, et kui me teostame järjest kaks homomorfismi, mis kuuluvad jadasse, siis saame nullkujutuse (st $g \circ f = 0$). Tõepoolest, olgu monomorfism $m\colon X \rightarrowtail B$ selline, et $m \equiv \operatorname{Im} f \equiv \operatorname{Ker} g$. Sel juhul leidub morfism $h\colon B \longrightarrow X$ nii, et $f = m \circ h$, ning

$$g \circ f = g \circ (m \circ h) = (g \circ m) \circ h = 0 \circ h = 0.$$

Täpsete jadade abil saab muuhulgas kirjeldada teatud tüüpi morfisme.

[134] *image*
[135] *exact sequence*

Lause 7.23. *Abeli kategoorias on jada*

$$\tilde{\mathbf{0}} \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \tag{7.3}$$

täpne parajasti siis, kui f on monomorfism.

Tõestus. Paneme tähele, et $0 : \tilde{\mathbf{0}} \to A$ on monomorfism, sest kui $0 \circ g = 0 \circ h$, kus $g, h : C \to \tilde{\mathbf{0}}$, siis $g = h$ tänu sellele, et $\tilde{\mathbf{0}}$ on lõppobjekt. Seega tänu lausele 7.21 piisab meil näidata, et $0 \equiv \operatorname{Ker} f$ parajasti siis, kui f on monomorfism.

Tarvilikkus. Olgu $0 \equiv \operatorname{Ker} f$. Oletame, et $f \circ g = f \circ h$, kus $g, h : C \to A$. Siis $f \circ (g - h) = 0$. Tuuma definitsiooni tõttu leidub üheselt määratud morfism $k : C \to \tilde{\mathbf{0}}$ nii, et $g - h = 0 \circ k = 0$. Järelikult $g = h$ ja f on monomorfism.

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbf{0}} \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & C \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "g-h"'] & \end{tikzcd}$$

Piisavus. Olgu f monomorfism. On selge, et $f \circ 0 = 0$. Oletame, et $g : C \to A$ on selline, et $f \circ g = 0 = f \circ 0$. Siis $g = 0$. Üheselt määratud morfism $C \to \tilde{\mathbf{0}}$, mis muudab kolmnurga diagrammis

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbf{0}} \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \\ & C \arrow[ul, dashed, "0"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

kommutatiivseks, on nullmorfism. Sellega oleme näidanud, et $0 : \tilde{\mathbf{0}} \to A$ on morfismi f tuum. ∎

Duaalselt saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 7.24. *Abeli kategoorias on jada*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} \tilde{\mathbf{0}}$$

täpne parajasti siis, kui f on epimorfism. $\boxed{D}$

Lause 7.25. *Abeli kategoorias on jada*

$$\tilde{\mathbf{0}} \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} \tilde{\mathbf{0}}$$

täpne parajasti siis, kui f on isomorfism.

Tõestus. See järeldub lausest 7.17, lausest 7.23 ja lausest 7.24. ∎

Tuleb välja, et teatud funktorid säilitavad täpseid jadasid. Funktorit, mis säilitab täpseid jadasid nimetatakse **eksaktseks**[136].

Lause 7.26. *Kui funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Abeli kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ vahel säilitab tuumad ja kotuumad, siis ta säilitab täpsed jadad.*

Tõestus. Ilmselt seosest $a \equiv a'$ järeldub seos $F(a) \equiv F(a')$. Vaatleme täpset jada (7.2). Olgu $f = m \circ e$, kus m on monomorfism ja e on epimorfism. Siis (7.1) ja lause 7.15 tõttu

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} m) = m = \operatorname{Im} f.$$

Analoogiline mõttekäik annab meile, et

$$\operatorname{Im} F(f) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} F(f)).$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(f) &= \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} F(f)) = \operatorname{Ker}(F(\operatorname{Coker}(f))) = F(\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker}(f))) = F(\operatorname{Im} f) \equiv F(\operatorname{Ker} g) \\ &= \operatorname{Ker}(F(g)), \end{aligned}$$

mis tähendab, et jada

$$\cdots \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \cdots$$

on täpne. ∎

[136] *exact functor*

Definitsioon 7.27. Täpset jada kujul

$$\tilde{\mathbf{0}} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \tilde{\mathbf{0}} \tag{7.4}$$

nimetatakse **lühikeseks täpseks jadaks**[137].

Tulenevalt lausetest 7.23 ja 7.24 saame, et lühikeses täpses jadas (7.4) on morfism f monomorfism ja g epimorfism. Lisaks võib lühikese täpse jada (7.4) korral väita, et $f \equiv \operatorname{Ker} g$. Tänu lausetele 7.15 ja 7.16 on Abeli kategoorias lühikese täpse jada (7.4) defineerida ka tingimusega $g \equiv \operatorname{Coker} f$.

Lause 7.28. *Olgu $\mathcal{A}$ Abeli kategooria. Kui järgmise diagrammi read on (lühikesed) täpsed jadad ja $h\colon B \longrightarrow B'$ on morfism,*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \tilde{\mathbf{0}} \\
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & \tilde{\mathbf{0}}
\end{tikzcd}$$

siis leidub morfism objektist A objekti A', mis teeb selle diagrammi vasakpoolse ruudu kommutatiivseks, parajasti siis, kui leidub morfism objektis C objekti C', mis teeb selle diagrammi parempoolse ruudu kommutatiivseks.

Tõestus. Olgu $u\colon A \longrightarrow A'$ morfism, mis teeb meie diagrammi vasakpoolse ruudu kommutatiivseks. Siis

$$(g' \circ h) \circ f = g' \circ (h \circ f) = g' \circ (f' \circ u) = (g' \circ f') \circ u = 0 \circ u = 0$$

Kuna $f \equiv \operatorname{Ker} g$ ja g on epimorfism, siis lause 7.16 põhjal $g = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Coker} f$. Nüüd kovõrdsustaja universaalomaduse järgi peab leiduma morfism $v\colon C \longrightarrow C'$ nii, et $g' \circ h = v \circ g$.

Vastupidine väide tõestatakse duaalselt. ■

Lemma 7.29 (Lühike viie lemma).[138] *Olgu $\mathcal{A}$ Abeli kategooria. Vaatleme kategoorias $\mathcal{A}$ järgnevat diagrammi, kus read on lühikesed täpsed jadad ja ruudud on kommutatiivsed.*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & \tilde{\mathbf{0}} \\
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & \tilde{\mathbf{0}}
\end{tikzcd} \tag{7.5}$$

Kui γ ja ε on monomorfismid, siis ka δ on monomorfism.

Tõestus. Vastavalt lausele 7.23 piisab, kui näidata, et jada

$$\tilde{\mathbf{0}} \longrightarrow B \xrightarrow{\delta} B'$$

on täpne, s.t. $0 \equiv \operatorname{Ker} \delta$, kus $\operatorname{Ker} \delta\colon D \longrightarrow B$. Paneme tähele, et

$$\varepsilon \circ g \circ (\operatorname{Ker} \delta) = g' \circ \delta \circ (\operatorname{Ker} \delta) = g' \circ 0 = 0 = \varepsilon \circ 0.$$

Kuna ε on monomorfism, siis $g \circ (\operatorname{Ker} \delta) = 0$. Kuna diagrammi 7.5 ülemine rida on täpne, siis $\operatorname{Ker} g \equiv f$. Seega leidub üheselt määratud $k\colon D \longrightarrow A$ nii, et $\operatorname{Ker} \delta = f \circ k$.

$$\begin{tikzcd}
& & D \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "\operatorname{Ker}\delta"] & \tilde{\mathbf{0}} \arrow[dl] & \\
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & \tilde{\mathbf{0}} \\
\tilde{\mathbf{0}} \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & \tilde{\mathbf{0}}
\end{tikzcd}$$

[137] *short exact sequence*
[138] *The short five lemma*

Nüüd

$$0 = \delta \circ (\operatorname{Ker} \delta) = \delta \circ f \circ k = f' \circ \gamma \circ k.$$

Kuna f' ja γ on monomorfismid, on ka $f' \circ \gamma$ monomorfism, ning seega $0 = k$. Nüüd $\operatorname{Ker} \delta = f \circ k = f \circ 0 = 0$, mis tõestabki, et δ on monomorfism. ■

Lemma 7.30 (Lühike viie lemma). *Olgu $\mathcal{A}$ Abeli kategooria. Vaatleme diagrammi 7.5, kus read on täpsed ja ruudud kommutatiivsed. Kui γ ja ε on epimorfismid (isomorfismid), siis ka δ on epimorfism (isomorfism).* $\boxed{D}$

7.3. Ülesanded

Definitsioon 7.31. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ Ab-kategooriad. Funktorit $F \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nimetatakse **aditiivseks**[139], kui iga kahe objekti $A, A' \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ korral on kujutus

$$F_1^{A,A'} \colon \quad \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A')), \qquad f \mapsto F(f)$$

Abeli rühmade homomorfism.

1. Olgu $\mathcal{A}$ Ab-kategooria ja $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$. Tõestage, et morfism f on monomorfism parajasti siis, kui iga morfismi $u \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(C, A)$ korral kehtib tingimus

$$f \circ u = 0 \implies u = 0.$$

2. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ Ab-kategooriad, kusjuures $\mathcal{A}$ on väike. Vaatleme kategooria $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ täielikku alamkategooriat $\mathsf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, mille objektideks on aditiivsed funktorid kujul $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Näidake, et kategooriat $\mathsf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ saab vaadelda Ab-kategooriana.

[139] *additive functor*

Eksamiküsimused

Eksamil saate valida juhuslikult 2 piletit. Igal piletil on üks küsimus alljärgnevast nimekirjast. Seejärel on õigus ettevalmistada kasutades misiganes materjali soovitakse. Lõpuks tuleb küsimustele vastata tahvli ees.

1. Tõestada Yoneda lemma tingimused 1 ja 2 (teoreem 4.12).
2. Tõestada Yoneda lemma tingimused 1 ja 3 (teoreem 4.12).
3. Tõestada, et kategoorias on lõplikud korrutised parajasti siis, kui temas on binaarsed korrutised ja lõppobjekt (lause 5.10 ja järeldus 5.11).
4. Tõestada, et kui kategoorias on korrutised ja tagasitõmbajad, siis on temas ka võrdsustajad (teoreem 5.73, implikatsioon 3. $\Longrightarrow$ 4.).
5. Tõestada, et kategoorias on korrutised ja võrdsustajad parajasti siis, kui on täielik kategooria (teoreem 5.73, implikatsioon 4. $\Longrightarrow$ 1.).
6. Olgu $\mathcal{A}$ täielik kategoorias. Tõestada, et funktor $G\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ säilitab piire parajasti siis, kui G säilitab korrutisi ja võrdsustajaid (teoreem 5.82, samaväärsus 1. $\Longleftrightarrow$ 4.).
7. Tõestada, et kovariantne mor-funktor säilitab kõiki piire (lause 5.84).
8. Tõestada, et korrutistega kategoorias on võrdsutajate korrutis korrutiste võrdsustaja (lause 5.92).
9. Tõestada, et funktorite kategoorias saab piire arvutada punktiviisiliselt (lause 5.107).
10. Tõestada, et adjunktsioonil leiduvad ühik, koühik ja kehtivad kolmnurksamasused (teoreem 6.3).
11. Tõestada, et kaasfunktor on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud (lause 6.4).
12. Tõestada, et adjunktsioon $\langle F, G, \varphi\rangle\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ on ära määratud funktorite F, G ja sellise loomuliku teisenduse $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ poolt, et iga $\eta_A\colon A \longrightarrow (G \circ F)(A)$ on universaalne morfism objektist A funktorisse G (teoreemi 6.5 tingimus 1).
13. Tõestada, et adjunktsioon $\langle F, G, \varphi\rangle\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ on täpselt ära määratud selliste loomulike teisenduste $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ ja $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ poolt, et $(\mathrm{id}_G * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_G$ ja $(\varepsilon * \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_F * \varepsilon) = \mathrm{id}_F$ (teoreemi 6.5 tingimus 5).
14. Tõestada, et kui funktoril $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ leidub vasakpoolne kaasfunktor, siis G säilitab kõiki piire, mis kategoorias $\mathcal{B}$ olemas on (lause 6.6).
15. Tõestada, et kui $\mathcal{B}$ on täielik kategooria ja funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ säilitab korrutisi, siis iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on objekti A G-aluste objektide kategoorias $(A \downarrow G)$ olemas korrutised (lemma 6.9 (1. osa)).
16. Tõestada, et kui $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on adjunktsioon, siis funktor G on täielik ja täpne parajasti siis, kui selle adjunktsiooni $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ koühik on loomulik isomorfism (lause 6.13 osa 1.).
17. Tõestada, et kui funktor G on täielik, täpne ja tihe, siis tal leidub täielik ja täpne vasakpoolne kaasfunktor F (teoreem 6.17, implikatsioon 4. $\Longrightarrow$ 3.).
18. Tõestada, et täieliku kategooria $\mathcal{A}$ iga reflektiivne alamkategooria on samuti täielik (lause 6.34).
19. Olgu $\mathcal{A}$ Ab-kategooria ja $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Tõestage, et objektide A ja B bikorrutis leidub parajasti siis, kui leidub objektide A ja B korrutis (teoreem 7.10 implikatsioonid 1. $\Longleftrightarrow$ 2.).
20. Olgu $\mathcal{A}$ Abeli kategooria. Iga morfism $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ tegurdub kujul $f = m \circ e$, kus m on monomorfism ja e on epimorfism, ning kehtivad valemid $m = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f)$ ja $e = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f)$ (teoreem 7.18 (universaalomadust pole vaja tõestada)).

Indeks

Viited

[1] M. Kilp, *Kategooriad* (Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2000).

[2] M. Kilp, *Algebra II* (Tartu, 1998).

[3] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (Springer, New York, 1998).

[4] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[5] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[6] H. Herrlich, G. Strecker, *Category Theory* (Allyn and Bacon, Boston, 1973).

[7] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories (The Joy of Cats)* (2004), http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf .

[8] M. Barr, Ch. Wells, *Category Theory Lecture Notes* (1999), http://www.math.upatras.gr/ cdrossos/Docs/B-W-LectureNotes.pdf .

[9] H.P. Gumm, *Elements of the general theory of coalgebras* (1999?), www.mathematik.uni-marburg.de/∼gumm/Papers/Luatcs.ps .