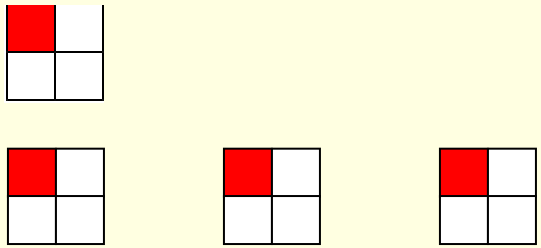
Harilike murdude käsitlemine
Mõiste kujundamine

- Hariliku murru mõiste esmane käsitlus IV klassis ja veelkordne põgus kordamine V klassis. Seal vaadeldakse mingit tervikut (ristkülik, ring, lõik vms), mida jagatakse võrdseteks osadeks. Nii jõutakse hariliku murruni. Tehted ja põhjalik käsitlus VI klassis.
- Näidetes saab kasutada geomeetrilisi kujundeid, mida pliiatsi ja joonlauaga osadeks jaotatakse, aga samuti võib osi tekitada paberist väljalõigatud kujundit voltides. Õpitakse, et murru nimetaja näitab, mitmeks **võrdseks** osaks on tervik jaotatud, ning murru lugeja näitab, mitu sellist osa on võetud.
- VI klassis tuleks sellest edasi minna. Õpilane peab mõistma, et harilik murd on alati mingi osa mingist kindlast määratud tervikust. Näiteks võib harilikku murdu $\frac{3}{4}$ kujutada ka nii nagu alloleval joonisel ning arutleda, et $\frac{3}{4}$ ühest ruudust on sama mis $\frac{1}{4}$ kolmest samasuurest ruudust.



Mõiste kujundamine

- Veel selgub, et me kasutame hariliku murru mõistet **mitmes tähenduses**: harilik murd kui **osa tervikust,** kui **jagatis,** kui **operaator,** kui **mõõt,** (kui **suhe**).
- Esimesel juhul on tegemist **suhtarvuga**, teisel juhul aga **absoluutarvuga**. Neid kahte tähendust tuleb õpilastel osata ka eristada. Tuleb mõista, et näiteks ¾ ühest ristkülikust võib olla $3cm^2$, aga ¾ teisest ristkülikust hoopiski $10cm^2$ ja seetõttu arv ¾ omab mõtet ainult koos selle tervikuga, millest ta võetud on. Siin omab võrdus $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$ mõtet vaid kontekstis ühe ja sama tervikuga. Kui aga tervikud on erinevad, võib summa saada hoopis teise tähenduse:
  - ühe päeva tulemus males – 1 võit kahest, teise päeva tulemus - 2 võitu viiest. Seega summaarselt - 3 võitu seitsmest ehk: 1/2+2/5=3/7
- Teisel juhul (arvude jagatis) on harilik murd vaid arv, millele saame seada vastavusse arvkiire mingi punkti.

Mõiste kujundamine

- VI klassis tulebki hariliku murru jaoks juurde ka teine tähendus: **harilik murd kui jagatis**. Kuidas jagada kolm õuna nelja lapse vahel ehk kuidas jagada 3 neljaks võrdseks osaks? Näitlikult saab selgeks, et selle ülesande vastus on ¾.
  - Igast kolmest õunast ¼ annab kokku ¾ kolmest õunast.
- **Eelnevast teame:** kui jagame nt 8 neljaks võrdseks osaks, teeme tehte 8 : 4 = 2.
- Arvestades jagamise tähendust naturaalarvude hulgas (jagamine kui võrdseteks osadeks jaotamine) võime öelda, et $\frac{3}{4} = 3:4$ ehk murrujoonel on jagamismärgi tähendus.
- Võiks rõhutada, et harilikud murrud on arvud, mida esitatakse kahe naturaalarvu jagatisena (jagaja pole null),
- Hariliku murru mõistet tuleks veel edasi arendada järgnevates klassides, kui tuntakse täisarvude hulka: *harilikuks murruks nimetatakse kahe **täisarvu** a ja b jagatist* $\frac{a}{b}$*, kus* $b \neq 0$.

Hariliku murruga seotud mõisted

- Seoses hariliku murruga: *lihtmurd, liigmurd, murru taandamine, murru laiendamine, laiendaja, segaarv, pöördarv, murru põhiomadus.*
- Siin õpilase jaoks mitmeid uudseid momente. Kõigepealt saab erinevatele konkreetsetele näidetele tuginedes selgeks, et $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ jne. Kuidas seda teha?
- Jaotatakse sama kujund kord 2ks, siis 4ks või 6ks võrdseks osaks ja võetakse vastavalt 1, 2 või 3 osa.
- Laiendamine ei peaks toimuma ainult kahekordistades!
- Uus on see, et tulemuseks on alati tegelikult üks ja seesama arv ehk **ühte ja sama arvu saab mitmel erineval viisil kirja panna.** Oluline on, et õpilane mõistaks seda, et **murru väärtus on kogu aeg sama**. Terminid *laiendama* ja *taandama* võivad õpilast selles osas eksitada.
- Illustreerida nii arvkiirel kui ka geomeetriliste kujundite abil.

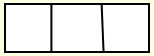
Hariliku murruga seotud mõisted

- Õpilane peab sisuliselt mõistma, millisel omadusel põhinevad murru taandamine ja murru laiendamine. Arutleda ka selle üle, millal saab murdu taandada (millal laiendada).
- Kuna suurima ühisteguri mõistet pole eriti põhjalikult käsitletud, siis võiks põhiliselt kasutada murru järk-järgulist taandamist.
- Murru põhiomaduse sõnastus: Tüüpiline õpilase sõnastus: Murru lugejat ja nimetajat võib korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga. Mida peaks aga veel lisama?

$$\frac{1}{3}a; \quad 2\frac{1}{3}$$

- Segaarvu mõiste juures tuleks esile tuua, et murru täisosa ja murdosa vahel on **plussmärk**, mis jäetakse kirjutamata. Tasub kõrvutada ka näiteks muutuja ja hariliku murru korrutisega.
- Algul on mõistlik segaarvus nimetatud plussmärk ka kirjutada. Katsed õpilastega on näidanud seda, et need õpilased, kes teavad, et $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, oskavad segaarvude ja harilike murdude liitmist õigesti põhjendada.

Hariliku murruga seotud mõisted

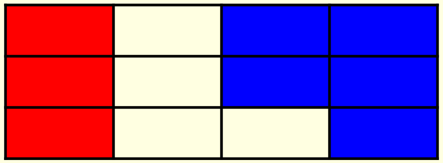
- Hariliku murru ja segaarvu paremaks mõistmiseks tuleks lasta õpilasel neid arve joonisel kujutada, andes näiteks järgmisi ülesandeid:
  - tee joonis, millel on kujutatud murrud $\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{2}$,
    kui  kujutab murdu $\frac{3}{4}$
- kujuta arve $\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$ ja $\frac{3}{4}$ arvkiirel.
- tee joonis, mis põhjendab, et $\frac{3}{4}$ ruudust on sama mis 75/100 ruudust (või 75% ruudust)
- 3x5 šokolaaditahvlist söödi ära 7 tükki (1x1). Mitmendik tahvlist jäi alles? Tee vastav joonis ja kirjuta vastav tehe.
- Joonista üks riskülik ja viiruta sellest pool. Seejärel värvi üks neljandik viirutatud osast siniseks. Mitmendiku kogu ristkülikust moodustab siniseks värvitud osa? Kuidas seda murdu arvutamise teel leida? (teine küsimus kuulub sinna, kus juba tehted)

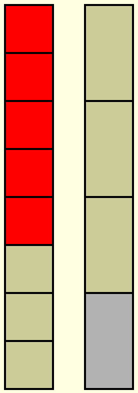
Hariliku murruga seotud mõisted

- Hariliku murru mõiste juurde kuulub ka see, et seostada omavahel harilik ja kümnendmurd. Õpitakse teisendama harilikku murdu kümnendmurruks ja vastupidi, kümnendmurdu harilikuks.
- Siin peaks õpilasel kujunema ka oskus otsustada enne hariliku murru teisendamist, missuguseks kümnendmurruks see teiseneb – lõplikuks või lõpmatuks. Mille järgi?
- Vaid millised tegurid nimetajas?
- See on jällegi fakt, millele võiksid õpilased ise tulla, kui anda ette sobiv ülesannete komplekt. Millised nimetajad võiks järjest valida?
- Kuidas saadut põhjendada?
- Nimetajas peab olema arv, millest saab laiendamise abil järguühik.
- Murdude võrdlemine (ühenimelised, sama lugejaga)

Tehted harilike murdudega

- Liitmise ja lahutamise õppimisel on võimalik toetuda joonistele. Selleks sobivad nii arvtelg kui ka geomeetrilised kujundid. Kõige raskem on erinimeliste murdude liitmine ja lahutamine. Milliseid tehteid saaks illustreerida kõrvalolev joonis?
- Siin tuleb algul saada korralikult selgeks ühise nimetaja leidmine.



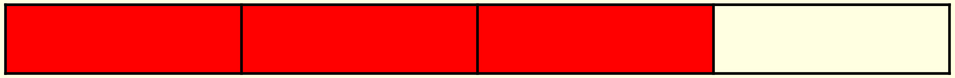


Laiendamise ja taandamise ülesandeid

- Laienda murdu $\frac{3}{5}$ 5ga
- Millega on laiendatud? $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$
- Laienda murdu $\frac{3}{4}$ nimetajani 20
- Murd $\frac{18}{24}$ on saadud laiendamise teel. Millistest murdudest see võib olla saadud?
- Kas on õige $\frac{3}{5} = \frac{28}{35}$?
- Täida lüngad $\frac{1}{2} = \frac{...}{16}$ $\frac{3 \cdot ....}{5 \cdot ...} = \frac{15}{...}$
- Laienda murde $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{6}$ nii, et neil oleks ühine nimetaja.
- Esita arv 3 kolme erineva murruna.
- Erinevus: laiendada võime mistahes nullist erineva arvuga, taandada vaid teatud arvudega
- Oluline viia lasteni: Laiendamine-taandamine annavad arvule vaid teise kuju, <u>arvu väärtus jääb samaks</u>

Tehted harilike murdudega

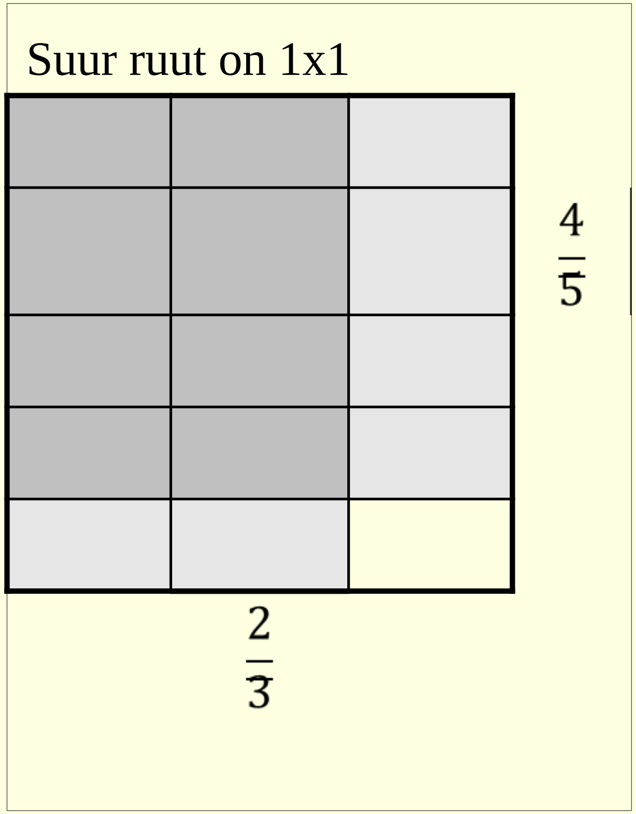
- Ka jagamist saame joonisega illustreerida.
  - Isa ostis 3kg ploome ja maksis 36 krooni. Kui palju maksab kg ploome? Mis tehte peaksime tegema?
  - Isa ostis ¾ kg ploome ja maksis 9 kr. Kui palju maksab 1kg?
  - Mis tehte peaksime tegema?
- $9 : \frac{3}{4}$
- Situatsioon joonisel oleks aga selline. Kus joonisel 9 krooni, kus terve? Mis tuleks teha arvudega 9; 3; ja 4?



$$9 : \frac{3}{4} = \frac{9}{3} \cdot 4 = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12$$

Tehted harilike murdudega

- Ka korrutamist saame joonisel illustreerida



$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Tehted harilike murdudega

- Murdude ühenimeliseks teisendamise juures öeldakse õpikus, et tuleb leida nimetajate vähim ühiskordne. Kuidas leida vähimat ühiskordset, see on jäetud lahtiseks.
- Muidugi võib leida mõlema nimetaja tegurid ja nende kaudu vähima ühiskordse. Kuid lihtsam on hakata vaatama suurema nimetaja kordseid ja kontrollima, milline neist jagub ka teise nimetajaga. Kui on sedalaadi ülesandeid juba küllalt lahendatud, võiks jõuda ka selleni, et ühise nimetaja (vähima ühiskordse) leidmisel on kasulik eristada 3 juhtu:
  - kui nimetajad on ühistegurita,
  - siis on ühiseks nimetajaks nimetajate korrutis
  - kui suurem nimetaja jagub väiksemaga,
  - siis on ühiseks nimetajaks suurem nimetaja
  - kui nimetajatel on ühistegur (mis erineb väiksemast nimetajast),
  - siis on ühist nimetajat kõige lihtsam leida suurema nimetaja kordseid vaadates

Tehted harilike murdudega

- Iga tehte juures on vaja piisavat tähelepanu pöörata kõigile erijuhtudele, mitte piirduda vaid üldjuhuga. Näiteks korrutamistehte juures vaadelda järgmisi juhte:
  - harilik murd x harilik murd
  - naturaalarv x harilik murd
  - harilik murd x naturaalarv
  - segaarv x harilik murd
  - harilik murd x segaarv
  - segaarv x naturaalarv
  - naturaalarv x segaarv
  - segaarv x segaarv
- Kui on käsitletud kõiki 4 tehet, siis on jälle vaja piisavalt aega varuda selleks, et teha kõiki nelja tehet läbisegi. Nüüd tuleb selgelt kõrvutada erinevate tehete algoritme: mille poolest näiteks liitmis- ja korrutamistehte algoritmid **sarnanevad** ja mis on nendes **erinevat.**

Tehted harilike murdudega

- Loomulikult vajalikud ka ülesandeid, kus on tehetes nii harilikud kui ka kümnendmurrud. Kui õpitakse korrutamis- ja jagamistehte rakendusi igapäevaelu ülesannete lahendamisel, siis on kindlasti kasulik esitada otsitavat suurust kümnendmurruna ja samal ajal ka hariliku murruna (ka protsentides). Näiteks ülesanne *Klassis on 24 õpilast. Neist 8 on pikkade juustega, 6 poolpikkade juustega ja ülejäänutel on poisipea. Mitmendik õpilastest on pikkade juustega, poolpikkade juustega ja poisipeaga?*

soengu liik	hariliku murruna	kümnendmurruna	protsentides
pikad juuksed	1/3	0,333...	
poolpikad juuksed			
poisipea			

Tüüpilised vead

- Mis toimus?

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

$$n+\frac{a}{b}=\frac{n+a}{b}$$

$$n+\frac{a}{b}=\frac{nb+a}{b}$$

$$\frac{b}{c}+n=\frac{b+n}{c}$$

$$n\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{n\cdot b}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}=\frac{a\cdot c}{b}$$

$$5\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=5\frac{3}{8},\quad 2\frac{1}{2}\cdot 4\frac{3}{5}=8\frac{3}{10}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{b}=\frac{a:c}{b}$$

Vigu taandamisel, laiendamisel?
Vigu vaata ka *Väike metoodika raamat ….* 5. ptk

Küsimused ja ülesanded

- Koostage loend ülesannete erijuhtudest segaarvude lahutamise jaoks.
- Kuidas teha järgmisi tehteid teisendamata segaarve liigmurdudeks ?

$$6-2\frac{3}{4};\quad 4\frac{4}{5}-2\frac{3}{4};\quad 2\frac{2}{3}-3\frac{1}{4}$$

- Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks (millised kümnendmurrud tekivad ja milliste harilike murdude korral, kümnendkohtade arvu määramine arvutustes)
- Mõelge näide joonisest kõigi 4 tehte jaoks harilike murdudega.