Ühe muutuja matemaatiline analüüs

Praktikumiülesannete kogu

2022. a. kevadsemester

Valminud Hariduse Infotehnoloogia Sihtasutuse IT Akadeemia programmi toel.

1. Järjestatud korpuse omadused

1. Aksioomidest (A1)–(A4) lähtudes tõestage, et
1) nullelement 0 on igas korpuses F üheselt määratud;
2) iga $a \in F$ korral on vastandelement $-a$ üheselt määratud;
3) võrrandil $a + x = b$ on korpuses F parajasti üks lahend $x := b - a$;
4) $-(a+b) = -a - b$.

2. Aksioomidest (M1)–(M4) lähtudes tõestage, et
1) ühikelement 1 on igas korpuses F üheselt määratud;
2) iga $b \neq 0$ korral on pöördelement b^{-1} üheselt määratud;
3) kui $a \neq 0$, siis võrrandil $a \cdot x = b$ on korpuses F parajasti üks lahend $x := b \cdot a^{-1}$;
4) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

3. Korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et korpuses F kehtivad järgmised väited:
1) $0a = 0$ iga $a \in F$ korral;
2) kui $ab = 0$, siis kas $a = 0$ või $b = 0$ (s.t. $F \setminus \{0\}$ ei sisalda nullitegureid);
3) $(-a)b = -(ab)$ kõikide $a, b \in F$ korral, muuhulgas $(-1)b = -b$;
4) $(-a)(-b) = ab$ kõikide $a, b \in F$ korral.

4. Järjestatud korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et järjestatud korpuses F kehtivad järgmised väited:
1) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$,
2) $[a < b, c < 0] \Rightarrow ac > bc$,
3) $a^2 > 0$ iga $a \in F \setminus \{0\}$ korral, muuhulgas $1 > 0$,
4) $[a < b, c < d] \Rightarrow a + c < b + d$,
5) $[0 < a < b, 0 < c < d] \Rightarrow ac < bd$,
6) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$,
7) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$,
8) kui $a < b$, siis $a < 2^{-1}(a+b) < b$, kus $2 := 1 + 1$.

5. Tõestage, et järjestatud korpuses F ei leidu vähimat positiivset elementi.

6. Olgu $F = \{0, 1\}$, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele liitmisele ja korrutamisele, välja arvatud $1 + 1 = 0$. Näidata, et F on korpus. Kas F on ka järjestatud korpus?

7*. Olgu $F = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele liitmisele ja korrutamisele. Näidata, et F on korpus. Kas F on ka järjestatud korpus tavalise reaalarvude järjestuse suhtes?

8*. Olgu $\mathbb{C}$ kompleksarvude hulk, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele kompleksarvude liitmisele ja korrutamisele. Näidata, et $\mathbb{C}$ on korpus. Kas korpuses $\mathbb{C}$ saab defineerida järjestuse nii, et $\mathbb{C}$ oleks järjestatud korpus?

2. Absoluutväärtuse omadused. Alumine ja ülemine raja.

9. Tõestage järgmised väited:

1) $|a| \geqslant 0$,
2) $|-a| = |a|$,
3) $a \leqslant |a|,\ -a \leqslant |a|$,
4) $|a| = \max\{a, -a\}$,
5) $|a| \leqslant c \Leftrightarrow -c \leqslant a \leqslant c$,
6) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,
7) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$,
8) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|$.

10. Tõestage, et alamhulga ülemine raja järjestatud korpuses on üheselt määratud (eeldusel, et ta on olemas).

11. Tõestage, et kui järjestatud korpuse alamhulgas on suurim (vähim) element, siis see on selle hulga ülemine (alumine) raja.

12. Tõestage, et kui $a = \sup X$, siis alamhulk $Y := \{\lambda x + 1 : x \in X\}$ on iga $\lambda > 0$ korral ülalt tõkestatud ning $\sup Y = \lambda a + 1$.

13. Olgu $X \neq \emptyset$ ja $Y \neq \emptyset$ sellised reaalarvude hulgad, et $x \leqslant y$ kõikide $x \in X$ ja $y \in Y$ korral. Tõestage, et X on ülalt ja Y on alt tõkestatud ning $\sup X \leqslant \inf Y$.

14. Leidke $\min X$, $\max X$, $\inf X$ ja $\sup X$, kui

1) $X := [0, 1)$,
2) $X := \left\{\dfrac{1}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
3) $X := \left\{\dfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
4) $X := \left\{\dfrac{(-1)^n + 2}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
5) $X := \left\{\dfrac{n^2+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

15. Olgu X ja Y täieliku järjestatud korpuse F mittetühjad alamhulgad. Tõestage järgmised väited.

1) Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y := \{x + y \colon x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$.
2) Kui X ja Y on alt tõkestatud, siis on ka hulk $X+Y$ alt tõkestatud ning $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.
3) Kui X on ülalt ja Y alt tõkestatud, siis on hulk $X - Y := \{x - y \colon x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X-Y) = \sup X - \inf Y$.
4) Kui X on alt ja Y ülalt tõkestatud, siis on hulk $X - Y := \{x - y \colon x \in X,\ y \in Y\}$ alt tõkestatud ning $\inf(X-Y) = \inf X - \sup Y$.
5) Olgu X ja Y sellised hulgad, mille kõik elemendid on mittenegatiivsed. Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X \cdot Y := \{xy \colon x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$.

16*. Leidke järgmised suurused:

$$\sup\left\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \sup\left\{\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

17*. Olgu $\mathbf{I}$ mingi indeksite hulk (lõplik või lõpmatu). Olgu $A = \{a_\iota \colon \iota \in \mathbf{I}\}$ ja $B = \{b_\iota \colon \iota \in \mathbf{I}\}$ mingid reaalarvude hulgad. Näidata, et

$$\sup\{a_\iota + b_\iota \colon \iota \in \mathbf{I}\} \leqslant \sup A + \sup B,$$
$$\inf\{a_\iota + b_\iota \colon \iota \in \mathbf{I}\} \geqslant \inf A + \inf B.$$

Millistel tingimustel kehtib ülaltoodud võrratustes võrdus? Tuua näide hulkadest, mille korral on võrratus range.

3. Arvjadad. Jada piirväärtuse definitsioon ja omadused

18. Tõestage, et kui $x_n \to 0$ ja (y_n) on tõkestatud jada, siis $x_n y_n \to 0$.

19. Tõestage, et kui $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, siis

1) $x_n + y_n \to a + b$;
2) $x_n - y_n \to a - b$;
3) $x_n y_n \to ab$;
4) $\lambda x_n \to \lambda a$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ puhul;
5) $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0,\ x_n \neq 0)$;
6) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0,\ y_n \neq 0)$.

20. Koondugu jada (x_n) ja hajugu jada (y_n). Mida võib öelda jadade $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ koonduvuse kohta? Tooge sobivaid näiteid.

21. Hajugu mõlemad jadad (x_n) ja (y_n). Kas jadad $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ samuti hajuvad? Tooge sobivaid näiteid.

22. Kehtigu $\lim_n x_n = 0$ ning hajugu jada (y_n). Kas kehtib ka $\lim_n x_n y_n = 0$? Tooge sobivaid näiteid.

23. 1) Olgu $N \in \mathbb{N}$ ja olgu (x_n) selline jada, et $x_n = a$ iga $n \geqslant N$ korral. Näidake, et $\lim_n x_n = a$.
2) Tooge näide hajuvast jadast (x_n), kus $x_n = a$ lõpmata paljude indeksite n korral.

24. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3+\sqrt{2n}} = 0$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2+5n} = 0$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n}{2+n} = 7$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} = 0$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+5}{8n-3} = \dfrac{1}{2}$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+8}{n^2-25} = 0$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-3}{10n-3} = \dfrac{1}{2}$;
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+1} = \infty$;
9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n+3} = \infty$.

25. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, tõestage, et järgmised piirväärtused ei leidu.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n + (-2)^n$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

26. Olgu $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \dots + \dfrac{\sin n}{2^n}$. Kasutades Cauchy kriteeriumi, näidake, et jada (x_n) on koonduv.

27*. Olgu $a > 1$ ning $k \in \mathbb{N}$. Näidata, et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

28*. Olgu $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ ja $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$, kui $n \geqslant 2$. Kas jada (x_n) on koonduv? Põhjendage. Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Jada piirväärtuse omadused ja arvutamine

29. 1) Tõestage, et kui $\lim\limits_n x_n = a$, siis $\lim\limits_n |x_n| = |a|$.

2) Veenduge, et vastupidine väide on üldjuhul väär.

3) Tõestage, et $\lim\limits_n x_n = 0$ parajasti siis, kui $\lim\limits_n |x_n| = 0$.

30. Tõestage, et $\lim\limits_n |x_n| = \infty$ parajasti siis, kui $\lim\limits_n \dfrac{1}{x_n} = 0$.

31. Tõestage, et arvjada (x_n) on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $K > 0$, et $|x_n| \leqslant K$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

32. 1) Olgu $\lim\limits_n x_n = a > 0$. Näidake, et leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n > 0$ iga $n \geqslant N$ korral.

2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide juhul $a < 0$.

33. Veenduge, et kui $x_n \to a$ ja $y_n \to a$, siis ka $z_n \to a$, kus $(z_n) = \big(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots\big)$, s.t.

$$z_n := \begin{cases} x_k, & \text{kui } n = 2k-1, \\ y_k, & \text{kui } n = 2k. \end{cases}$$

34. Olgu $\lim\limits_n x_n = a$ ja $\lim\limits_n y_n = b$. Veenduge, et $\lim\limits_n \max\big\{x_n, y_n\big\} = \max\{a, b\}$ ning $\lim\limits_n \min\big\{x_n, y_n\big\} = \min\{a, b\}$.

35. Tõestage, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral leidub ratsionaalarvude jada (x_n) omadusega $x_n \to a$. (Kasutage asjaolu, et $\mathbb{Q}$ on tihe korpuses $\mathbb{R}$.)

36. Leida järgmiste jadade piirväärtused:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - (-1)^n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 7n - 3}{(3n+2)^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + n^2 \sin n\pi$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{1{,}1^n} + \sqrt[n]{3}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{(1-2n)^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 1}{3^n - 2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^n + \dfrac{1}{(-2)^n}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sqrt{n(n+1)} - n\Big)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sqrt{2n(n+1)} - n\Big)$.

37*. Olgu $a \in \mathbb{R}$. Arvutage piirväärtus

$$\lim_n \frac{1}{n}\left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(a + \frac{n-1}{n}\right)^2\right).$$

5. Monotoonsusprintsiip. Cauchy kriteerium. Osajadad

38. Leidke järgmiste jadade piirväärtused:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-1}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{n}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3n+2}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3n+2}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n}$;
6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+2]{n^2+4n-2}$.

39. Rahuldagu jada (x_n) iga naturaalarvu n korral seost $x_{n+1} = \dfrac{8}{x_n}$. Kas jada (x_n) on koonduv? Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

40. Jada (x_n) on defineeritud järgmiselt: $x_1 = \dfrac{3}{2}$ ja $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1$, kui $n \in \mathbb{N}$. Uurige jada (x_n) koonduvust. Kui jada koondub, siis leidke piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

41. Kasutades Cauchy printsiipi, näidake, et jada $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ on hajuv.

42. Kasutades Cauchy printsiipi, näidake, et jada $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ on koonduv.

43. 1) Tõestage, et kui $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ ja $\left(x_{n_k}\right)$ on jada (x_n) osajada, siis $x_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.
2) Tooge näide hajuvast jadast, millel on koonduv osajada.

44. Tooge näide arvjadast (x_n), mille osapiirväärtuste hulk oleks antud arvuhulk $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

45. Tooge näide arvjadast (x_n), mille osapiirväärtuste hulgas esineks kõik arvud arvjadast $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Milliseid osapiirväärtusi omab jada (x_n) kindlasti veel?

46. Tooge näited järgmistest arvjadadest (x_n):

1) millel puuduksid lõplikud osapiirväärtused,
2) millel oleks üks lõplik osapiirväärtus, ent mis poleks koonduv jada,
3) mille osapiirväärtuste hulk oleks lõpmatu,
4) mille osapiirväärtuste hulk oleks $\mathbb{R}$.

47. Leidke järgmiste jadade osapiirväärtuste hulk.

1) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \dfrac{n\pi}{4}$,
2) $x_n = \left(\cos \dfrac{2n\pi}{3}\right)^n$,
3) $\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{1}{8}, 0, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, 0, \ldots$,
4) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \ldots$,
5) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \ldots$,
6) $x_n = 3 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 2 \cdot (-1)^n$.

48*. Jada (x_n) on defineeritud järgmiselt: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ ja $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}\left(1 + x_{n+1} + x_n^3\right)$, kui $n \in \mathbb{N}$. Kas jada (x_n) on koonduv? Põhjendage. Kui jada koondub, siis leidke piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

49*. Olgu $x_1 = A$, $x_2 = B$, kus $0 < B < A$. Kehtigu seos $\dfrac{2}{x_n} = \dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n+1}}$ iga $n \geqslant 2$ korral. Tõestage, et jada (x_n) koondub ja leidke selle piirväärtus.

50*. Rahuldagu jada (a_n) liikmed järgmisi tingimusi: $0 < a_n < 1$ ja $a_n(1 - a_{n+1}) > \dfrac{1}{4}$, kui $n \in \mathbb{N}$. Kas jada (a_n) on koonduv? (Põhjendage!) Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

6. Alumine ja ülemine piirväärtus

51. Olgu (x_n) tõkestatud jada. Tõestage, et $\underline{\lim}_n x_n = \sup\{\inf\{x_k : k \geqslant n\} : n \in \mathbb{N}\}$ ja $\overline{\lim}_n x_n = \inf\{\sup\{x_k : k \geqslant n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

52. Tõestage, et $\inf_n x_n \leqslant \underline{\lim}_n x_n \leqslant \overline{\lim}_n x_n \leqslant \sup_n x_n$.

53. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad, kusjuures iga n korral $x_n \leqslant y_n$. Tõestage, et $\underline{\lim}_n x_n \leqslant \underline{\lim}_n y_n$ ja $\overline{\lim}_n x_n \leqslant \overline{\lim}_n y_n$.

54. Olgu (x_n) tõkestatud jada.

1) Tõestage, et kui $c > 0$, siis $\underline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \underline{\lim}_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_n x_n$.

2) Tõestage, et kui $c < 0$, siis $\underline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \underline{\lim}_n x_n$.

55. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad. Tõestage, et

$$\underline{\lim}_n x_n + \underline{\lim}_n y_n \leqslant \underline{\lim}_n (x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}_n x_n + \overline{\lim}_n y_n \leqslant \overline{\lim}_n (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}_n x_n + \overline{\lim}_n y_n.$$

Tooge näiteid, millal võrratused kehtivad rangete võrratustena.

56. Olgu jada (x_n) koonduv ning (y_n) tõkestatud. Tõestage, et $\overline{\lim}_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \overline{\lim}_n y_n$.

57. Leidke järgmiste jadade (x_n) jaoks $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim}_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n x_n$.

1) $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$,

2) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$,

3) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$,

4) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos\dfrac{n\pi}{2}$,

5) $x_n = (-1)^n n$,

6) $x_n = -n(2 + (-1)^n)$,

7) $x_n = n^{-n}$,

8) $x_n = \dfrac{((-1)^n + 2)n + 3}{n - 10{,}2}$.

58*. Olgu antud jadad (x_n) ja (y_n), kus $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, ning $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ ja $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, kui $n \in \mathbb{N}$. Tõestage, et $\lim x_n = \lim y_n$ (seda piirväärtust nimetatakse ka arvude a ja b aritmeetilis-geomeetriliseks keskmiseks).

59*. Olgu (a_n) positiivsete liikmetega jada nii, et $\lim_n \dfrac{a_n}{n} = 0$ ja $\overline{\lim}_n \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \in \mathbb{R}$.

Leidke $\lim_n \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^2}$.

60*. Olgu (a_n) jada, mille korral osajada $(a_{mk})_{k=1}^{\infty}$ koondub iga $m = 2, 3, 4, \ldots$ korral. Kas sellest järeldub, et jada (a_n) koondub?

7. Funktsiooni piirväärtuse definitsioon ja omadused

61. Veenduge, et kui $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisteerib, siis on ta üheselt määratud.

62. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui eksisteerivad $\lim_{x\to a} f(x) =: A$ ja $\lim_{x\to a} g(x) =: B$, siis $A \leqslant B$.

63. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leqslant B$ iga $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui leidub lõplik $\lim_{x\to a} f(x) =: A$, siis $A \leqslant B$.

64. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) =: A$, siis $\lim_{x\to a} h(x) = A$.

65. Olgu f ja g määratud hulgal D ning olgu a hulga D kuhjumispunkt. Tõestage, et kui $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = B$, siis

1) $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B$,

2) $\lim_{x\to a} \big(f(x)\, g(x)\big) = AB$,

3) $\lim_{x\to a} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda A$ (kus $\lambda \in \mathbb{R}$),

4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (kus $g(x) \neq 0\, \forall x$, $B \neq 0$).

66. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε-δ-definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

1) $\lim_{x\to 3} (4x - 7) = 5$;

2) $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$;

3) $\lim_{x\to -1} (3x - 1) = -4$;

4) $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$;

5) $\lim_{x\to 2} \big(3x^2 - 2\big) = 10$;

6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$;

7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2 + x}{x} = 1$;

8) $\lim_{x\to 3} \dfrac{3x - 1}{x + 5} = 1$;

9) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x + 5}{x - 3} = -9$;

10) $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x + 1}{x + 2} = -1$;

11) $\lim_{x\to 7} \dfrac{8}{x - 3} = 2$;

12) $\lim_{x\to 0} (x+1)^3 = 1$;

13) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x + 2} = 2$;

14) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$;

15) $\lim_{x\to -4+} \sqrt{x + 4} = 0$;

16) $\lim_{x\to 1-} \sqrt{1 - x} = 0$.

67. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

1) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x + 1}{2x + 1} = \dfrac{1}{2}$;

2) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x - 1}{3x + 2} = \dfrac{1}{3}$;

3) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x - 1}{3x + 2} = \dfrac{1}{3}$;

4) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x - 2}{x + 1} = 3$;

5) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{5x + 1}{3x + 7} = \dfrac{5}{3}$;

6) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x - 5}{3x + 1} = \dfrac{2}{3}$;

7) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{x + 1} = \infty$;

8) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x + 1} = -\infty$;

9) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{1 - x} = -\infty$.

68*. Leidke järgmised piirväärtused $(a, b > 0)$:suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu α):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

69*. Olgu $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ tõkestatud igas lõplikus vahemikus (a, b).Eeldame, et $\lim_{x\to \infty} \big(f(x-1) - f(x)\big) = A \in \mathbb{R}$. Näidata, et siis ka $\lim_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$.

8. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine. Funktsiooni pidevus.

70. Arvutage järgmised piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-2x^2+x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2x}}{1-\sqrt{1+2x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

14) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, $n\in\mathbb{N}$.

71. Arvutage järgmised piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-5x^4+1}{3x^5+2x^3-6}$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{5x^4+x-6}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-3x+2}{3x^2+x-6}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x+5}$,

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x+5}$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+3x}}-\sqrt{2x}\right)$.

72. Arvutage järgmised ühepoolsed piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{|x-2|}$,

2) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x-2}{|x-2|}$,

3) $\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{|3-x|}{3-x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{|3-x|}{3-x}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x}{x-1}$,

6) $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x}{x-1}$,

7) $\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$,

8) $\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$,

9) $\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^3+1}$.

73. Tõestage, et kui funktsioonid $f\colon D\to\mathbb{R}$ ja $g: D\to\mathbb{R}$ on pidevad punktis $a\in D$, siis ka funktsioonid $f\pm g$, λf ja fg on punktis a pidevad.

74. Tõestage, et iga polünoom on kogu arvteljel $\mathbb{R}$ pidev funktsioon.

75. Olgu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sellised pidevad funktsioonid, et $f(x)=g(x)$ iga $x\in\mathbb{Q}$ korral. Tõestage, et siis $f=g$, s.t. $f(x)=g(x)$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral.

76. 1) Olgu funktsioon f pidev punktis a ja olgu $f(a)>0$. Näidake, et siis leidub punkti a selline ümbrus, milles funktsiooni f väärtused on kõik positiivsed.
2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide olukorra $f(a)<0$ kohta.

77. Funktsioon f on pidev intervallis $[0,\infty)$ ning $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c\in\mathbb{R}$. Tõestage, et f on tõkestatud intervallis $[0,\infty)$.

78*. Olgu $n\in\mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}-x\right)$.

79*. Olgu $m,n\in\mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

9. Elementaarfunktsioonid. Pöördfunktsioon. Elementaarfunktsioone sisaldavad piirväärtused.

80. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

1) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 3)$;
2) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{2+x}$;
3) $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{x+1}$;
4) $f(x) = \sqrt{\ln\sin x}$;
5) $f(x) = \sqrt{2\arctan x - 3}$;
6) $f(x) = \log_2(x - |x|)$.

81. Tõestage pidevuse ε-δ-definitsioonist lähtudes, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

1) $f(x) = \sqrt{x-2}$;
2) $f(x) = \cos x$;
3) $f(x) = \ln x$.

82. Millised järgnevatest on elementaarfunktsioonid?

1) $f(x) = \ln\big(\arctan(x^2+1)\big)$;
2) $f(x) = |x|$;
3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0; \end{cases}$
4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$

83. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid:

1) $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x+1}$;
2) $f(x) = \arccos\dfrac{x^2}{4}$, $x \in [-2, 0]$;
3) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x < 1, \\ x^2, & \text{kui } 1 \leqslant x < 4, \\ 2^x, & \text{kui } x \geqslant 4. \end{cases}$

84. Lähtudes võrratustest $\sin x < x < \tan x$ $(0 < x < \pi/2)$, tõestage, et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

85. Näidata, et

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$.

86*. Olgu D mingi intervall. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *kumer*, kui mistahes arvude $x, y \in D$ ja mistahes arvu $\lambda \in [0,1]$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(Piltlikult öeldes tähendab funktsiooni f kumerus seda, et f graafik on nõgus.)
Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Kas sellest, et f on kumer lõigus $[a,b]$ järeldub, et f on pidev lõigus $[a,b]$?

10. Elementaarfunktsioone sisaldavad piirväärtused. Ekvivalentsed suurused. Landau sümbolid.

87. Arvutage järgmised piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$,
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 7x}{\sin 5x}$,
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$,
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$,
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 7x}{\arcsin 5x}$,
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 2x}$,
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2x^2}$,
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

88. Arvutage järgmised ühepoolsed piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{|\sin x|}$,
2) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{|\sin x|}$,
3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$,
4) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;
5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)|\tan x|$;
6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)|\tan x|$.

89. Arvutage järgmised piirväärtused.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$,
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2}$,
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$,
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{3x^2}$;
5) $\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{10^{\frac{\cos x}{x+1}}}{5^{\frac{\sin x}{x+1}}}$,
6) $\lim\limits_{x\to 2+}\left(\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}\right)^{\ln\frac{x-2}{x+1}}$.
7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,(\ln(x+1)-\ln x)$,
8) $\lim\limits_{x\to 1-}(\sin x)^{\frac{x}{x-1}}$,
9) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x+1}\right)}{(x^2+x)\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)}$,
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+\sin x}\right)$,
11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sin x}-\sqrt[4]{1+\sin x}}{x}$,
12) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x+15}\arctan\dfrac{2x+4}{x^2+x-2}$,

90. Teha kindlaks, kas vaadeldavas protsessis $\alpha=o(\beta)$, $\beta=o(\alpha)$ või $\alpha\sim\beta$.

1) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, $\beta_n=\dfrac{1}{n!}$, kui $n\to\infty$;
2) $\alpha(x)=\dfrac{x+1}{x^3-1}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$, kui $|x|\to\infty$;
3) $\alpha(x)=x^3-1$, $\beta(x)=\sqrt[3]{x-1}$, kui $x\to 1$;
4) $\alpha(x)=\sin x+\tan 2x$, $\beta(x)=3x$, $x\to 0$;
5) $\alpha(x)=\sqrt[n]{1+x}-1$, $\beta(x)=\dfrac{x}{n}$, kui $x\to 0$;
6) $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2}$, kui $|x|\to\infty$.

91. Leida C ja k nii, et vaadeldavas protsessis $\alpha\sim C\beta^k$.

1) $\alpha_n=\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^3+2}}$, $\beta_n=\dfrac{1}{n}$, kui $n\to\infty$;
2) $\alpha(x)=\sin x-\tan x$, $\beta(x)=x$, kui $x\to 0$;
3) $\alpha(x)=\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x-1}}$, $\beta(x)=x$, $x\to 0$;
4) $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, $\beta(x)=x$, $x\to 0$;
5) $\alpha(x)=\ln(e^x+1)$, $\beta(x)=x$, kui $x\to\infty$;
6) $\alpha(x)=\ln(e^x+1)$, $\beta_n=e^x$, kui $x\to -\infty$.

92*. Leida piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

11. Katkevad funktsioonid. Ühtlane pidevus.

93. Määrake katkevuse liik ja kõrvaldage (kui võimalik) funktsiooni katkevus punktis $x = 0$.

1) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$;
2) $f(x) = \arctan\frac{1}{x^2}$;
3) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$;
4) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{2\tan 5x}$;
5) $f(x) = (1+x)^{1/x}$;
6) $f(x) = \ln|\sin x|$.

94. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ x^3, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kui } x \leqslant 1, \\ 3 - ax^2, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } x = 0, \\ x^2+1, & \text{kui } 1 < x < 2, \\ 5, & \text{kui } x \geqslant 2; \end{cases}$

4) $f(x) = \dfrac{|3x-2|}{3x-2}$.

95. Tõestage, et Dirichlet' funktsioon $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ ei ole pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

96. Tõestage, et seosega $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ määratud funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev ainult punktis $a = 0$.

97. Tooge näited funktsioonidest $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis üheski punktis $a \in \mathbb{R}$ ei ole pidev, kuid
1) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(x)^2$, on pidev funktsioon;
2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, on pidev funktsioon;
3) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, pole samuti pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

98. Näidake, et kui $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev, siis ka seosega $g(x) := \big|f(x)\big|$ määratud funktsioon $g : D \to \mathbb{R}$ on pidev. Tooge näide selle kohta, et vastupidine väide on väär.

99. Olgu $f(x) := 2^k - 1$, kui $x \in [k-1, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Uurige selle funktsiooni pidevust.

100. Millised järgmistest funktsioonidest on ühtlaselt pidevad hulgas X? Põhjendada.

1) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$, $X = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $X = [0, \infty)$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $X = (0, \infty)$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $X = (-1, 1)$;
5) $f(x) = \ln(2x+3) + \dfrac{2x^2-1}{x^3+1}$, $X = (0, 10)$;
6) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $X = [-\pi, \pi]$;
7) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

101*. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev monotoonne funktsioon ning olgu jada (x_n) tõkestatud. Tõestage, et kui f on kasvav, siis $\varliminf\limits_n f(x_n) = f\left(\varliminf\limits_n x_n\right)$ ning kui f on kahanev, siis $\varliminf\limits_n f(x_n) = f\left(\varlimsup\limits_n x_n\right)$.

102*. Tõestage, et **ei leidu** pidevat funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis saavutaks kõik oma väärtused. täpselt kaks korda.

12. Diferentseeruvad funktsioonid

103. Tuletise definitsioonist lähtudes leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

1) $f(x) = x^2$;
2) $f(x) = x^3$;
3) $f(x) = x^n$;
4) $f(x) = \cos x$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$;
6) $f(x) = \mathrm{e}^x$;
7) $f(x) = \sqrt{x}$;
8) $f(x) = b^x$;
9) $f(x) = \log_a x$.

104. Tõestage, et kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.

105. Tõestage, et kui funktsioonid f ja g on punktis a diferentseeruvad, siis

1) $\lambda f + \mu g$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on punktis a diferentseeruv ja $\big(\lambda f + \mu g\big)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;
2) fg on punktis a diferentseeruv ja $\big(fg\big)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
3) kui lisaks $g(a) \neq 0$, siis $\dfrac{f}{g}$, on punktis a diferentseeruv ja $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

106. Kasutades pöördfunktsiooni tuletise leidmise valemit, leida tuletis funktsioonidest

1) $f(x) = \ln x$;
2) $f(x) = \arcsin x$;
3) $f(x) = \arctan x$.

107. Näidake, et funktsioon $y = |x|$ ei ole punktis $x = 0$ diferentseeruv.

108. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ -x^2 + lx, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$ Milliste konstantide k ja l korral on f diferentseeruv?

109. Tooge näide mittediferentseeruvast funktsioonist f, mille korral funktsioon $g(x) = f(x)^2$ on diferentseeruv.

110. Funktsioon $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv paarisfunktsioon lõigus $[-1,1]$. Leidke $f'(0)$.

111. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

1) $f(x) = \sin^3 x$;
2) $f(x) = \ln\tan x$;
3) $f(x) = 2^{\cos x}$;
4) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;
5) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;
6) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$;
7) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + \sqrt{2x}$;
8) $f(x) = (\cos x)\cdot\tan\alpha$;
9) $f(x) = x^a a^x \ (a > 0)$.
10) $f(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$;
11) $f(x) = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;
12) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$;
13) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$;
14) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;
15) $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$;
16) $f(x) = \ln\left(1+4x^2\right) + \arctan 2x$;
17) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

112*. Tooge näide funktsioonist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on diferentseeruv täpselt ainult punktides $a = 0$ ja $a = 1$. (Mujal ei tohi f olla diferentseeruv: veenduge ka selles.)

113*. Olgu f diferentseeruv vahemikus $(a, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ ning eeldame, et leidub piirväärtus (lõplik või lõpmatu) $A := \lim\limits_{x \to a+} f'(x)$.

1) Tõestage, et kui f on paremalt pidev punktis a, siis $f'_+(a) = A$.
2) Kas on võimalik, et $f'_+(a) \in \mathbb{R}$, aga $f'_+(a) \neq A$?
3) Kas on võimalik, et $f'_+(a) = \infty$, aga $f'_+(a) \neq A$?

13. Funktsiooni tuletise arvutamine. Kõrgemat järku tuletised.

114. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

a1) $f(x) = x^x$;

a2) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;

a3) $f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot \dfrac{\left(x^2+4\right)^5 (3x-1)^8}{\left(6x^3+1\right)^2 \mathrm{e}^{\sin 5x}}}$;

b1) $f(x) = |x|$;

b2) $f(x) = x|x|$;

b3) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2, & \text{kui } x < 1, \\ x^2 + 1, & \text{kui } x \geqslant 1; \end{cases}$

b4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 2, \\ x^3 - 4, & \text{kui } x \geqslant 2; \end{cases}$

b5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ \sin x, & \text{kui } x \geqslant 0; \end{cases}$

b6) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } x < 0, \\ x^4, & \text{kui } x \geqslant 0; \end{cases}$

b7) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x < 0, \\ \tan x, & \text{kui } x \geqslant 0; \end{cases}$

b8) $f(x) = \begin{cases} (5-x)^2, & \text{kui } x > 1, \\ \mathrm{e}^{1-x^2} + 15, & \text{kui } x \leqslant 1; \end{cases}$

b9) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$

b10) $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ \dfrac{2^x}{\sqrt{1+3x^2}}, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$

115. Leidke f'', kui

1) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$;

2) $f(x) = x^2 \ln x$;

3) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$;

4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

5) $f(x) = x|x|$;

6) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{kui } x < 0, \\ x^3, \text{kui } x \geqslant 0; \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{kui } x < 0, \\ 2x^3, \text{kui } x \geqslant 0; \end{cases}$

8) $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{kui } x < 0, \\ x^3 + 1, \text{kui } x \geqslant 0. \end{cases}$

116. Olgu f ja g n korda diferentseeruvad punktis x. Leidke valem $\left(f(x)g(x)\right)^{(n)}$ arvutamiseks.

117. Olgu f kolm korda diferentseeruv punktis x. Leidke $\left(f^3(x)\right)'''$.

118*. Olgu $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, \text{ kui } x \neq 0, \\ 0, \text{ kui } x = 0. \end{cases}$ Leida $f^{(n)}(0)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

119*. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ kus n on mingi naturaalarv. Missuguste n väärtuste korral funktsioon on

a) pidev;

b) diferentseeruv punktis 0;

c) pidevalt diferentseeruv?

120*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida $\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}$.

14. Puutuja ja normaal. Funktsiooni monotoonsus ja ekstreemumid

121. Leidke joonel $y = x^3$ sellised punktid, milles puutuja on paralleelne lõikajaga läbi punktide $(-1,-1)$ ja $(2,8)$.

122. Leidke nurk, mille moodustab x-teljega funktsiooni $y = \sin x$ graafikule punktis $(0,0)$ tõmmatud puutuja.

123. Leidke parameeter a, mille korral kõverad $y = ax^2$ ja $y = \ln x$ puutuvad.

124. Paraboolile $y = ax^2$ langeb ülalt valguskiir paralleelselt y-teljega. Valguskiire peegeldudes tema nurk parabooli normaaliga muutub vastassunaliseks. Leidke punkt y-teljel, mida peegeldunud valguskiir läbib.

125. Olgu D mingi intervall, $a \in D^\circ$, ning olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$. Olgu f pidev punktis a ning leidugu selline $\delta > 0$, et f on diferentseeruv vahemikes $(a-\delta, a)$ ja $(a, a+\delta)$. Tõestage järgmised väited.

1) Kui iga $x \in (a-\delta, a)$ korral $f'(x) > 0$ ja iga $x \in (a, a+\delta)$ korral $f'(x) < 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne maksimum.
2) Kui iga $x \in (a-\delta, a)$ korral $f'(x) < 0$ ja iga $x \in (a, a+\delta)$ korral $f'(x) > 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne miinimum.

126. Veenduge, et funktsioon f rahuldab lõigus $[a,b]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi tingimusi, ja leidke arv c keskväärtusvalemis $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$:

1) $f(x) = 3x^2 - 5$ ja $[a,b] = [-2,0]$;
2) $f(x) = \ln x$ ja $[a,b] = [1,\mathrm{e}]$.

127. Tõestage, et kui funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $f'(x) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis $f(x) = C\mathrm{e}^x$, kus C on mingi konstant.

128. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsusepiirkonnad ja ekstreemumkohad:

1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$,
2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$,
3) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$,
4) $f(x) = \ln|x|$,
5) $f(x) = \mathrm{e}^x + 5x$,
6) $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$,
7) $f(x) = x|x|$,
8) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$,
9) $f(x) = \sqrt{(1+2x^2)\left|1-x^2\right|}$.

129. Leidke funktsiooni $f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$ lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid.

130*. Olgu paraboolil $y = ax^2$ valitud punktid A_1, A_2 ja A_3. Olgu k_1 paraboolile punktis A_1 tõmmatud puutuja tõus ning olgu k_{12}, k_{13} ja k_{23} vastavalt lõikajate A_1A_2, A_1A_3 ja A_2A_3 tõusud. Tõestage, et $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$.

131*. Olgu funktsioon f pidevalt diferentseeruv vahemikus (a,b). Kas iga $c \in (a,b)$ korral leiduvad $x_1, x_2 \in (a,b)$ nii, et $x_1 < c < x_2$ ja $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$?

15. L'Hospitali reegel ja Taylori valem

132. Arvutage piirväärtused

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\cot x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$, $n \in \mathbb{N}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$;

6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$,

8) $\lim\limits_{x\to 0+} (2x)^{\sin x}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{3}{x-1}}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + e^{\cos x}}{x + \sin x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 1$.

133. Lähtudes Taylori valemist, esitage polünoom $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ avaldise $x - 1$ astmete lineaarse kombinatsioonina.

134. Leidke funktsiooni $f(x) = \ln(x+1)$ Taylori valem punktis $a = 0$. Hinnake absoluutset viga lõigus $[0,1]$ juhul $n = 9$.

135. Leidke funktsiooni $f(x) = \mathrm{e}^x$ Taylori valem punktis $a = 0$. Leidke n, mis lõigus $[-1,1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

136. Leidke funktsiooni $f(x) = \cos x$ Taylori valem punktis $a = 0$. Leidke n, mis lõigus $[-1,1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

137. Hinnake absoluutset viga järgmistes ligikaudsetes valemites:

1) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, kui $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

2) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, kui $0 \leqslant x \leqslant 1$;

3) $\arctan x \approx \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}$, kui $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}$;

4) $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$, kui $|x| \leqslant \delta$, $\delta \ll a$.

138*. Olgu $x \geqslant 0$. Näidata, et $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, kus $\dfrac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ning $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x) = \dfrac{1}{4}$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

139*. Leida C ja n nii, et $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \sim Cx^n$ protsessis $x \to 0$.

140*. Olgu f kaks korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,\infty)$ ning kehtigu koondumised $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} xf''(x) = 0$. Tõestage, et $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) = 0$.
Näpunäide: Kasutage Taylori valemit $f(x+1)$ avaldamiseks $f(x)$ ja tema tuletiste kaudu.

16. Funktsiooni uurimine

141. Tõestage võrratused

1) $e^x \geqslant 1 + x \quad (x \in \mathbb{R})$,

2) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0)$,

3) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x < x \quad (0 < x \leqslant 1)$,

4) $\ln(1+x) \leqslant x \quad (x > -1)$,

5) $2x \arctan x \geqslant \ln(1+x^2)$,

6) $1 + x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geqslant \sqrt{1+x^2}$.

142. Leidke järgmiste funktsioonide kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning graafiku käänupunktid.

1) $f(x) = x^4 - 6x^2$,

2) $f(x) = e^{-x^2}$,

3) $f(x) = \arctan x - x$.

143. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

1) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{2x-3}$,

2) $f(x) = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$,

3) $f(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$.

144. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsuspiirkonnad, ekstreemumpunktid ning kumerus- ja nõgususpiirkonnad ja graafiku käänupunktid, samuti asümptoodid. Skitseerida nende andmete põhjal funktsiooni graafik.

1) $f(x) = xe^{-x}$,

2) $f(x) = \ln(1+e^x)$,

3) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$,

4) $f(x) = x \arctan x$,

5) $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

145*. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kolm korda pidevalt diferentseeruv funktsioon. Näidata, et leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et $f(a) f'(a) f''(a) f'''(a) \geqslant 0$.

146*. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kumerad funktsioonid. Missugustel tingimustel on liitfunktsioon $h = f \circ g$, $h(x) = f(g(x))$ ka kumer funktsioon?

17. Integraali definitsioon. Integreeruvad funktsioonid

147. Leidke järgmised integraalid vahetult Riemanni integraali definitsiooni põhjal (kuna integrandid on pidevad antud piirkondades, siis võib eeldada, et need integraalid eksisteerivad).

1) $\int_0^5 3\,\mathrm{d}x$, 2) $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$, 3) $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$, 4) $\int_0^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

148. Olgu $a > 0$ ning olgu f lõigus $[-a,a]$ integreeruv funktsioon. Tõestage integraali definitsiooni kasutades, et

1) kui f on paaritu, siis $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
2) kui f on paaris, siis $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

149. Tõestage, et kui integreeruv funktsioon $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on paaritu, siis funktsioon $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ on paaris. Kas kehtib ka vastupidine väide?

150. Olgu f lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon. Tõestage, et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$.

151. Tõestage, et iga tõkestatud funktsiooni $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ korral $I^* - I_* = \inf\{S(T) - s(T)\colon T\in\mathfrak{T}\}$, kus I^* ja I_* on funktsiooni f Darboux' ülem- ja alamintegraal lõigus $[a,b]$ ja $\mathfrak{T}$ on lõigu $[a,b]$ alajaotuste hulk.

152. Tõestage, et järgmised funktsioonid ei ole integreeruvad lõigus $[0,1]$.

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x\in\mathbb{Q}, \\ x, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

153. Veenduge, et sinc-funktsioon

$$\operatorname{sinc} x := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kui } x\in[a,b]\setminus\{0\}, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

on lõigus $[a,b]$ integreeruv.

154. Tooge näide mitteintegreeruvast funktsioonist $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, mille korral $|f|\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on integreeruv.

155*. Leidke piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

156*. Vaatleme funktsiooni $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, kus

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{kui } x = \dfrac{1}{n} \text{ mingi } n\in\mathbb{N} \text{ korral}, \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kas f on integreeruv lõigus $[0,1]$?

18. Integraali arvutamine

157. Leidke järgmised integraalid.

a1) $\int_1^2 5x\sqrt{x}\,dx$;

a2) $\int_{-1}^1 10^x\,dx$;

a3) $\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x - 3\sin x)\,dx$;

a4) $\int_0^1 \left(2^x e^x + \ln 2\right)\,dx$;

a5) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x\,dx}{(\cos x)^2(\sin x)^2}$;

a6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+(\cos x)^2}{1+\cos 2x}\,dx$;

a7) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$;

a8) $\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$;

a9) $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$;

a10) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

b1) $\int_{\pi/24}^{\pi/16} \frac{dx}{(\cos 4x)^2}$;

b2) $\int_1^2 e^{5x}\,dx$;

b3) $\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\,dx$;

b4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\tan x - \cot x)\,dx$;

b5) $\int_0^{1/2} \frac{8\,dx}{1+4x^2}$;

b6) $\int_{-2}^{-1} (3x+5)^4\,dx$;

b7) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$;

b8) $\int_3^4 \sqrt[3]{7-2x}\,dx$;

b9) $\int_0^1 \cos(1-2x)\,dx$;

b10) $\int_0^1 e^{-2x+3}\,dx$;

b11) $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

b12) $\int_0^{2/3} \frac{dx}{9x^2+4}$;

b13) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

b14) $\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$;

b15) $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$;

b16) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;

b17) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\tan x\,dx}{(\cos x)^2}$;

b18) $\int_0^{\ln\pi-\ln 2} e^x \cos e^x\,dx$;

b19) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x+1}$;

b20) $\int_0^1 \frac{\arctan^3 x\,dx}{1+x^2}$;

b21) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$;

b22) $\int_0^{\pi} (\sin x)^2\,dx$;

b23) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$;

b24) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$;

b25) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$;

b26) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1+(\cos x)^2}$;

b27) $\int_0^{\pi/2} \frac{2x^2-8}{16-x^4}\,dx$;

c1) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$;

c2) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$;

c3) $\int_0^3 \ln(x+3)\,dx$;

c4) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

c5) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$;

c6) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$;

d1) $\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^{2019}(\tan x)^2 + |x+1|\right)\,dx$;

d2) $\int_{-\pi}^{\pi} \left(|2x-1| + x(\sin x)^{2020}\right)\,dx$.

158. Arvutage antud joontega piiratud tasandilise kujundi pindala.

1) $y = x^2$ ja $x + y = 2$;

2) $x = \frac{1}{e}$, $x = e$, $y = 0$ ja $y = |\ln x|$;

3) $y = x^2$ ja $y = x^3$;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

159*. Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev ja perioodiline funktsioon perioodiga T. Näidata, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral funktsioon $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on esitatav lineaarse funktsiooni ja perioodilise funktsiooni summana.

19. Integreeruvate funktsioonide omadused

160. Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidev funktsioon ning olgu $f(x)\geqslant 0$ iga $x\in[a,b]$ korral. Tõestage, et kui $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$, siis $f=0$.

161. Olgu $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x)\leqslant g(x)$ iga $x\in[a,b]$ korral ning olgu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Tõestage, et $f=g$.

162. Olgu funktsioonid $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ integreeruvad. Tõestage, kui $f(x)\leqslant g(x)$ iga $x\in[a,b]$ korral, siis $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

163. Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ integreeruvad ning $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=:I$. Tõestage, et kui $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ iga $x\in[a,b]$ korral, siis ka $h : [a,b]\to\mathbb{R}$ on integreeruv ning $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=I$.

164. Olgu $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x)\leqslant g(x)$ iga $x\in[a,b]$ korral ning leidugu punkt $x_0\in[a,b]$ nii, et $f(x_0)<g(x_0)$. Tõestage, et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

165. Tehke kindlaks, kumb arvudest on suurem.

1) $\int_0^1 \sin x^2\,\mathrm{d}x$ ja $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, 2) $\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ ja $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$, 3) $\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ ja $\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$.

166. Tõestage, et $\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}<\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x<2\mathrm{e}^2$.

167. a) Teha kindlaks, kas $\int_0^{10\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ on positiivne või negatiivne.
b) Leida võimalikult täpsed hinnangud (alt ja ülevalt) sellele integraalile.

168*. Olgu $n\in\mathbb{N}$. Tõestage võrratused

$$\frac{3^n}{n+1}\leqslant\int_0^1\left(x^2+x+1\right)^n\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{3^{n+1}-1}{2n+2}.$$

20. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem

169. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemist lähtudes tõestage, et kui f on lõigus $[a,b]$ pidev, siis $\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$, $x \in [a,b]$.

170. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

1) $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$, $x > -1$;
3) $F(x) = \int_{x^2}^2 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, $x > 1$;
5) $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$;
2) $F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$;
4) $F(x) = \int_x^{2x} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$, $x > 0$;
6) $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\mathrm{e}^{x^2}} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$, $x > 1$.

171. Olgu funktsioonid f ja g tõkestatud ning integreeruvad lõigus $[a,b]$ ning olgu g monotoonne vahemikus (a,b). Näidata, et siis leidub $c \in [a,b]$ nii, et

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a+)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(b-)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

172*. Olgu f lõigus $[0,1]$ pidevalt diferentseeruv. Tõestage, et leidub arv $\delta \in (0,1)$ nii, et

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}f'(\delta).$$

173*. Olgu f reaalteljel pidev funktsioon. Leidke piirväärtus $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^b (f(x+h) - f(x))\,\mathrm{d}x$.

21. Päratud integraalid

174. Arvutage päratu integraali väärtus:

a1) $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$, a3) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\arctan^2 x}$, a5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}$,

a2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2}\,dx$, a4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$, a6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}xe^{x}\,dx$;

b1) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; b5) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$; b9) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos x}$;

b2) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$; b6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tan x\,dx$; b10) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

b3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; b7) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$; b11) $\displaystyle\int_{0}^{1}\ln x\,dx$.

b4) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$; b8) $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; b12) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

175. Milliste q väärtuste korral koondub päratu integraal

1) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^q}$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^q}$; 3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^q}$.

176. Olgu $a>0$. Kasutades päratute integraalide võrdluslauset, tõestage, et kui leiduvad sellised arvud $K>0$ ja $q>1$, et $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{K}{x^q}$ $(x\in[a,\infty))$, siis päratu integraal $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ koondub.

177. Sõnastage ja tõestage eelmise väitega analoogiline väide tõkestamata funktsiooni päratu integraali $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ kohta.

178. Sõnastage ja tõestage kahe eelmise väitega analoogilised väited päratute integraalide hajuvuse kohta.

179. Uurige järgmiste päratute integraalide koonduvust.

a1) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}}$; a3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{(1+x)^2}$; a5) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$;

a2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{(x^2+1)\arctan x\,dx}{x^4+x^2+1}$; a4) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{|\cos x|\,dx}{x^2+1}$; a6) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{(\cos x)^2\,dx}{x^4+1}$;

b1) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; b3) $\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{|\sin x|}{\sqrt{3-x}}\,dx$; b5) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}\sqrt{x-2}}$;

b2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x+\cos x}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; b4) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x^2-4x+3)^3}$; b6) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-5x^2}$.

180*. Olgu funktsioonid $f,g\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$ sellised, et $f(x)\geqslant 0$ ja $g(x)>0$, kui $x\in[a,\infty)$. Eeldame, et integraal $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ hajub. Tõestage, et vähemalt üks integraalidest $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)g(x)\,dx$ ja $\displaystyle\int_a^{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ hajub.

22. Arvread

181. Tõestage, et kui rida $\sum\limits_k u_k$ koondub, siis $\lim\limits_k u_k = 0$.

182. Koondugu read $\sum\limits_k u_k$ ja $\sum\limits_k v_k$ vastavalt summaks u ja v. Tõestage, et read $\sum\limits_k (u_k + v_k)$ ja $\sum\limits_k \lambda u_k$ koonduvad vastavalt summaks $u+v$ ja λu ($\lambda \in \mathbb{R}$).

183. Tõestage, et rida $\sum\limits_k u_k$, kus $u_k \geqslant 0$, koondub parajasti siis, kui tema osasummade jada $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$ on tõkestatud. Tooge näide hajuvast reast, mille osasummade jada on tõkestatud.

184. Tõestage, et kui rida koondub absoluutselt, siis ta koondub.

185. Leidke rea summa:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$,

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$,

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$,

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$,

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$,

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{4^k}$,

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k}\right)$,

8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(5a)^k} - \frac{1}{6^{k+1}}\right)$.

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}$.

186*. Leidke rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{2}{n^2}$ summa.

Näpunäide: Püüdke osasummad teisendada teleskoopsummadeks.

187*. Olgu f kahanev hulgas $[0,\infty)$ ning koondugu päratu integraal $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Tõestage, et

$$\lim_{h\to 0+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Leidke selle tulemuse abil piirväärtus $\lim\limits_{h\to 0+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{h}{1+h^2n^2}$.

Näpunäide: Argumenteerige sarnaselt integraaltunnuse tõestusega.

23. Arvridade koonduvuse uurimine

188. Põhjendage järgmiste ridade hajuvust:

1) $\sum\limits_k \frac{k}{100k+1}$, 2) $\sum\limits_k (-1)^k$, 3) $\sum\limits_k \frac{1}{k}$, 4) $\sum\limits_k \frac{1}{\sqrt{k}}$, 5) $\sum\limits_k \tan\frac{\pi}{k+2}$.

189. Uurige järgmiste ridade koonduvust:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$, 4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{10^{55}}{2k^3+k^2+1}$, 7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \tan\frac{\pi}{3^k}$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\,5^k}$, 5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k\,(k+10)}}$, 8) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\sqrt{\frac{2}{k}}\right)$,

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-1}$, 6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10000k+1}$, 9) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$,

10) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$, 13) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e}\sin\frac{\pi}{k}$, 16) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{2}\right)^k$, 19) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$,

11) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$, 14) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$, 17) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, 20) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+2)}$,

12) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k-1}\right)^k$, 15) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{3}\right)^k$, 18) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!}$; 21) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{k+1}$.

190. Uurige järgmiste väidete kehtivust.

1) Kui rida $\sum\limits_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, koondub, siis rida $\sum\limits_k \frac{1}{u_k}$ hajub.

2) Kui rida $\sum\limits_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, hajub, siis rida $\sum\limits_k \frac{1}{u_k}$ koondub.

191*. Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum\limits_k (-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub. Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast $\sum\limits_k (-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub, kusjuures $u_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

192*. Tooge näide koonduvast mittenegatiivsete liikmetega reast $\sum\limits_n a_n$, mille korral tingimus $\lim\limits_n na_n = 0$ **ei kehti**.

24. Funktsionaaljadad.

193. Leidke funktsionaaljada (f_k) koonduvuspiirkond D ja piirväärtus $f\colon D \to \mathbb{R}$.

1) $f_k(x) = x^k$,
2) $f_k(x) = \dfrac{1}{1+kx}$,
3) $f_k(x) = \left(1+\dfrac{x}{k}\right)^k$,
4) $f_k(x) = \dfrac{kx}{1+kx+x}$,
5) $f_k(x) = \sin\dfrac{x}{k}$,
6) $f_k(x) = \dfrac{\sin kx}{k}$.

194. Otsustage, kas funktsionaaljada (f_k) koondub ühtlaselt antud intervallis.

1) $f_k(x) = x^k$, $D = [0,1]$;
2) $f_k(x) = x^k$, $D = [0,a]$, $0 < a < 1$;
3) $f_k(x) = x^k - x^{k+1}$, $D = [0,1]$;
4) $f_k(x) = \dfrac{2}{k}\sin kx$, $D = \mathbb{R}$;
5) $f_k(x) = 2\sin\dfrac{x}{k}$, $D = \mathbb{R}$;
6) $f_k(x) = \dfrac{1}{1+kx}$, $D = [0,1]$;
7) $f_k(x) = k\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{k}} - \sqrt{x}\right)$, $D = (0,\infty)$.

195. Leidke funktsionaaljada koonduvuspiirkond D. Kas funktsionaaljada koondub ühtlaselt oma koonduvuspiirkonnas?

1) $f_k(x) = x^k - x^{2k}$;
2) $f_k(x) = \dfrac{1}{k}e^{kx}$;
3) $f_k(x) = k\sin\dfrac{x}{k}$;
4) $f_k(x) = \dfrac{\sqrt{k^2x^2+1}}{k}$;
5) $f_k(x) = \dfrac{2kx}{1+k^2x^2}$.
6) $f_k(x) = \arctan kx$.

196*. Uurida funktsionaaljada $f_k(x) = \dfrac{\sin kx}{k\sin x}$ koonduvust ja ühtlast koonduvust intervallis $(0,\pi)$.

197*. Kui funktsionaaljada (f_n) koondub hulgal A ühtlaselt funktsiooniks f, siis kirjutame $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$. Kas iga hulga $A \subset \mathbb{R}$, funktsionaaljadade (f_n) ja (g_n) (kus $f_n, g_n\colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) ja funktsioonide $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ korral kehtivad implikatsioonid
1) $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ g_n \underset{A}{\rightrightarrows} g \ \Rightarrow\ f_n + g_n \underset{A}{\rightrightarrows} f + g$; 2) $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f,\ g_n \underset{A}{\rightrightarrows} g \ \Rightarrow\ f_n \cdot g_n \underset{A}{\rightrightarrows} f \cdot g$?

198*. Ütleme, et hulgal A määratud funktsionaaljada (f_n) *koondub pidevalt* hulgal A funktsiooniks f, kui iga $x \in A$ ja iga jada (x_n) korral hulgast A korral kehtib implikatsioon

$$\lim_n x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_n f_n(x_n) = f(x).$$

Tõestage, et kui $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$ ja funktsioonid f_n on pidevad hulgas A, siis (f_n) koondub pidevalt hulgas A. Kas kehtib ka vastupidine väide?

25. Funktsionaalrea koonduvus.

199. Leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A. Arvutage funktsionaalrea summa.

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k$,

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\ln x)^k$,

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (kx)^k$,

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)^k$,

6) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)}$.

200. Leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A.

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$,

2) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}$,

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2x-1}}$,

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$,

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+x^k\right)}{k}$,

6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\frac{x}{k}$.

201. Näidake, et funktsionaalrida koondub ühtlaselt antud intervallis.

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $[-1,1]$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k^3}$, $[-3,3]$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$, $(-\infty,\infty)$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin kx)^2}{\sqrt{k^3+1}}$, $(-\infty,\infty)$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}$, $[0,4]$;

6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}}$, $(-\infty,\infty)$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+\arccos x}$, $[-1,1]$;

8) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k^2x^2}}{k\sqrt{k}}$, $(-\infty,\infty)$.

202. Leidke funktsionaalrea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2+\sin 2x}$ ühtlase koonduvuse piirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A.

203*. Uurida funktsionaalrea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ koonduvust ja ühtlast koonduvust intervallis $[0,\infty)$.

204*. Leidke (sõltuvalt p väärtusest) ridade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A.

26. Funktsionaalrea summa omadused.

205. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

1) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{3^k}$, 2) $f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{x}{k}}{(k-2)k}$, 3) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan kx}{k^2+1}$.

206. Leidke järgmised piirväärtused. Põhjendage tehtavad sammud.

1) $\lim_{x\to 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 x}}{2^k}$, 2) $\lim_{x\to 0} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(k+1)}$, 3) $\lim_{x\to 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^x}$.

207. Arvutage järgmised integraalid. Põhjendage tehtavad sammud.

1) $\int_2^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{-n}\right) \mathrm{d}x$, 2) $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right) \mathrm{d}x$, 3) $\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n\cos nx}{5^n}\right) \mathrm{d}x$.

208. Arvutage järgmised tuletised. Põhjendage tehtavad sammud.

1) $f'(0)$, kui $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \arcsin \frac{x}{n}$; 2) $f^{(17)}(3)$, kui $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(n-1)!}(x-3)^n$;

209. Kas rea $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ summa on määratud ja pidev kogu reaalteljel? Kas summa on ka diferentseeruv kogu reaalteljel?

210*. Leidke $\lim_{x\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Põhjendage.

211*. Olgu funktsioonid $f_n\colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sellised, et funktsionaalrida $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^2$ koondub punktiviisi hulgas A tõkestatud funktsiooniks f. ning Tõestage, et kui arvrida $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ koondub, siis funktsionaalrida $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ koondub ühtlaselt hulgas A.

27. Astmeread. Taylori ja Maclaurini rida

212. Leidke astmerea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A. Leidke ka astmerea summa.

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(x-2)^k$,
2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$,
3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k$,
4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k^k}$,
5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k(k+1)}$,
6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k!x^k$,
7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k!}$,
8) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$,
9) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$,
10) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k2^k}$.
11) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2k+1}}{k3^k}$

213. Leidke järgmised summad. Põhjendage tehtavad sammud.

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$,
2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$,
3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}$,
4) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}$,
5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$,
6) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}$.

214. Arendage järgmised funktsioonid f Maclaurini reaks ning leidke suurimad intervallid, kus f võrdub rea summaga. Leidke $f^{(5)}(0)$.

1) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$;
2) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$;
3) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$;
4) $f(x)=(\cos x)^2$;
5) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$;
6) $f(x)=\frac{x^9}{1-x}$;
7) $f(x)=\frac{1}{2-x}$;
8) $f(x)=\frac{5-2x}{6-5x+x^2}$;
9) $f(x)=\ln(8+x)$;
10) $f(x)=\sqrt{1-x}$;
11) $f(x)=\arcsin x$;
12) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

215. Arvutage ligikaudu järgmised integraalid täpsusega ε.

1) $\int_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\varepsilon=10^{-4}$;
2) $\int_0^{1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\varepsilon=10^{-3}$;
3) $\int_0^{1/2}\frac{e^x-1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\varepsilon=10^{-3}$.

216*. Kasutades astmeridu ja/või funktsionaalridu leida ligikaudu integraal $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ täpsusega 10^{-3}.

Vastused ja lahendusvihjed

1. 1) Oletage, et a_1 ja a_2 on F nullelemendid ning vaadelge summat a_1+a_2; 2) oletage, et b_1 ja b_2 on a vastandelemendid ning vaadelge summat $(b_1+a)+b_2$; 3) näidake, et kui x rahuldab seost $a+x=b$, siis $x=b-a$ ning kui $x=b-a$, siis x rahuldab seost $a+x=b$; 4) näidake, et $(a+b)+(-a-b)=0$.
2. Lahendusvõtted on analoogilised ülesandega 1.
3. Vt. loengukonspektis Lause 1.1.
4. 1) kasutage liitmise monotoonsust; 2) kasutage korrutamise monotoonsust, korrutades võrduse $a<b$ pooli elemendiga $-c>0$ (miks kehtib $-c>0$?); 3) muuhulgas kasutage korrutamise monotoonsust; 4) $a+c<b+c<b+d$; 5) $ac<bc<bd$; 6) näidake, et $a^{-1}\leqslant 0$ annab vastuolu; 7) kasutage ülesannet 6) ja korrutamise monotoonsust; 8) tarvis on näidata, et $a+a<a+b<b+b$.
9. 1), 2), 3), 4) vaadelge juhtusid $a\geqslant 0$ ja $a<0$; 5) kui $|a|\leqslant c$, siis $-c\leqslant -|a|\leqslant -a\leqslant |a|\leqslant c$; kui aga $-c\leqslant a\leqslant c$, siis juhul $a\geqslant 0$ kehtib $|a|=a\leqslant c$ ning juhul $a<0$ kehtib $|a|=-a\leqslant c$; 6), 7) väited järelduvad võrratustest $-|a|-|b|\leqslant a\pm b\leqslant |a|+|b|$; 8) väited järelduvad võrratustest $-|a-b|\leqslant |a|-|b|\leqslant |a-b|$.
10. Oletage, et hulga X ülemised rajad on a ja b, siis kehtib $a<b$ või $a>b$. Kui näiteks $a<b$, saame vastuolu sellega, et b on hulga X vähim ülemine tõke.
11. Olgu a hulga X suurim element, siis $a\in X$ ja $x\leqslant a$ iga $x\in X$ korral. Arvu a jaoks on $\sup X$ mõlemad tingimused täidetud (kontrollige!).
12. Hulga Y ülemiseks tõkkeks sobib $\lambda a+1$. Lisaks sellele, olgu $b<\lambda a+1$, siis $\lambda^{-1}(b-1)<a$, mistõttu leidub x_0 omadusega $\lambda^{-1}(b-1)<x_0$. Seega $b<\lambda x_0+1=:y_0$.
13. Kõigepealt saame, et iga $y\in Y$ korral kehtib $\forall x\in X\; x\leqslant y$. Seega iga $y\in Y$ korral $\sup X\leqslant y$. Järelikult $\sup X\leqslant \inf Y$.
Alternatiiv: Kuna X ja Y on mittetühjad, siis hulkadele X ja Y leiduvad vastavalt ülemine ja alumine tõke. Olgu $a:=\sup X$ ja $b:=\inf Y$. Oletame, et $a>b$, siis arvu $\dfrac{a+b}{2}$ jaoks leiduvad $x_0\in X$ ja $y_0\in Y$ omadusega $x_0>\dfrac{a+b}{2}>y_0$, vastuolu.
14. 1) Kuna $0\in X$ ja $0\leqslant x$ iga $x\in X$ korral, siis $\min X=0$ ja seega $\inf X=0$. Saame, et $x\leqslant 1$ iga $x\in X$ korral. Kui d on hulga X ülemine tõke, siis $x\leqslant d$ iga $x\in X$ korral. Muuhulgas $1-\dfrac{1}{n}\leqslant d$ iga $n\in\mathbb{N}$ korral, sest $\left\{1-\dfrac{1}{n}\colon n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq X$. Siit järeldub, et $1-d\leqslant\dfrac{1}{n}$. Kui kehtiks $d<1$, siis $n\leqslant\dfrac{1}{1-d}$ iga $n\in\mathbb{N}$ korral, vastuolu Archimedese printsiibiga. Järelikult $d\geqslant 1$ ning $\sup X=1$.
Näeme, et $\max X$ ei eksisteeri. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $x_0\in X$ on selline, et $x\leqslant x_0$ iga $x\in X$ korral. Siis $0\leqslant x_0<1$ ning $0\leqslant x_0<\dfrac{x_0+1}{2}<1$, vastuolu (korraga kehtib $x_0<\dfrac{x_0+1}{2}$ ja $\dfrac{x_0+1}{2}\leqslant x_0$).
Alternatiiv: näitamaks, et $\sup X=1$, märkame, et $x\leqslant 1$ iga $x\in X$ korral ning et iga $\varepsilon>0$ jaoks leidub $x_0\in X$ nii, et $1-\varepsilon<x_0$. Kui $\varepsilon\geqslant 1$, siis valime nt. $x_0=\dfrac{1}{2}$, muul juhul aga $x_0=1-\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ülejäänud ülesannete lahendusskeemid on sarnased.
2) $\sup X=\max X=\dfrac{1}{5}$, $\inf X=0$, $\min X$ ei eksisteeri;
3) $\inf X=\min X=0$, $\sup X=1$, $\max X$ ei eksisteeri;
4) $\sup X=\max X=\dfrac{3}{4}$, $\inf X=0$, $\min X$ ei eksisteeri.
18. Leidugu $K>0$ omadusega $|y_n|\leqslant K$. Fikseerime $\varepsilon>0$. Valige koondumise $\lim\limits_n x_n=0$ arvu ε rolli meie ε/K.
19. 1) ja 2) $\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$; 3) jada (x_n) on tõkestatud, seega mingi $K>0$ korral $|x_n|\leqslant K$, edasi tasub vahele x_ny_n-ab liita-lahutada bx_n; 4) kasutage ülesannet 3); 5) tõestage, et leidub N omadusega $n\geqslant N\Rightarrow$

$|x_n| \geqslant \frac{|a|}{2}$, arvestades seost $a \neq 0$; 6) kasutage ülesandeid 3) ja 5).

20. ja **22.** $(x_n + y_n)$ hajub, muidu $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ koonduks; valides $x_n \to 0$ ja (y_n) hajuv tõkestatud, on $x_n \cdot y_n \to 0$, aga nt. $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$, on $x_n \cdot y_n = n$ hajuv.

21. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, siis $x_n + y_n = 0$, $x_n \cdot y_n = -1$; $x_n = (-1)^n$, $y_n = n(-1)^n$, siis $x_n + y_n = (n+1)(-1)^n$, $x_n \cdot y_n = n$.

23. 1) jada piirväärtuse definitsioonis sobibki N rolli eelduses antud arv N; 2) $(x_n) = (a, a+1, a, a+1, a, \ldots)$.

24. 1) $N = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$; 2) $N = \left\lfloor \frac{3}{5\varepsilon} \right\rfloor + 1$; 3) $N = \left\lfloor \frac{14}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$; 4) $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$; 5) $N = \left\lfloor \frac{13}{16\varepsilon} + \frac{3}{8} \right\rfloor + 1$; 6) $N = \left\lfloor 8 + \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

29. a) Tarvis läheb võrratust $\big||x_n| - |a|\big| \leqslant |x_n - a|$; b) $(-1)^n$; c) $|x_n| < \varepsilon$ ja $\big||x_n|\big| < \varepsilon$ on samaväärsed tingimused.

31. Kui jada (x_n) on tõkestatud, siis mingite $m, M \in \mathbb{R}$ korral $m \leqslant x_n \leqslant M$; tähistame $K = \max\{|m|, |M|\} + 1$, siis $-K < -|m| \leqslant m \leqslant x_n \leqslant M \leqslant |M| < K$. Kui $|x_n| \leqslant K$, siis sobivad $m = -K$, $M = K$.

32. 1) valige jada piirväärtuse definitsioonis näiteks $\varepsilon = a$; 2) valige $\varepsilon = -a$.

33. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Eeldused $x_n \to a$ ja $y_n \to a$ annavad arvud K_1 ja K_2 nii, et $k \geqslant K_1 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$ ja $k \geqslant K_2 \Rightarrow |y_k - a| < \varepsilon$. Tähistame $N = 2\max\{K_1, K_2\}$. Kui $n \geqslant N$ ja $n = 2k$, siis $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$; kui $n = 2k - 1$, siis $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$.

34. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Koondumise $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ kontrollimiseks vaatleme kõigepealt juhtu $a < b$, siis $\max\{a, b\} = b$. Kasutades $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$ definitsioone, leidke N omadusega: kui $n \geqslant N$, siis $x_n < \frac{a+b}{2} < y_n$. Seega, kui $n \geqslant N$, siis $\max\{x_n, y_n\} = y_n$. Nüüd koondumise $\lim_n y_n = b$ põhjal leidke $N_1 \geqslant N$, et $|y_n - b| < \varepsilon$.

Juhul $a = b$ leidke antud koondumiste põhjal N, et kui $n \geqslant N$, siis $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|y_n - a| < \varepsilon$.

Alternatiiv: tõestage ja kasutage seoseid $\max\{u, v\} = \frac{u+v}{2} + \frac{|u-v|}{2}$, $\min\{u, v\} = \frac{u+v}{2} - \frac{|u-v|}{2}$, kus $u, v \in \mathbb{R}$.

35. Iga n korral saab leida arvu x_n näiteks a ja $a + \frac{1}{n}$ vahelt.

43. 1) kasutage jada piirväärtuse definitsiooni ja seost $n_k \geqslant k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral; 2) $(-1)^n$.

44. $x_{mp+k} = a_k$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \ldots, p\}$.

45. $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \ldots$, kindlasti esinevad (x_n) osapiirväärtustena jada (a_n) kõik osapiirväärtused.

46. 1) (n); 2) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots$; 3) ja 3) $\mathbb{Q}$ kõik elemendid jadana.

47. 1) $\left\{-\mathrm{e} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mathrm{e}, \mathrm{e} \pm 1\right\}$ (pange tähele, et need on osajadade (x_{8k+p}), kus $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, piirväärtused); 2) $\{0, 1\}$; 3) $\{0\}$; 4) $\{0, 1\}$; 5) $[0, 1]$ (pange tähele, et iga reaalarvu $\alpha \in [0, 1]$ korral saab hulgast $\left\{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$ valida ratsionaalarvu $\frac{k}{n}$ nii, et $\left|\frac{k}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n}$); 6) $\{1, 5\}$.

51. Tähistame $u_k = \inf\{x_n \colon n \geqslant k\}$. Tõestage, et jada (u_k) on kasvav ja tõkestatud. Seega see jada on koonduv ja piirväärtus on $\sup\{u_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ (miks?), nagu vaja.

52. Võrratuse $\inf_n x_n \leqslant \varliminf_n x_n$ tõestamiseks pange tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\inf\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\} \leqslant \inf\{x_k \colon k \geqslant n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks parema poole piirväärtus on lõplik?)

53. Olgu jada (y_n) osajada (y_{n_k}) selline, et $\lim_k y_{n_k} = \varliminf_n y_n$. Nüüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. On jäänud kirjutada, et $\varliminf_n x_n \leqslant \lim_j x_{n_{k_j}} \leqslant \lim_j y_{n_{k_j}} = \varliminf_n y_n$.

Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k \colon k \geqslant n\} \leqslant \inf\{y_k \colon k \geqslant n\}$ kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)

54. Konstandiga korrutamine ei mõjuta (osa)jada koonduvust.
Alternatiiv: uurige $\inf\{cx_k\colon k \geqslant n\}$ ja $c \cdot \inf\{x_k\colon k \geqslant n\}$ või $c \cdot \sup\{x_k\colon k \geqslant n\}$ vahekorda.
55. Olgu jada $(x_n + y_n)$ osajada $(x_{n_k} + y_{n_k})$ selline, et $\lim\limits_k (x_{n_k} + y_{n_k}) = \underline{\lim\limits_n}(x_n + y_n)$. Nüüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. Siis jada $(y_{n_{k_j}})$ on samuti koonduv. On jäänud kirjutada, et $\underline{\lim\limits_n}\, x_n + \underline{\lim\limits_n}\, y_n \leqslant \lim\limits_j x_{n_{k_j}} + \lim\limits_j y_{n_{k_j}} = \lim\limits_j (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) = \underline{\lim\limits_n}(x_n + y_n)$.
Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k\colon k \geqslant n\} + \inf\{y_k\colon k \geqslant n\} \leqslant \inf\{x_k + y_k\colon k \geqslant n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)
Teine võrratus järeldub esimesest, kui vaadelda $\underline{\lim\limits_n}(x_n + y_n) - \overline{\lim\limits_n}\, y_n = \underline{\lim\limits_n}(x_n + y_n) + \underline{\lim\limits_n}(-y_n) \leqslant \underline{\lim\limits_n}\, x_n$.
Näideteks sobivad: $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$ ning $x_n = y_n = (-1)^n$.
56. Kasutage seda, et $\lim\limits_n x_n = \overline{\lim\limits_n}\, x_n = \underline{\lim\limits_n}\, x_n$.
57. 1) 0, 1, 1, 1; 2) $-3\frac{1}{2}$, 5, −2, 2; 3) −1, $1\frac{1}{2}$, 0, 1; 4) 0, 2, 0, 2; 5) $-\infty, \infty, -\infty, \infty$; 6) $-\infty, -1, -\infty, -\infty$; 7) 0, 1, 0, 0; 8) −5, $\frac{5}{4}$, 0, 0.
61. Oletage, et $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, kus $A < B$. Funktsiooni piirväärtuse definitsioonis valige $\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$ ning seeläbi leidke x omadusega $f(x) < \dfrac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.
62. Oletage, et $A > B$. Valige antud koondumiste definitsioonides $\varepsilon = \dfrac{A-B}{2}$ ning leidke $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ omadusega $g(x) < \dfrac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.
63. Kasutage ülesannet 62.
64. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke δ nii, et kui $0 < |x-a| < \delta$, siis $A - \varepsilon < f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) < A + \varepsilon$.
65. Kasutage funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 19.
66. 1) $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$; 2) $\delta = \varepsilon^3$; 3) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; 4) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; 5) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{15}\right\}$; 6) $\delta = \varepsilon$; 7) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; 8) $\delta = \min\left\{1, \frac{7\varepsilon}{2}\right\}$; 9) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{22}\right\}$; 10) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; 11) $\delta = \min\left\{1, \frac{3\varepsilon}{2}\right\}$; 12) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; 13) $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$; 14) $\delta = 2\varepsilon$; 15) $\delta = \varepsilon^2$; 16) $\delta = \varepsilon^2$.
67. 1) $D = \frac{1}{4\varepsilon}$; 2) $D = \frac{5}{9\varepsilon}$; 3) $D = \frac{5}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$; 4) $D = \frac{5}{\varepsilon} + 1$; 5) $D = \frac{32}{3\varepsilon}$; 6) $D = \frac{17}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$; 7) $D = \max\{1, 2E\}$; 8) $D = E$; 9) $D = E$.
70. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) $2\frac{1}{24}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{12}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) −2; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $-\frac{1}{12}$; 14) $4\frac{4}{27}$; 15) $\frac{1}{n}$.
71. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0; 3) ∞; 4) 1; 5) −1; 6) −1; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 1; 9) 0.
72. 1) 1; 2) −1; 3) −1; 4) 1; 5) $-\infty$; 6) ∞; 7) 4; 8) −4; 9) ∞.
73. Kasutage funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 19.
74. Tõestage, et $g(x) = x^n$ on pidev, $n \in \mathbb{N}$.
75. Olgu $x \in \mathbb{R}$, siis leidub jada $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ omadusega $\lim\limits_n x_n = x$. Seega $f(x) = \lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n g(x_n) = g(x)$.
76. Kasutage pidevuse definitsiooni, võttes vastavalt $\varepsilon = f(a)$ või $\varepsilon = -f(a)$.
77. Koondumine $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ annab arvu $D > 0$ omadusega $x > D \Rightarrow c-1 < f(x) < c+1$. Kuna f on pidev lõigus $[0, D+1]$, siis on ta selles lõigus tõkestatud, mistõttu leiduvad m ja M omadusega $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [0, D+1]$. Kokkuvõttes on $\min\{m, c-1\}$ ja $\max\{M, c+1\}$ arvud, mille vahel on f kõik väärtused intervallis $[0, \infty)$.
81. 1) kui $a = 2$, siis $\delta = \varepsilon^2$, kui $a > 2$, siis $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{a-2}$; 2) kasutada võrratust $|\sin x| \leqslant |x|$, $\delta = \varepsilon$; 3) kasutada võrratust $\ln(1+x) \leqslant x$, $\delta = \varepsilon \cdot a$.

82. 1) jah; 2) jah: $f(x)=\sqrt{x^2}$; 3) ei, sest f pole pidev oma määramispiirkonnas; 4) jah: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

84. Kuna $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. Seega $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

87. 1) 1; 2) $\frac{7}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 5; 5) $\frac{7}{5}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{8}$; 8) -2, 9) 0.

88. 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 1; 6) -1.

89. 1) e; 2) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; 3) e; 4) e^6; 9) 1; 5) 0; 6) ∞; 10) $\frac{\pi}{6}$; 11) $-\frac{7}{12}$; 12) 2; 7) 1; 8) ∞.

90. 1) $\beta=o(\alpha)$; 2) $\alpha=o(\beta)$; 3) $\alpha=o(\beta)$; 4) $\alpha\sim\beta$; 5) $\alpha\sim\beta$; 6) $\alpha\sim\beta$.

91. Parameetrite C ja k otsimiseks tasub avaldisi asendada vaadeldavas protsessis ekvivalentsete suurustega. 1) Näitame, et kui $n\to\infty$, siis $n^2+1\sim n^2$ ehk $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}1+\dfrac{1}{n^2}=1$. Protsessis $n\to\infty$ saame analoogilisel teel veel, et $\sqrt{n^3+2}\sim n^{3/2}$, seega $\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^3+2}}\sim n^{1/2}$, kust saame $C=1$, $k=-\dfrac{1}{2}$. Ka järgmiste ülesannete lahendusvihjetes mainitud ekvivalentsid tõestatakse, näidates, et vastavate suuruste jagatiste piirväärtus antud protsessis on üks. 2) Kui $x\to 0$, siis $\sin x-\tan x\sim\sin x(\cos x-1)=-2\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}\sim-\dfrac{1}{2}x^3$. Seega $C=-\dfrac{1}{2}$, $k=3$. 3) $C=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$, $k=\dfrac{1}{5}$. 4) Kui $x\to 0$, siis $\sqrt{x}\sim x+\sqrt{x}$, seega $x^{1/4}\sim\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$, kust saame $C=1$, $k=\dfrac{1}{8}$. 5) Kui $x\to\infty$, siis $\ln(e^x+1)\sim\ln e^x=x$, seega $C=1$, $k=1$. 6) $C=1$, $k=1$.

93. 1) I liiki katkevus; 2) kõrvaldatav katkevus, $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$; 3) kõrvaldatav katkevus, $f(0)=0$; 4) kõrvaldatav katkevus, $f(0)=\dfrac{1}{10}$; 5) kõrvaldatav katkevus, $f(0)=\mathrm{e}$; 6) II liiki katkevus.

94. 1) pidev kogu reaalteljel; 2) kui $a=1$, siis pidev kogu reaalteljel, vastasel korral katkev punktis 1 ja pidev mujal; 3) katkev punktides 0 ja 1, mujal pidev; 4) katkev punktis $x=\dfrac{2}{3}$, mujal pidev.

95. Olgu $a\in\mathbb{Q}$. Leidke jada $(x_n)\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ omadusega $\lim\limits_n x_n=a$. Funktsiooni f pidevuse tõttu $0=\lim\limits_n 0=\lim\limits_n f(x_n)=f(a)=1$, vastuolu. Analoogiline arutelu sobib juhtumil $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

96. Funktsioon f on pidev punktis 0, sest $-|x|\leqslant f(x)\leqslant x$; edasi kasutage ülesannet 64. Näitamaks, et f on katkev igas punktis $a\neq 0$, saab kasutada ülesande 95 lahenduse ideed.

97. 1), 2) kasutage Dirichlet' funktsiooni; 3) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{kui } x\in\mathbb{Q},\\ \sqrt{2}, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

98. Kasutage võrratust $\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$. Vastupidise väite vääramiseks vaadelge funktsiooni $2D(x)-1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

99. f on pidev kõigis vahemikes $(k-1,k)$, kus $k\in\mathbb{Z}$, paremalt pidev kõigis punktides $k\in\mathbb{Z}$ ja ei ole vasakult pidev üheski punktis $k\in\mathbb{Z}$.

100. 1) Ühtlaselt pidev (kasutada definitsiooni ning võrratust $|\sin x|\leqslant|x|$). 2) Ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon>0$ antud. Kui vähemalt üks arvudest $x,x'\in[1,\infty)$, siis saab hinnata $|\sqrt{x}-\sqrt{x'}|=\dfrac{|x-x'|}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}\leqslant|x-x'|$. Kui $x,x'\in[0,1]$, siis Cantori teoreemi põhjal leidub $\delta_1>0$ nii, et kui $|x-x'|<\delta_1$, siis $|\sqrt{x}-\sqrt{x'}|<\varepsilon$. Kokkuvõttes võime valida $\delta=\min\{\varepsilon,\delta_1\}$. 2) Pole ühtlaselt pidev (analoogiline konspekti näitega 3.7). 4) Pole ühtlaselt pidev (vt. konspekti näide 3.7). 5) Ühtlaselt pidev, sest funktsioon on lõigus $[0,10]$ pideva funktsiooni ahend. 6) Ühtlaselt pidev (Cantori teoreem) 7) Ühtlaselt pidev kuna f on pidev (peale katkevuse kõrvaldamist nullpunktis) ja $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=1$ (vt. konspekti Lause 3.29).

103. 1) $(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$; 2) $(x+h)^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3$; 3) $x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1}\right)$; 4) $\cos x-\cos a=-2\sin\dfrac{x-a}{2}\sin\dfrac{x+a}{2}$; 5) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{x-a}{ax}$; 6) $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a\cdot\left(\mathrm{e}^{x-a}-1\right)$, koondumises

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=0$ tehke muutuja vahetus $\ln(1+x)=t$ (siis $x\to 0$ tähendab, et $t\to 0$); 7) $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$; 8) $b^x-b^a=b^a\cdot\left(b^{x-a}-1\right)$.

104. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=f'(a)\cdot 0=0$.

107. Kuna $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}=-1$ ja $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}=1$, siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ ei eksisteeri.

108. $f'_-(0)=l$, $f'_+(0)=k$. Tuletis $f'(0)$ eksisteerib parajasti juhul $k=l$.

109. Dirichlet' funktsioon.

111. 1) $3(\sin x)^2\cos x$; 2) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$; 3) $-2^{\cos x}(\ln 2)\cdot\sin x$; 4) $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; 5) $-\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$; 6) $\mathrm{e}^x\cdot(\sin x+\cos x)$; 7) $\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$; 8) $-(\sin x)\cdot\tan\alpha$; 9) $a^x x^{a-1}(x\ln a+a)$; 10) $\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$; 11) $-\dfrac{2\operatorname{sgn} x}{x^2+1}$; 12) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$; 13) $\dfrac{1-x^2}{1+x^4}$; 14) $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$; 15) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 16) $\dfrac{8x+2}{4x^2+1}$; 17) $\arcsin x$.

114. a1) $x^x(1+\ln x)$; a2) $(\cos x)^{\sin x}\left((\cos x)\ln\cos x-\dfrac{(\sin x)^2}{\cos x}\right)$;

a3) $\sqrt[3]{\dfrac{(x^2+4)^5(3x-1)^8}{9(6x^3+1)\mathrm{e}^{\sin 5x}}}\cdot\left(\dfrac{10x}{x^2+4}+\dfrac{24}{3x-1}-\dfrac{36x^2}{6x^3+1}-5\cos 5x\right)$;

b1) $\operatorname{sgn} x$, $x\neq 0$; b2) $2|x|$; b3) $\begin{cases}3x^2-1, & \text{kui } x\leqslant 1,\\ 2x, & \text{kui } x>1;\end{cases}$ b4) $\begin{cases}2x, & \text{kui } x<2,\\ 3x^2, & \text{kui } x>2;\end{cases}$ b5) $\begin{cases}2x, & \text{kui } x<0,\\ \cos x, & \text{kui } x>0;\end{cases}$

b6) $\begin{cases}-\sin x, & \text{kui } x<0,\\ 4x^3, & \text{kui } x>0;\end{cases}$ b7) $\begin{cases}\cos x, & \text{kui } x<0,\\ \dfrac{1}{(\cos x)^2}, & \text{kui } x\geqslant 0;\end{cases}$ b8) $\begin{cases}2(x-5), & \text{kui } x>1,\\ -2x\mathrm{e}^{1-x^2}, & \text{kui } x<1;\end{cases}$

b9) $\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}, & \text{kui } x\neq 0,\\ 1, & \text{kui } x=0;\end{cases}$ b10) $\begin{cases}x^{x+1}\left(\dfrac{x+1}{x}+\ln x\right), & \text{kui } x>0,\\ \dfrac{2^x}{\sqrt{3x^2+1}}\left(\ln 2-\dfrac{3x}{3x^2+1}\right), & \text{kui } x<0;\end{cases}$

115. 1) $2\mathrm{e}^{-x^2}(2x^2-1)$; 2) $3+2\ln x$; 3) $-2\mathrm{e}^x\sin x$; 4) $\dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\begin{cases}-2, & \text{kui } x<0,\\ 2, & \text{kui } x>0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2, & \text{kui } x<0,\\ 6x, & \text{kui } x>0;\end{cases}$

7) $\begin{cases}6x, & \text{kui } x<0,\\ 12x, & \text{kui } x\geqslant 0;\end{cases}$ 8) $6x$, kui $x\neq 0$.

121. $(-1,-1)$, $(1,1)$.

122. Kui $f(x)=\sin x$, siis $f'(0)=1=\tan\dfrac{\pi}{4}$.

123. $a=\dfrac{1}{2e}$.

124. $y=\dfrac{1}{4a}$.

125. Kasutage funktsiooni monotoonsuse tunnuseid intervallide $(a-\delta,a]$ ja $[a,a+\delta)$ jaoks.

126. 1) $c=-1$; 2) $c=\mathrm{e}-1$.

127. Vaadelge funktsiooni $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ ning näidake, et $g'(x)=0$ iga $x\in\mathbb{R}$ korral.

128. 1) f on rangelt kahanev intervallis $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, rangelt kasvav intervallis $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$, range lokaalne miinimum punktis $\dfrac{1}{2}$; 2) f on rangelt kasvav intervallides $(-\infty,-1]$ ja $[4,\infty)$, rangelt kahanev intervallis $[-1,4]$, range lokaalne maksimum punktis -1, range lokaalne miinimum punktis 4; 3) f on rangelt kahanev intervallides $(-\infty,0]$ ja $[2,\infty)$, rangelt kasvav intervallis $[0,2]$, range lokaalne miinimum punktis 0, range lokaalne maksimum punktis 2; 4) f on rangelt kahanev intervallis $(-\infty,0)$ ja rangelt kasvav intervallis $(0,\infty)$; 5) f on rangelt kasvav kogu reaalteljel; 6) f on rangelt kasvav intervallides $\left[\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right]$ ja $[1,\infty)$, rangelt kahanev intervallides $\left[\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1}\right]$ ja $(-\infty,-1]$, ranged lokaalsed maksimumid punktides $\frac{1}{2k}$, kus $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, ranged lokaalsed miinimumid punktides $\frac{1}{2k+1}$, kus $k\in\mathbb{Z}$; 7) f on rangelt kasvav kogu reaalteljel.

132. 3), 4), Kasutage l'Hospitali reeglit; 6), 10),7),8) kasutage eksponent- ja logaritmfunktsiooni pidevust ja l'Hospitali reeglit; 12) taandage murdu avaldisega x ning kasutage seda, et $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ (miks?); 14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$; 15) $\ln^2 a$.

133. $(x-1)^5+3(x-1)^4+3(x-1)^3$.

134. $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}}$, kus $\xi\in(0,x)$, ja $\left|-\frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}}\right|\leqslant\frac{1}{10}$.

135. $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$, kus ξ asub 0 ja x vahel; $\left|\frac{\mathrm{e}^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$, saame, et $\frac{\mathrm{e}}{(6+1)!}<0{,}001$.

137. 1) Taylori valemi kohaselt $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{(\cos\xi)x^5}{120}$, kus ξ asub 0 ja x vahel, seega $\left|\frac{(\cos\xi)x^5}{120}\right|\leqslant\frac{1}{3840}$; 2) $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac52}}$, kus ξ asub 0 ja x vahel, seega $\left|\frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac52}}\right|\leqslant\frac{1}{16}$.

141. 1) Uurige funktsiooni $f(x)=\mathrm{e}^x-(1+x)$; 2) uurige funktsioone $f(x)=x-\sin x$ ja $g(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$; 3) uurige funktsioone $f(x)=x-\arctan x$ ja $g(x)=\arctan x-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$; 4) näidake, et $f(x)=x-\ln(1+x)$ on hulgas $(-1,0]$ kahanev ja hulgas $[0,\infty)$ kasvav ning $f(0)=0$; 5) ja 6) analoogilised ülesandega 4), miinimumkohaks mõlemal 0.

147. Kuna antud funktsioonid on integreeruvad, võib integraali leida konkreetsetele (näiteks ühtlastele) alajaotustele vastavate integraalsummade piirväärtusena.

148. Integraali võib arvutada teatud konkreetsete alajaotuste T kaudu, kus $\lambda(T)\to0$ (miks?). Eeldusel, et alajaotuse T jaotuspunktid ning valitud punktid ξ_k on nullpunkti suhtes sümmeetrilised, saame juhul 1) $\sigma(T)=0$ ja juhul 2), et $\sigma(T)=2\sigma'(T)$, kus $\sigma'(T)$ on lõigu $[0,a]$ alajaotusele vastav integraalsumma.

150. Tehes teisenduse $x\mapsto a+b-x$, peegeldatakse lõigu $[a,b]$ kõik punktid keskpunkti $\frac{a+b}{2}$ suhtes.

151. Näidake, et arv I^*-I_* rahuldab arvuhulga $\{S(T)-s(T)\colon T\in\mathfrak{T}\}$ infiimumi nõudeid.

152. 1) $S(T)=1$, $s(T)=0$. 2) Oletades, et f on integreeruv, peab vahe $S(T)-s(T)$ olema väike ka ühtlase alajaotuse $x_k=\frac{k}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$, korral, kui n on piisavalt suur. Saame, et $S(T)=2$ ja $s(T)=\frac{0}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{2n}\leqslant\frac12$. Seega $S(T)-s(T)\geqslant1$. 3) Kasutage ül. 2) lahenduse ideed ja võrdust $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

153. sinc on pidev.

154. $f(x)=2D(x)-1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

157. a1) $8\sqrt2-2$; a2) $\frac{99}{10\ln10}$; a3) -4; a4) $\frac{2\mathrm{e}-1}{1+\ln2}+\ln2$; a5) 0; a6) $\frac{\pi}{24}+\frac12-\frac{1}{2\sqrt3}$; a7) $1-\frac{\pi}{4}$; a8) $\frac{\pi}{4}-\frac23$; a9)

$1-\dfrac{\pi}{2}$; a10) π; b1) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$; b2) $\dfrac{e^5}{5}(e^5-1)$; b3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; b4) $\ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; b5) π; b6) $\dfrac{11}{5}$; b7) $\ln\sqrt{3}$; b8) 0; b9) $\sin 1$; b10) $\dfrac{e}{2}(e^2-1)$; b11) $\dfrac{\pi}{4}$; b12) $\dfrac{\pi}{24}$; b13) $\ln 2$; b14) $\dfrac{\ln 9}{3}$; b15) 0; b16) $\dfrac{\pi}{2}$; b17) 0; b18) $1-\sin 1$; b19) $\ln 2-\dfrac{1}{2}$; b20) $\dfrac{\pi^4}{1024}$; b21) $\dfrac{2}{3}$; b22) $\dfrac{\pi}{2}$; b23) 1; b24) $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; b25) $\dfrac{1}{2}$; b26) $\dfrac{\pi}{4}$; b27) $-\arctan\dfrac{\pi}{4}$; c1) 2π; c2) -2; c3) $6\ln 6-3\ln 3-3$; c4) $1-\dfrac{2}{e}$; c5) $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$; c6) -2π; d1) π^2+1; d2) $2\pi^2+\dfrac{1}{2}$.

158. 1) $\dfrac{9}{2}$; 2) $2-\dfrac{2}{e}$; 3) $\dfrac{1}{12}$.

160. Oletame, et leidub punkt $x_0\in[a,b]$ nii, et $f(x_0)>0$. Kui $x_0\in(a,b)$, siis f pidevuse tõttu leidub $\delta>0$ omadusega $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\Rightarrow f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. (Analoogiliselt käitume juhul, kui $x_0=a$ või $x_0=b$.) Integraali aditiivsust ja monotoonsust kasutades leidke, et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx\geqslant\delta f(x_0)>0$. Vastuolu.

161. Rakendage ülesannet 160 funktsiooni $g-f$ jaoks.

162. a) Olgu f Darboux' integraalid I_* ja I^* ning g jaoks J_* ja J^*. Eeldusel $I_*=I^*$ ja $J_*=J^*$ ning $f\leqslant g$ on vaja näidata, et (näiteks) $I_*\leqslant J_*$. Saame, et $\displaystyle s_f(T)=\sum_{k=1}^n\left(\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)\right)\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^n\left(\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}g(x)\right)\Delta x_k$, millest järeldub vajalik võrratus.

b) Tähistame $A=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ja $B=\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$. Oletage, et $A>B$ ning kasutage integreeruvuse definitsioone, valides $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$. Leidke konkreetne (näiteks võrdsete pikkustega alalõikudega) alajaotus T ja konkreetne punktide ξ_k valik, mille korral $\sigma_f(T,\xi)>\sigma_g(T,\xi)$. See annab vastuolu, sest tingimus $f(x)\leqslant g(x)$ annab $\sigma_f(T,\xi)\leqslant\sigma_g(T,\xi)$ iga alajaotuse T korral.

163. a) Olgu f, g ja h Darboux' integraalid I_* ja I^*, J_* ja J^* ning K_* ja K^*. Eeldused on, et $I_*=I^*=K_*=K^*=I$ ning $f\leqslant h\leqslant g$. Kuna $s_f(T)\leqslant s_h(T)\leqslant s_g(T)$, siis $I_*\leqslant J_*\leqslant K_*$, analoogiliselt leiame, et $I^*\leqslant J^*\leqslant K^*$. Siit järeldub vajalik tulemus $J_*=I=J^*$.

b) Fikseerime $\varepsilon>0$. Leidke $\delta>0$ omadusega: kui $\lambda(T)<\delta$, siis $I-\varepsilon<\sigma_f(T,\xi)\leqslant\sigma_h(T)\leqslant\sigma_g(T)<I+\varepsilon$.

164. Rakendage ülesannet 161.

165. 1) $\sin x^2\leqslant x^2$, $\sin 1<\sin\dfrac{\pi}{2}=1$; 2) $e^{x^2}\geqslant 1+x^2\geqslant x$, $e^4>2$; 3) $\ln x\leqslant x-1$, $\ln 2<\ln e=1$.

166. $-\dfrac{1}{4}\leqslant x^2-x\leqslant 2$.

169. Diferentseerige valemit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^b f(t)\,dt$ muutuja x järgi.

170. 1) $\dfrac{1}{1+x}$. 2) Kuna funktsioon $F(x)=\displaystyle\int_0^{2x} f(t)\,dt$ (ja seega ka tuletisfunktsioon F') ei sõltu sellest, kuidas on defineeritud $f(0)$ (tähtis on ainult, et f oleks integreeruv lõigus otspunktidega 0 ja $2x$), siis valime f nii, et ta oleks pidev: $f(x)=\operatorname{sinc}x=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{kui } x\neq 0,\\ 1, & \text{kui } x=0.\end{cases}$ (Sageli kõrvaldatava katkevuse korral integrandi kirjapanekul katkevuse kõrvaldamist eraldi ära näitama ei hakata.) Saame, et $F'(x)=2\operatorname{sinc}2x$. 3) $-\dfrac{x}{\ln x}$. 4) $2(\ln 2x)^2-(\ln x)^2$. 5) $-e^{(\sin x)^2}\cos x-e^{(\cos x)^2}\sin x$.

174. a1) $\dfrac{1}{8}$; a2) $\dfrac{1}{2}$; a3) $\dfrac{2}{\pi}$; a4) $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$; a5) integraal hajub; a6) -1; b1) $1+\dfrac{\pi}{2}$; b2) $-\dfrac{4}{3}$; b3) $\dfrac{102}{7}$; b4) $\sqrt{3}$; b5) $\dfrac{1}{\ln 2}$; b6) integraal hajub; b8) π; b9) integraal hajub; b10) π; b11) -1.

175. 1) $q>1$; 2) $q<1$; 3) mitte ühegi q väärtuse korral.

176. Arvutage $\int_a^\infty \frac{K\,\mathrm{d}x}{x^q}$.
177. Kui f on tõkestamata punkti b vasakpoolses ümbruses, siis on majorant $\frac{K}{(b-x)^q}$.
178. Vaadelda tuleb olukorda $0 \leqslant \frac{K}{x^q} \leqslant f(x)$, kus q on selline, et $\int_a^\infty \frac{K\,\mathrm{d}x}{x^q}$ hajub. Analoogiliselt juhul, kus päratu integraal leitakse lõigus $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
179. a1) koondub; a2) koondub; a3) hajub; a4) koondub; a5) hajub; a6) koondub; b1) koondub; b2) koondub; b3) koondub; b4) hajub; b5) koondub; b6) hajub.
181. $u_k = s_k - s_{k-1}$.
182. Avaldage osasummad $\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$.
183. Osasummade jada on kasvav; $(-1)^n$.
184. Kasutage Cauchy kriteeriumit ja kolmnurga võrratust.
Alternatiiv: koondugu rida $\sum_k 2|u_k|$, siis $0 \leqslant u_k + |u_k| \leqslant 2|u_k|$ ja I võrdluslause tõttu koondub ka rida $\sum_k (u_k + |u_k|)$, millest järeldub rea $\sum_k u_k$ koonduvus.
185. 1) kasutage seost $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, summa on 1; 2) $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$, summa on $\frac{11}{18}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 2; 6) 12; 7) $\frac{3}{4}$; 8) eeldusel, et $|a| > \frac{1}{5}$ on summa $\frac{45a+1}{25a-5}$; 9) 1.
188. 1) $\lim_k \frac{k}{100k+1} = \frac{1}{100} \neq 0$; 2) $\lim_k |(-1)^k| = 1 \neq 0$, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;
alternatiiv: jada $\left((-1)^k\right)$ hajub, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;
alternatiiv: osasummade jada on $(-1,0,-1,\ldots)$, mis hajub; 3) tähistame $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; oletades, et $\lim_n s_n = s$, kehtib $0 = \lim_n (s_{2n} - s_n) \geqslant \frac{1}{2}$, vastuolu; 4), 5) analoogiline ülesandega 3).
189. 1) koonduv (I või II VL); 2) koonduv (I või II VL); 3) koonduv (I või II VL); 4) koonduv (II VL); 5) hajuv (II VL); 6) hajuv (II VL); 7) koonduv (II VL); 8) hajuv (II VL); 10) koonduv (Cauchy või d'Alembert); 9) hajuv (Cauchy või d'Alembert); 11) koonduv (Cauchy või d'Alembert); 12) koonduv (Cauchy või d'Alembert); 13) hajuv (II VL); 14) koonduv (d'Alembert); 15) koonduv (d'Alembert); 16) hajuv (d'Alembert); 17) koonduv (d'Alembert); 18) koonduv (d'Alembert); 19) koonduv (Leibniz); 20) koonduv (Leibniz); 21) hajuv ($\lim_k \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$).
190. 1) Väide kehtib. Näidake, et kui $\lim_k u_k = 0$, siis jada liikmetega $\frac{1}{u_k}$ on tõkestamata. Seega see jada hajub ning ei kehti rea koonduvuse tarvilik tingimus $\lim_k \frac{1}{u_k} = 0$. 2) Väide ei kehti: kontranäiteks sobib $u_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$.
193. 1) $D = (-1,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-1,1), \\ 1, & \text{kui } x = 1; \end{cases}$ 2) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 3) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$; 4) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 5) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 0$; 6) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
194. 1) ei; 2) jah; 3) jah; 4) jah; 5) ei; 6) ei; 7) ei.
199. 1) $D = A = (-1,1)$, $S(x) = \frac{x}{1-x}$; 2) $D = A = (0,\infty)$, $S(x) = \frac{x-1}{2}$; 3) $D = A = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$, $S(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; 4) $D = A = \{0\}$, $S(x) = 0$; 5) $D = A = \left[0, \sqrt{\mathrm{e}-1}\right)$, $S(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \ln(1+x^2)}$; 6) $D = A = \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$, $S(x) = \frac{1}{x}$.

200. 1) $D = A = (1, \infty)$; 2) $D = (0, \infty)$, $A = (1, \infty)$; 3) $D = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $A = (1, \infty)$; 4) $D = A = (-1, 1)$; 5) $D = A = (-1, 1)$; 6) $D = A = \mathbb{R}$.

201. 1) $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$; 4) $\left|\frac{(\sin kx)^2}{\sqrt{k^3+1}}\right| \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\left|\frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$; 6) $\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}}\right| \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 7) $\left|\frac{1}{2^k + \arccos x}\right| \leqslant \frac{1}{2^k}$; 8) $\left|\frac{e^{-k^2x^2}}{k\sqrt{k}}\right| \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

202. $D = A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$ (sest rea 1. liige pole nendes punktides määratud). Kõigepealt liita rea liikmed paarikaupa.

206. 1) Rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{2}$; 2) rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{3}$; 3) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \infty)$, piirväärtus on 1.

207. 1) Rida koondub ühtlaselt hulgas $[\ln 2, \ln 3]$, integraal on $\frac{1}{2}$; võib ka leida $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ ning võtta sellest integraal antud rajades; 2) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \pi]$, integraal on $\frac{5\pi}{2}$.

208. 3) Rida ise koondub punktiviisi ja tuletiste rida koondub ühtlaselt hulgas $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f'(0) = -2$; tuletis on 2) Rida ise ja tuletiste rida koondub ühtlaselt igal pool; $f^{(17)}(3) = 68$.

209. Rida ise ja tuletiste rida koondub ühtlaselt kogu reaalteljel (kasutada Weierstrassi tunnust), seega summa on pidev ja pidevalt diferentseeruv.

212. 1) $D = A = (1, 3)$, $S(x) = \frac{1}{3-x}$; 2) $D = [-1, 1)$, $A = (-1, 1)$, $S(x) = -\ln(1-x)$; 3) $D = A = (-1, 1)$, $S(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$; 4) $D = A = \mathbb{R}$; 5) $D = A = [0, 2]$, $S(x) = 1 - \frac{x-2}{x-1}\ln(2-x)$; 6) $D = A = \{0\}$, $S(x) = 0$; 7) $D = A = \mathbb{R}$, $S(x) = e^{x+2} - 1$; 8) $D = A = \mathbb{R}$, $S(x) = \operatorname{sh} x^2$; 9) $D = (-1, 1)$, $A = (-1, 1)$, $S(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$; 10) $D = [-4, 0)$, $A = (-4, 0)$, $S(x) = \ln\left(-\frac{2}{x}\right)$.

213. 1) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$. Niisiis antud rea summa on 2. 2) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$. Niisiis antud rea summa on 6. 3) e^3. 5) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. 6) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

214. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$, $\mathbb{R}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $\mathbb{R}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$, $\mathbb{R}$; 4) $1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$, $\mathbb{R}$, kasutada valemit $(\cos x)^2 = \frac{1+\cos 2x}{2}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $(-1, 1)$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+9}$, $(-1, 1)$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$, $(-2, 2)$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$, $(-2, 2)$; 9) $\ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n8^n}$, $(-8, 8]$.