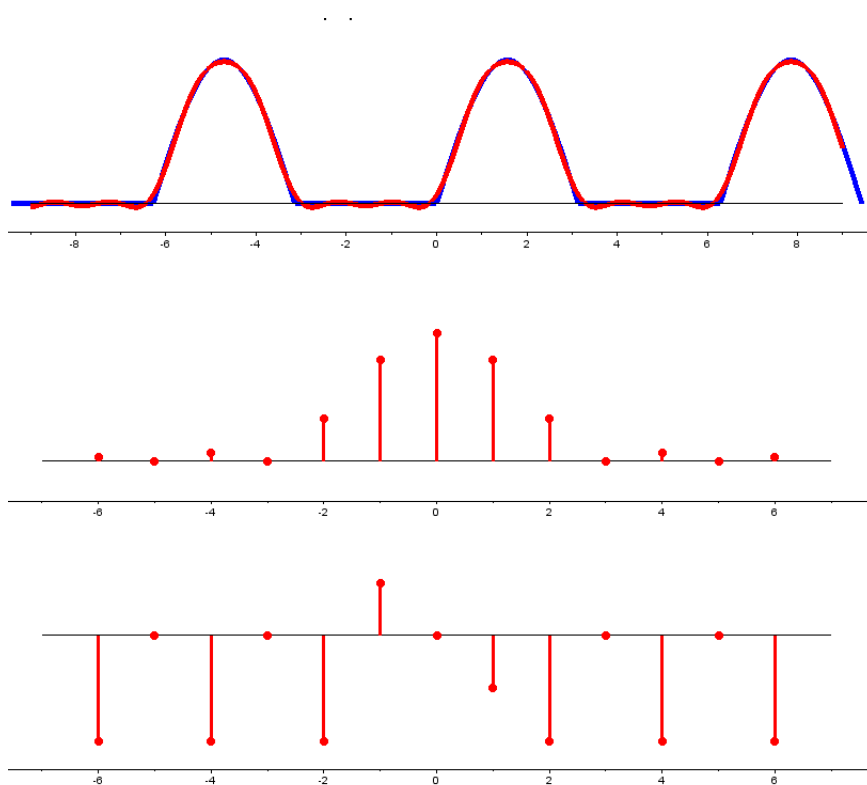


MTMM.00.341
Kõrgem matemaatika 2



2021

Ülesannete kogu

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{aligned} (Const)' &= 0 & (\sin x)' &= \cos x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' &= -\sin x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (e^x)' &= e^x & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\ (\ln |x|)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{aligned} (1) \quad \int 0 \, dx &= C & (9) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C \\ (2) \quad \int dx &= x + C & (10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\ (3) \quad \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & (11) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\ (4) \quad \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C & (12) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C \\ (5) \quad \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & (13) \quad \int \operatorname{sh} x \, dx &= \operatorname{ch} x + C \\ (6) \quad \int e^x dx &= e^x + C & (14) \quad \int \operatorname{ch} x \, dx &= \operatorname{sh} x + C \\ (7) \quad \int \sin x \, dx &= -\cos x + C & (15) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{th} x + C \\ (8) \quad \int \cos x \, dx &= \sin x + C & (16) \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} &= -\operatorname{cth} x + C \end{aligned}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1	Vektorruum ja alamruum	1
1.1	Vektorruum	1
1.2	Alamruum	2
2	Vektorite lineaarne sõltumatus, lineaarne kate	4
2.1	Lineaarne sõltumatus	4
2.2	Lineaarne kate	5
3	Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid	6
3.1	Baas ja vektori koordinaadid	6
3.2	Vektori koordinaadid uuel baasil *	7
4	Arvread	8
4.1	Arvread	8
4.2	Geomeetiline rida	9
5	Harmoonilised read, positiivsed arvread	10
5.1	Harmooniline rida ja integraaltunnus	10
5.2	Positiivsete arvride võrdluslaused	11
6	Arvride koondumine	12
6.1	Absoluutne koondumus	12
6.2	Tingimisi koondumine	13
7	Astmeread. Taylori read	14
7.1	Astmeread, koonduvusraadius	14
7.2	Astmeritta arendamine	15
7.3	Taylor'i read	16
8	Fourier' read. Mitme muutuja funktsiooni määramispiirkond	17
8.1	Fourier' read	17
8.2	Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond	19
9	Piirväärtus ja pidevus	20
9.1	Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus	20
10	Esimest ja kõrgemat järku osatuletised.	23
10.1	Esimest järku osatuletised	23
10.2	Liitfunktsiooni osatuletised	25
10.3	Kõrgemat järku osatuletised	25
11	Kontrolltöö nr 1	27
11.1	Kontrolltöö ülesannete teemad	27

12 Täisdiferentsiaal. Ligikaudsed arvutused täisdiferentsiaali abil	28
12.1 Täisdiferentsiaal	28
12.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine	29
12.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	30
13 Ekstreemumid. Optimiseerimine	31
13.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	31
13.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas	32
13.3 Optimiseerimine	32
13.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis	33
13.5 Taylori valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *	34
14 Lagrange'i kordajate meetod. Puutujatasand ja normaal	35
14.1 Lagrange'i kordajate meetod	35
14.2 Pinna puutujatasand ja normaal	36
14.3 Tuletis antud suunas, gradient	36
14.4 Vähimruutude meetod *	38
15 Kahekordse integraali arvutamine	39
15.1 Kahekordse integraali arvutamine	39
16 Muutujate vahetus kahekordses integraalis. Üleminek polaarkoordinaatidele	41
16.1 Muutujate vahetus kahekordses integraalis	41
16.2 Üleminek polaarkoordinaatidele	41
17 Kahekordse integraali rakendused	43
17.1 Kahekordse integraali geomeetrilised rakendused	43
17.1.1 Tasandilise kujundi pindala	43
17.1.2 Keha ruumala. Ruumilise pinnatüki pindala	43
17.2 Kahekordse integraali füüsikalised rakendused	46
17.2.1 Tasandilise kujundi mass	46
17.2.2 Tasandilise kujundi massikese	47
18 Kolmekordsed integraalid	48
18.1 Kolmekordse integraali arvutamine	48
18.2 Üleminek silinderkoordinaatidele	49
19 Sfäärilised koordinaadid. Kolmekordse integraali rakendused	50
19.1 Üleminek sfäärkoordinaatidele	50
19.2 Kolmekordse integraali rakendusi	50
19.2.1 Keha ruumala leidmine	50
19.2.2 Keha mass ja massikese.	51
20 Joonintegraalid	53
20.1 Esimest liiki joonintegraalid	53
20.1.1 Esimest liiki joonintegraali rakendusi	54
20.2 Teist liiki joonintegraalid*	54
20.2.1 Teist liiki joonintegraali rakendusi	56
21 Kontrolltöö 2	57
21.1 Kontrolltöö ülesannete teemad	57

22 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid. Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	58
22.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend	58
22.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine	59
22.3 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	60
23 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid. Murdlineaarset funktsiooni sisaldavad diferentsiaalvõrrandid	62
23.1 Homogeensed funktsioonid	62
23.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid	62
23.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid	63
24 Bernoulli diferentsiaalvõrrand. Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid. Numbrilised meetodid	64
24.1 Bernoulli diferentsiaalvõrrand	64
24.2 Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid	64
24.3 Diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine	65
25 Teist järku diferentsiaalvõrrandid	67
25.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel	67
25.2 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamine	68
26 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	69
27 Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	71
28 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	73
28.1 Lineaarsed kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid	73
28.2 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine	74
28.3 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	75
29 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	76
29.1 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	76
29.2 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	77
30 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	78
31 Kontrolltöö nr. 3	79
31.1 Kontrolltöö ülesannete teemad	79
32 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid. Eksami näidisülesanded	80
32.1 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	80
32.2 Eksam aines Kõrgem matemaatika II	81
32.2.1 Eksami teooria osa	81
32.2.2 Eksami ülesannete teemad	81
32.3 Eksami näidisülesanded	81
33 Vastused	82

Praktikum 1

Vektorruum ja alamruum

1.1 Vektorruum

Definitsioon 1.1

Mittetühja hulka V nimetatakse **vektorruumiks** üle reaalarvude \mathbb{R} , kui sellel hulgal on defineeritud liitmine ja skalaariga korrutamine nii, et iga $a, b \in V$ korral kehtib $a + b \in V$ ning iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $a \in V$ korral kehtib $ka \in V$. Kehtivad aksioomid:

VR1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ iga $a, b, c \in V$ korral;

VR2. leidub nullelement $\theta \in V$ nii, et iga $a \in V$ korral $a + \theta = a = \theta + a$;

VR3. iga elemendi $a \in V$ korral leidub vastandelement $-a \in V$ nii, et $a + (-a) = \theta = (-a) + a$;

VR4. $a + b = b + a$ iga $a, b \in V$ korral;

VR5. $k(a + b) = ka + kb$ iga $a, b \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral;

VR6. $(k + l)a = ka + la$ iga $a \in V$ ja $k, l \in \mathbb{R}$ korral;

VR7. $(kl)a = k(la)$ iga $a \in V$ ja $k, l \in \mathbb{R}$ korral;

VR8. $1a = a$ iga $a \in V$ korral.

Ülesanne 1.1. Olgu a vektorruumi element ja $k \in \mathbb{R}$ skalaar. Tõestage, et $ka = 0$ parajasti siis, kui $k = 0$ või $a = 0$.

Ülesanne 1.2. Olgu a, b vektorruumi elemendid ja $k, l \in \mathbb{R}$ skalaarid. Tõestage, et $ka + lb = la + kb$ parajasti siis, kui $k = l$ või $a = b$.

Ülesanne 1.3. Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid arvude liitmise ja korrutamise suhtes?

(a) \mathbb{N}

(c) \mathbb{Q}

(e) \mathbb{C}

(b) \mathbb{Z}

(d) \mathbb{R}

(f) \mathbb{R}^+

Ülesanne 1.4. Defineerime hulgal $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \\ k(a_1, \dots, a_n) &= (ka_1, \dots, ka_n), \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tõestage, et selliste (n.ö. komponenthaaval defineeritud) tehete suhtes on hulk \mathbb{R}^n vektorruum.

Ülesanne 1.5. Defineerime hulgal $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ k(a_1, a_2) &= (ka_1, a_2),\end{aligned}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$. Kas V on vektorruum?

Ülesanne 1.6. Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid maatriksite liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes.

- | | |
|--|---|
| (a) kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk | (f) $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ |
| (b) kõigi n -ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk | (g) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (c) kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk | (h) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (d) $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ | (i) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (e) $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$ | |

Ülesanne 1.7. Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktiivisiliselt. Tehke kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid.

- (a) hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
- (b) kõigi ülimalt n . astme polünoomfunktsioonide hulk $\mathbb{R}_n[x]$
- (c) kõigi n -astme polünoomfunktsioonide hulk
- (d) lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}$
- (e) lõigul $[a, b]$ k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}^{(k)}$, kus $k = 0, 1, \dots$
- (f) lõigul $[a, b]$ integreeruvate funktsioonide hulk

1.2 Alamruum

Definitsioon 1.2

Vektorruumi V mittetühja alamhulka U nimetatakse vektorruumi V **alamruumiks**, kui

AR1. iga $a, b \in U$ korral $a + b \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V liitmise suhtes);

AR2. iga $a \in U$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral $ka \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V skalaariga korrutamise suhtes);

Definitsioon 1.3

Vektorruumi V elementide a_1, a_2, \dots, a_m **lineaarseks katteks** nimetatakse hulka

$$L(a_1, a_2, \dots, a_m) = \{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m \mid k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}\}.$$

Ülesanne 1.8. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi \mathbb{R}^4 alamruumid.

- (a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

- (c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
 (d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}$

Ülesanne 1.9. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V alamruumid.

- (a) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk
 (b) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga paralleelsete vabavektorite hulk
 (c) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega ortogonaalsete vabavektorite hulk
 (d) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk
 (e) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
 (f) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
 (g) $V = \mathbb{R}^5, \{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
 (h) $V = \mathbb{R}^5, \{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 2\}$
 (i) $V = \mathbb{R}^5, \{(a, b, c, d, e) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a + e = b + d\}$

Praktikum 2

Vektorite lineaarne sõltumatus, lineaarne kate

2.1 Lineaarne sõltumatus

Definitsioon 2.1

Vektorruumi V vektorite süsteemi a_1, a_2, \dots, a_n nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui mis tahes $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ korral võrdusest

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$$

järeldub, et

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Vektorite süsteemi nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks**, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.

Teoreem 2.1

Vektorsüsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi vähemalt üks vektor avaldub lineaarse kombinatsioonina ülejäänutest.

Ülesanne 2.1. Olgu a, b, c vektorruumi V vektorid. Kui vektorruumi elemendid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, kas siis ka vektorruumi elemendid $a + b, b + c$ ja $c + a$ on lineaarselt sõltumatud?

Ülesanne 2.2. Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi \mathbb{R}^3 vektorid $a_1 = (k, 1, 0)$, $a_2 = (1, k, 1)$ ja $a_3 = (0, 1, k)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

Ülesanne 2.3. Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi \mathbb{R}^3 vektorid $a_1 = (1, k, k^2)$, $a_2 = (1, l, l^2)$ ja $a_3 = (1, m, m^2)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

Ülesanne 2.4. Näidake, et vektorruumi V vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (5, 3, 1)$, $a_3 = (-15, -2, 21)$
- (b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $f_1(x) = x^2 + 5$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$, $f_3(x) = x^2 + 16x + 13$
- (c) $V = \mathbb{C}$, $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$
- (d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = 1$

Ülesanne 2.5. Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V on lineaarselt sõltumatud:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 4, 2)$
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (x, y, 3)$, $a_2 = (2, x - y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 6$, $y \neq \frac{9}{2}$

$$(c) \quad V = \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \quad E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 2.6. Uurige, kas järgmised vektorite süsteemid funktsioonide vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on lineaarselt sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| (a) $x + 2, x - 2$ | (e) $x^2 + 2x, 3x^2 - 1, x + 4$ |
| (b) $6x + 9, 8x + 12$ | (f) $\sin x, \cos x$ |
| (c) $1, (x - 1)^2, x - 1$ | (g) $\sin x, \cos x, \sin 2x$ |
| (d) $4 - x, 2x + 3, 6x + 8$ | (h) $x^2, x x $ |

2.2 Lineaarne kate

Definitsioon 2.2

Vektorruumi V elementide a_1, a_2, \dots, a_s **lineaarne kate** nimetatakse hulka

$$L(a_1, a_2, \dots, a_s) = \{k_1 a_1 + \dots + k_s a_s \mid k_1, \dots, k_s \in \mathbb{R}\}.$$

Ülesanne 2.7.

Leidke vektorruumi \mathbb{R}^4 vektorite a_1, \dots, a_s lineaarne kate, kui

- (a) $a_1 = (1, 0, 0, -1), a_2 = (2, 1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 1), a_4 = (1, 2, 3, 4), a_5 = (0, 1, 2, 3)$
- (b) $a_1 = (1, 2, 1, 2), a_2 = (2, 1, 2, 1), a_3 = (0, 3, 0, 3), a_4 = (1, 1, 1, 1)$
- (c) $a_1 = (1, 1, 1, 2), a_2 = (2, 0, 1, 1), a_3 = (4, 2, 3, 5), a_4 = (0, 2, 1, 3)$

Praktikum 3

Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid

3.1 Baas ja vektori koordinaadid

Definitsioon 3.1

Vektorruumi V vektorite süsteemi M nimetatakse **moodustajate süsteemiks**, kui vektorruumi V iga vektor avaldub süsteemi M kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.

Definitsioon 3.2

Vektorruumi **baasiks** nimetatakse selle vektorruumi lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.

Lause 3.1

n -mõõtmelises vektorruumis on iga n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnev süsteem baas.

Definitsioon 3.3

Olgu V vektorruum, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tema baas ja $a \in V$. Kui $a = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_n e_n$, siis skalaare $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ nimetatakse vektori a **koordinaatideks** baasi e suhtes.

Ülesanne 3.1. Leidke vektorruumi \mathbb{C} vektori $-5 + 4i$ koordinaadid baasi $e = \{-1 + 2i, 2 + i\}$ suhtes.

Ülesanne 3.2. Tooge näide vektorruumi \mathbb{R}^4

- (a) baasist
- (b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas
- (c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas
- (d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem

Ülesanne 3.3. Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ vektorite $A =$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

suhtes.

Ülesanne 3.4. Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi \mathbb{R}^3 baasid ning leidke vektori $a = (3, 7, 13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:

- (a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

(b) $a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1)$

(c) $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$

Ülesanne 3.5. On antud vektorruumi \mathbb{R}^3 vektorid $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ ja $e_3 = (1, -1, 1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $a = (6, 2, -7)$ koordinaadid sellel baasil.

3.2 Vektori koordinaadid uuel baasil *

Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ja $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ vektorruumi V kaks baasi ning olgu vektor $a \in V$.

$$a = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad a = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.$$

Seosed koordinaatide vahel uuel ja vanal baasil on

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kus A on baasiteisenduse maatriks ja on teada seosed

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ &\dots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

Ülesanne 3.6. Leidke üleminekumaatriks vektorruumi V baasilt $\{e_1, \dots, e_n\}$ baasile $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ja leidke vektori a koordinaadid nende baaside suhtes, kui

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$, $e'_1 = (3, 1, 4)$, $e'_2 = (5, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$, $a = (9, 4, -1)$

(b) $V = \mathbb{C}$, $e_1 = 1 - i$, $e_2 = 1 + i$, $e'_1 = 2$, $e'_2 = 2i$, $a = 2 + 2i$

(c) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
 $a = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Ülesanne 3.7. Olgu $\{e_1, e_2, e_3\}$ 3-mõõtmelise vektorruumi V baas. Tõestage, et ka vektorite süsteem $e'_1 = 5e_1 - e_2 - 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2$, $e'_3 = -2e_1 + e_2 + e_3$ on selle vektorruumi baas ning leidke vektori $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ koordinaadid selle baasi suhtes.

4.1 Arvread

Definitsioon 4.1

Arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ nimetatakse **koonduvaks**, kui tema osasummade jada $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ koondub, s.t. kui eksisteerib lõplik püüväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = S.$$

Arvu S nimetatakse rea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ summaks. Arvrida, mis ei koondu, nimetatakse **hajuvaks**.

Lause 4.1

Koondumise tarvilik tingimus (arvrea hajumise tunnus). Kui

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k| \neq 0, \tag{4.1}$$

siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ hajub.

Ülesanne 4.1. Leidke järgmiste ridade osasummade jadad (S_n) ja summad S .

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

Ülesanne 4.2. Leidke read, mille osasummad on järgmised.

(a) $S_n = \ln(n+2)$

(c) $S_n = \frac{1}{n+1}$

(e) $S_n = \frac{n^2}{n^2+2}$

(b) $S_n = \frac{n+3}{n+1}$

(d) $S_n = n+1$

(f) $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Ülesanne 4.3. Näidake hajuvuse tunnuse abil, et järgmised arvread hajuvad.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n)^{-1/n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Ülesanne 4.4. Leidke rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ osasummade jadad (S_n) ja summa.

4.2 Geomeetriline rida

Lause 4.2

Geomeetriline rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

koondub siis ja ainult siis, kui $|q| < 1$ ja hajub muul juhul.

Kui $|q| < 1$, siis rea summa on

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Tehted koonduvate ridadega

1. Arvreaas lõpliku arvu liikmete **lisamine või eemaldamine ei mõjuta rea koonduvust.**
2. Kui arvrida koondub, siis koondub ka rida $\sum cu_k$, kus c on reaalarv

$$\sum_{k=0}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

3. Kui kaks erinevat rida $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ koonduvad, siis koonduvad ka read, mis on moodustatud nende ridade summast ja vahest

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Ülesanne 4.5. Tehke kindlaks, kas järgmised geomeetrised read koonduvad või hajuvad. Koondumise korral leidke rea summa S .

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{7^n} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{n-3}}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 + 2^n}{4^{n+2}}$

Ülesanne 4.6. Pall kukub 2 meetri kõrguselt ja põrkab igal põrgatusel $\frac{2}{5}$ kõrgusele tagasi (võrreldes oma viimase kõrgusega).

Leidke palli poolt läbitud vertikaalne vahemaa.

Ülesanne 4.7. Esitage lõpmatul perioodiline kümnendmurd 7.(36) hariliku murruna (kahe täisarvu jagatisena).

Ülesanne 4.8. (IT) Kahendsüsteemi arv teisendatakse kümnendsüsteemi arvaks järgmise valemi abil:

$$b_0, b_1 b_2 b_3 \dots |_2 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots$$

Esitage kahendarv $1, 101010 \dots |_2$ ühe kümnendsüsteemi murruna (ratsionaalarvuna).

Praktikum 5

Harmonilised read, positiivsed arvread

5.1 Harmoniline rida ja integraaltunnus

Lause 5.1

Üldine harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots \quad (5.1)$$

koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

Definitsioon 5.1

Positiivseks arvreaks nimetatakse arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, kus $u_k \geq 0$ iga $k = 0, 1, 2, \dots$ korral.

Lause 5.2

Rea koonduvuse integraaltunnus. Kui f on pidev monotoonselt kahanev funktsioon piirkonnas $[a, \infty)$ ja $u_k = f(k)$, siis positiivne rida $\sum_{k=a}^{\infty} u_k$ ja päratu integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ koonduvad (hajuvad) samaaegselt.

Ülesanne 5.1. Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(-4)^{n+1}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-0.9}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{6^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$

Ülesanne 5.2. Uurige järgmiste ridade koonduvust integraaltunnuse abil.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n^2+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

Ülesanne 5.3. Näidake, et kehtib võrratuste ahel

$$\ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1.$$

Kasutades toodud ahelat, hinnake harmoonilise rea osasummade suurust $n = 1000$, $n = 1000000$ ja $n = 1000000000$ korral. Mitu rea liiget on vaja, et harmoonilise rea osasumma $S_n > 100$?

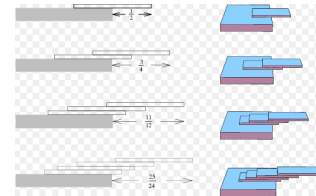
Ülesanne 5.4. Tudeng sai kontrolltöös 1 punkti 10-st (10%). Iga järeltöö maksimaalselt punktide arvu suurendatakse 10 võrra.

Tudengi eelmise töö saadud punktid kantakse üle protsentides tehtava töö maksimaalsest võimalikust. Kui tudeng saab igas töös 1 punkti juurde, siis mitu järeltööd läheb vaja, et tudeng saaks lõpuks kokku 50% järeltöö punktidest? Kas on võimalik kogusummana saada ka täispunktid?

Selgituseks: II töös on tudengil ees 2 punkti 20-st (10%), ta saab ühe juurde ja kokku $2+1=3$. III töös on tudengil ees $\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{9}{2}$ p. 30-st (15%), ta saab ühe juurde ja kokku $\frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$ jne.

Ülesanne 5.5. Paigutame n kaarti järgmiselt: ülalt teine kaart toetab ülemist poole pealt, ülalt kolmas kaart eelmist $\frac{3}{4}$ pealt,

neljas kaart eelmist $\frac{5}{6}$ pealt (üldiselt $(2n-1)/(2n)$ pealt) jne. Teoreetiliselt jääb selline kaardipakk tasakaalu. Kui kaugele lauast on võimalik n kaardist koosneva paki ülemist äärt viia? Proovige kodus järgi! Lihtsam on paigutada kergeid õhukesti plaate, kui näiteks raskeid raamatuid (joonis: <http://mathworld.wolfram.com/>).



5.2 Positiivsete arvridade võrdluslaused

Lause 5.3

I võrdluslause. Olgu $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ sellised positiivsed arvread, et kehtib

$$0 \leq u_k \leq v_k, \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kui rida $\sum v_k$ koondub, siis koondub ka rida $\sum u_k$.

Kui rida $\sum u_k$ hajub, siis hajub ka rida $\sum v_k$.

Lause 5.4

II võrdluslause. Eeldame, et read $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ on positiivsete liikmetega read ning eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} = L \neq 0$.

Sel juhul rida $\sum u_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum v_k$.

Ülesanne 5.6. Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{9n-1}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ |
| (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$ |
| (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^3+3}}$ | (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^3$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^{4/3}}$ | (l) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$ |

Ülesanne 5.7. (M) Olgu $u_n > 0$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 0$. Näidake, et siis rida $\sum u_n$ koondub.

Praktikum 6

Arvridade koondumine

6.1 Absoluutne koonduvus

Definitsioon 6.1

Rida $\sum u_k$ nimetatakse **absoluutselt koonduvaks**, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida $\sum |u_k|$ koondub.

Omadus 6.1

D'Alembert'i tunnus:

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|.$$

Rida koondub absoluutselt, kui $D < 1$. Rida hajub, kui $D > 1$. Kui $D = 1$, siis ei saa otsustada.

Omadus 6.2

Cauchy tunnus:

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|u_k|}.$$

Rida koondub absoluutselt, kui $C < 1$. Rida hajub, kui $C > 1$. Kui $C = 1$, siis ei saa otsustada.

Ülesanne 6.1. Uurige D'Alembert'i tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n}{5^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{n+1}$

(j) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-e)^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+3)!}{n!5^{2n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n3^n}{(2n+1)\ln(n)}$

Ülesanne 6.2. Uurige Cauchy tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+5)^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n\sqrt{n}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-5}{4n+2}\right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1.5^n \sin \left(\frac{\pi}{n}\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ülesanne 6.3. (M) Uurige rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}$ koonduvust.

6.2 Tingimisi koondumine

Definitsioon 6.2

Rida, mis koondub, kuid ei koonu absoluutselt, nimetatakse **tingimisi koonduvaks**.

Lause 6.1

Leibniz'i koonduvustunnus. Kui

1. $a_0 \geq a_1 \geq \dots a_n \geq \dots$ (üldliikmete jada on monotoonselt kahanev);
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$,

siis vahelduvate märkidega rida (6.1) koondub.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n \cdot a_n + \dots \quad (6.1)$$

Ülesanne 6.4. Uurige järgmiste ridade koonduvust.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+3}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$ |
| (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-0.99)^n$ | (f) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{\ln(n^2)}$ |

Ülesanne 6.5. Millised järgmistest ridadest on absoluutselt koonduvad, millised on tingimisi koonduvad ja millised on hajuvad?

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ | (i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ | (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n3^n}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ | (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$ |

Praktikum 7

Astmeread. Taylorig read

7.1 Astmerekad, koonduvusraadius

Definitsioon 7.1

Astmerekaks nimetatakse rida, mille liikmeteks on funktsioonid f_n , kus $f_n(x) = a_n x^n$, s.t. rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (7.1)$$

või üldisemalt rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots \quad (7.2)$$

Definitsioon 7.2

Astmerea (7.1) koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A defineeritakse järgnevalt:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{arvrida } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ koondub} \right\}, \quad (7.3)$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{arvrida } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ koondub absoluutselt} \right\}. \quad (7.4)$$

Teoreem 7.1

Cauchy-Hadamard'i teoreem. Kui $R > 0$, siis astmerekad $\sum a_n x^n$ koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$ ja hajub piirkonnas $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Juhul $R = 0$ koondub ta vaid punktis $x = 0$.

Definitsioon 7.3

Arvu R nimetatakse astmerea **koonduvusraadiuseks**, vahemikku $(-R, R)$ astmerea (7.1) koonduvusvahemikuks, vahemikku $(c - R, c + R)$ astmerea (7.2) koonduvusvahemikuks.

Lause 7.1

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ või $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ siis koonduvusraadiust R saab leida vastavalt järgmistele valemitele abil:

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{või} \quad R = \frac{1}{C} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (7.5)$$

Ülesanne 7.1. Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadius R , koonduvuspiirkond X ja absoluutse koondumise piirkond A .

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+3} & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n & \text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)! x^n \\
 \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x-1)^n & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n} & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n+1}}{n!} \\
 \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n-1} x^n & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} (2x+5)^n & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n \\
 \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} (x-4)^n & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n & \text{(l)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n
 \end{array}$$

7.2 Astmeritta arendamine

Lause 7.2

Kui $x \in (-R, R)$, siis astmerea summa $S(x) = \sum a_n x^n$ on pidev funktsioon vahemikus $(-R, R)$, kusjuures astmerida võib liikmeti diferentseerida igas punktis $x \in (-R, R)$ ja iga osalõigu $[a, b] \subset (-R, R)$ korral võib astmerida liikmeti integreerida.

Ülesanne 7.2. Arendage järgmised funktsioonid astmeritta.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = \frac{1}{1+x} & \text{(c)} f(x) = \ln(1+x) \\
 \text{(b)} f(x) = \frac{x}{1-x^3} & \text{(d)} F(x) = \int \arctan(x^2) dx
 \end{array}$$

Ülesanne 7.3. Avaldise $\frac{1}{(1-x^2)}$ ritta arendamiseks diferentseerige rida

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Rakendades tööstuses statistilist kvaliteedikontrolli, valitakse tooteid liinilt juhuslikult. Jagame iga toote “terveks” ja “praagiks”. Kui toode on “terve” tõenäosusega p ja “praak” tõenäosusega $q = 1 - p$, siis tõenäosus, et “praak” toode esineb esmalt alles n . valiku korral, on $p^{n-1}q$. Selliselt valitud toodete arvu (kuni esimese “praagini”) keskmine on $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. Arvutage see summa, eeldades et $0 < p < 1$. Sama teooria kehtib näiteks kahe täringu korruga viskamisel. Siis summa 7 tõenäosus on $p = 1/6$. Arvutage keskmine vajaminev visete arv, et 7 tuleks esimest korda.

Ülesanne 7.4. Kuidas leida rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ summat?

Selleks avaldage $\frac{1}{1-x}$ geomeetrilise rea kaudu, seejärel diferentseerige võrrandi mõlemat poolt, korrutage võrrandi pooled läbi muutujaga x . Seejärel diferentseerige veelkord ning korrutage mõlemad pooled muutujaga x . Kui omistada $x = \frac{1}{2}$, siis millise tulemuse saate?

Ülesanne 7.5. Arendades tundmatu lahendi $y = y(x)$ astmeritta, leidke Cauchy ülesande $y' = 2y$, $y(0) = 1$, lahend.

Ülesanne 7.6. Arendades tundmatu lahendi $y = y(x)$ astmeritta, leidke Cauchy ülesande $y' - y = x$, $y(0) = 1$, lahend.

7.3 Taylor'i read

Definitsioon 7.4

Kui iga $x \in X = (c - R, c + R)$ korral

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n, \quad (7.6)$$

s.t. funktsioon f on vaadeldava astmerea summa, siis öeldakse, et funktsioon f on vahemikus X arendatud astmerekaks. Sel juhul astmerea kordajad a_n avalduvad valemitega

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.7)$$

kusjuures $0! = 1$ ja $f^{(0)}(c) = f(c)$.

Definitsioon 7.5

Rida (7.6), mille kordajad a_n on antud valemitega (7.7), nimetatakse funktsiooni f **Taylor'i reaks**. Erijuhul, kui $c = 0$, siis **Maclaurin'i reaks**.

Ülesanne 7.7. Arendage järgmised funktsioonid Taylor'i ritta punktis $c = 0$.

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|---------------------------|---------------------------------|
| (a) xe^{2x} | (c) $\frac{1}{1+x^3}$ | (e) $e^x + \frac{1}{1+x}$ | (g) $\cos \frac{x^2}{\sqrt{3}}$ |
| (b) $\frac{1}{1-3x}$ | (d) $\ln(1+x^2)$ | (f) $\cos x - \sin x$ | (h) $e^{\pi x/2}$ |

Ülesanne 7.8. Arendage integraalimärgi all olev avaldis Taylor'i ritta (astmeritta) ning integreerides liikmeti, arvutage nende integraalide väärtused täpsusega 10^{-8} .

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| (a) $\int_0^{0.2} \sin(x^2) dx$ | (c) $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$ | (e) $\int_0^{0.5} \frac{\arctan(x)}{x} dx$ |
| (b) $\int_0^{0.1} \frac{\sin(x)}{x} dx$ | (d) $\int_0^{0.5} e^{-x^3} dx$ | (f) $\int_0^1 x \sin(x^3) dx$ |

Ülesanne 7.9. Arendades siinuse Taylor'i ritta, leidke kõik a ja b väärtused, mille korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x^3} + \frac{2a}{x^2} - b \right) = 0.$$

Ülesanne 7.10. Näidake, et funktsiooni $f(x) = \arctan(x)$ Taylor'i rida hajub iga $|x| > 1$ korral.

Praktikum 8

Fourier' read. Mitme muutuja funktsiooni määramispiirkond

8.1 Fourier' read

2π -perioodiline funktsioon f ,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$2L$ -perioodiline funktsioon f , $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2L$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)],$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

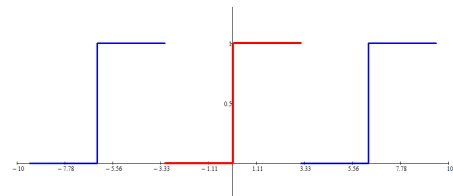
Teoreem 8.1

Dirichlet' teoreem. Kui funktsioon f on tükiti sile vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$, kusjuures

1. $S(x) = f(x)$ funktsiooni f pidevuspunktides;
2. $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ funktsiooni f katkevuspunktides;
3. $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$.

Ülesanne 8.1. Leidke 2π -perioodilise ruutlaine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$



Ülesanne 8.2. Astmeridades võisime tuletise võtta liikmeti.

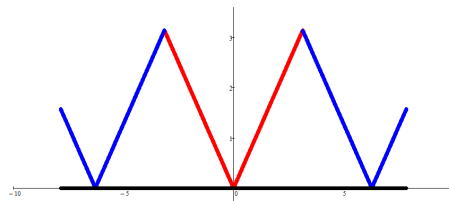
Osutub, et Fourier' ridade korral see enam alati läbi ei lähe. Veenduge, et

$$2x = 4 \sin(x) - \frac{4}{2} \sin(2x) + \frac{4}{3} \sin(3x) - \frac{4}{4} \sin(4x) + \dots, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Võtke mõlemast poolest tuletis x -järgi ja veenduge, et punktis $x = 0$ saadud võrdus ei kehti.

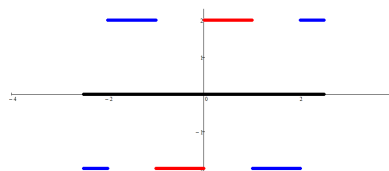
Ülesanne 8.3. Leike 2π -perioodilise kolmnurkse laine $f(x) = |x|$ Fourier' rida

ja uurige selle koonduvust, $x \in [-\pi, \pi]$.



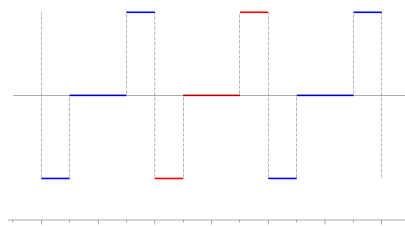
Ülesanne 8.4. Leidke 2-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



Ülesanne 8.5. Leidke 4-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$



Ülesanne 8.6. Leidke 2-perioodilise laine $f(x) = x^2$ Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, $x \in [-1, 1]$.

Kasutades argumenti väärtust $x = 1$, näidake, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ülesanne 8.7. (F) Dirac'i deltafunktsioon defineeritakse selliselt, et see on nullist erinev ainult nullpunktis ning on täidetud tingimus

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = f(0), \quad a < 0 < b,$$

iga pideva "heade omadustega" funktsiooni f korral. Veenduge, et $\delta(x)$ jaoks kehtivad lõigus $[-\pi, \pi]$ seosed $a_n = 1/\pi$ ja $b_n = 0$. NB! Tegelikult $\delta(x)$ ei ole matemaatilises mõttes funktsioon, vaid selle üldistus: distributsioon. Füüsikas kasutatakse seda ideaalse punktmassi, punktlaengu jne modelleerimiseks. Sisuliselt on tegemist lõpmatult kitsa ja lõpmatult pika "piigiga".

8.2 Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond

Definitsioon 8.1

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Kui igale punktile $P = (x, y)$ hulgest \mathcal{D} on eeskirja f abil vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv z , siis öeldakse, et hulgal \mathcal{D} on määratud **2 muutuja funktsioon** ja kirjutatakse

$$z = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$$

või

$$z = f(P) \quad \forall P \in \mathcal{D}.$$

Hulka \mathcal{D} nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**. Funktsiooni f **graafikuks** nimetatakse punktide P hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $z = f(x, y)$

$$Gr(f) = \{Q = (x, y, z) : P = (x, y) \in \mathcal{D}, z = f(P)\}.$$

Ülesanne 8.8. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad \mathcal{D} ja skitseerige need.

(a) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$;

(l) $f(x, y) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+y)}$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$;

(m) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2-2)} + \sqrt{3-x^2-y^2}$;

(c) $f(x, y) = \ln(4-x^2-y^2)$;

(n) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2-2)} + \sqrt{4-x^2-y^2}$;

(d) $f(x, y) = \ln(x+y)$;

(o) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$;

(e) $f(x, y) = \ln(x+y) + \frac{1}{\ln x}$;

(p) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2 - 3)$;

(f) $f(x, y) = 3 + \sqrt{-(x-y)^2}$;

(q) $f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x^2 + y^2)}$;

(g) $f(x, y) = x + e + \arccos y$;

(r) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$;

(h) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$;

(i) $f(x, y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)^2}$;

(s) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$;

(j) $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + \sin x$;

(t) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y} +$

(k) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

$$\sqrt{4-|x-4|} + \sqrt{16-(y-4)^2}.$$

Ülesanne 8.9. Leidke järgmiste kolme muutuja funktsioonide määramispiirkonnad E .

(a) $f(x, y, z) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$;

(d) $f(x, y, z) = \arcsin x - \arccos(yz)$;

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x(z^2+1)} - \sqrt{ye^z}$;

(e) $f(x, y, z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$;

(c) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln z$;

(f) $f(x, y, z) = \frac{1}{3 + \cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z}$.

Praktikum 9

Piirväärtus ja pidevus

9.1 Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $M_0 = (x_0, y_0)$ hulga \mathcal{D} kuhjumispunkt (igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Definitsioon 9.1

Kui argumenti $M = (x, y)$ tõkestamatu lähenemine punktile $M_0 = (x_0, y_0)$ toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(x, y)$ tõkestamatu lähenemise arvule A , siis ütleme, et funktsiooni f piirväärtus protsessis $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ on arv A ja märgime seda

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktile M_0 mööda kahte erinevat lähenemisteed erinevad piirväärtused, siis piirväärtust $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ ei leidu.

Kõik ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse omadused – piirväärtuse monotoonsus, ühesus, aritmeetika, lause tõkestatud ja hääbuva suuruse korrutisest ning keskmise muutuja omadus – on põhimõteteliste muutusteta ümber kirjutatavad mitme muutuja juhule.

Definitsioon 9.2

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse **pidevaks** punktis M_0 , kui funktsioon on selles punktis määratud ning funktsiooni väärtus punktis (x_0, y_0) võrdub tema piirväärtusega lähenemisel sellele punktile:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Vastasel korral nimetatakse funktsiooni **katkevaks** punktis M_0 .

Ülesanne 9.1. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} x^2 y;$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (2x + 3y);$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x + \sin \pi x}{y};$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin x}{x};$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y};$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1};$

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2};$

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{2 + x^2 + y^2};$

(i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{x - \sqrt{y}}{x + \ln x};$

(j)
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{\ln(xy)}{x \sin y};$$

(m)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy}{\tan xy};$$

(k)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2};$$

(n)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,10)} \frac{\sin 5x}{xy};$$

(l)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{3}{xy};$$

(o)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

(p)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

Ülesanne 9.2. Näidake, et järgmiseid piirväärtusi ei eksisteeri.

(a)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y};$$

(d)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{xy+1}{x^2-y^2}$$

(b)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2+xy};$$

(e)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1}$$

(c)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y-x^2}.$$

Ülesanne 9.3. Näidake, et lähenedes punktile $(0,0)$ mööda sirget $y = kx$ võime võtta k valiku puhul funktsiooni $z = \frac{ax+by}{cx+dy}$ piirväärtuseks punktis $(0,0)$ saada mistahes etteantud arvu.

Ülesanne 9.4. Missugust sirget mööd tuleks läheneda punktile $(0,0)$, et funktsiooni $\frac{5x-y}{2x+3y}$ piirväärtus punktis $(0,0)$ võrduks arvuga 1?

Ülesanne 9.5. Millist tingimust peavad rahuldama positiivsed arvud m, n ja p , et eksisteeriks piirväärtus $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$? Põhjendage oma vastust.

Ülesanne 9.6. Leidke korduvad piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) =: A$ ja $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) =: B$ järgmistest funktsioonidest märgitud punktis $P_0 = (a, b)$.

(a)
$$f(x, y) = \frac{x+y^2}{x+y}, P_0 = (0, 0);$$

(b)
$$f(x, y) = \frac{\ln(1+x+y)}{x+\sin y}, P_0 = (0, 0);$$

Ülesanne 9.7. Näidake, et järgmistel funktsioonidel leidub punktis $(0,0)$ piirväärtus, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ ei eksisteeri.

(a)
$$f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y};$$

(b)
$$f(x, y) = (x-y) \cos \frac{1}{x} \sin \frac{\cos y}{2y}.$$

Ülesanne 9.8. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

(a)
$$f(x, y) = \frac{xy}{\sin x + e^y};$$

(c)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

(b)
$$f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\ln z};$$

(d)
$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Ülesanne 9.9. Millised järgmistest funktsioonidest on punktis $\mathbf{A} = (0, 0)$ pidevad, pidevad muutuja x või muutuja y järgi.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 1, & \text{kui } |x| + |y| = 0; \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \sqrt{2y - x^2 - y^2}; \\
 & & \text{(e)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{\ln|xy|}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ülesanne 9.10. Leidke järgmiste funktsioonide katkevuspunktid.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \frac{x+y}{x^3 + y^3}; \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{kui } x + y \neq 0, \\ -1, & \text{kui } x + y = 0; \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \sin \frac{1}{xy}; \\
 & & \text{(e)} \quad f(x, y, z) &= \frac{1}{xyz}; \\
 & & \text{(f)} \quad f(x, y) &= \frac{1}{\ln|1 - x^2 - y^2|}.
 \end{aligned}$$

Ülesanne 9.11. Kõrvaldage järgmistel funktsioonidel katkevus märgitud hulgas D , s.t. lisage funktsioonile f katkevuspunktides sellised väärtused, et f oleks pidev kogu hulgas D .

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \frac{\sin xy}{x}, \quad D = \mathbb{R}^2; & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \frac{e^{x-y}}{3 + \cot^2(x-y)}, \quad D = \mathbb{R}^2; \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \frac{\sin x + \cos y}{\ln|x+y|}, & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \frac{2 - \sqrt{12 - x - 2y}}{(x+2y)^2 - 64}, \\
 D &= \{(x, y) : |x + y| < 1\}; & D &= \{(x, y) : -7 \leq x + 2y \leq 12\}.
 \end{aligned}$$

Ülesanne 9.12. Uurige arvuti ja graafikapaketi abil funktsiooni $f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ graafikut piirkonnas $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Kuidas te kirjeldaksite funktsiooni käitumist punkti $(0, 0)$ ümbruses?

Praktikum 10

Osatuletised, liitfunktsiooni osatuletised Kõrgemat järku osatuletised

10.1 Esimest järku osatuletised

Definitsioon 10.1

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ning $M = (x, y)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

nimetatakse funktsiooni f **osatuletiseks muutuja x järgi** punktis M ja tähistatakse $z'_x, f'_x(x, y)$ või $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. **Osatuletis muutuja y järgi**

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletise leidmisel muutuja x järgi kasutatakse ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirju, lugedes muutuja y konstantseks. Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletise leidmiseks argumenti y järgi võetakse tema tuletis y järgi, lugedes muutuja x konstantseks.

Ülesanne 10.1. Leidke definitsiooni kasutades järgmiste funktsioonide osatuletised.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2;$ | (c) $f(x, y) = y^2;$ | (f) $f(x, y) = e^{2x+3y};$ |
| (b) $f(x, y) = \sqrt{3x - y};$ | (d) $f(x, y) = \ln(x^2y);$ | (g) $f(x, y, z) = xy^2z;$ |
| | (e) $f(x, y) = \frac{1}{x-y};$ | (h) $f(x, y, z) = \frac{x^2y}{z}.$ |

Ülesanne 10.2. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| (a) $f(x, y) = 3x - y^2;$ | (g) $f(x, y) = (x + 2y)^5$ | (n) $f(x, y) = x^y;$ |
| (b) $f(x, y) = x^2 + y^2;$ | (h) $f(x, y) = \frac{2x}{y} + 4;$ | (o) $f(x, y) = (x + y)^y;$ |
| (c) $f(x, y) = e^{2x+3y};$ | (i) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^4};$ | (p) $f(x, y) = (1 + xy)^{xy};$ |
| (d) $f(x, y) = x^3y + 2x;$ | (j) $f(x, y) = \cos(4x - y);$ | (q) $f(x, y) = x^{\sin y};$ |
| (e) $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 7y;$ | (k) $f(x, y) = x \sin y;$ | (r) $f(x, y, z) = x^2 + y^z,$ |
| (f) $f(x, y, z) = \ln(xz) + \ln(yz);$ | (l) $f(x, y) = \tan \frac{x}{y};$ | (s) $f(x, y, z, t) = \frac{x-y}{z-t},$ |
| | (m) $f(x, y) = \arctan \frac{1}{xy};$ | (t) $f(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4.$ |

Ülesanne 10.3. Olgu antud $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}$. Arvutage $\left. \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \right|_{\substack{x=2 \\ y=-3}}$.

Ülesanne 10.4. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x \sin \frac{y}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2), & \Delta \neq 0, \\ 0, & \Delta = 0, \end{cases} \\
 & & & \text{kus } \Delta = x^2 + y^2; \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & |x| + |y| = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ülesanne 10.5. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^3 y^3 \sin \frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 y^2 \sin \frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0; \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ülesanne 10.6. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0, \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$ punktis $(0, 0)$ osatuletised on olemas, kuid ta on katkev selles punktis.

Seega mitmemõõtmelisel juhul ei järeldu koheselt osatuletiste leidumisest funktsiooni pidevus, vastupidiselt ühemõõtmelisele juhule.

Ülesanne 10.7. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0, 0)$ osatuletised $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$ eksisteerivad, kuid ta on katkev selles punktis.

Ülesanne 10.8. (Maj) Teatava Lõuna-Ameerika riigi tootmisfunktsiooniks on

$$f(x, y) = 20x^{3/4}y^{1/4},$$

kus x on tööjõud ja y kapital.

Leidke tööjõu ja kapitali piirtootlikused (st vastavate osatuletiste väärtused), kui kulutused tööjõule ja kapitalile on vastavalt 256 ja 16 ühikut. Kas riik peaks toodangu suurendamiseks antud olukorras suurendama kulutusi tööjõule või investeerima kapitali?

Ülesanne 10.9. (K) Ideaalse gaasi olekuvõrrand esitatakse lihtsamalt sageli kujul $PV = NkT$ või $E = \frac{3}{2}NkT$, kuid originaalis on see tegelikult kujul

$$E = \frac{3h^2 N}{4\pi m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} e^{2S/(3Nk) - 5/3}.$$

Kasutades teadmist, et $T = \frac{\partial E}{\partial S}$ ja $P = -\frac{\partial E}{\partial V}$, tuletage lihtsustatud valemid esialgselt. Siin k on Boltzmann'i konstant, h on Planck'i konstant, m on ühe aatomi mass, $E = E(S, V, N)$ on siseenergia, S on entroopia, V on ruumala, P on rõhk, T on temperatuur.

Ülesanne 10.10. Näidake, et punkti $(0, 0)$ ümbruses funktsioonil

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on olemas osatuletised f_x ja f_y , mis katkevad punktis $(0, 0)$, kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$. Näidake, et punkti $(0, 0)$ ümbruses funktsiooni

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)^{-1}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

osatuletised g_x ja g_y eksisteerivad ja on tõkestamata (seega punkt $(0, 0)$ on nende katkevuspunkt), kuid siiski funktsioon g on diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$.

10.2 Liitfunktsiooni osatuletised

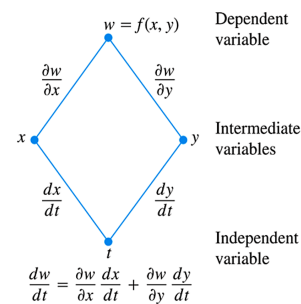
Valem 10.1

Eeldame, et funktsioonide $z = F(u, v)$, $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ osatuletised argumentide järgi on pidevad. Siis funktsiooni $z = F(u, v)$ osatuletised avalduvad järgmiselt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10.1)$$

Erijuhul, kui $w = f(x, y)$, kus $x = x(t)$ ja $y = y(t)$, avaldub tuletis kujul

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$



Ülesanne 10.11. Leidke järgmiste liitfunktsioonide tuletised.

- | | |
|--|---|
| (a) $z = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = \frac{1}{3} \cos t$; | (f) $z = \arctan(xy)$, $y = e^x$; |
| (b) $z = \ln(1 - xy)$, $x = t^2$, $y = t^3$; | (g) $u = e^x(y - z)$, $y = \sin x$, $z = \cos x$; |
| (c) $u = xyz$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 2t$; | (h) $u = u(x, y, z)$, $x = 2t$, $y = \ln t$,
$z = t + 1$; |
| (d) $z = t^2 + x^2 + y^2$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$; | (i) $z = f(x, y) = x^2 \ln y$, $x = 1 - t^2$,
$y = e^{\sin t}$. |
| (e) $z = \tan(t + x^2 - y)$, $x = t^2$, $y = t^5$; | |

Ülesanne 10.12. Leidke järgmiste liitfunktsioonide osatuletised.

- | | |
|---|---|
| (a) $z = u^2v$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$; | (d) $z = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$; |
| (b) $z = u \ln v$, $u = \frac{1}{x+y}$, $v = e^{x+y}$; | (e) $w = u^v$, $u = x^2 + z^2$, $v = yz$; |
| (c) $z = ue^v$, $u = x^2$, $v = x \ln y$; | (f) $w = xy e^{uv}$, $u = \frac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$. |

10.3 Kõrgemat järku osatuletised

Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest, saame teist järku osatuletised

$$f_{x_i x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (f_{x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Juhul $i \neq k$ nimetatakse seda teist järku osatuletist **segatuletiseks**. Veel kõrgemat järku osatuletised ja segatuletised defineeritakse analoogiliselt.

Teoreem 10.1

Kui m muutuja funktsiooni f segatuletised on pidevad mingis punktis, siis selles punktis kehtib võrdus

$$f_{x_i x_k} = f_{x_k x_i}, \quad \forall i, k \in \{1, \dots, m\}.$$

Ülesanne 10.13. Leidke järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) $f(x, y) = x^2 + y;$ | (f) $f(x, y) = x^y;$ |
| (b) $f(x, y) = x^3 y - y^3 x;$ | (g) $f(x, y) = \ln(x + y^2);$ |
| (c) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y};$ | (h) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy};$ |
| (d) $f(x, y) = x \sin(x + y);$ | (i) $f(x, y, z) = xyz + \ln(x + y + z);$ |
| (e) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y};$ | (j) $f(x, y, z) = \sin(1 + xyz).$ |

Ülesanne 10.14. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0, 0)$ segatuletised f_{xy} ja f_{yx} eksisteerivad, kuid $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Ülesanne 10.15. Leidke järgmiste funktsioonide segaosatuletised f_{xy} .

- | | |
|--|-------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = x^x + y \sin x;$ | (c) $f(x, y) = y \cos y + e^{x+y}.$ |
| (b) $f(x, y) = x^{10} \cos x + y^2 \ln x;$ | |

Ülesanne 10.16. (F) Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse harmooniliseks, kui ta rahuldab Laplace'i soojusjuhtivuse võrrandit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Analoogiliselt saab Laplace'i võrrandit vaadelda suurema arvu muutujate korral. Võrrandit kasutatakse näiteks temperatuuri jaotamise modelleerimiseks ruumis, vedelike voolamise, elektri- ja magnetväljade potentsiaali uurimisel jne. Harmoonilistel funktsioonidel on palju häid matemaatilisi omadusi. Näidake, et funktsioonid $e^{\omega x} \cos(\omega y)$ ja $e^{\omega x} \sin(\omega y)$ on harmoonilised funktsioonid suvalise reaalarvu ω korral.

Ülesanne 10.17. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised.

- | |
|---|
| (a) $f(x, y) = x + x \ln(xy), \quad f_{xxy} = ?;$ |
| (b) $f(x, y, z) = e^{xy} + e^{xyz}, \quad f_{xyz} = ?;$ |
| (c) $f(x, y) = y^2 + x^3 \sin y + y^3 \sin x, \quad f_{xxyyy} = ?.$ |

Ülesanne 10.18. Olgu

$$f(x, y, u, v) = \frac{x^2 + e^y v}{3y^2 + \ln(2 + u^2)}.$$

Millise osatuletiste võtmise järjekorraga saab kõige kiiremini leida $f_{uvxyvu}(x, y, u, v)$? Põhjendage. Leidke $f_{uvxyvu}(x, y, u, v)$.

11.1 Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Vektorruumid. Vektorite lineaarne sõltumatus

- 1.1. Vektorruum, vektorruumi alamruum (1.6, 1.8, 1.9)
- 1.2. Vektorsüsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus (2.4, 2.5, 2.6)
- 1.3. Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid (3.1, 3.4)

2. Arvread

- 2.1. Arvrea koondumine (hajumine) (4.3)
- 2.2. Geomeetrilise rea koondumise tingimus (4.5)
- 2.3. Harmoonilise rea koondumise tingimus (5.1)
- 2.4. Positiivsed arvread, võrdluslaused, integraaltunnus (5.2, 5.6)
- 2.5. D'Alembert'i, Cauchy ja Leibniz'i koonduvustunnused (6.1, 6.2, 6.4, 6.5)

3. Astmereal

- 3.1. Astmerea koonduvusraadius, koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond (7.1)
- 3.2. Funktsiooni arendamine Taylori ritta punktis $c = 0$ (7.7)

4. Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkond, piirväärtus ja pidevus

- 4.1. Määramispiirkonna leidmine (8.9, 8.10)
- 4.2. Näidata, et funktsiooni piirväärtust ei leidu (9.2)
- 4.3. Piirväärtuse leidmine (9.1)
- 4.4. Kahe muutuja funktsiooni pidevus (9.8)

Praktikum 12

Täisdiferentsiaal Ligikaudsed arvutused täisdiferentsiaali abil

12.1 Täisdiferentsiaal

Olgu

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

funktsiooni f muut punktide $P_0 = (x, y)$ ja $P = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ vahel.

Definitsioon 12.1

Funktsiooni f juurdekasvu peaosas argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel nimetatakse selle funktsiooni **täisdiferentsiaaliks**. Funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal on kujul

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaal on kujul

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Lause 12.1

Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on pidevad osatuletised punktis $P = (x_0, y_0)$, siis see funktsioon on diferentseeruv punktis P .

Ülesanne 12.1. Leidke järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid.

(a) $f(x, y) = x + 3y$;

(f) $f(x, y) = -\cos(xy)$;

(b) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy$;

(g) $f(x, y) = y^x$;

(c) $f(x, y) = xy$;

(h) $f(x, y, z) = \tan(x - 2y + 3z)$;

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$;

(i) $f(x, y, z) = \cos(x^2 y z)$;

(e) $f(x, y) = e^{1+xy}$;

(j) $f(x, y, z) = e^{2x^2 y z^2}$.

Ülesanne 12.2. Näidake, et funktsioon

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

on pidev punktis $(0, 0)$ ja omab osatuletisi $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$, kuid ei ole diferentseeruv selles punktis.

Ülesanne 12.3. Näidake, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev ja ta osatuletised f_x ja f_y on lõplikud, kuid funktsioon ei ole diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

Ülesanne 12.4. Arvutage funktsioonide muudud ja täisdiferentsiaalid etteantud väärtustel.

(a) $u = x^2 - 3xy + 2y^2$, kui $x = 6$, $y = 2$, $\Delta x = 0.3$, $\Delta y = 0.2$;

(b) $u = x^2z - 2yz^2 + 3xyz$, kui $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$, $\Delta z = -0.2$.

12.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine

Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ argumentide muudud $\Delta x, \Delta y$ on küllalt väikesed, siis

$$\Delta z \approx dz$$

ehk

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ muut

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \approx du$$

Ülesanne 12.5. Leidke järgmiste funktsioonide ligikaudsed muudud argumenti määratud muutuse korral.

(a) $u = 4x^2 - xy$, punktist $(1, 2)$ punkti $(1.01, 2.02)$;

(d) $u = 2xe^{-y}$, punktist $(-3, -2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$;

(b) $u = x^{2/3}y^{1/2}$, punktist $(8, 9)$ punkti $(7.97, 9.03)$;

(e) $u = xe^{xy} - y^2$, punktist $(-1, 0)$ punkti $(-0.97, 0.03)$;

(c) $u = \frac{x}{x-y}$, punktist $(-3, -2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$;

(f) $u = \ln(xy)^{1/2}$, punktist $(5, 10)$ punkti $(5.05, 9.95)$.

Ülesanne 12.6. Ristküliku küljepikkusteks mõõdetakse 100 m ja 150 m.

Mõõtmisel võidi eksida ühe meetriga. Milline on võimalik viga selle ristküliku pindala arvutamisel? Milline on viga pindala arvutamisel, kui mõõtmise viga on 0.5 m?

Ülesanne 12.7. Kahe linna elanike arv (tuhandetes) on vastavalt x ja y , telefonikõnede hulk päevas nende vahel avaldub kujul $12xy$.

Hinnake ühes päevas tehtavate telefonikõnede arvu kasvu, kui elanike arv linnades kasvab vastavalt 40 tuhandelt ja 60 tuhandelt 1000 inimese võrra mõlemas linnas.

Ülesanne 12.8. Püstsilindri kõrgust suurendatakse 12 sentimeetrilt 12.2 sentimeetrini ja põhja raadiust vähendatakse 8 sentimeetrilt 7.7 sentimeetrimini.

Hinnake selle silindri ruumala ja kogupindala muute.

Ülesanne 12.9. (Maj) Elektroonikafirma, mis toodab päevas x DVD-mängijat ja y Blu-Ray-mängijat, kasum (eurodes) avaldub funktsioonina $P(x, y)$.

Kui praegu toodab firma päevas 200 DVD-mängijat ja 300 Blu-Ray-mängijat, siis hinnake kasumi kasvu kui päevas toota viis DVD-mängijat ja neli Blu-Ray-mängijat rohkem.

(a) $P(x, y) = 2x^2 - 3xy + 3y^2$

(b) $P(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2$

Ülesanne 12.10. Risttahuka kujuline kinnine kast kaetakse värviga.

Hinnake kastil oleva värvi kogust, kui kasti küljepikkused on 1.2, 0.9 ja 0.6 meetrit ning värvikihi paksus on 1 mm.

Ülesanne 12.11. (F) Tuulekülm on temperatuur, mida inimene õues olles tunneb ja sõltub õhutemperatuurist t (ühik °C) ning tuule kiirusest w (ühik km/h).

Tuulekülma arvutamiseks kasutatakse valemit $C(t, w) = 13.12 + 0.6215t - 11.37w^{0.16} + 0.3965tw^{0.16}$. Hinnake tajutava temperatuuri muutust, kui temperatuur langeb -10 kraadilt kaks kraadi ja tuule kiirus tõuseb 18 kilomeetrilt tunnis 21.6 kilomeetrini tunnis.

Ülesanne 12.12. (F) Vere kogus liitrites, mis pumbatakse läbi kopsude minutis arvutatakse valemist $C = \frac{x}{y-z}$, kus x on kopsudes omastatud hapniku kogus (milliliitrit minutis), y ja z on hapniku kontsentratsioon veres (ml hapniku liitri vere kohta) vastavalt vahetult pärast ja enne kopsude läbimist.

Tüüpilised mõõtetulemused on $x = 250$, $y = 160$ ja $z = 150$. Hinnake südame väljundi arvutamisel tehtavat viga, kui iga näitaja mõõtmisel võidi eksida viie ühikuga.

Ülesanne 12.13. (K) Ideaalse gaasi ühe mooli rõhk, ruumala ja temperatuur on seoses $PV = 8.31T$, kus P on rõhk kilopaskalites, V on ruumala liitrites ja T on temperatuur °K.

Hinnake rõhu muutust, kui mahtu suurendatakse 12 liitrit 12.3 liitrile ja temperatuur väheneb 310 kraadilt 305 kraadini.

12.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ on küllalt väikesed, siis $f(P) \approx f(P_0) + df(P_0)$ ehk

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) \approx f(x_1, \dots, x_m) + f_{x_1}(x_1, \dots, x_m)\Delta x_1 + \dots + f_{x_m}(x_1, \dots, x_m)\Delta x_m.$$

Erijuhul kui $z = f(x, y)$, siis $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

Ülesanne 12.14. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $1.03^{4.05}$;

(e) $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$;

(b) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$;

(f) $\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$;

(c) $2.01^3 - 0.97^2$;

(g) $(1 - \sqrt{10})(1 + \sqrt{24})$;

(d) $1.04^{1.99} + \ln 1.02$;

(h) $\sin(\frac{6}{7}\pi) \cos(\frac{1}{5}\pi)$.

Ülesanne 12.15. (Maj) Cobb'i-Douglas'i tootmisfunktsioon on kujul $Q(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$, kus K on kapitalikulud ja L on tööjõukulud.

On teada, et $Q(10000, 625) = 20000$. Leidke ligikaudu $Q(10010, 623)$ väärtus.

Praktikum 13

Ekstreemumid Optimiseerimine

13.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 13.1

Öeldakse, et funktsioonil f on **lokaalne maksimum** punktis (a, b) , kui leidub selle punkti ümbrus \mathcal{U} nii, et

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on **lokaalne miinimum** punktis (a, b) , kui leidub selle punkti ümbrus \mathcal{U} nii, et

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Definitsioon 13.2

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f'_x = f'_y = 0$ ja punkte, kus funktsiooni f mingi osatuletis ei ole lõplik või ei leidu, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**.

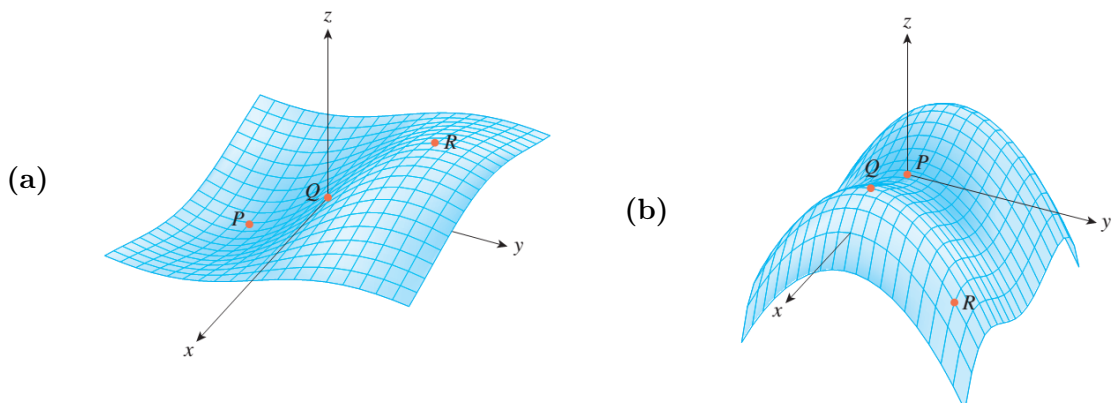
Lause 13.1

Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv oma statsionaarses punktis (a, b) . Tähistame

$$D = D(a, b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f''_{xx}(a, b)f''_{yy}(a, b) - (f''_{xy}(a, b))^2.$$

- (a) Kui $D > 0$ ja $f''_{xx}(a, b) > 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne miinimum.
- (b) Kui $D > 0$ ja $f''_{xx}(a, b) < 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne maksimum.
- (c) Kui $D < 0$, siis punktis (a, b) ei ole lokaalset ekstreemumit.
- (d) Kui $D = 0$, siis ekstreemumi olemasolu jääb lahtiseks.

Ülesanne 13.1. Klassifitseerige joonistel märgitud punktid.



Ülesanne 13.2. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

- (a) $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - y^2$; (f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
 (b) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$; (g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$;
 (c) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$; (h) $f(x, y) = x^2 + y - 2 \ln(xy)$.
 (d) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$; (i) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$,
 $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq \pi\}$;
 (e) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; (j) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Ülesanne 13.3. Funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega $f(x, y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Leidke funktsiooni f kõik lokaalsed ekstreemumid. Leidke (koos põhjendusega!) funktsiooni f suurim ja vähim väärtus.

13.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas

Ülesanne 13.4. Leidke toodud funktsioonide globaalsed ekstreemumid $\max f$ ja $\min f$.

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 (c) $f(x, y) = x - 2y - 1$, $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$;
 (d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $(x, y) \in \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$;
 (e) $f(x, y) = (2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ülesanne 13.5. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, $(x, y) \in \{(x, y) : -5 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 1\}$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

Ülesanne 13.6. Alleelid A, B ja O määravad neli veregruppi: A (AA või AO), B (BB või BO), O (OO) ja AB. Hardy–Weinbergi seaduse kohaselt on kahte alleeli kandvate inimeste osakaal populatsioonis

$$P \approx 2pq + 2pr + 2rq,$$

kus p , q ja r on vastavalt A, B ja O osakaalud populatsioonis. Kasutades fakti, et $p + q + r = 1$, näidake, et P väärtus on kõige rohkem $\frac{2}{3}$.

13.3 Optimiseerimine

Ülesanne 13.7. Jaotage arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

Ülesanne 13.8. Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leidke see, mille täispindala on minimaalne.

Ülesanne 13.9. Missuguste mõõtmete korral on antud ruumalaga V risttahuka kujulisel vannil vähim pindala?

Ülesanne 13.10. Leidke antud perimeetriga $2p$ ristkülik, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

Ülesanne 13.11. (Maj) Autotootja müüb ühte mudelit Ameerikas ja Euroopas erineva hinnaga. Ameerikas müüdavate autode hind (tuhandetes dollarites) on $p = 20 - 0.2x$ (kus $0 \leq x \leq 100$) ning Euroopas küsitakse hinda $q = 16 - 0.1y$ (kus $0 \leq y \leq 160$).

Siin x ja y on päevas müüdavate autode arv vastavalt Ameerikas ja Euroopas. Autotootja kulu-funktsioon on $C = 20 + 4(x + y)$. Leidke autotootja tulufunktsioon (st käive miinus kulu). Mitu autot ja millise hinnaga tuleks kummalgi turul müüa, et teenida võimalikult suurt tulu?

Ülesanne 13.12. Laborikatsed näitasid, et x mg ravimi A ja y mg ravimi B koostoime avaldub funktsioonina $f(x, y) = xy - 2x^2 - y^2 + 100x + 60y$ (kus $0 \leq x \leq 55$, $0 \leq y \leq 60$).

Leidke mõlema ravimi kogused, mis tagavad suurima toime.

Ülesanne 13.13. Psühholoogilises eksperimendis osaleja, kes harjutab uut oskust x tundi ja puhkab y tundi, katse tulemused avalduvad funktsioonina $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 11x - 4y + 120$ (kus $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 4$).

Leidke harjutamiseks ja puhkamiseks kuluv aeg, mis tagab võimalikult kõrge katse tulemuse.

Ülesanne 13.14. Neli linna ühendavad ressursid soovides ehitada ühise telemasti.

Leidke selline punkt $A(x, y)$, kus masti kauguste ruutude summa linnadest oleks minimaalne, kui linnad asuvad punktides $(-5, 0)$, $(1, 7)$, $(9, 0)$ ja $(0, -8)$.

13.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis

Valem 13.1

Olgu diferentseeruv funktsioon $y = f(x)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y) = 0$. Kui F, F'_x, F'_y on pidevad punktis (x, y) ja $F'_y(x, y) \neq 0$, siis

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (13.1)$$

Ülesanne 13.15. Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised y' .

- | | |
|------------------------------|---|
| (a) $y + \sin y + e^x = 0$, | (e) $1 + \ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x}$, |
| (b) $x + y = e^{x-y}$, | (f) $xe^y + ye^x - 2x^2y = 0$, |
| (c) $y^2 + 2xy - 2 = 0$, | (g) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a = \text{const}$), |
| (d) $x^2 - 2xy + y^4 = 4$, | (h) $x \cos(xy) + y \cos x = 2$. |

Ülesanne 13.16. Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised märgitud punktis P .

(a) $x^3 - 2y^2 + xy = 0, \quad P = (1, 1),$

(c) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0, \quad P = (1, 2),$

(b) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0, \quad P = (-1, 1),$

(d) $xe^y + \sin(xy) + y - \ln 2 = 0, \quad P = (0, \ln 2).$

Ülesanne 13.17. Klaasist lääts lõigatakse välja kerast raadiusega r ruumalaga $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$. Siin h on kera segmendi kõrgus. Leidke $\frac{dr}{dh}$, kui $V = \frac{8\pi}{3}$.

13.5 Taylorig valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *

Valem 13.2

Olgu antud funktsioon $z = f(x, y)$, mis on määratud mingis piirkonnas S . Eeldame, et punkti $M_0(a, b)$ ümbruses on funktsioonil z pidevad osatuletised kuni järguni $n + 1$. Funktsiooni f n -astme **Taylori polünoomiks** P_n punktis $M_0 = (a, b)$ nimetatakse funktsiooni

$$P_n(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \quad (13.2)$$

$$\frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \dots$$

Valemit

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y) \quad (13.3)$$

nimetatakse funktsiooni f **Taylori valemiks**, funktsiooni R_n aga Taylori valemi **jääkliikmeks**.

Ülesanne 13.18. Leidke järgmiste funktsioonide Taylori polünoomid punktis (a, b) .

(a) $f(x, y) = (x + y)^3, \quad n = 3, \quad (a, b) = (0, 0),$

(f) $f(x, y) = \frac{1}{1+xy}, \quad n = 3, \quad (a, b) = (0, 0),$

(b) $f(x, y) = (x + y)^3, \quad n = 3, \quad (a, b) = (1, 1),$

(g) $f(x, y) = \tan(2x - y), \quad n = 2, \quad (a, b) = (\pi/4, \pi/4),$

(c) $f(x, y) = \cos x \cos y, \quad n = 2, \quad (a, b) = (0, 0),$

(h) $f(x, y) = \cos(x^2y), \quad n = 2, \quad (a, b) = (0, 0),$

(d) $f(x, y) = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y^2}, \quad n = 2, \quad (a, b) = (1, 3),$

(i) $f(x, y) = \sqrt{2 + xy}, \quad n = 2, \quad (a, b) = (1, 2),$

(e) $f(x, y) = y \ln x - \sin(xy), \quad n = 1, \quad (a, b) = (1, \pi),$

(j) $f(\theta, v) = 1 - \cos \theta + \frac{1}{2}v^2, \quad n = 2, \quad (a, b) = (\pi, 0).$

Praktikum 14

Lagrange'i kordajate meetod Puutujatasand ja normaal, tuletis antud suunas

14.1 Lagrange'i kordajate meetod

Valem 14.1

Funktsiooni $f(x, y, \dots)$ tingliku (lokaalse või globaalse) ekstreemumi leidmiseks lisatingimusel $g(x, y, \dots) = 0$ Lagrange'i kordajate meetodil moodustame **Lagrange'i funktsiooni**

$$J(x, y, \dots, \lambda) = f(x, y, \dots) + \lambda g(x, y, \dots),$$

kus λ on mingi kordaja, ja lahendame süsteemi

$$J'_x = 0, J'_y = 0, \dots, J'_\lambda = g(x, y, \dots) = 0.$$

Ülesanne 14.1. Leidke vähim kaugus nullpunktist $(0, 0)$ jooneni $x^2y = 16$.

Ülesanne 14.2. Leidke vähim kaugus nullpunktist $(0, 0, 0)$ tasandini $x + 2y + 2z = 3$.

Ülesanne 14.3. Leidke Lagrange'i meetodiga järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud lisatingimustel.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y = 2;$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2};$

(c) $f(x, y) = 6 - 4x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 1;$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
 $(x, y, z > 0);$

(e) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9;$

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + 2z = 6, \quad x - y = 0;$

(g) $f(x, y, z) = xy + xz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad y + z = 2.$

Ülesanne 14.4. (F) Sõjalaevalt lastakse rakett välja horisontaalse algkiirusega V_x ja vertikaalse algkiirusega V_y .

Raketi laskekaugus on

$$R(V_x, V_y) = \frac{2V_x V_y}{g},$$

kus g on raskuskiirendus. Raketi kineetiline energia on fikseeritud:

$$\frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} = E.$$

Leidke raketi maksimaalne laskekaugus.

14.2 Pinna puutujatasand ja normaal

Pinna $z = f(x, y)$ puutujatasand punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub võrrandiga

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \quad (14.1)$$

Pinna $z = f(x, y)$ normaal punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a + t f_x(a, b), \\ y = b + t f_y(a, b), \\ z = f(a, b) - t. \end{cases} \quad (14.2)$$

Pinna $z = f(x, y)$ normaal punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x - a}{f_x(a, b)} = \frac{y - b}{f_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}. \quad (14.3)$$

Ülesanne 14.5. Leidke puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele märgitud punktis.

- | | |
|--|---|
| (a) $z = x \cos y - y e^x$ punktis $(0, 0, 0)$, | (f) $z = x^2 - y^2$ punktis, kus $x = -2$ ja $y = 1$, |
| (b) $z = \ln(x^2 + y^2)$ punktis $(1, 0, 0)$, | (g) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ punktis, kus $x = 1$ ja $y = 2$, |
| (c) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ punktis $(0, 0, 1)$, | (h) $z = \sin(xy)$ punktis, kus $x = \pi/3$ ja $y = -1$, |
| (d) $z = \sqrt{y - x}$ punktis $(1, 2, 1)$, | (i) $z = \cos(x/y)$ punktis, kus $x = \pi$ ja $y = 4$. |
| (e) $z = 4x^2 + y^2$ punktis $(1, 1, 5)$, | |

Ülesanne 14.6. Leidke järgmistel pindadel kõik punktid, kus puutujatasand on horisontaalne.

- | | |
|--|--|
| (a) $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$, | (c) $z = x^4 - 4xy + 6y^2 - 2$, |
| (b) $z = 3xy - x^3 - y^3$, | (d) $z = xy + a^3 x^{-1} + b^3 y^{-1}$. |

14.3 Tuletis antud suunas, gradient

Definitsioon 14.1

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ tuletiseks punktis (x, y, z) vektori s suunas nimetatakse piirväärtust

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Valem 14.2

Kui f on diferentseeruv punktis (a, b) ja s on vektor, mille suunakoosinused on $(\cos \alpha, \cos \beta)$ siis kehtib valem

$$\frac{\partial u}{\partial s} = s \cdot \nabla f(a, b) = f'_x(a, b) \cos \alpha + f'_y(a, b) \cos \beta.$$

Ülesanne 14.7. Leidke funktsiooni $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ muutumiskiirus punktis $(0, 1)$ ja suunas s , kui

- | | |
|---------------------|--------------------|
| (a) $s = (1, 2)$; | (c) $s = (3, 0)$; |
| (b) $s = (1, -2)$; | (d) $s = (1, 1)$. |

Valem 14.3

Igas punktis (x, y) , kus leiduvad funktsiooni $f(x, y)$ esimest järku osatuletised, saame vaadelda funktsiooni f **gradienti**

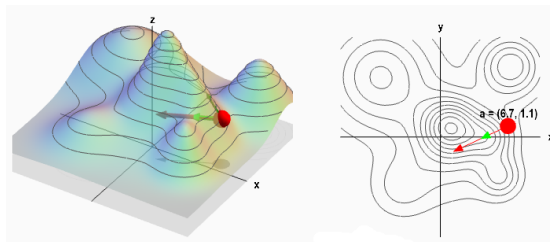
$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ **gradient** avaldub kujul

$$\nabla u = \text{grad } u = (f'_x, f'_y, f'_z).$$

Omadus 14.1

- Gradient on igas punktis risti pinna niivoojoonega.
- Gradient näitab pinna kiireima tõusu suunda ning suurima tõusu arvvärtus on $|\nabla f(x, y)|$.
- Gradiendi vastandvektor $-\nabla f(x, y)$ näitab pinna kiireima languse suunda ning suurima languse arvvärtus on $|\nabla f(x, y)|$.



Joonis : <http://mathinsight.org/>

Ülesanne 14.8. Leidke funktsiooni gradient antud punktis.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x, y) = 3x^4 - 2x + y^2 - 5, P(1, -2);$ | (d) $f(x, y, z) = (x + 2y - z)e^{xyz}, P(1, -1, 0);$ |
| (b) $f(x, y) = \cos(x + y), P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2});$ | (e) $f(x, y, z) = xye^z, P(e, e, -1);$ |
| (c) $f(x, y, z) = xy^2z^3, P(1, -1, -1);$ | (f) $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy + 3, P(1, -1).$ |

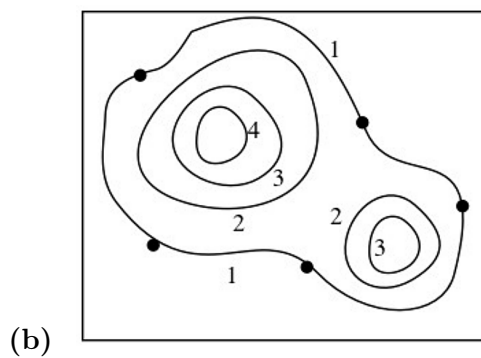
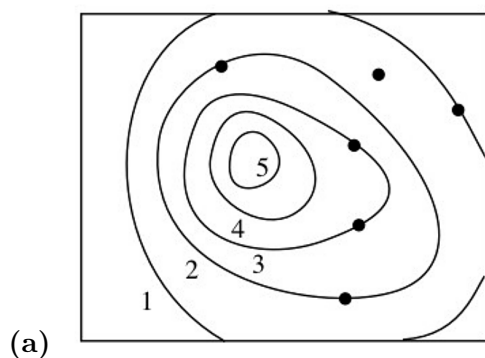
Ülesanne 14.9. Leidke funktsiooni suurim kasvukiirus antud punktis.

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x, y) = x^2 - y^2, P(2, -1);$ | (c) $f(x, y) = e^{xy}, P(2, 0);$ |
| (b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}, P(1, 1);$ | (d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), P(1, -2).$ |

Ülesanne 14.10. (F) Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi $^{\circ}\text{C}$) igas punktis xy -tasandil on $T(x, y) = x^2e^{-y}$. Millises suunas kasvab temperatuur punktis $(2, 1)$ kõige kiiremini?

Mis on see suurim kasvukiirus selles punktis?

Ülesanne 14.11. Näidake gradiendi suunad kontuurkaardil märgitud punktides. Milline on kiireima tõusuga trajektoor igast märgitud punktist?



14.4 Vähimruutude meetod *

Valem 14.4

Olgu meil antud komplekt andmeid $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, kus $n \in \mathbb{N}$. **Vähimruutude meetodiga** otsime sellist funktsiooni f , mis minimiseeriks funktsiooni

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2.$$

Näiteks, kui soovime antud andmeid lähendada sirgega $f(x) = ax + b$, siis vähimruutude meetodiga tuleks minimiseerida funktsioon

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Ülesanne 14.12. Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$; (c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$;
(b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$; (d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

Ülesanne 14.13. Leidke parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$; (c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$;
(b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$; (d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

Ülesanne 14.14. Leidke eksponentsiaalne funktsioon $f(x) = ae^{bx}$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(1, 16), (3, 17), (5, 18), (7, 20), (10, 22)$; (b) $(2, 13), (4, 9), (6, 6), (8, 4), (10, 3)$.

Ülesanne 14.15. Firma toote müüginumbrid (miljonites eurodes) esimese viie aasta jooksul on antud tabelina.

Aasta	1	2	3	4	5
Müük	0,9	1,5	1,9	2,4	3,0

- (a) Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud andmeid;
(b) Ennustage leitud sirge abil firma kuuenda aasta müüginumbrid.

Praktikum 15

Kahekordse integraali arvutamine

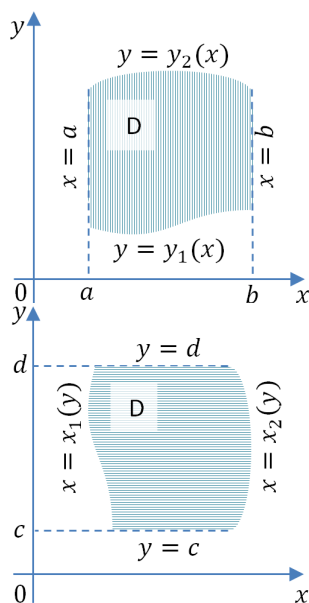
15.1 Kahekordse integraali arvutamine

Definitsioon 15.1

Funktsiooni $f(x, y)$ **kahekordseks integraaliks** üle piirkonna D nimetatakse tema integraalsumma piirväärtust, kui suurim osapiirkondade diameeter $\lambda \rightarrow 0$, kui see piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu piirkonna D osadeks jaotamise viisist ega punktide (x_i, y_i) valikust

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (15.1)$$

Valem 15.1



Kui $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (15.2)$$

Kui $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (15.3)$$

Ülesanne 15.1. Joonistage järgmised integreerimispiirkonnad D ning asetage integreerimisrajad kahekordses integraalis valemite (15.1) ja (15.2) järgi.

- (a) D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$;
- (b) D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$;
- (c) D on ristkülik tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$;
- (d) D on ring $x^2 + y^2 \leq 1$;
- (e) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 1$;
- (f) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = x^3$.

Ülesanne 15.2. Muutke integreerimisjärjekord järgmistes integraalides.

(a) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$;

(b) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$;

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx; & & + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx; \\
 \text{(d)} \quad & \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy; & & \text{(g)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy; \\
 \text{(e)} \quad & \int_{-2}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x, y) dy; & & \text{(h)} \quad \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy; \\
 \text{(f)} \quad & \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + & & \text{(i)} \quad \int_1^3 dx \int_{1+\sqrt{-x^2+4x-3}}^3 f(x, y) dy.
 \end{aligned}$$

Ülesanne 15.3. Leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iint_D x dx dy$, kus D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 1)$;
- (b) $\iint_D y dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $x = 1$ ja $y = x^2$;
- (c) $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = -x$, $y = 0$ ja $x = \pi$;
- (d) $\iint_D \cos(x - y) dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $y = x$ ja $x = \pi$;
- (e) $\iint_D e^{x-y} dx dy$, kus D on ristkülik $D = [0, \ln 4] \times [0, \ln 2]$;
- (f) $\iint_D \frac{\ln x}{xy} dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = 1$, $y = x$ ja $x = e$;
- (g) $\iint_D \frac{1}{x} dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $y = \ln x$ ja $x = e$;
- (h) $\iint_D x \sin(1 + x^2) \cos(1 + y^2) dx dy$, kus D on ristkülik $D = [-1, 1] \times [-1, 0]$;
- (i) $\iint_D (y - 2x^2) dx dy$, kus D on piiratud kinnise joonega $|x| + |y| = 1$;
- (j) $\iint_D xy dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = x$, $y = 2x$ ja $x + y = 2$.

Ülesanne 15.4. Määratud integraali arvutamine kahekordse integraali abil.

Arvutage järgmine integraal, esitades integraalialune funktsioon integraali kujul.

$$\int_0^2 (\arctan \pi x - \arctan x) dx,$$

Praktikum 16

Muutujate vahetus kahekordses integraalis Üleminek polaarkoordinaatidele

16.1 Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Valem 16.1

Kui $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, kus $(u, v) \in \Delta$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (16.1)$$

kus $J(u, v)$ on teisenduse jakobiaan, $J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$.

Ülesanne 16.1. Leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iint_D (2x + y - 2)^2 dx dy$, kus $D = \{(x, y) : -1 \leq x - y \leq 1, -1 \leq 2x + y \leq 2\}$;
- (b) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ ja $3x + 4y = 6$;
- (c) $\iint_D (y - x) dx dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + 2$ ja $y = -\frac{x}{3} + 4$;
- (d) $\iint_D dx dy$, kus D on piirkond, mis asub esimeses veerandis ja on piiratud joontega $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$ ja $y = x$.

16.2 Üleminek polaarkoordinaatidele

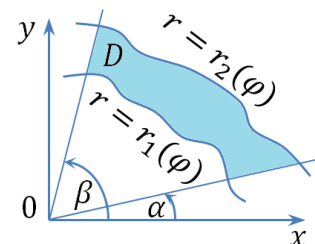
Valem 16.2

Üleminek polaarkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \Delta = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

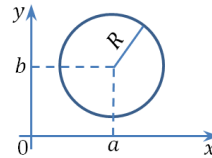
teisenduse jakobiaan $J(r, \varphi) = r$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \quad (16.2)$$

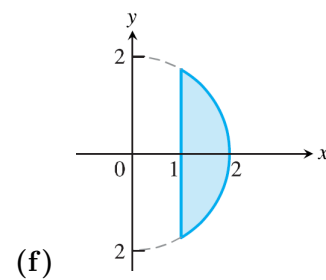
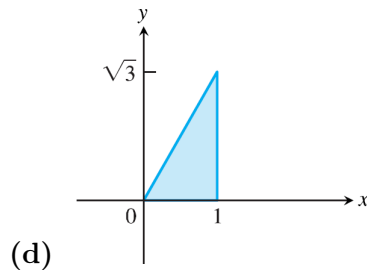
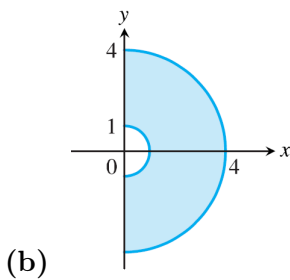
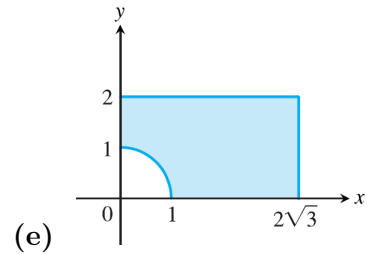
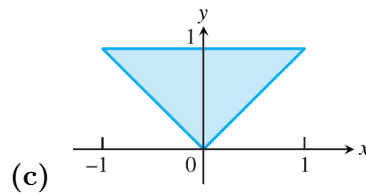
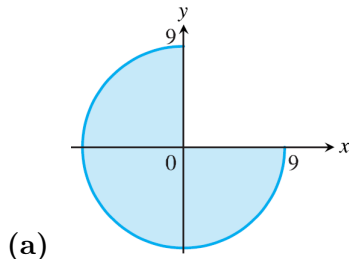


Valem 16.3

Ringjoone võrrand: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$



Ülesanne 16.2. Esitage järgmised piirkonnad polaarkoordinaatides.



Ülesanne 16.3. Leidke järgmised integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele.

(a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$;

(d) $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $\iint_D dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -\sqrt{2}\}$;

(e) $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$;

(c) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$;

(f) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Ülesanne 16.4. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$;

$D = \{(x, y) : x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\}$;

(b) $\iint_D x dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$;

(e) $\iint_D y dx dy$, kus $D = \{(x, y) : 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$;

(c) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$;

(f) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, y = -x (y \leq -x)$;

(d) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kus

(g) $\iint_D dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0, y = \sqrt{2 - x^2}, x = y^2 (x \geq y^2)$.

Praktikum 17

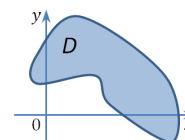
Kahekordse integraali rakendused

17.1 Kahekordse integraali geomeetrilised rakendused

17.1.1 Tasandilise kujundi pindala

Valem 17.1

Tasandilise kujundi D pindala: $S_D = \iint_D dx dy$



Ülesanne 17.1. Leidke xy -tasandil asetsevate kujundite pindalad, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega.

(a) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$;

(b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$;

(c) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 4$;

(d) $xy = 4$, $x + y = 5$;

(e) $3x^2 = 25y$, $5y^2 = 9x$;

(f) $x^2 + y^2 = 16$;

(g) $r = a \cos \varphi$, $r = b \cos \varphi$, ($b > a > 0$);

(h) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioid);

(i) $r = 2 \cos 4\varphi$ (kaheksaleheline roos);

(j) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$;

(k) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (Bernoulli lemniskaat);

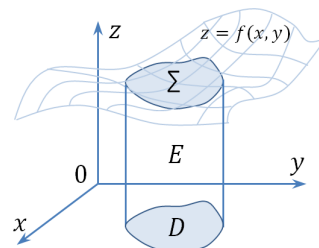
(l) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$.

17.1.2 Keha ruumala. Ruumilise pinnatüki pindala

Valem 17.2

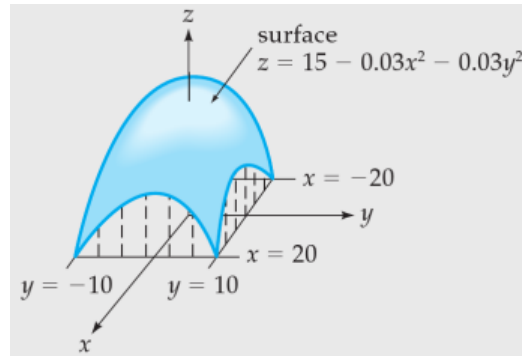
Keha E ruumala: $V_E = \iint_D f(x, y) dx dy$

Ruumilise pinnatüki Σ pindala: $S_\Sigma = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$



Ülesanne 17.2. Külgsentega kuppeltelk on konstrueeritud joonisel näidatud funktsiooni järgi.

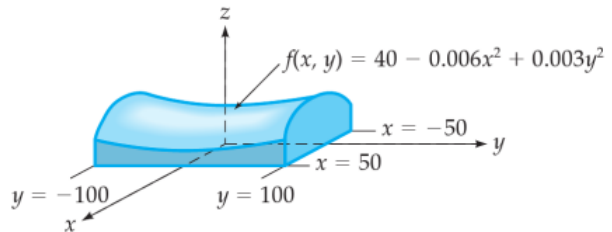
Et projekteerida ventilatsiooni- ja küttesüsteemi, on tarvis teada telgi ruumala. Leidke kuppeltelgi ruumala, kui tema põhjaks on joonisel märgitud ristkülik (kõik mõõtmed on antud jalgades, $1 \text{ ft} \approx 0,3 \text{ m}$).



Ülesanne 17.3. Konverentsikeskusel on lookas katus kõrgusega

$$f(x, y) = 40 - 0,006x^2 + 0,003y^2.$$

Ehitise põhjaks on ristkülik $[-50, 50] \times [-100, 100]$. Leidke maja ruumala. (Kõik suurused on antud meetrites.)



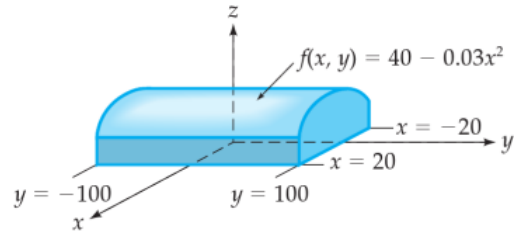
TEIST JÄRKU PINNAD

Ellipsoid	Elliptiline paraboloid	Hüperboolne paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ $-z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$
Ühekattene hüperboloid	Kahekattene hüperboloid	Elliptiline koonus
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Ülesanne 17.4. Lennukite angaar on kumera katusega, mille kuju on määratud funktsiooniga

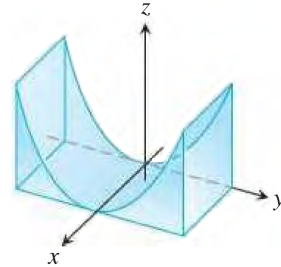
$$f(x, y) = 40 - 0,03x^2.$$

Leidke angaari ruumala, kui tema põhjaks on ristkülik $[-20, 20] \times [-100, 100]$. (Kõik suurused on antud meetrites.)

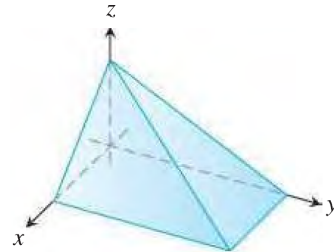


Ülesanne 17.5. Leidke keha E ruumala, kui see on tõkestatud järgmiste pindadega.

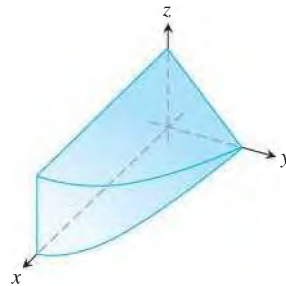
(a) $z = y^2, x = 0, x = 1, y = -1, y = 1, z = 0$



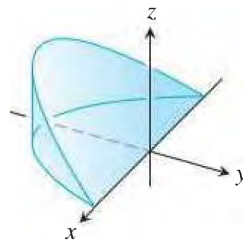
(b) $x + z = 1, y + 2z = 2 \quad (x, y, z \geq 0)$



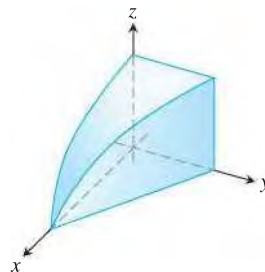
(c) $y + z = 2, x = 4 - y^2 \quad (x, y, z \geq 0)$



(d) $x^2 + y^2 = 1, z = -y, z = 0$



(e) $y = 1 - x, z = \cos(\pi x/2), 0 \leq x \leq 1$



(f) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, x + z = 3$



Ülesanne 17.6. Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E .

- (a) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.
- (b) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$ ja $y = 4$ ning pöördparaboloid $z = x^2 + y^2 + 1$.
- (c) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y = 1$ ning elliptiline paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$.
- (d) Tasandid $z = 0$ ja $x + z = 6$ ning silindrid $y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$.
- (e) Tasand $z = 0$, pöördparaboloid $z = x^2 + y^2$ ja silinder $x^2 + y^2 = 1$.
- (f) Koordinaattasandid, silinder $x^2 + y^2 = 1$ ja pind $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, kus $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.
- (g) Tasandid $x = 1$, $y = 0$ ja $z = 0$ ning hüperboolne paraboloid $z = x^2 - y^2$.
- (h) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + 3y = 12$ ning silinder $y^2 = 2z$.
- (i) Tasandid $z = 1$ ja $z = 12 - 3x - 4y$ ning elliptiline silinder $x^2 + 4y^2 = 4$.
- (j) Sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ja pöördparaboloid $2z = x^2 + y^2$.
- (k) Silindrid $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + z^2 = 1$.
- (l) Pöördparaboloidid $z = 4 - x^2 - y^2$ ja $2z = 2 + x^2 + y^2$.
- (m) Silinder $x^2 + y^2 = 3$ ja kahekatteline hüperboloid $z^2 = x^2 + y^2 + 3$.
- (n) $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{\pi}{2}$ ja $|x - y| \leq \frac{\pi}{2}$.

Ülesanne 17.7. Leidke järgmiste ruumiliste pindade märgitud osade pindalad.

- (a) Tasandi $6x + 3y + 2z = 12$ osa, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$.
- (b) Pinna $z = xy$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 1$ sees.
- (c) Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis on silindri $x^2 + y^2 = b^2$ ($b < a$) sees.
- (d) Koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ osa, mille eraldab temast silindriline pind $z^2 = 2y$.
- (e) Silindri $z^2 = 4x$ osa, mille eraldavad temast silinder $y^2 = 4x$ ja tasand $x = 1$.
- (f) Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mille lõikab temast välja silinder $x^2 + y^2 = ax$.
- (g) Koonuse $x^2 = y^2 + z^2$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 2$ sees.

Ülesanne 17.8. Leidke joonega $y^4 = a^2(y^2 - 2x^2)$ piiratud kujundi pindala.

17.2 Kahekordse integraali füüsikalised rakendused

17.2.1 Tasandilise kujundi mass

Valem 17.3

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$. Kujundi D mass avaldub valemiga

$$m_D = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Ülesanne 17.9. Leidke ringi mass, kui ringi raadius on 10 cm.

Ringjoonel on pindtihedus $1,2 \text{ g/cm}^2$ ning see on võrdeline punkti kaugusega ringi keskpunktist.

Ülesanne 17.10. Leidke ruudukujulise plaadi mass, kui plaadi külje pikkus on $2a$ cm.

Plaadi materjali tihedus on igas punktis võrdeline punkti kauguse ruuduga diagonaalide lõikepunktist ning on ruudu tippudes 1 g/cm^2 .

Ülesanne 17.11. Funktsioon

$$f(x, y) = \frac{10000e^y}{1 + \frac{|x|}{2}} \frac{\text{bakter}}{\text{cm}^2}$$

kirjeldab mingi bakteri populatsiooni tihedust xy -tasandil, kus x ja y mõõdetakse sentimeetrites.

Leidke bakterite arv ristkülikul $[-5, 5] \times [-2, 0]$.

Ülesanne 17.12. Elektrilaengu pindtihedus kettal raadiusega R meetrit on $\rho(r, \varphi) = kr(1 - \sin \varphi) \text{ C/m}^2$ (siin k on konstant).

Integreerige pindtiheduse funktsiooni üle ketta, et leida elektrilaeng Q .

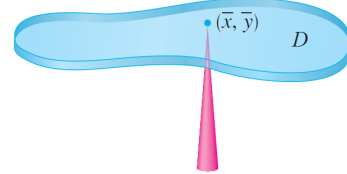
17.2.2 Tasandilise kujundi massikesk

Valem 17.4

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Kujundi D massikesk asub punktis $C = (\bar{x}, \bar{y})$, kus

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m_D} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ \bar{y} = \frac{1}{m_D} \iint_D y \rho(x, y) dx dy \end{cases}$$



Ülesanne 17.13. Leidke bumerangi kujulise piirkonna massikesk, kui see asub xy -tasandil paraboolide $y^2 = -4(x - 1)$ ja $y^2 = -2(x - 2)$ vahel.

Ülesanne 17.14. Leidke xy -tasandil asetsevate homogeensete kujundite massikeskme $C = (\bar{x}, \bar{y})$ koordinaadid, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega

- | | |
|--|--|
| (a) Ringjoon $x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$) ja sirgjoon $y = 0$. | (d) Kardoid $r = 2(1 + \cos \varphi)$ ja polaartelg $\varphi = 0$. |
| (b) Sinusoid $y = \sin x$ ja sirged $x = 0$, $x = \pi/4$ ja $y = 0$. | (e) x -telg ja tsükloid $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ kaar, kui $0 \leq t \leq 2\pi$. |
| (c) Jooned $y = x^2$ ja $x + y = 2$. | |

Ülesanne 17.15. Leidke ringi $x^2 + y^2 \leq 4$ massikeskme koordinaadid, kui pindtihedus ringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega punktist $(2, 0)$.

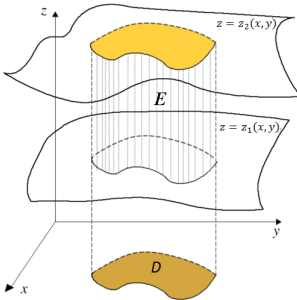
Ülesanne 17.16. Leidke poolringi $x^2 + y^2 \leq 1$ massikeskme koordinaadid, kui pindtihedus poolringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega ruuduga punktist $(1, 0)$.

Praktikum 18

Kolmekordsed integraalid

18.1 Kolmekordse integraali arvutamine

Valem 18.1

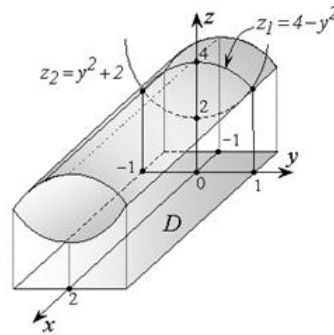


Kui $E = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$,
siis

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (18.1)$$

Ülesanne 18.1. Leidke integraal $\iiint_E xz dx dy dz$,

kus piirkond E on piiratud silindriliste pindadega
 $z_1 = 4 - y^2$, $z_2 = y^2 + 2$ ja tasanditega $x = -1$, $x = 2$.



Ülesanne 18.2. Leidke järgmised integraalid.

- $\iiint_E x^2 y z^2 dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$;
- $\iiint_E y dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y\}$;
- $\iiint_E (z + 4) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$;
- $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1 - x - y}$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4\}$;
- $\iiint_E (1 - x^2) \sqrt{1 - y^2} dx dy dz$, kus $E = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$;
- $\iiint_E xy^2 z^3 dx dy dz$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $z = 0$;

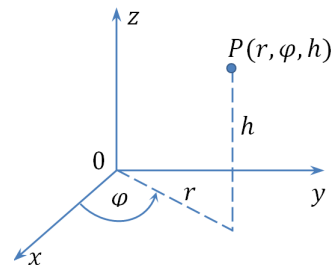
- (g) $\iiint_E (2x + 3y - z) dx dy dz$, kus E on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ ja $x + y = 2$.

18.2 Üleminek silinderkoordinaatidele

Valem 18.2

Üleminek silinderkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases}, \text{ teisenduse jakobiaan } J(r, \varphi, h) = r$$



Ülesanne 18.3. Üleminekuga silinderkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iiint_E z dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $z = 2$;
- (b) $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1 + (z - 1)^2}$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$;
- (c) $\iiint_E xz dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ ja $y = x\sqrt{3}$;
- (d) $\iiint_E y dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, tasandiga $z = 0$ ja paraboloidiga $z = x^2 + y^2$;
- (e) $\iiint_E z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$ ($y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0$, $z = c$ ja $y = 0$;
- (f) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0\}$;

Praktikum 19

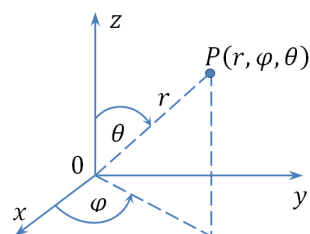
Sfäärilised koordinaadid. Kolmekordse integraali rakendused

19.1 Üleminek sfäärkoordinaatidele

Valem 19.1

Üleminek sfäärkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \text{ teisenduse jakobiaan } J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$$



NB! $0 \leq \theta \leq \pi$

Ülesanne 19.1. Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud sfääri osaga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($y \geq 0, z \geq 0$) ja tasanditega $y = 0$ ja $z = 0$;
- (b) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$;
- (c) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$;
- (d) $\iiint_E \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;
- (e) $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$;
- (f) $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

19.2 Kolmekordse integraali rakendusi

19.2.1 Keha ruumala leidmine

Valem 19.2

Keha E ruumala V_E avaldub valemiga

$$V_E = \iiint_E dx \, dy \, dz. \quad (19.1)$$

Ülesanne 19.2. Leidke kehade ruumalad, kui nad on piiratud järgmiste pindadega.

- (a) Silindrid $z = 9 - y^2$ ja $z = 1 + y^2$ ning tasandid $x = -1$ ja $x = 5$;
- (b) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$ ning silinder $x^2 + y^2 = 1$;
- (c) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = x^2 + 2y^2$ ning tasandid $x = 1$, $y = x$ ja $y = 2x$;
- (d) Silindrid $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ ning tasandid $z = 0$ ja $z = 9$;
- (e) Hüperboolne paraboloid $z = xy$ ning tasandid $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ ja $x + y = z$;
- (f) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$, silinder $y = x^2$ ning tasand $y = x$;
- (g) Pind $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z$, $a > 0$;

Ülesanne 19.3. Poolkerakujuline tass on täidetud piimaga nii, et ülemise servani jääb puudu 3 cm.

Kui palju piima (liitrides) on tassis?

Ülesanne 19.4. Ringbasseini diameeter on 15 meetrit.

Kui palju vett mahub sellesse basseini, kui põhjast lõunasse on tema sügavus on konstantne ja läänest itta kahaneb lineaarselt kahest meetrist seitsmeni?

Ülesanne 19.5. Kauss on funktsiooni $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 25$) graafiku kujuga.

Teie planeerite kalibreerida kaussi nii, et teha sellest sadememõõturit. Milline kõrgus vastab 2 cm sademete hulga? 6 cm sademete hulga?

19.2.2 Keha mass ja massikese.

Valem 19.3

Olgu keha tihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in E$.

Keha E mass võrdub $m_E = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz$.

Keha E massikese $C = (x_c, y_c, z_c)$ asub punktis

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{cases} .$$

Ülesanne 19.6. Leidke kuubi $E = [0, 10]^3$ mass, kui kuubi tihedus igas punktis on $\rho(x, y, z) = z$.

Ülesanne 19.7. Leidke risttahuka $E = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui tihedus igas tema punktis on $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Ülesanne 19.8. Leidke tasanditega $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdne punkti aplikaadiga.

Ülesanne 19.9. Leidke kera mass, kui kera raadius on a ja kera igas punktis tiheduse ruut $\rho^2 = a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Ülesanne 19.10. Leidke silindri $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq c\}$ mass, kui tihedus igas tema punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga silindri teljest.

Ülesanne 19.11. Leidke kera kihi $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ mass, kui kihi tihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega punktist $(0, 0, 0)$.

Ülesanne 19.12. On teada, et kerakujulise planeedi raadius on R ja tema mass on m .

Planeedi tihedus on sümmeetriline kera keskpunkti suhtes ning kahaneb lineaarselt planeedi pinna suunas. Millega võrdub tihedus keskpunktis, kui planeedi pinnal on see võetud võrdseks nulliga?

Ülesanne 19.13. Kerakujuline planeet raadiusega R omab atmosfääri tihedusega $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, kus h on kõrgus planeedi pinna kohal, μ_0 on tihedus merepinnal ja c on positiivne konstant.

Leidke selle planeedi atmosfääri mass.

Ülesanne 19.14. Leidke homogeensete kehade masskeskme koordinaadid, kui kehad on piiratud järgmiste pindadega.

- (a) $x + y + z = 4, x = 0, y = 0, z = 0;$ (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x > 0, y > 0,$
(b) $z^2 = xy, x = 1, y = 1, z = 0;$ $z > 0), x = 0, y = 0, z = 0.$

Ülesanne 19.15. Leidke poolkera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 (z \geq 0)$ masskeskme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on arvuliselt võrdne punkti kaugusega kera keskpunktist.

20.1 Esimest liiki joonintegraalid

Omadus 20.1

Esimest liiki joonintegraal ei sõltu integreerimistee AB läbimise suunast.

Valem 20.1

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$$AB : y = y(x), a \leq x \leq b : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (20.1)$$

$$AB : x = x(y), c \leq y \leq d : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x')^2} dy \quad (20.2)$$

$$AB : r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \quad (20.3)$$

$$AB : x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad (20.4)$$

kus $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$

Valem 20.2

Ruumilise joonintegraali arvutamine

$$AB : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (20.5)$$

Ülesanne 20.1. Arvutage järgmised integraalid

- (a) $\int_{AB} \frac{ds}{x-y}, AB : y = x/2 - 2, A = (0, -2), B = (4, 0);$
- (b) $\int_{AB} \frac{2x+y}{y} ds, AB : 2x + y + 1 = 0, A = (1, -3), B = (0, -1);$
- (c) $\int_{AB} xy ds, AB : x = \cos t, y = \sin t, A = (1, 0), B = (0, 1);$
- (d) $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} ds, AB : x^2 + y^2 = a^2 (x > 0), A = (a, 0), B = (0, a);$
- (e) $\int_L (x-y) ds, L : x^2 + y^2 = 2x;$
- (f) $\int_L xy ds,$ kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $A = (0, 0), B = (4, 0), C = (4, 2), D = (0, 2);$

(g) $\int_L \frac{3z^2 ds}{x^2 + y^2}$, kus L on krüvijoone esimene keerd: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

20.1.1 Esimest liiki joonintegraali rakendus

Valem 20.3

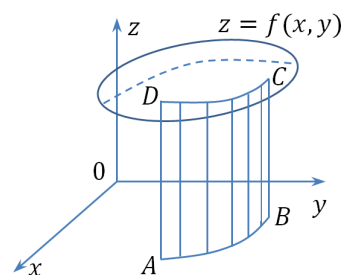
Joone kaare pikkus:
$$\ell_{AB} = \int_{AB} ds$$

Valem 20.4

Silinderpinna pindala:

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x, y) ds,$$

kus $f(x, y) \geq 0$ joonel AB



Ülesanne 20.2. Leidke järgmiste joonte pikkused

(a) $r = e^\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$;

(b) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3, A = (0, 0, 0), B = (3, 3, 2)$.

Ülesanne 20.3. Leidke vertikaalsete silinderpindade pindala, kui pindade alumised servad asetsevad xy -tasandil ja ülemine serv on järgmiste pindade lõikejoon

(a) $y + x = 1$ ($x \geq 0$), $z = y$;

(c) $x^2 + y^2 = 16, z = y$.

(b) $x^2 + y^2 = 4, 2z = x^2 + 4$;

Ülesanne 20.4. Leidke silinderpinna $x^2 + y^2 = 2x$ selle osa pindala, mis asub kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sees.

20.2 Teist liiki joonintegraalid*

Omadus 20.2

Teist liiki joonintegraal muudab märki integreerimise läbimissuuna muutmisel:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Definitsioon 20.1

L_+ - kinnise joone L läbimise **positiivne suund** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ kellaosuti liikumisele vastupidine suund (kui vaadata z -telje positiivselt poolelt xy -tasandile)

Valem 20.5

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$$AB : y = y(x), a \leq x \leq b : \int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx \quad (18.6)$$

$$AB : x = x(y), c \leq y \leq d : \int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy \quad (18.7)$$

$$AB : x = x(t), y = y(t) \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) x'(t) dt \quad (18.8)$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) y'(t) dt \quad (18.9)$$

Valem 20.6

Ruumilise joonintegraali arvutamine

$$AB : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) x'(t) dt \quad (18.10)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) y'(t) dt \quad (18.11)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) z'(t) dt \quad (18.12)$$

Ülesanne 20.5. Arvutage integraalid

(a) $\int_{AB} xy dx$, $AB : y = \sin x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, 0)$;

(b) $\int_{AB} y dx$, $AB : 2y + x = 4$, $A = (4, 0)$, $B = (0, 2)$;

(c) $\int_{AB} y dx$, $AB : x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;

(d) $\int_L x dy$, L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 2)$;

(e) $\int_L (x^2 + y^2) dx$, L on kontuur, mille moodustavad sirged $x = 1$, $x = 5$, $y = 1$, $y = 3$;

(f) $\int_{AB} \cos y dx + \sin x dy$, $AB : y = x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, \pi)$;

(g) $\int_L y dx + x dy$, $L : x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;

(h) $\int_{AB} y dx + z dy + x dz$, $AB : x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

20.2.1 Teist liiki joonintegraali rakendusi

Valem 20.7

Kui tasandiline kujund D on piiratud kinnise joonega L , siis tema pindala avaldub valemitega

$$S_D = \int_L x dy = \int_L (-y) dx = \frac{1}{2} \int_L (-y) dx + x dy.$$

Valem 20.8

Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punktini B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimel. Jõu \vec{F} töö on arvutatav valemiga

$$W = m \int_{AB} P dx + Q dy + R dz.$$

Ülesanne 20.6. Leidke xy -tasandil olevate tasandiliste kujundite pindalad, kui nad on piiratud järgmiste joontega.

- (a) ellips $x = a \cos t$, $y = b \sin t$; (c) astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
 (b) $y = x^2$, $x = y^2$; (d) kardioid $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Ülesanne 20.7. Olgu xy -tasandil jõud \vec{F} suunatud igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist O .

Leidke jõu töö W , mis on kulunud ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2, 4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

Ülesanne 20.8. Jõud konstantse suurusega F on xy -tasandi igas punktis x -telje suunaline.

Leidke jõu töö W , mis kulub ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0, a)$ punkti $(a, 0)$.

Ülesanne 20.9. Jõud \vec{F} on suunatud xy -tasandi igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus on võrdne punkti M kaugusega punktist O .

Leidke jõu \vec{F} töö W punkti massiga m nihutamisel punktist A punkti B .

21.1 Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Osatuletised ja rakendused

- 1.1. Mitme muutuja funktsiooni esimest ja kõrgemat järku osatuletised (10.2, 10.13, 10.15, 10.17)
- 1.2. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali leidmine, funktsiooni muudu ja funktsiooni väärtuse ligikaudne leidmine täisdiferentsiaali abil (12.1, 12.5, 12.14)
- 1.3. Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, optimiseerimine (13.2, 13.4, 13.15)
- 1.4. Tuletis antud suunas, gradiendi leidmine, funktsiooni suurima kasvukiiruse ja suurima langemiskiiruse leidmine gradiendi abil (14.7, 14.8, 14.9)

2. Kahekordsed integraalid

- 2.1. Kahekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek polaarkoordinaatidele (15.3, 16.3, 16.4)
- 2.2. Tasandilise kujundi pindala ja keha ruumala leidmine kahekordse integraali abil (17.1, 17.2-17.6)

3. Kolmekordsed integraalid

- 3.1. Kolmekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek silinderkoordinaatidele (18.2, 18.3)
- 3.2. Keha ruumala leidmine kolmekordse integraali abil (19.2)

Praktikum 22

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 22.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitava funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 22.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon $y = f(x)$ sõltub ühest argumendist x .

22.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 22.3

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.

Ülesanne 22.1. Näidake, et antud funktsioon on temale järgneva diferentsiaalvõrrandi lahendiks.

(a) $y = x, y' = y + 1 - x$

$$x(\ln(x) - \ln(y))dy - ydx = 0$$

(b) $y = \frac{\sin(x)}{x}, xy' + y = \cos(x)$

(f) $\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(p) \\ y = \sin(p) \end{array} \right\}, x + y \frac{dy}{dx} = 0$

(c) $y = e^{\arcsin(2x)}, xy' = y \tan(\ln(y))$

(d) $x = y \int_0^y \frac{\sin(t)}{t} dt, y \frac{dx}{dy} = x + y \sin(y)$

(g) $\left\{ \begin{array}{l} x = \ln(p) + \sin(p) \\ y = p(1 + \sin(p)) + \cos(p) \end{array} \right\},$

(e) $x = ye^{y+1},$

$$x = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Ülesanne 22.2. Leidke antud võrrandite i) ja ii) ühised lahendid.

(a) i) $y' = y + 1$, ii) $y' = e^x$

(b) i) $y' = y^2 + 2x - x^4$, ii) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

(c) i) $y' = x$, ii) $y' = y + x$

22.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 22.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles dx kordaja $f(x)$ sõltub ainult muutujast x ja dy kordaja $g(y)$ sõltub ainult muutujast y .

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$. Võrrandi lahend ilmutamata kujul on

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

kus C on suvaline konstant

Definitsioon 22.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

milles dx ja dy kordajad on kahe antud funktsiooni korrutised, millest üks sõltub ainult muutujast x ja teine sõltub ainult muutujast y .

Muutujate eraldamiseks jagame võrrandi mõlemad pooli järgmise avaldisega (tuleb jagada läbi dx kordajaga $g_1(y)$, sest ta sõltub muutujast y ja dy kordajaga $f_2(x)$, sest ta sõltub muutujast x ehk nende funktsioonide korrutisega, mis sisaldavad teist muutujat, kui on diferentsiaal)

$$| : g_1(y) \cdot f_2(x)$$

Saame eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Erilahendi saamiseks asendame üldlahendisse algtingimuse ja avaldame saadud võrdusest konstandi C .

Ülesanne 22.3. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' = e^{2x-y}$

(d) $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$

(b) $2x\sqrt{1-y^2} + yy' = 0$

(e) $(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1$

(c) $y' = \frac{y-1}{x+1}$

(f) $\sin x dy - y \cos x dx = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Ülesanne 22.4. (K) Leida raadiumi massi muutumise seadus sõltuvalt ajast, kui ajamomendil $t = 0$ on raadiumi mass m_0 .

Olgu ajamomendil t raadiumi mass m , ajamomendil $t + \Delta t$ vastavalt $m + \Delta m$.

Ajavahemikus Δt lagunenu raadiumi mass on Δm . Suhe $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ on keskmine raadiumi lagunemiskiirus. Selle suhte piirväärtus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

on raadiumi lagunemise kiirus ajamomendil t . Radioaktiivse aine lagunemise seadus ütleb, et lagunemise kiirus on võrdeline (veel lagunemata) aine hulgaga m .

Lahendage raadiumi lagunemisele vastav diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

kus $k > 0$ on võrdetegur. Miinusmärk näitab, et aja kasvades raadiumi mass kahaneb.

Ülesanne 22.5. (F) Leidke, palju jääb soola 1000 liitris mahutis olevasse soolvee lahusesse 40 minuti pärast.

Olgu algselt soola soolalahuses 50 kilogrammi. Lahusele lisatakse konstantse kiirusega 10 liitrit minutis soolvett, mis sisaldab 10 grammi soola liitri vee kohta.

Samal ajal voolab lahus ka mahutist välja kiirusega 10 liitrit minutis, lahus segatakse mahutis ja lahuse hulk mahutis on püsivalt 1000 liitrit. Olgu otsitav soola kogus kilogrammides ajahetkel t tähistatud $x(t)$, siis soola on ajahetkel t mahutis $\frac{x(t)}{1000}$ kilogrammi liitri kohta.

22.3 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 22.6

Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.

Lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on antud pidevad funktsioonid vahemikus (a, b) ja $y = y(x)$ on otsitav.

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub valemiga

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod):

a) Lahendame vastava homogeense võrrandi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0,$$

saadud üldlahendis

$$y_h = Ce^{-\int P(x)dx}$$

asendame integreerimiskonstandi C , uue otsitava funktsiooniga $C(x)$

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

b) Leiame tuletise otsitavast funktsioonist, arvestades, et $C(x)$ sõltub argumentidist x

c) Asendame lineaarsesse võrrandisse y ja y' , lahendades leiame otsitava $C(x)$.

Ülesanne 22.6. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - y = x - 1$

(g) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(b) $xy' + y = 3x^2$

(h) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $x^2y' + xy = -1$

(i) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

(d) $x(\ln|x|)y' - y \ln|x| = x$

(j) $(xy + e^x)dx = xdy$

(e) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

(k) $y' + y \cos x = \cos x, y(0) = 1$

(f) $y' - y \cot x = 2x \sin x$

(l) $x(\ln x)y' + y = 2 \ln x, y(e) = 0$

Ülesanne 22.7. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktsoonipool induktiivsusega L .

Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktsoonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a \sin(\omega t)$.

Ülesanne 22.8. Kas järgnevatel mittelineaarsetel diferentsiaalvõrranditel on lahendeid? Põhjendage oma otsust ja nimetage leiduvad lahendid.

(a) $(y')^2 + y^2 = 0$

(b) $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$

Praktikum 23

Homogeensed diferentsiaalvõrrandid Murdlineaarset funktsiooni sisaldavad diferentsiaalvõrrandid

23.1 Homogeensed funktsioonid

Definitsioon 23.1

Olgu D mingi piirkond xy -tasandil, mis koos iga punktiga $(x, y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$. Sellises piirkonnas määratud funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse **k -astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x, y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

kus k on reaalarv ja $t > 0$.

Ülesanne 23.1. Leidke järgmiste funktsioonide jaoks homogeensuse aste k .

(a) $f(x, y) = \frac{x + y}{y - x}$

(c) $z = x^2 + y^2 - xy$

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \log \frac{x}{y}$

(d) $z = x^2 \sqrt{y} - y^{\frac{5}{2}}$

(e) $z = \frac{x + y}{x^2 - y^2}$

23.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 23.2

Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit $y' = f(x, y)$, kui $f(x, y)$ on 0-astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), t > 0.$$

Homogeenne diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul $y' = f(y/x)$ ja taandub eralduvate muutujatega võrrandiks muutuja vahetusega

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = z \cdot x,$$

kus

$$z = z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}.$$

Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks taandub võrrand kujul $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, kus $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ on ühe ja sama astme homogeensed funktsioonid. Võrrand tuleb läbi jagada argumendi x sellise astmega, mis on võrdne võrrandis oleva argumendi y kõrgeima astmega.

Ülesanne 23.2. Leidke antud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $y(x - y)dx = x^2 dy$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$

(b) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

(c) $xyy' = x^2 + y^2$

(f) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

(d) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

Ülesanne 23.3. (F) Päikesekiirte koondamise ülesanne. Leidke, millise kujuga peegel peegeldab paralleelsed kiired ühte punkti.

Tegemist on pöördpinnaga, mille telg on paralleelsete kiirte sihiline. Valime koordinaatteljestiku nii, et kiired tuleksid x telje suunast ja ning peegelduksid koordinaatide algusesse. Leidke joon $y = y(t)$, mille pöörlemisel ümber x telje tekib kõnealune pöördpind, kui vastav diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

23.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$y' = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right).$$

Kui $a_3 = b_3 = 0$, siis võrrand on homogeenne võrrand.

Võrrand teisendub homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks, kui determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0.$$

Muutuja vahetus on järgmine:

$$x = X + u, y = Y + v,$$

Diferentsiaalid on $dx = dX, dy = dY$. Saadud võrrand on homogeenne muutujate X ja Y suhtes. Konstandid u ja v leiame eeldusel, et vabaliikmed oleksid nullid:

$$\begin{aligned} a_1u + a_2v + a_3 &= 0; \\ b_1u + b_2v + b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Kui $D = 0$, siis muutuja vahetusega $z = a_1x + a_2y$ teisendub võrrand eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks

Ülesanne 23.4. Lahendage antud homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks teisenduvad võrrandid.

(a) $(x + y + 1)dx - (x - 1)dy = 0$

(c) $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$

(b) $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$

(d) $(x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0$

Ülesanne 23.5. Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand.

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$$

Ülesanne 23.6. Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand.

$$(y' + 1) \ln\left(\frac{y + x}{x + 3}\right) = \frac{y + x}{x + 3}$$

Praktikum 24

Bernoulli diferentsiaalvõrrand Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid Numbrilised meetodid

24.1 Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Definitsioon 24.1

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^a,$$

kus P ja Q on teadaolevad argumendi x funktsioonid, mis on pidevad vahemikus (c, d) ning a on mingi reaalarv, $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest siis on võrrand lineaarne).

Bernoulli võrrand on teisendatav lineaarseks võrrandiks järgmiselt:

a) jagame võrrandit suurusega $| : y^a$

b) teeme muutuja vahetuse $z = y^{1-a}$; $z' = (1-a)y^{-a}y'$

Ülesanne 24.1. Leidke antud Bernoulli diferentsiaalvõrrandi üldlahend (taandada lineaarseks võrrandiks).

(a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

(b) $3y^2y' + y^3 = 1$

(c) $y' + 2y = y^2e^x$

(d) $(x+1)(y' + y^2) = -y$

(e) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

(f) $y' = (y + y^2)\cos x$

(g) $y' = y^4\cos^3 x + y\tan x$

(h) $xy^2dy = (x^2 + y^3)dx$

(i) $xydy = (y^2 + x)dx$

Ülesanne 24.2. Leidke Bernoulli diferentsiaalvõrrandi $(xy + x^2y^3)dy = dx$ üldlahend.

24.2 Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 24.2

Diferentsiaalvõrrandit kujul

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

nimetatakse **eksaktseks** ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, nii et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Kui teadaolevad funktsioonid M ja N ning nende osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ on pidevad muutujate x, y mingis piirkonnas D , siis võrrandi eksaktseks piirkonnas D on tarvilik ja piisav, et iga $(x, y) \in D$ korral kehtib võrdus

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Eksaktse võrrandi võib kirjutada ka kujul $du(x, y) = 0$, millest $u(x, y) = C$.

Leiame funktsiooni $u(x, y)$ nii, et kehtivad võrdused

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Lahendus:

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y),$$

kus $C(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y . Valime $C(y)$ nii, et oleks täidetud ka teine pool seosest, ehk

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Ülesanne 24.3. Leidke antud eksaktse diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

(h) $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$

(b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

(i) $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$

(c) $(y^3 - x)y' = y$

(j) $(y^3 - x)dy = ydx$

(d) $\int_0^{\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}} dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right) dy =$

(k) $\int_0^{\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1} dx - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy =$

(e) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

(f) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$

(l) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(g) $xdx + ydy = \frac{-ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

(m) $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})dy$

Ülesanne 24.4. Leidke tingimus, millal võrrand $y' = e^{x+f(y)}$ on eksaktne

24.3 Diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesannet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (24.1)$$

Tahame teada funktsiooni väärtust punktis $x = b$, otsitavaks funktsiooniks on $y = y(x)$.

Euleri meetod.

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

kus $h = x_i - x_{i-1}$

Euleri meetodil leitavad suurused on Cauchy ülesande lähisväärtused $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) korral.

Runge-Kutta 4. järku meetod.

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad k_2 = f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3).$$

Ülesanne 24.5. Leidke Euleri meetodi abil diferentsiaalvõrrandi lahendi lähisväärtused argumenti väärtustel

$$x_i = x_0 + 0.1i \quad (i = 1, 2, 3).$$

(a) $y' = \frac{y}{x}, y(1) = 1$

(d) $y' = \frac{y-x}{y+x}, y(0) = 1$

(b) $y' = 1 + x + y^2, y(0) = 1$

(c) $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$

(e) $y' = y^2 + \frac{y}{x}, y(2) = 4$

Ülesanne 24.6. Leidke Runge-Kutta 4. järku meetodi abil diferentsiaalvõrrandi

$$y' = 1 + x^2 + y^2, y(1) = 0$$

lahendi lähisväärtused argumenti väärtustel

$$x_i = x_0 + 0.1i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Praktikum 25

Teist järku diferentsiaalvõrrandid

25.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel

I Diferentsiaalvõrrand kujul $y'' = f(x)$.

Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järkjärgulise integreerimise teel. Kuna

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right),$$

siis integreerides saame

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

ja analoogiliselt teist korda integreerides jõuame otsitava lahendini y .

II Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y', y'') = 0$.

Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järgu alandamisel muutuja vahetusega

$$y' = u; \quad y'' = u'.$$

Originaalse diferentsiaalvõrrandi lahendi y leidmiseks on vaja leida muutuja vahetusega saadud diferentsiaalvõrrandi lahend u , asetada ta võrrandisse $y' = u$ ning saadud uus diferentsiaalvõrrand lahendada.

Ülesanne 25.1. Lahendage diferentsiaalvõrrandid kaks korda järjest integreerides.

(a) $xy'' = 1$

(d) $y'' + (x + 1)^{-3} = (x - 1)^{-3}$

(b) $\cos^2(x)y'' = 1$

(e) $4y'' = 4e^x + 3x^{-5/2}$

(c) $xy'' = 1 + x^2$

(f) $y'' = \ln(x)$

Ülesanne 25.2. Lahendage diferentsiaalvõrrandid järgu alandamise teel.

(a) $(x - 1)y'' = y'$

(f) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$

(b) $x^2y'' + xy' = 1$

(g) $xy'' = y' + x^2$

(c) $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$

(h) $y' = x \ln(x)y''$

(d) $xy'' = y'$

(i) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

(e) $xy'' = -y'$

(j) $x^2y'' = (y')^2$

25.2 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeenne diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 25.1

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

kus a, b on konstandid.

Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarse homogeenne võrrandi lahendid, siis on lahendiks ka nende erilahendite lineaarne kombinatsioon $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on **lineaarselt sõltumatud erilahendid**, siis on $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ antud lineaarse võrrandi **üldlahend**.

Antud konstantsete kordajatega lineaarse homogeenne diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on vaja leida sellele vastav **karakteristlik võrrand**

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid k_1, k_2 ja suurus $D = a^2 - 4b$ määravad antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi kuju:

$$D > 0, y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \quad (25.1)$$

$$D = 0, y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x), \quad (25.2)$$

$$D < 0, y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}. \quad (25.3)$$

Ülesanne 25.3. Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed homogeenne diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 2y$

(h) $2y'' + 3y' = 2y$

(b) $y'' = 2y'$

(i) $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$

(c) $y'' = 4y' - 5y$

(j) $y'' + 9y = 0$

(d) $y'' + 4y = 0$

(k) $y'' + 7y' + 17y = 0$

(e) $y'' = 2y' - y$

(l) $y'' + 4y' - 5y = 0; y(-1) = 0; y'(-1) = 1$

(f) $y'' - 7y' = 0$

(g) $3y'' = 5y'; y(0) = 2; y'(0) = \frac{5}{3}$

(m) $y'' = 2(3y' - 5y); y(0) = 1; y'(0) = 4$

Praktikum 26

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 26.1

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarne mittehomoogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = F(x),$$

kus a, b on konstandid ja $F(x)$ on argumendi x funktsioon.

Antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi **üldlahend** on esitatav kujul

$$y = y_h + Y,$$

kus y_h on vastava **homoogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

üldlahend ja Y on antud **mittehomoogeense võrrandi üks erilahend**.

Ülesanne 26.1. Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomoogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 3x^2$

(f) $y'' + y = x \sin(x)$

(b) $y'' + y' = 3$

(g) $y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x$

(c) $y'' - y = 4e^x$

(h) $y'' - y' = e^x + x$

(d) $y'' + y = 4xe^x$

(i) $y'' + 4y' + 3y = x$

(e) $y'' + y = 4 \sin(x)$

(j) $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

Ülesanne 26.2. Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomoogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' - 7y' + 12y = x$

(h) $y'' + 3y' + 2y = 6e^{-5x}$

(b) $y'' + y' = 8x^3 + 24x^2 - 10x$

(i) $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$

(c) $y'' - 3y' + 9x^2 + 6x - 13 = 0$

(j) $y'' - 4y' - y = \sin(x)$

(d) $y'' - 4y' - 5y = x^3 + 1$

(k) $y'' + 9y = \sin(3x)$

(e) $y'' + 4y = 2x + 3$

(l) $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$

(f) $y'' - y' - 2y = 4e^{2x}$

(g) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

(m) $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$

Ülesanne 26.3. Leidke diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Ülesanne 26.4. Leidke diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-t/2}.$$

Ülesanne 26.5. Näidake Euleri võrduse abil, et

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ülesanne 26.6. Leidke Cauchy ülesande

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b$$

lahend y .

Ülesanne 26.7. (M) Näidake, et kui a , b ja c on positiivsed konstandid, siis kõik diferentsiaalvõrrandi

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid lähenevad nullile protsessis $x \rightarrow \infty$.

Ülesanne 26.8. (M) Näidake, et kui a ja c on positiivsed konstandid ning $b = 0$, siis kõik diferentsiaalvõrrandi

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid on tõkestatud protsessis $x \rightarrow \infty$.

Ülesanne 26.9. (M) Näidake, et kui a ja b on positiivsed konstandid ning $c = 0$, siis kõik diferentsiaalvõrrandi

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid lähenevad kindlale konstantile protsessis $x \rightarrow \infty$, mis sõltub diferentsiaalvõrrandi algtingimustest. Leidke vastav konstant, kasutades diferentsiaalvõrrandi algtingimusi

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

Praktikum 27

Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 27.1

Teist järku lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0,$$

kus $p_1(x), p_2(x)$ on argumendi x funktsioonid.

Teist järku lineaarne mittehomoogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = F(x),$$

kus $p_1(x), p_2(x)$ ja $F(x)$ on argumendi x funktsioonid.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeenne diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

üks erilahend y_1 , siis saab antud diferentsiaalvõrrandi alandada esimest järku diferentsiaalvõrrandiks **Liouville'i-Ostrogradski valemi** abil:

$$y'y_1 - y_1'y = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Ülesanne 27.1. Lahendage järgmised teist järku lineaarsed homogeenne diferentsiaalvõrrandid, kasutades Liouville'i-Ostrogradski valemit.

(a) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \quad y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(h) $y'' - \frac{2y}{\cos^2(x)} = 0, \quad y_1 = \tan(x)$

(b) $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1 = \frac{e^x}{x}$

(i) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

(c) $y'' - 2(1 + \tan^2(x))y = 0, \quad y_1 = \tan(x)$

(j) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$

(d) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0, \quad y_1 = e^x - 1$

(k) $x^2y'' \ln(x) - xy' + y = 0$

(e) $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0, \quad y_1 = e^{\sin(x)}$

(l) $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$

(f) $y'' + y'(\tan(x) - 2 \cot(x)) + 2y \cot^2(x) = 0, \quad y_1 = \sin(x)$

(m) $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$

(g) $x^2y'' - 2xy' + (3x^2 + 2)y = 0, \quad y_1 = x \cos(2x)$

(n) $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

(o) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$

Kui on teada **homogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

üldlahend $y_* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ja **mittehomogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = F(x)$$

üks erilahend Y , siis **mittehomogeense võrrandi üldlahend** y avaldub kujul

$$y = Y + y_* = Y + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Ülesanne 27.2. Lahendage järgmised teist järku lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}$, $y_1 = \cos(e^{-x})$

(e) $xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^3e^{x^2}$

(b) $y'' - y' + e^{2x}y = xe^{2x} - 1$, $y_1 = \sin(e^x)$

(f) $y'' - 2y' \tan(x) = 1$

(c) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(g) $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}$, $0 < x < 1$

(d) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$

(h) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$, $x > 0$

Ülesanne 27.3. Lahendage Cauchy ülesanded.

(a) $(x+2)^5y'' = 1$, $12y(-1) = 1$,
 $4y'(-1) = -1$

(c) $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $5y(1) = \sqrt{2}$, $2y'(1) = \sqrt{2}$

(b) $y'' = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(d) $(x^2+1)y'' = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

Ülesanne 27.4. Skitseerige Cauchy ülesande

$$(x^2 - 3x)y'' + xy' - (x+3)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

lahendi graafik.

Praktikum 28

Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

28.1 Lineaarsed kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 28.1

Lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

kus p_1, \dots, p_n on pidevad funktsioonid.

Lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

kus p_1, \dots, p_n ja f on pidevad funktsioonid.

Kui on teada lineaarse homogeenne võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(x), \dots, y_n(x)$, siis selle võrrandi üldlahendiks on

$$y_* = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x).$$

Kui on teada lineaarsele mittehomogeennele võrrandile vastava lineaarse homogeenne võrrandi üldlahend y_* ja mittehomogeenne võrrandi üks erilahend Y , siis mittehomogeenne võrrandi üldlahend y avaldub kujul

$$y = Y + y_* = Y + \sum_{k=1}^n C_k y_k(x).$$

Lineaarne homogeenne võrrandi järku võime vähendada asendusega

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

jne. Tuleb märkida, et sellisel juhul ei pruugi saadud võrrand enam lineaarne olla. Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis asendustega

$$y = y_1 z, \quad z' = u,$$

saame madalamat järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi.

Ülesanne 28.1. Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' - 8y = 0$

(d) $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$

(b) $y^{(4)} - y = 0$

(e) $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$

(c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(f) $y''' - y' = 2 \sin(x)$

Definitsioon 28.2

Diferentsiaalvõrrandit

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse n -järku hariliku diferentsiaalvõrrandi **üldkujuks**.

28.2 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Üks meetod kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on **järgu alandamine**. Sõltuvalt võrrandi kujust on mõningatel juhtudel võimalik leida originaalse diferentsiaalvõrrandi lahend, kasutades madalama järguga diferentsiaalvõrrandi lahendit. Vastav meetodika sõltub originaalse diferentsiaalvõrrandi kujust. Toome järgnevalt mõned erijuhud.

I Diferentsiaalvõrrand kujul $y^{(n)} = F(x)$.

Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järkjärgulise integreerimise teel. Kuna

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)}(x),$$

siis integreerides saame

$$y^{(n-1)} = \int F(x)dx + C_1$$

ja analoogiliselt $n - 1$ korda jätkates jõuame otsitava lahendini y .

II Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

Antud juhul teeme diferentsiaalvõrrandis asenduse $y^{(k)} = z$ ja loeme $z = z(x)$ uueks otsitavaks funktsiooniks. Seega saame uue, $n - k$ -järku diferentsiaalvõrrandi

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Lahendades selle võrrandi oleme leidnud funktsiooni $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, kus C_1, \dots, C_{n-k} on konstandid. Seose $z = y^{(k)}$ tõttu jääb veel lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^{(k)} = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

mille lahend y on ka originaalse diferentsiaalvõrrandi lahend.

Ülesanne 28.2. Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' + \cos(x) = 0$

(e) $xy^{(5)} = y^{(4)}$

(b) $x^3y''' = 2$

(f) $y''' = (y'')^2$

(c) $y^{(4)} = \operatorname{ch}(x)$

(g) $y''' = 2(y'' - 1) \cot(x)$

(d) $2y''' + (y'')^3 = 0$

(h) $xy''' = y'' - xy''$

Ülesanne 28.3. (M) Selgitage, kas diferentsiaalvõrrandi

$$y''' = x + y^2$$

kahe lahendi graafikud võivad teineteisega lõikuda xy -tasandi mingis punktis.

28.3 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Definitsioon 28.3

Normaalkujuliseks süsteemiks (normaalsüsteemiks) nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi, kus võrrandite vasakuteks poolteks on otsitavate funktsioonide esimest järku tuletised, paremad pooled aga tuletisi ei sisalda:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, \dots, y_n),\end{aligned}\tag{28.1}$$

kus $F_k(x, y_1, \dots, y_n)$ on antud funktsioonid, $k = 1, 2, \dots, n$ ja $y_k = y_k(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Definitsioon 28.4

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (28.1) **lahendiks vahemikus** (a, b) nimetatakse n funktsioonist koosnevat funktsioonide komplekti $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, mis on määratud ja pidevalt diferentseeruvad vahemikus (a, b) ja mille korral on rahuldatud süsteemi (28.1) kõik võrrandid iga $x \in (a, b)$ korral.

Ülesanne 28.4. Näidake, et antud funktsioonide süsteem on antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks.

$$(a) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{x^2}, \\ z = -x \ln x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = 2xy^2, \\ z' = \frac{z}{x} - 1. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y = x, \\ z = 2e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = e^{x-y}, \\ z' = 2e^y. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y = x + e^{-x}, \\ z = e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = 1 - \frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}. \end{cases}$$

Ülesanne 28.5. (M) Näidake, et süsteemi $y' = -z$, $z' = y$ üldlahendiks on

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad z = C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x),$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Ülesanne 28.6. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

$$(a) \quad y' = z, \quad z' = -y$$

$$(d) \quad y' = z, \quad z' = \frac{z^2}{y}$$

$$(b) \quad y' = z + 1, \quad z' = y + 1$$

$$(e) \quad y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad z' = y + x - \frac{z}{x}$$

$$(c) \quad y' = 1 - \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{1}{y-x}$$

$$(f) \quad y' = \frac{x}{z}, \quad z' = -\frac{x}{y}$$

Praktikum 29

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

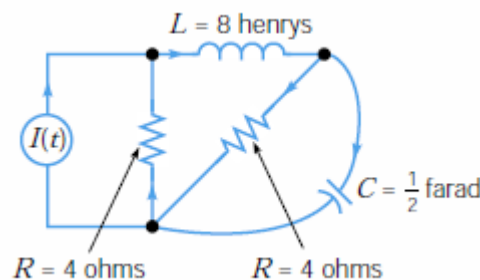
29.1 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 29.1. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

- (a) $y' = \frac{y^2}{z-x}, z' = y+1$ (i) $\frac{dx}{dt} = 2x-y+z, \frac{dy}{dt} = 2y-z, \frac{dz}{dt} = z$
- (b) $y' = 2xy, z' = (z-x)x^{-1}$ (j) $\frac{dx}{dt} = -9y, \frac{dy}{dt} = x$
- (c) $y' = 1+z^{-1}, z' = z^2$ (k) $\frac{dx}{dt} = y+t, \frac{dy}{dt} = x-t$
- (d) $y' = y+z, z' = -5z$ (l) $\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0,$
 $x(0) = 1, y(0) = 4$
- (f) $\frac{dx}{dt} = y+z, \frac{dy}{dt} = x+z, \frac{dz}{dt} = x+y$
- (g) $\frac{dx}{dt} = z-y, \frac{dy}{dt} = z, \frac{dz}{dt} = z-x$ (m) $\frac{dx}{dt} = x+5y, \frac{dy}{dt} = -x-3y,$
 $x(0) = -2, y(0) = 1$
- (h) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x, \frac{dz}{dt} = x+y+z$

Ülesanne 29.2. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

- (a) $y' = y^2 + z^2, z' = 2yz$ (f) $e^t \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$
- (b) $y' = \frac{z}{(z-y)^2}, z' = \frac{y}{(z-y)^2}$ (g) $\frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{2x(x^2-y^2-1)},$
 $\frac{dy}{dt} = \frac{x^2-1}{2y(x^2-y^2-1)}$
- (c) $y' = \frac{y}{z}, z' = \frac{z}{y}$ (h) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}$
- (d) $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}$
- (e) $\frac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \frac{dy}{dt} = \cos x \sin y$



Ülesanne 29.3. (F) Joonisel kujutatud vooluahelat kirjeldab diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \quad (29.1)$$

Praktikum 30

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitav funktsioon $u = u(x, y)$ on kahe muutuja funktsioon, siis **lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju** on

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (30.1)$$

Võrrandi (30.1) lahendamiseks tuleb lahendada harilik diferentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{dx}{p(x, y)} = \frac{dy}{q(x, y)}. \quad (30.2)$$

Osatuletistega võrrandi (30.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi(x, y)),$$

kus ψ on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi (30.2) esimene integraal kujul $C_1 = \psi(x, y)$ ja $\Psi(z)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Kui $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon kahe muutuja funktsioon, siis **lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand** on võrrand kujul

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = r(x, y). \quad (30.3)$$

Võrrandi (30.3) kordajad ja vabaliige sõltuvad ainult sõltumatutest muutujatest x ja y .

Võrrandi (30.3) lahendamiseks tuleb lahendada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem kujul

$$\frac{dx}{p(x, y)} = \frac{dy}{q(x, y)} = \frac{du}{r(x, y)}. \quad (30.4)$$

Osatuletistega võrrandi (30.3) iga **lahend** avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)),$$

kus ψ_1, ψ_2 on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi (30.4) sõltumatud esimesed integraalid kujul $C_1 = \psi_1(x, y, z), C_2 = \psi_2(x, y, z)$ ja $\Psi(z_1, z_2)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Ülesanne 30.1. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavateks funktsioonideks on $u = u(x, y)$.

(a) $y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$

(b) $y \frac{\partial u}{\partial x} = u$

(c) $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$

(d) $2x \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0$

(e) $xy \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = yu$

(f) $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$

(g) $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = ux$

(h) $(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0$

(i) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$

(j) $xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = x$

(k) $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x$

(l) $\cos y \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cos y$

(m) $\frac{1}{\cos x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u + \cot y$

(n) $\sin^2 x \frac{\partial u}{\partial x} + \tan u \frac{\partial u}{\partial y} = \cos^2 u$

31.1 Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

1.1. **Homogeensed** diferentsiaalvõrrandid (töös ei ole murdlineaarset funktsiooni sisaldavat võrrandit, mis taandub homogeenseks võrrandiks) (23.2)

1.2. Esimest järku **lineaarsed** diferentsiaalvõrrandid (töös ei ole Bernoulli võrrandit, mis taandub lineaarseks võrrandiks) (22.6)

1.3. **Eksaktsed** diferentsiaalvõrrandid (24.3)

2. Teist järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

2.1. Teist järku **lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomogeensed** diferentsiaalvõrrandid (26.1, 26.2)

3. Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

3.1. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine **järgu alandamise teel** (25.2, 28.2)

3.2 Kõrgemat järku **lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomogeensed** diferentsiaalvõrrandid (28.1)

4. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

4.1. Diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamine **ühele võrrandile taandamise teel** (töös ei ole integreeruvate kombinatsioonide leidmise meetodit vajavaid süsteeme) (28.7, 29.1)

5. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

5.1. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi kontrollimine (29.4, 29.5)

5.2. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamine (29.7)

Praktikum 32

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid Eksami näidisülesanded

32.1 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitav funktsioon $u = u(x, y, z)$ on kolme muutuva funktsioon, siis lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$p(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (32.1)$$

Võrrandi (32.1) lahendamiseks tuleb lahendada sümmeetriline harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem kujul

$$\frac{dx}{p(x, y, z)} = \frac{dy}{q(x, y, z)} = \frac{dz}{k(x, y, z)}. \quad (32.2)$$

Osatuletistega võrrandi (32.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)),$$

kus ψ_1, ψ_2 on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi (32.2) sõltumatud esimesed integraalid kujul $C_1 = \psi_1(x, y, z), C_2 = \psi_2(x, y, z)$ ja $\Psi(z_1, z_2)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Ülesanne 32.1. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavateks funktsioonideks on $u = u(x, y, z)$.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(d) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} = xy$

(b) $(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(e) $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2u \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(c) $(x - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(f) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

Ülesanne 32.2. Leidke antud võrrandi selline integraalpind $u = u(x, y)$, mis läbib antud joont.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}, y = 1, u = 2x$

(g) $yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy, x = a, y^2 + u^2 = a^2, a = \text{const}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, x = 0, u = y$

(c) $2\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}, x = 1, u = y^2$

(h) $(x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u; x - y = 2, u + 2x = 1$

(d) $(1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0; x = 0, u = y^2$

(e) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u, y = x, u = x^3$

(i) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{u}, u(2, y) = y$

(f) $x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u; x = 2, u = y - 4$

(j) $xy \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0, u = 0, xy = a^2, a = \text{const}$

32.2 Eksam aines Kõrgem matemaatika II

Eksam koosneb teooria ja ülesannete osast.

32.2.1 Eksami teooria osa

1. Mõisted, näited mõiste kohta
2. Valemi tuletamine või tõestus

32.2.2 Eksami ülesannete teemad

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

1. Osatuletisega diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesande lahendamine (29.7, 32.3)
2. Lineaarse mittehomogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmine, kui otsitavaks on kahe muutuja funktsioon (30.1, 32.6)
3. Lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmine, kui otsitavaks on kolme muutuja funktsioon (32.1, 32.5)
4. Lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmine, kui otsitavaks on kahe muutuja funktsioon (32.2, 32.4)

32.3 Eksami näidisülesanded

Ülesanne 32.3. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial y} - xy = 0, u(x, 2) = x^2,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$.

Ülesanne 32.4. Leidke lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$(1 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} + yx \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

selline lahend $u = u(x, y)$, mis rahuldab tingimust $u(x, 0) = x^2$.

Ülesanne 32.5. Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$(y - ze^z) \frac{\partial u}{\partial x} + ze^z \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y, z)$.

Ülesanne 32.6. Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y^2} - 1 \quad (x, y > 0),$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$

Praktikum 33

Vastused

Praktikum 1

Vastus 1.3. (a) ei (b) ei (c) ei (d) jah (e) jah (f) ei

Vastus 1.5. ei

Vastus 1.6. (a) ei (b) ei (c) ei (d) jah (e) jah (f) jah (g) jah (h) ei (i) jah

Vastus 1.7. (a) jah (b) jah (c) ei (d) jah (e) jah (f) jah

Vastus 1.8. (a) on (b) ei ole (c) on (d) on

Vastus 1.9. (a) on (b) on (c) on (d) on (e) on (f) ei ole (g) on (h) ei ole (i) on

Praktikum 2

Vastus 2.1. jah

Vastus 2.2. $k^3 - 2k = 0$

Vastus 2.3. $(k - l)(k - m)(l - m) = 0$

Vastus 2.4. (a) $-5a_1 + 4a_2 + a_3 = 0$ (b) $-5f_1 + 4f_2 + f_3 = 0$ (c) $-5z_1 + 4z_2 + z_3 = 0$ (d) $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

Vastus 2.6. (a) lineaarselt sõltumatu (b) $4(6x + 9) - 3(8x + 12) = 0$ (c) lineaarselt sõltumatu (d) $2(4 - x) - 32(2x + 3) + 11(6x + 8) = 0$ (e) lineaarselt sõltumatu (f) lineaarselt sõltumatu (g) lineaarselt sõltumatu (h) lineaarselt sõltumatu

Vastus 2.7. (a) $L(a_1, \dots, a_5) = \{(x + 2y + z, y + 2z, y + 3z, -x + 4z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (b) $L(a_1, \dots, a_4) = \{(x + 2y, 2x + y, x + 2y, y + 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ (c) $L(a_1, \dots, a_4) = \{(x + 2y, x, x + y, 2x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Praktikum 3

Vastus 3.1. $(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5})$

Vastus 3.2. Olgu $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (3, 2, 1, 0)$ ja $a_5 = (1, 0, 0, 0)$. Siis (a) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (b) $\{a_1, a_2, a_3\}$ (c) $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ (d) $\{a_1, a_2, a_5\}$

Vastus 3.3. A koordinaadid on $(3, 4, -2)$ ja B koordinaadid on $(2, 5, 0)$

Vastus 3.4. (a) on baas, koordinaadid on $(3, 7, 13)$ (b) on baas, koordinaadid on $(-4, -6, 13)$ (c) on baas, koordinaadid on $(1, 1, 1)$

Vastus 3.5. Suvalise vektori (x_1, x_2, x_3) koordinaadid uue baasi suhtes on $(-3x_1 - 8x_2 - 5x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.
Seega vektori $(6, 2, -7)$ koordinaadid uue baasi suhtes on $(1, 1, 1)$.

Vastus 3.6. (a) Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ ja $a = -139e_1 + 38e_2 + 24e_3$, $a = e'_1 + e'_2 + e'_3$ (b)

Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $a = 0e_1 + 2e_2$, $a = e'_1 + e'_2$

Vastus 3.7. Vektori a koordinaadid uue baasi suhtes on $(-13, 6, -27)$

Praktikum 4

Vastus 4.1. (a) $S_n = \frac{n}{n+1}$, $S = 1$ (b) $S_n = \frac{1}{3} \frac{n}{n+1}$, $S = \frac{1}{3}$ (c) $S_n = \frac{11}{18} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$, $S = \frac{11}{18}$ (d) $S_n = \frac{2n+2}{2n+3}$, $S = 1$ (e) $S_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $S = 1$ (f) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S \rightarrow \infty$ (g) $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S \rightarrow \infty$. Rea summa võib tuletada kuupide järgi: $\sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^n (k+1)^3 - (n+1)^3$ (h) $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$, $S = 1$ (i) $S_n = \frac{4}{3} (1 - (-1/2)^{n+1})$, $S = \frac{4}{3}$

Vastus 4.2. (a) $S_1 = \ln 3$, $a_n = \ln \frac{n+2}{n+1}$ (b) $S_1 = 2$, $a_n = \frac{-2}{n^2+n}$ (c) $S_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{-1}{n^2+n}$ (d) $S_1 = 2$, $a_n = 1$ (e) $S_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{2n-1}{(n^2+2)(n^2-2n+3)}$ (f) $S_1 = 1$, $a_n = n^3$

Vastus 4.3. (a) Piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$ ei leidu. Lisaks võib märgata, et $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-2)^n| = \infty \neq 0$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n)^{-1/n} = 1 \neq 0$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} = -7 \neq 0$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}} = 1 \neq 0$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e \neq 0$

Vastus 4.5. (a) koondub, $S = \frac{15}{2}$ (b) hajub (c) hajub, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ (d) koondub, $S = \frac{8e^4}{e-2}$ (e) koondub, $S = \frac{9}{8}$ (f) koondub, $S = \frac{11}{24}$

Vastus 4.6. 10/3 ehk 3.33(3) m.

Vastus 4.7. $\frac{81}{11}$

Vastus 4.8. 5/3 ehk 1.66(6)

Praktikum 5

Vastus 5.1. (a) koondub kui geomeetriline rida, $S = 3$ (b) hajub kui harmooniline rida, $\alpha = 1$ (c) koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{e}{e-1}$ (d) hajub, kui geomeetriline rida, $q = \frac{5}{4} > 1$ (e) hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ (f) koondub, kui geomeetriline rida, $S = 2$ (g) hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = -0.9 \leq 1$ (h) koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{2}{3}$

Vastus 5.2. (a) koondub (b) hajub (c) hajub (d) koondub (e) hajub (f) koondub

Vastus 5.6. (a) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (b) koondub, kuna (reast suurem) geomeetriline rida teguriga $q = 1/4$ koondub (c) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (d) koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub (e) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (f) hajub, kuna (reast väiksem) harmooniline rida hajub (g) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (h) koondub, kuna (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ koondub (i) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (j) koondub, kuna näiteks (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub (k) koondub, kuna näiteks ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 3 > 1$ koondub (l) koondub, kuna ekvivalentne geomeetriline rida teguriga $q = 2/5 < 1$ koondub

Praktikum 6

Vastus 6.1. (a) $D = 0 < 1$, koondub (b) $D = 2 > 1$, hajub (c) $D = \frac{1}{4} < 1$, koondub (d) $D = \frac{2}{5} < 1$, koondub (e) $D = 1$, tunnus ei tööta, hajub kui harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{1}{2}$ (f) $D = \frac{2}{3} < 1$, koondub (g) $D = 1$, tunnus ei tööta, koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega 2 koondub (h) $D = \frac{1}{e} < 1$, koondub (i) $D = 4 > 1$, hajub, (või siis näidata, et $u_n \rightarrow \infty$) (j) $D = 3 > 1$, hajub (k) $D = \frac{1}{25} < 1$, koondub (l) $D = 3 > 1$, hajub

Vastus 6.2. (a) $C = 0 < 1$, koondub (b) $C = \frac{3}{4} < 1$, koondub (c) $C = 2 > 1$, hajub (d) $C = \frac{3}{2} > 1$, hajub (e) $C = 1$, tunnus ei tööta, koondub kui harmooniline rida astmega $\alpha = 1.5$ (f) $C = \frac{e}{3} < 1$, koondub (g) $C = \frac{1}{2} < 1$, koondub (h)

$C = 2 > 1$, hajub (i) $C = 0 < 1$, koondub (j) $C = 0 < 1$, koondub (k) $C = 0 < 1$, koondub (l) $C = \frac{1}{e} < 1$, koondub

Vastus 6.4. (a) koondub (b) koondub (c) koondub (kahanemist on lihtsam näidata läbi funktsiooni tuletise) (d) koondub (e) tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \rightarrow \infty$ (f) tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \rightarrow 1/2$

Vastus 6.5. (a) koondub absoluutselt (b) koondub tingimisi (c) koondub absoluutselt (d) koondub tingimisi (e) koondub absoluutselt (f) koondub tingimisi (g) koondub tingimisi (h) koondub tingimisi (siinus tuleks lahti kirjutada korrutiste summaks) (i) hajub, kuna $|u_n| \rightarrow 1$ (j) koondub absoluutselt (k) hajub, kuna $|u_n| \rightarrow 1$ (l) hajub, kui $a \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; koondub tingimisi $a = -1$ korral; koondub absoluutselt $a \in (-1, 1)$ korral

Praktikum 7

Vastus 7.1. (a) $R = 1$, $A = (-1, 1)$ ja $X = (-1, 1]$ (b) $R = \frac{1}{5}$, $A = X = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ (c) $R = 1$, $A = X = (-1, 1)$ (d) $R = 8$, $A = X = (-4, 12)$ (e) $R = \frac{1}{4}$, $A = X = (-\frac{1}{2}, 0)$ (f) $R = 3$, $A = X = (-3, 3)$ (g) $R = \frac{1}{2}$, $A = X = (-3, -2)$ (h) $R = \infty$, $A = X = (-\infty, \infty)$ (i) $R = 0$, $A = X = \{0\}$ (j) $R = \infty$, $A = X = (-\infty, \infty)$, rida $\sum \frac{y^n}{n!}$ koondub iga $y \in \mathbb{R}$ korral, järelikult ka esialgne rida $((x+4)^2 = y)$ (k) $R = 0$, $A = X = \{3\}$ (l) $R = 3$, $A = X = (-3, 3)$

Vastus 7.2. (a) Kasutame geomeetrilist rida $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, kui $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad X = (-1, 1)$$

(b)

$$\frac{x}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}, \quad X = (-1, 1)$$

(c) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x} = \ln|x+1| + C$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad X = (-1, 1]$$

(d) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$,

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}, \quad X = [-1, 1]$$

Vastus 7.5. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ ehk $y = e^{2x}$

Vastus 7.6. $y = 1 + x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ehk $y = 2e^x - x - 1$

Vastus 7.7. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n!} \right) x^n$ (f) $1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{3^n (2n)!}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n x^n}{2^n n!}$

Vastus 7.8. (a) 0.00266636, reast $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n-1) \cdot (2n-1)! \cdot 5^{4n-1}}$ piisab võtta kaks esimest liiget (b) 0.09994446 (c) 0.100001 (d) 0.48491714 (e) 0.48722236 (f) 0.18533015

Praktikum 8

Vastus 8.1. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x), x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Vastus 8.3. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), x \in \mathbb{R}$

Vastus 8.4. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Vastus 8.5. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), x \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$

Vastus 8.8. (a) $\mathcal{D} = \{(x, y) : y \geq 0\}$, $\partial D = \{(x, y) : y = 0\}$; (b) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$; (c) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$; (d) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > -y\}$; (e) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > -y, x > 0, x \neq 1\}$; (f) $\mathcal{D} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$; (g) $\mathcal{D} = \mathcal{R} \times [-1, 1]$; (h) $\mathcal{D} = [-1, 1]^2$; (i) $\mathcal{D} = \{(x, y) : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$; (j) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 > -y\}$; (k) $\mathcal{D} = \{(x, y) : y^2 > x \geq 0\}$; (l) $\mathcal{D} = (-1, \infty) \times ((-1, \infty) \setminus \{0\})$; (m) $\mathcal{D} = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 3\}$; (n) $\mathcal{D} = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \neq 3\}$; (o) $\mathcal{D} = (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi] \times [0, \infty)) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi] \times (-\infty, 0])$; (p) $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$; (q) $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2n\pi\}$; (r) $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) : 2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2n+1)\pi\}$; (s) $\mathcal{D} = \{(x, y) : |y| \leq |x|, x \neq 0\}$; (t) $\mathcal{D} = [0, 8]^2 \cap \bigcup_{m, n \in \mathbb{Z}} ([2m, 2m+1] \times [2n, 2n+1] \cup [2m+1, 2m+2] \times [2n+1, 2n+2])$.

Vastus 8.9. (a) $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$; (b) $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0\}$; (c) $E = \{(x, y, z) : xy > 0, z > 0\}$; (d) $E = \{(x, y, z) : x, y, z \in [-1, 1]\}$; (e) $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$; (f) E on kogu xyz -ruum, välja arvatud punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud.

Praktikum 9

Vastus 9.1. (a) 4; (b) 16; (c) 1; (d) 0; (e) 0; (f) 2; (g) $\frac{1}{8}$; (h) 0; (i) 0; (j) $-\infty$; (k) 1; (l) 0; (m) 1, võtta $u = xy$ ja arvestada, et $u \rightarrow 0$ korral $\tan u \sim u$; (n) $\frac{1}{2}$; (o) 1; (p) 1, arvestada, et $\lim u = \lim e^{\ln u} = e^{\lim \ln u}$.

Vastus 9.6. (a) $A = 0, B = 1$; (b) $A = 1, B = 1$;

Vastus 9.7. (a) 0; (b) 0.

Vastus 9.8. (a) Pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas; (b) pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Vastus 9.9. (a) Pidev, pidev x ja y järgi; (b) ei ole pidev, pidev x ja y järgi; (c) ei ole pidev, pidev x järgi, ei ole pidev y järgi; (d) pidev, ei ole pidev x järgi, pidev y järgi; (e) pidev, ei ole pidev x ega y järgi.

Vastus 9.10. (a) $(0, 0)$; (b) katkeb sirgel $x + y = 0$; (c) katkeb sirgel $y + x = 0$; (d) katkeb koordinaattelgedel; (e) katkeb koordinaattelgedel; (f) katkeb punktis $(0, 0)$ ning ringjoontel $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + y^2 = 2$.

Vastus 9.11. (a) Lisada $f(0, y) = y$; (b) lisada $f(x, y) = 0$, kui $x + y = 0$; (c) lisada $f(x, y) = 0$, kui $x + y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (d) lisada $f(x, y) = \frac{1}{64}$, kui $x + 2y = 8$.

Praktikum 10

Vastus 10.1. (a) $f_x = 2x - y, f_y = 4y - x$; (b) $f_x = \frac{3}{2\sqrt{3x-y}}, f_y = \frac{-1}{2\sqrt{3x-y}}$; (c) $f_x = 0, f_y = 2y$; (d) $f_x = 2/x$,

$f_y = 1/y$; (e) $f_x = \frac{-1}{(x-y)^2}$, $f_y = \frac{1}{(x-y)^2}$; (f) $f_x = 2e^{2x+3y}$, $f_y = 3e^{2x-3y}$; (g) $f_x = y^2z$, $f_y = 2xyz$, $f_z = xy^2$; (h) $f_x = \frac{2xy}{z}$, $f_y = \frac{x^2}{z}$, $f_z = -\frac{x^2y}{z^2}$.

Vastus 10.2. (a) $f_x = 3$, $f_y = -2y$; (b) $f_x = 2x$, $f_y = 2y$; (c) $f_x = 2e^{2x+3y}$, $f_y = 3e^{2x+3y}$; (d) $f_x = 3x^2y+2$, $f_y = x^3$; (e) $f_x = 3x^2yz^2$, $f_y = x^3z^2 + 7$, $f_z = 2x^3yz$; (f) $f_x = \frac{1}{x}$, $f_y = \frac{1}{y}$, $f_z = \frac{2}{z}$; (g) $f_x = 5(x+2y)^4$, $f_y = 10(x+2y)^4$; (h) $f_x = \frac{2}{y}$, $f_y = -\frac{2x}{y^2}$; (i) $f_x = \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}$, $f_y = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}$; (j) $f_x = -4\sin(4x-y)$, $f_y = \sin(4x-y)$; (k) $f_x = \sin y$, $f_y = x \cos y$; (l) $f_x = \frac{1}{y \cos^2 \frac{x}{y}}$, $f_y = -\frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}}$; (m) $f_x = -\frac{y}{1+x^2y^2}$, $f_y = -\frac{x}{1+x^2y^2}$; (n) $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$; (o) $f_x = y(x+y)^{y-1}$, $f_y = f[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y}]$; (p) $f_x = a^{xy}[y \ln a + \frac{xy^2}{a}]$, $f_y = a^{xy}[x \ln a + \frac{yx^2}{a}]$, kus $a = 1+xy$. Osatuletise f_y saame osatuletisest f_x vahetades x ja y kohtadega. (q) $f_x = \sin yx^{\sin y-1}$, $f_y = f \ln x \cos y$; (r) $f_x = 2x$, $f_y = zy^{z-1}$, $f_z = y^z \ln y$; (s) $f_x = \frac{1}{z-t}$, $f_y = \frac{-1}{z-t}$, $f_z = \frac{y-x}{(z-t)^2}$, $f_t = \frac{x-y}{(z-t)^2}$; (t) $f_x = y^2z^3t^4$, $f_y = 2xyz^3t^4$, $f_z = 3xy^3z^2t^4$, $f_t = 4xy^2z^3t^3$.

Vastus 10.4. (a) Kui $x \neq 0$, siis $f_x = \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}$, $f_y = \cos \frac{y}{x}$; kui $x = 0$, siis $f_y(0, y) = 0$, $f_x(0, 0) = 0$. Kui $y \neq 0$, siis osatuletis $f_x(0, y)$ ei eksisteeri. (b) Kui $x \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{yx^2}{a}$, $f_y = \frac{x^3}{a}$, kus $a = x^2 + y^2$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0$, $f_y(0, y) = 0$. (c) Kui $a = x^2 + y^2 \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \ln a + \frac{2x^3y^2}{a}$. Et funktsioonis x ja y paiknevad sümmeetriliselt, siis vahetades x ja y kohtadega, saame arvutamata $f_y = 2yx^2 \ln a + \frac{2y^3x^2}{a}$. Kui $a = 0$, s.o. punktis $(0, 0)$, on $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. (d) Kui $|x| + |y| \neq 0$, siis $f_x = \frac{2xy^3}{a^2}$, $f_y = \frac{x^2(x^2-y^2)}{a^2}$, kus $a = x^2 + y^2$; $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$.

Vastus 10.5. (b) Kui $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - y$, $f_y = x - 2y \arctan \frac{x}{y}$; kui $x = 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x(0, y) = -y$, $f_y(0, y) = 0$; kui $x \neq 0$ ja $y = 0$, siis $f_y(x, 0) = x$, $f_x(x, 0) = 0$; kui $x = y = 0$, siis $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. (a) Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = xy^2[3x \sin \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{b}]$, $f_y = yx^2[3y \sin \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{b}]$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0$, $f_y(0, y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x, 0) = 0$, $f_y(x, 0) = 0$. (c) Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \sin \frac{1}{b} - y \cos \frac{1}{b}$, $f_y = 2yx^2 \sin \frac{1}{b} - x \cos \frac{1}{b}$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0$, $f_y(0, y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x, 0) = 0$, $f_y(x, 0) = 0$.

Vastus 10.8. $f_x = 7.5$, $f_y = 40$, seega riik peaks investeerima kapitali

Vastus 10.11. (a) $z'_t = e^{\sin t - \cos t}(\cos t + \sin t)$; (b) $z'_t = \frac{5t^4}{t^5-1}$; (c) $u'_t = 2t \cos 2t + \sin 2t$; (d) $z'_t = 2t + 4t^3 + 1$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z = t^2 + x^2 + y^2$, $t = t$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$ ja kasutada valemit $z'_t = z_t t'_t + z_x x'_t + z_y y'_t$; (e) $z'_t = \cos^{-2}(t + t^4 - t^5)(1 + 4t^3 - 5t^4)$; (f) $z'_x = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z = \arctan(xy)$, $x = x$, $y = e^x$ ja kasutada valemit $z'_x = z_x x'_x + z_y y'_x$; (g) $u'_x = 2e^x \sin x$; (h) $u'_t = u_x x'_t + u_y y'_t + u_z z'_t = 2u_x + \frac{u_y}{t} + u_z$; (i) $z'_t = (f_x x^2 \ln y + f_2 x \ln y)(-2t) + (f_y x^2 \ln y + \frac{f_x^2}{y})e^{\sin t} \cos t$, kus $x = 1 - t^2$, $y = e^{\sin t}$.

Vastus 10.12. (a) $z_x = z_u u_x + z_v v_x = 3x^2 \cos^2 y \sin y$, $z_y = z_u u_y + z_v v_y = x^3 \cos y(1 - 3 \sin^2 y)$; (b) $z_x = 0$, $z_y = 0$; (c) $z_x = y^x(2x + x^2 \ln y)$, $z_y = x^3 y^{x-1}$; (d) $z_x = 0$, $z_y = -1$; (e) $w_x = 2xv u^{v-1}$, $w_y = z u^v \ln u$, $w_z = 2z v u^{v-1} + y u^v \ln u$, kus $u = x \sin y$, $v = x \cos y$; (f) $w_x = e^{uv}(y - \frac{v}{xz} + uy)$, $w_y = e^{uv}(x - \frac{v}{yz} + ux)$, $w_z = -\frac{e^{uv}v}{z^2}$, kus $u = \frac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$.

Vastus 10.13. (a) $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = f_{xy} = 0$; (b) $f_{xx} = -f_{yy} = 6xy$, $f_{xy} = 3(x^2 - y^2)$; (c) $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$, $f_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$; (d) $f_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y)$, $f_{yy} = -x \sin(x+y)$, $f_{xy} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$; (e) $f_{xx} = -4y(x+y)^{-3}$, $f_{yy} = 4x(x+y)^{-3}$, $f_{xy} = 2(x-y)(x+y)^{-3}$; (f) $f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $f_{yy} = x^y \ln^2 x$, $f_{xy} = x^{y-1}(1+y \ln x)$ ($x > 0$); (h) $f_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$, $f_{xy} = 0$ ($xy \neq 1$); (i) $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -s$, $f_{xy} = z - s$, $f_{xz} = y - s$, $f_{yz} = x - s$, kus $s = (x+y+z)^{-2}$; (j) $f_{xx} = -y^2 z^2 \sin v$, $f_{yy} = -x^2 z^2 \sin v$, $f_{zz} = -x^2 y^2 \sin v$, $f_{xy} = z \cos v - xyz^2 \sin v$, $f_{xz} = y \cos v - xy^2 z \sin v$, $f_{yz} = x \cos v - x^2 yz \sin v$, kus $v = 1 + xyz$.

Vastus 10.15. (a) $f_{xy} = f_{yx} = \cos x$; (b) $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2y}{x}$; (c) $f_{xy} = e^{x+y}$.

Vastus 10.17. (a) $f_{xyz} = 0$; (b) $f_{xyz} = f_{zxy} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$; (c) $f_{xxxyyy} = -6(\cos x + \cos y)$.

Praktikum 12

Vastus 12.1. (a) $df = dx + 3dy$; (b) $df = 4(x-y)dx - 4xdy$; (c) $df = ydx + xdy$; (d) $df = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; (e) $df = e^{1+xy}(ydx + xdy)$; (f) $df = \sin(xy)(ydx + xdy)$; (g) $df = y^x \ln y dx + xy^{x-1} dy$; (h) $df = \frac{dx - 2dy + 3dz}{\cos^2(x-2y+3z)}$; (i) $df = -\sin(x^2yz)(2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz)$; (j) $df = 2xz(2yzdx + xzdy + 2xydz)f$.

Vastus 12.4. (a) $du(P) = -0.2$, $\Delta u = -0.21$; (b) $du(P) = 2.5$, $\Delta u = 2.504$.

Vastus 12.5. (a) 0.04; (b) -0.01 ; (c) -0.1 ; (d) 0.591; (e) 0.06; (f) 0.0025.

Vastus 12.6. 125 m^2 ; 250 m^2 .

Vastus 12.7. 1200.

Vastus 12.8. vähenevad vastavalt 44.8 cm^3 ja $13.6\pi \text{ cm}^2$.

Vastus 12.9. (a) 4300 eurot; (b) 8000 eurot.

Vastus 12.10. 4680 cm^3 .

Vastus 12.11. Umbes -3.28° C .

Vastus 12.12. 0.5 liitrit minutis.

Vastus 12.13. Rõhk langeb umbes 8.83 kPa .

Vastus 12.14. (a) 1.12; (b) -0.03 ; (c) 7.18; (d) 1.1; (e) 3.037; (f) $22\frac{249}{352}$; (h) $\frac{\sqrt{2}}{14}\pi$.

Praktikum 13

Vastus 13.1. (a) P on lokaalne miinimum, Q ei ole ekstreemumpunkt, R on lokaalne maksimum; (b) P on sadulpunkt, Q on lokaalne maksimum, R ei ole ekstreemumpunkt.

Vastus 13.2. (a) $\text{locmax}f = f(-1, 0) = 1$; (b) $\text{locmin}f = f(1, 0) = -2$, kriitilises punktis $(-1, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; (c) kriitilises punktis $(0, 1)$ ekstreemumit ei ole; (d) $\text{locmax}f = f(0, 0) = 1$; (e) $\text{locmin}f = f(1, 0) = -1$ (f) $\text{locmin}f = f(1, 1) = -1$, kriitilises punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; (g) $\text{locmin}f = f(0, 0) = 2$; (h) $\text{locmin}f = f(1, 2) = 3 - \ln 4$, punkt $(-1, 2)$ (kus osatuletised on nullid) ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda; (i) $\text{locmax}f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\text{locmin}f = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; (j) Punktides $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$ $\text{locmin}f = -2$. Punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole, mida näitab funktsiooni väärtuste võrdlus sirgetel $y = x$ ja $y = -x$ punkti $(0, 0)$ läheduses.

Vastus 13.4. (a) $\text{max}f = f(0, -1) = 2$, $\text{min}f = f(0, \frac{1}{2}) = -0.25$; (b) $\text{max}f = f(-1, 0) = f(1, 0) = 3$, $\text{min}f = f(0, 1) = f(0, -1) = 1$; (c) maksimumi ei leidu, $\text{min}f = f(0, 1) = -3$; (d) $\text{max}f = f(-1, 0) = f(1, 0) = f(0, -1) = f(0, 1) = 1$, $\text{min}f = f(0, 0) = 0$; (e) $\text{max}f = f(0, 1) = f(0, -1) = \frac{3}{e}$, $\text{min}f = f(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \approx -0.82$.

Vastus 13.5. Punktis $(0, 0)$ on ainuke lokaalne maksimum $f(0, 0) = 0$, kuid näiteks punktis $(5, 0)$ on $f(5, 0) = 25$. Seega punkt $(0, 0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt. Osatuletised on nullid ka punktis $(2, 2)$, kuid see punkt ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.

Vastus 13.6. Rajaks on sirged $q = 0$, $r = 0$ ja $q + r = 1$.

Vastus 13.7. $10 + 10 + 10$.

Vastus 13.8. Kuup.

Vastus 13.9. $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$, $z = \frac{(2V)^{\frac{1}{3}}}{2}$, kus x ja y on vanni põhja mõõtmed ja z on vanni kõrgus.

Vastus 13.10. Ristküliku küljed on $\frac{2p}{3}$ ja $\frac{p}{3}$.

Vastus 13.11. $P = -0.2x^2 + 16x - 0.1y^2 + 12y - 20$, 40 autot Ameerikas hinnaga 12000 \$, 60 autot Euroopas hinnaga 10000 \$.

Vastus 13.13. 6 tundi harjutamist ja 1 tund puhkust.

Vastus 13.14. $A = (5/4, -1/4)$

Vastus 13.15. (a) $y' = -\frac{e^x}{1+\cos y}$; (b) $y' = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$; (c) $y' = -\frac{y}{y+x}$; (d) $y' = \frac{x-y}{x-2y^3}$; (e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; (f) $y' = -\frac{e^y+ye^x-4xy}{xe^y+e^x-2x^2}$; (g) $y' = -\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$; (h) $y' = \frac{\cos(xy)-xy\sin(xy)-y\sin x}{x^2\sin(xy)-\cos x}$.

Vastus 13.16. (a) $4/3$; (b) 2 ; (c) $-4/5$; (d) $-(2 - \ln 2)$.

Vastus 13.18. (c) $P_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; (d) $P_2(x, y) = 9 + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + \frac{1}{3}(y-3)^2$; (e) $P_2(x, y) = 2\pi(x-1) + (y-\pi) - \frac{\pi(x-1)^2}{2} + (x-1)(y-\pi)$; (f) $P_3(x, y) = 1 - xy$; (g) $P_2(x, y) = 1 + 4(x-\pi/4) - 2(y-\pi/4) + 8(x-\pi/4)^2 - 8(x-\pi/4)(y-\pi/4) + 2(y-\pi/4)^2$.

Praktikum 14

Vastus 14.1. Vähiim kaugus on $2\sqrt{3}$

Vastus 14.2. Vähiim kaugus on 1

Vastus 14.3. (a) $f_{\min} = 2$ punktis $(1, 1)$ ja $\lambda = -2$, (b) $f_{\max} = 1$ punktis $(2, 2)$ ja $\lambda = -1$; $f_{\min} = -1$ punktis $(-2, -2)$ ja $\lambda = 1$, (c) $f_{\min} = 1$ punktis $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ ja $\lambda = \frac{5}{2}$, $f_{\max} = 11$ punktis $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ja $\lambda = -\frac{5}{2}$, (d) $f_{\min} = 9$ punktis $(3, 3, 3)$ ja $\lambda = 9$, (e) $f_{\min} = -9$ punktis $(-1, 2, -2)$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$; $f_{\max} = 9$ punktis $(1, -2, 2)$ ja $\lambda = -\frac{1}{2}$, (f) $f_{\min} = 6$ punktis $(1, 1, 2)$ ja $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$,

Vastus 14.4. Maksimaalne laskekaugus on $\frac{2E}{mg}$

Vastus 14.5. (a) puutuja on $z = x - y$; (b) puutuja on $z = 2(x - 1)$, normaal on $x = 1 + 2t, y = 0, z = -t$; (c) puutuja on $z = 1$, normaal $x = 0, y = 0, z = 1 - t$; (d) puutuja on $z = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{2}$, normaal on $-2(x-1) = 2(y-2) = -(z-1)$; (e) puutuja on $z = 5 + 8(x-1) + 2(y-1)$, normaal on $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}$; (f) puutuja on $z = -4x - 2y - 3$, normaal on $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$; (g) puutuja on $z = 2/5 + 3x/25 - 4y/25$, normaal on $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1/5}{-25}$; (i) puutuja on $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{x-\pi}{4} + \frac{\pi}{16}(y-4))$, normaal on $\frac{x-\pi}{-1/(4\sqrt{2})} = \frac{y-4}{\pi/(16\sqrt{2})} = \frac{z-1/\sqrt{2}}{-1}$.

Vastus 14.6. (a) $(-4, 1, -31)$; (b) $(0, 0, 0)$ ja $(1, 1, 1)$; (c) $(0, 0, 0), (1, 1, 1)$ ja $(-1, -1, 1)$; (d) $(a^2/b, b^2/a, 3ab)$.

Vastus 14.7. Muutumiskiirused on (a) $2\sqrt{5}$, (b) $-\frac{6\sqrt{5}}{5}$, (c) 2 ja (d) $3\sqrt{2}$.

Vastus 14.8. (a) $\nabla f(1, -2) = (10, -4)$, (b) $\nabla f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, (c) $\nabla f(1, -1, -1) = (-1, 2, 3)$, (d) $\nabla f(1, -1, 0) = (1, 2, 0)$, (e) $\nabla f(e, e, -1) = (1, 1, e)$, (f) $\nabla f(1, -1) = (4, -4)$.

Vastus 14.9. (a) $|\nabla f(2, -1)| = 2\sqrt{5}$, (b) $|\nabla f(1, 1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (c) $|\nabla f(2, 0)| = 2$, (d) $|\nabla f(2, -1)| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Vastus 14.10. Temperatuur kasvab kõige kiiremini suunas $(1, -1)$ ja suurim kasvukiirus on $\frac{4\sqrt{2}}{e}$ ($^{\circ}C$ kraadi pikkusühiku kohta).

Vastus 14.11. Kiireima tõusuga trajektor igast punktist on sirge, mis on risti selle kontuurjoonega, millel see punkt asetseb.

Vastus 14.12. (a) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ (b) $f(x) = -0,2857x + 1,8571$ (c) $f(x) = 3$ (d) $f(x) = 0,5116x + 1,1163$

Vastus 14.13. (a) $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{8}x + 1$ (b) $f(x) = -0,3x^2 + 1,9x - 0,6$ (c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{4}{3}$ (d) $f(x) = 0,0844x^2 + 0,7727x + 1,026$

Vastus 14.14. (a) $f(x) = 18,7e^{-0,001x}$ (b) $f(x) = 7,1993e^{-0,008x}$

Vastus 14.15. (a) $f(x) = 0,51x + 0,41$ (b) Kuuenda aasta müüginumbrid on 3,47 miljonit eurot

Praktikum 15

Vastus 15.1. (a) $\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 f(x, y) dx$ (b) $\int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$
 (c) $\int_0^2 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx$ (d) $\int_{-1}^1 dx \int_{-a}^a f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-b}^b f(x, y) dx$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ ja $b = \sqrt{1-y^2}$ (e)
 $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$, kus $c = \sqrt{y}$ (f) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^{\frac{1}{3}}} f(x, y) dx$.

Vastus 15.2. (a) $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$ (b) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$ (c) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^a f(x, y) dy$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ (d) $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx +$
 $\int_{\frac{4}{2}}^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ (e) $\int_{-1}^0 dy \int_{-a}^a f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{-a}^{1-y} f(x, y) dx$, kus $a = \sqrt{y+1}$ (f) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (g)
 $\int_0^1 dy \int_{-a}^a f(x, y) dx$, kus $a = \arccos y$ (h) $\int_0^1 dy \int_b^{\pi-b} f(x, y) dx$, kus $b = \arcsin y$.

Vastus 15.3. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) π (d) 2 (e) $\frac{3}{2}$, arvestada, et $e^{x-y} = e^x e^{-y}$ (f) $\frac{1}{3}$ (g) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{-2}{3}$ (j) $\frac{13}{81}$

Praktikum 16

Vastus 16.1. (a) 6; (b) 3, 5; (c) -6; (d) $\frac{3}{2} \ln 2$.

Vastus 16.2.

(a) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq 9, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$
 (b) $D = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq 4, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$
 (c) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \varphi}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$
 (d) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$
 (e) $D = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq \frac{2\sqrt{3}}{\cos \varphi}, \text{ kui } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \text{ ja } 1 \leq r \leq \frac{2}{\sin \varphi}, \text{ kui } \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$
 (f) $D = \left\{ (r, \varphi) : \frac{1}{\cos \varphi} \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$

Vastus 16.3. (a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $3\pi + 2$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) $\pi(\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2)$ (f) $\frac{\pi^2}{16}$

Vastus 16.4. (a) $\frac{32}{9}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{32}{9}$ (d) 24π (e) 7

Praktikum 17

Vastus 17.1. (a) $\frac{3}{4}$ (b) 2 (c) $16 - \frac{6}{\ln 2}$ (d) $7,5 - 8 \ln 2$ (e) 5 (f) $\pi 16$ (g) $\frac{\pi(b^2-a^2)}{4}$ (h) $\frac{3\pi a^2}{2}$ (i) 2π (j) 1, minna üle
 polaarkoordinaatidele (k) 2, minna üle polaarkoordinaatidele (l) $\frac{5\pi}{8}$

Vastus 17.2. 8000 ft^3 ehk u. 216 m^3

Vastus 17.3. 90000 m^3

Vastus 17.4. 288000 m^3

Vastus 17.5. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{20}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{4}{\pi^2}$ (k) 12π

Vastus 17.6. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{560}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$ (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}$ (g) $\frac{1}{6}$ (h) 16 (i) 22π (j) $\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}$ (k) $\frac{16}{3}$ (l) 3π (m) $4\pi(2\sqrt{6}-\sqrt{3})$ (n) π

Vastus 17.7. (a) 14 (b) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$ (c) $14\pi a[a - \sqrt{a^2 - b^2}]$ (d) $2\pi\sqrt{2}$ (e) $\frac{16(\sqrt{8}-1)}{3}$ (f) $2a^2(\pi - 2)$ (g) 4π , võtke integreerimise piirkond yz -tasandil.

Vastus 17.9. 80π

Vastus 17.10. $4a^2/3$

Vastus 17.11. $4000(1 - e^{-2}) \ln 3, 5 \approx 4332, 88$

Vastus 17.12. $Q = \frac{2k\pi R^3}{3} C$

Vastus 17.13. $(0, 6/5)$

Vastus 17.14. (a) $\left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$ (b) $\left(\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(1 + \sqrt{2}), \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right)(2 + \sqrt{2})\right)$ (c) $(-1/2, 8/5)$ (d) $\left(\frac{5}{3}, \frac{32}{9\pi}\right)$ (e) $(4\pi, 2\pi/3)$

Vastus 17.15. $(-2/5, 0)$

Vastus 17.16. $\left(-\frac{64+15\pi}{80+40\pi}, 0\right)$

Praktikum 18

Vastus 18.1. 24

Vastus 18.2. (a) 6 (b) 4 (c) $\frac{40}{3}$ (d) $10 \ln \frac{4}{5}$ (e) $\frac{4\pi}{3}$ (f) $\frac{1}{364}$ (g) 11

Vastus 18.3. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{4}$ (c) $\frac{a^3}{12}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (d) 0 (e) $\frac{8c^2}{9}$ (f) $\frac{4\pi(b^5 - a^5)}{15}$

Praktikum 19

Vastus 19.1. (a) $\frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{10}$

(d) $\frac{2\pi}{3}$, osa lahendusest: minnes üle sfäärkoordinaatidele, saame

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r dr \int_0^\pi \frac{d(r^2 - 4r \cos \theta + 4)}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \pi \int_0^1 r dr (\sqrt{(r+2)^2} - \sqrt{(r-2)^2}) =$$

$$\pi \int_0^1 r dr (r+2 - |r-2|). \text{ Et } r-2 < 0, \text{ siis edasi arvestame, et } |r-2| = -(r-2).$$

(e) $\frac{4\pi a^5}{15}$ (f) $\frac{8\pi(b^5 - c^5)}{15}$

Vastus 19.2. (a) 128 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) 16 (e) $\frac{7}{24}$ (f) $\frac{3}{35}$ (g) $\frac{\pi a^3}{3}$, sfäärkoordinaatides, arvestame kujundi sümmeetriat

Vastus 19.3. $\frac{\pi(27 - 9R^2 + 2R^3)}{3000}$ liitrit, kus R on tassi raadius

Vastus 19.6. 5000

Vastus 19.7. $abc(a + b + c)/2$

Vastus 19.8. $a^4/24$

Vastus 19.9. $\pi 2a^4/4$

Vastus 19.10. $\pi k \pi a^4 c/2$, kus k on võrdetegur

Vastus 19.11. $6k\pi a^2$, kus k on võrdetegur

Vastus 19.14. (a) (1, 1, 1) (b) (3/5, 3/5, 9/32) (c) (3/8, 3/8, 3/8)

Vastus 19.15. (0, 0, 4/5)

Praktikum 20

Vastus 20.1. (a) $\sqrt{5} \ln 2$, (b) $\frac{\sqrt{5}}{2} \ln 3$, (c) 1/2, (d) $\pi a^2/2$, (e) 2π , (f) 24, (g) $8\pi^3 \sqrt{2}$.

Vastus 20.2. (a) $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$, (b) 5.

Vastus 20.3. (a) $\sqrt{2}/2$, (b) 12π , (c) 32.

Vastus 20.4. 16

Vastus 20.5. (a) π , (b) -4 , (c) $-\pi/4$, (d) 3, (e) 32, (f) 2, (g) 0, (h) -4π .

Vastus 20.6. (a) πab , (b) 1/3, (c) $3\pi a^2/8$, (d) $3\pi a^2/2$.

Praktikum 22

Vastus 22.2. (a) $y = e^x - 1$ (b) $y = x^2$ (c) Ühiseid lahendeid ei ole.

Vastus 22.3. (a) $2e^y - e^{2x} = C$ (b) $x^2 - \sqrt{1 - y^2} = C$, $y = \pm 1$ (c) $y = 1 + C(x + 1)$, $x \neq -1$ (d) $y = \tan x + C$, $C = 0$
(e) $y^2 = 2 \ln |1 + e^x| + C$, $C = 1 - 2 \ln 2$ (f) $y = C \sin x$, $C = 1$

Vastus 22.4. $m(t) = m_0 e^{-kt}$

Vastus 22.5. ≈ 36.8 kg. Näpunäide: Soolakoguse muutumise kiirus on võrdne vahega sissevoolava lahuse ja väljavoolava lahuse soola koguste kiirustest. Soola lisamise kiirus on $10 \text{ g/l} \cdot 10 \text{ l/min} = 100 \text{ g/min}$, see on $1/10 \text{ kg/min}$. Kuna välja voolab lahust 10 l/min , siis soola voolab välja lahusest kiirusega $10x/1000 \text{ kg/min}$.

Vastus 22.6. (a) $y = Ce^x - x$ (b) $y = x^2 + C/x$ (c) $xy = C - \ln |x|$ (d) $y = Cx + x \ln |\ln |x||$ (e) $y = e^{-\sin x} (x + C)$
(f) $y = (x^2 + C) \sin x$ (g) $y = C \cos x + \sin x$ (h) $y = x(C + \sin x)$ (i) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$ (j) $y = e^x (C + \ln |x|)$, $x = 0$ (k) $y = 1$ (l) $y = \ln |x| - 1/\ln |x|$

Vastus 22.7. $I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\alpha R}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin(\omega t) - \frac{\alpha \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t)$

Praktikum 23

Vastus 23.2. (a) $e^{\frac{y}{x}} = Cx$, $x = 0$, $y = 0$ (b) $1/2 \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = C$ (c) $y^2 = 2x^2(\ln |x| + C)$ (d) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ (e) $y = x - \frac{x}{\ln |x| + C}$, $y = x$ (f) $y = C(x^2 + y^2)$

Vastus 23.3. $y^2 = C(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Vastus 23.4. (a) $y + 2 = (x - 1)(\ln |x - 1| + C)$ ($x \neq 1$), $x = 1$ (b) $(y + 2)^2 = C(x + y - 1)$, $y = 1 - x$ (c) $8y - 4x + \ln |4x + 8y + 5| = C$, $y = -5/8 - 1/2x$ (d) $\ln(2x - 3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$

Vastus 23.5. $(y + x - 1)^5 (y - x - 1)^2 = C$

Vastus 23.6. $\ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right) = 1 + \frac{C}{x+y}$

Praktikum 24

Vastus 24.1. (a) $y^2 = Cx^2 - x$ (b) $y^3 = 1 + Ce^{-x}$ (c) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$, $y = 0$ (d) $y(x + 1)(\ln |x + 1| + C) = 1$, $y = 0$
(e) $y = x^4(C + \ln |x|)^2$, $y = 0$ (f) $y(Ce^{-\sin x} - 1) = 1$, $y = 0$ (g) $y^{-3} = (C + 3x) \cos^3 x$, $y = 0$ (h) $y^3 = Cx^3 - 3x^2$, $x = 0$
(i) $y^2 = Cx^2 - 2x$, $x = 0$

Vastus 24.2. $x(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2) = 1$, $x = 0$

Vastus 24.3. (a) $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$ (b) $2y^2 - xy + x^3 = C$ (c) $y^4 = 4xy + C$ (d) $\ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$ (e) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$
(f) $\ln |x + y| - \frac{x}{x+y} = C$ (g) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - xy = C$ (h) $x^2(y^2 + 1) + y^4 = C$ (i) $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$ (j) $y^4 = 4xy + C$ (k) $\sqrt{x^2 - y^2} - x = C$ (l) $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$ (m) $xe^{-y} - y^2 = C$

Vastus 24.5. (a) $y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.2$, $y_3 = 1.3$ (b) $y_1 = 1.2$, $y_2 = 1.45$, $y_3 = 1.78$ (c) $y_1 = 0$, $y_2 = 0.001$, $y_3 = 0.005$ (d) $y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.18$, $y_3 = 1.25$ (e) $y_1 = 5.8$, $y_2 = 9.44$, $y_3 = 18.78$

Praktikum 25

Vastus 25.1. (a) $y = C_1x + C_2 + x \ln|x|$ (b) $y = C_1x + C_2 - \ln|\cos x|$ (c) $y = C_1x + C_2 + \frac{x^3}{6} + x \ln|x|$ (d) $y = C_1x + C_2 + \frac{1}{x^2-1}$
 (e) $y = e^x + x^{-1/2} + C_1x + C_2$ (f) $y = C_1x + C_1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$

Vastus 25.2. (a) $y = C_1 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + C_2$ (b) $y = C_1 \ln|x| + C_2 + \frac{\ln^2|x|}{2}$ (c) $y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2$ (d) $y = C_1x^2 + C_2$ (e)
 $y = C_1 \ln|x| + C_2$ (f) $y = C_1e^{x^2} + C_2$ (g) $y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$ (h) $y = C_1(x \ln|x| - x) + C_2$ (i) $y = e^{e^{C_1x-2C_1+1}}(e^{C_1x-1}) + C_2$
 (j) $y = -\frac{x}{C_1} - \frac{\ln|1-C_1x|}{C_1^2} + C_2$

Vastus 25.3. (a) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ (b) $y = C_1e^{2x} + C_2$ (c) $y = C_1e^{2x} \sin x + C_2e^{2x} \cos x$ (d) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$
 (e) $y = C_1e^x + C_2e^{xx}$ (f) $y = C_1e^{7x} + C_2$ (g) $y = e^{\frac{5x}{3}} + 1$ (h) $y = C_1e^{x/2} + C_2e^{-2x}$ (i) $y = C_1e^{-x/4} + C_2e^{-x/4}$
 (j) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ (k) $y = C_1e^{-\frac{7x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{19x}}{2}\right) + C_2e^{-\frac{7x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{19x}}{2}\right)$ (l) $y = \frac{1}{6}e^{-5(x+1)}(e^{6x+6} - 1)$ (m)
 $y = e^{3x}(\sin x + \cos x)$

Praktikum 26

Vastus 26.1. (a) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x$ (b) $y = 3x + C_1 + C_2e^{-x}$ (c) $Y = 2xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$ (d)
 $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (2x-2)e^x$ (e) $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - 2x \cos(x)$ (f) $y = (C_1 - x^2/4) \cos(x) + (C_2 + x/4) \sin(x)$
 (g) $y = e^x - 1 + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ (h) $y = C_1 + C_2e^x + xe^x - x(1+x/2)$ (i) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + ((3x-4)/9)$ (j)
 $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + e^{3x}(x^2/18 - x/27 + 5/81)$

Vastus 26.2. (a) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} + x/12 + 7/144$ (b) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x(2x^3 - 5x + 10)$ (c) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^3 + 2x^2 - 3x$
 (d) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-x} - x^3/5 + 12/25x^2 - 126/125x + 499/625$ (e) $C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x/2 + 3/4$ (f) $y = C_1e^{2x} +$
 $C_2e^{-x} + 4/3xe^{2x}$ (g) $y = e^{-x}(3/2x^2 + C_1 + C_2x)$ (h) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 1/2e^{-5x}$ (i) $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + 5/74 \sin(x) +$
 $7/74 \cos(x)$ (j) $y = C_1e^{(2+\sqrt{5})x} + C_2e^{(2-\sqrt{5})x} - 1/10 \sin(x) + 1/5 \cos(x)$ (k) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) - 1/6 \cos(3x)$
 (l) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 1/5(6 \sin(2x) + 2 \cos(2x))$ (m) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 1/3(x - 4/3 + 1/5e^{2x})$

Praktikum 27

Vastus 27.1. (a) $y = \frac{C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)}{x}$ (b) $y = \frac{C_1 e^{-x} + C_2 e^x}{x}$ (c) $y = C_1 \tan x + C_2(1 + x \tan x)$ (d) $y = C_1(e^x -$
 $1) + C_2(e^x + 1)^{-1}$ (e) $y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{-\sin x}$ (f) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$ (g) $y = C_1x \cos(2x) + C_2x \sin(2x)$ (h)
 $y = C_1 \tan x + C_2(1 + x \tan x)$ (i) $y = C_1x + C_2e^{-2x}$ (j) $y = C_1(1 + x \ln|x|) + C_2x$ (k) $y = C_1x + C_2(\ln|x| + 1)$ (l)
 $y = C_1(2x+1) + C_2e^{2x}$ (m) $y = C_1(x^2+1) + C_2(x+(x^2+1) \arctan x)$ (n) $y = C_1x + C_2\sqrt{x^2+1}$ (o) $y = C_1e^{2x} + C_2(3x+1)e^{-x}$

Vastus 27.2. (a) $y = C_1 \cos(e^{-x}) + C_2 \sin(e^{-x}) + e^{-x}$ (b) $y = C_1 \cos e^{-x} + C_2 \sin e^x + x$ (c) $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}$ (d)
 $y = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 + x^4$ (e) $y = C_1e^{x^2} + C_2 + (x^2-1)e^{x^2}$ (f) $y = C_1 + C_2 \tan x + \frac{1}{2}(1+x \tan x)$ (g) $y = C_1e^x + C_2x - \frac{1}{2}(2x-1)e^{-x}$
 (h) $y = C_1x + C_2xe^x - 2x^2$

Praktikum 28

Vastus 28.1. (a) $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \sin(\sqrt{3}x) + C_3 \cos(\sqrt{3}x))$

(b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$

(c) $y = C_1 e^x x^2 + C_2 e^x x + C_3 e^x$

(d) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_6 x + \frac{x^4}{24} + e^x \frac{x^2}{2} - 4e^x x$

(e) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x + x \ln x$

(f) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + \cos x$

Vastus 28.2. (a) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \sin x$

(b) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ln x$

(c) $y = chx + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

(d) $y = C_1 + C_2 x \pm 4/3 \sqrt{(c_1 + x)^3}$

(e) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^5$

(f) $y = C_1 + C_2 x - C_3 \ln(C_3 + x) - x \ln(C_3 + x)$

(g) $y = C_1 + C_2 x + C_3(x^2 + \cos^2(x)) + 1/4(x^2 - \cos^2 x)$

(h) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}(x + 2)$

Vastus 28.6. (a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

(b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1, z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1$

(c) $y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, z = C_2 e^{C_1 x}$

(d) $y = C_2 e^{C_1 x}, z = C_1 C_2 e^{C_1 x}$

(e) $y = C_1 + \ln(x^2 + 1), z = \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} + (\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}) \ln(x^2 + 1) + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}$

(f) $y = C_2 e^{C_1 x^2}, z = \frac{1}{2C_1 C_2} e^{-C_1 x^2}$

Praktikum 29

Vastus 29.1. (a) $y = C_2 e^{C_1 x}, z = x + C_2 C_1^{-1} e^{C_1 x}, y = 0, z = x + C$

(b) $y = C_1 e^{x^2}, z = x(C_2 - \ln|x|)$

(c) $y = C_1 x + C_2 - \frac{x^2}{2}, z(C_1 - x - 1) = 1$

(d) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}, z = -6C_2 e^{-5x}$

(e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, z = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} + \cos(x)$

(g) $x = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t, y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3 e^t, z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t$

(j) $x = 3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t), y = C_2 \cos(3t) + C_1 \sin(3t)$

(k) $x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + t - 1, y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t + 1$

(l) $x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, y = e^{-t} + 3e^{-7t}$

(m) $x = (\sin t - 2 \cos t)e^{-t}, y = e^{-t} \cos t$

Vastus 29.7. (a) $u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}, C(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

(b) $u = y \frac{x^2}{2} + C(y), C(y) = 1 - y \frac{1-y^2}{2}$

(c) $u = y \ln|x| + C(y), C(y) = y^2$

(d) $u = C(y), C(y) = y$

Praktikum 30

Vastus 30.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

- (a) $u = f(x^2 + y^2)$
- (b) $u = e^{\frac{x}{y}} f(y)$
- (c) $u = f(x^2 - y^2) + y - x$
- (d) $x^2 - 4u = f\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right)$
- (e) $u = xf(x^2 + y^2)$
- (f) $u = xy + f(x^2 - y^2)$
- (g) $u = yf(x^2 - y^2)$
- (h) $v\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{u}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{u}\right) = 0$
- (i) $u = xy + f(x^2 + y^2)$
- (j) $u^2 = 2x + f\left(\frac{y}{x}\right)$
- (k) $u = f\left(e^{-x} - \frac{1}{y}\right) - \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - \frac{1}{y}}$
- (l) $u = \sin y + f(\sin x - \sin y)$
- (n) $v(\tan u + \cot x, 2y - \tan^2 u) = 0$

Praktikum 32

Vastus 32.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

- (a) $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$
- (b) $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$
- (c) $v\left(u, (x - y)^{\frac{2}{z}-1}, \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right) = 0$
- (d) $v\left(\frac{x}{y}, xy - 2u, \frac{z+u-xy}{x}\right) = 0$
- (e) $v\left(u, \frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right) = 0$
- (f) $v\left(u, \frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right) = 0$

Vastus 32.2. (a) $u = 2xy$

- (b) $u = ye^x - e^{2x} + 1$
- (c) $u = y^2 e^{2\sqrt{x}-2}$
- (d) $u(x^2 + 1) = y^2$
- (e) $u = x^2 y$
- (f) $u = y - x^2$
- (g) $2x^2 - y^2 - u^2 = a^2$
- (h) $(x - y)(3x + y + 4u) = 4u$
- (i) $4yx - x^3 y + x^2 u^2 = 4y^2$
- (j) $xy + u^2 = a^2$