

6. Võrrandite ja võrrandisüsteemide käsitlemine

Koostanud Hannes Jukk

6. 1. Võrrandi mõiste

Võrrandi lahendamise puutuvad õpilased kaudselt kokku juba I klassist alates. Alklassides leidub hulgaliselt ülesandeid, kus tuleb leida tehte tundmatu liige:

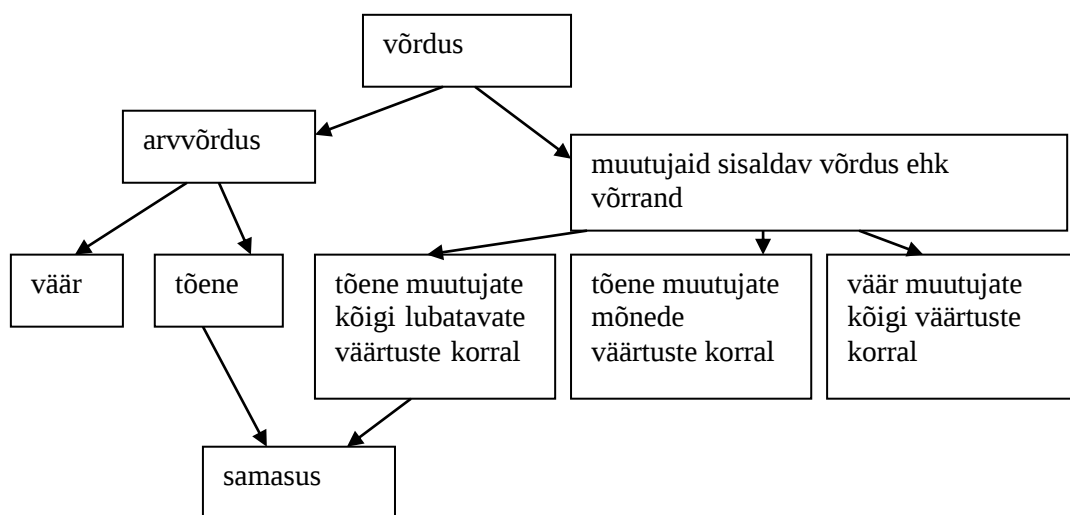
$$3 + \square = 10$$

Termin *võrrand* võetakse kasutusele V klassis, seal antakse ka võrrandi definitsioon: *võrrandiks nimetatakse tundmatut sisaldavat võrdust*.

Hiljem (VII või X klassis) võib antud definitsiooni täiendada järgmiselt: *võrrandiks nimetatakse muutujaid sisaldavat võrdust, milles üks või mitu muutujat loetakse tundmatuks ehk otsitavaks*. Ülejäänud muutujaid vaadeldakse kui parameetreid.

Mõnedes käsitlustes ei loeta samasusi võrranditeks ja esitatakse järgmine definitsioon: *muutujaid sisaldavat võrdust, mis ei ole samasus, nimetatakse võrrandiks* või *võrrandiks nimetatakse võrdust, mis sisaldab vähemalt ühte tundmatut ja kehtib vaid tundmatu teatavate väärtuste korral (KME)*. Samasus on võrdus, mis kehtib temas esinevate muutujate kõikvõimalike väärtuste korral.

Meie kooliõpikutes loetakse ka samasused võrrandite hulka:



Sellise käsitluse korral saab iga võrdust, mis sisaldab muutujaid, käsitleda kui võrrandit ja teha sellega võrrandile lubatavaid teisendusi. Nii on võrrandid ka näiteks $0 \cdot x = 0$ ja $x^2 = 1 + (x - 1)(x + 1)$.

Mõnikord esitatakse võrrand ka funktsioone määravate avaldiste kaudu, näiteks ühe tundmatuga võrrand kujul $f(x) = g(x)$.

6. 2. Asend ainekavas

Nagu öeldud, on kokkupuuteid võrrandiga juba algklassides, kuid lähemalt jõutakse võrranditeni V klassis ja nendega tegeldakse gümnaasiumi lõpuni:

V kl – võrrandi mõiste, lihtsamad (lineaar)võrrandid

VII kl – lineaarvõrrand, võrrandi samasusteisendused

VIII kl – lineaarvõrrandisüsteem, ruutvõrrand, ruutvõrrandisüsteem

IX kl – murdvõrrand

X kl - juurvõrrand, absoluutväärtust sisaldav võrrand, erinevad võrrandisüsteemid

XI kl – eksponentvõrrand, logaritmivõrrand, trigonomeetrilised võrrandid

6. 3. Võrrandite samaväärsus

Kui V klassis võrrandi mõistet tutvustatakse, lahendatakse lihtsamaid lineaarvõrrandeid tehte komponentide vahelistele seostele tuginedes. Näiteks võrrandi $2x + 6 = 12$ korral arutletakse nii: tundmatu on ühes liidetavas, selle leidmiseks lahutame summast teise liidetava: $2x = 12 - 6$. Nii jõuame uue võrrandini $2x = 6$, kus tundmatu on üks tegur, selle leidmiseks jagame korrutise teise teguriga. Keerukamate võrrandite korral on selline lähenemine raskendatud.

Võrrandit lahendades teeme me teatud teisendusi. Nende tulemusena jõuame lihtsama võrrandini, millest saame leida lahendid, mis rahuldavad esialgset võrrandit.

Olgu antud võrrandid $f(x) = g(x)$ (1) ja $f_1(x) = g_1(x)$ (2).

Võrrandit $f_1(x) = g_1(x)$ nimetatakse võrrandi $f(x) = g(x)$ **järelduseks**, kui võrrandi $f(x) = g(x)$ iga lahend on ka võrrandi $f_1(x) = g_1(x)$ lahendiks. Viimasel võrrandil (2) võib olla lisaks ka selliseid lahendeid, mis ei ole võrrandi (1) lahenditeks.

Seda, et üks võrrand on teise järeldus, märgitakse sümboliga $\Rightarrow$, $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$

Näiteks võrrandi $2x - 1 = 0$ järelduseks on võrrand $2x = 1$, aga ka võrrand $(2x + 1)(2x - 1) = 0$.

Kahte samu tundmatuid sisaldavat võrrandit nimetatakse **samaväärseteks ehk ekvivalentseteks**, kui nad on teineteise järeldused: kui

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x) \text{ ja } f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \text{ ehk}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Samaväärsetel võrranditel on samad lahendid. Kahte samu tundmatuid sisaldavat võrrandit nimetatakse samaväärseteks ka juhul, kui neil mõlemal lahendid puuduvad.

Millised on need teisendused, mille tulemusena saame esialgse võrrandiga samaväärse võrrandi?

VII klassis tutvustatakse neid kui võrrandi **põhiomadusi** (vt Tõnso VII klassi õpikust näitlikku põhjendust):

- võrrandi pooli võib vahetada
- võrrandi mõlemaid pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga
- liidetavaid võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele poolele, muutes nende liidetavate märgid vastupidiseks (võrrandi mõlemale poolele võib liita või lahutada ühe ja sama arvu või avaldise, mis on määratud võrrandi määramispiirkonna igas punktis)

Paneme tähele, et samaväärseks jääb võrrand esialgsega pärast poolte korrutamist-jagamist nullist erineva arvuga. Korrutamisel-jagamisel tundmatuid sisaldavate avaldistega see nii olla ei pruugi.

Näiteks korrutades võrrandi $x+1=2$ pooli avaldisega x^2+5 saame esialgse võrrandiga samaväärse võrrandi, kuid korrutades pooli avaldisega $x+5$ saame esialgse võrrandi järelduse.

Võrrand võib olla samaväärne ka mitme võrrandiga. Järgnevas mõned näited samaväärsetest võrranditest

$$1) f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \vee g(x)=0 \text{ (PK)}$$

$$2) \frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \wedge g(x) \neq 0 \text{ (G)}$$

$$3) [f(x)]^n=0 \Leftrightarrow f(x)=0, \quad n \in N^+ \text{ (G)}$$

$$4) [f(x)]^n=[g(x)]^n \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), & \text{kui } n=2k+1 \\ |f(x)|=|g(x)|, & \text{kui } n=2k \end{cases} \text{ (G)}$$

Võrrandit lahendades püütakse võrrandit teisendada nii, et uus võrrand oleks eelneva võrrandiga samaväärne ja seejuures võimalikult lihtne. Kui see ei ole võimalik, asendatakse võrrand tema järeldusega. Sel juhul võib tekkida võõrlahendeid.

6.4. Teisendused, mis ei säilita võrrandite samaväärsust

6.4.1. ¹Teisendused, mille tulemusena võib tekkida vöörlahendeid

Sellised teisendused, mille tulemusena saadaval võrrandil võib olla ka lahendeid, mis ei ole esialgse võrrandi lahenditeks, on järgmised:

- 1) võrrandi **poolte korrutamine** ühe ja sama tundmatuid sisaldava täisavaldisega

Näiteks võrrandit $\frac{x(x-1)}{x^2-1} = 2$ lahendades korrutame võrrandi pooli

avaldisega $x^2 - 1$, saame võrrandi $x(x^2 - 1)(x - 1) = 2(x^2 - 1)$. Viimase võrrandi üks lahend $x = 1$ ei ole esialgse võrrandi lahendiks.

- 2) võrrandi **poolte astendamine** ühe ja sama positiivse paarisarvulise astendajaga, kui võrrandi pooled on erimärgilised.

Näiteks tõstes võrrandi $\sqrt{x} = -x$ pooled ruutu saame võrrandi $x = x^2$, mille üks lahend $x = 1$ ei ole esialgse võrrandi lahendiks.

- 3) nn **tinglike samasuste kasutamine**, kus võrrandi määramispiirkond (võrrandis esinevate avaldiste määramispiirkondade ühisosa) laieneb. Tinglikuks samasuseks nimetatakse võrdust, mille kummagi poole määramispiirkonnad on erinevad ning mis on tõene nende määramispiirkondade ühisosa igas punktis. Seevastu absoluutne samasus on võrdus, mille mõlema poole määramispiirkonnad ühtivad ning mis on tõene selle määramispiirkonna igas punktis.

Absoluutsed samasused on näiteks $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,

$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, kuid tinglikud samasused näiteks $\sin x = \cos x \tan x$

või $\log x^2 = 2 \log x$. Kui näiteks võrrandi $\cos x \tan x = 0$ asemel lahendame võrrandi $\sin x = 0$, tekib vöörlahendeid.

Lahendame näiteks võrrandi

$$2 \log x = 3 \Rightarrow \log x^2 = 3 \Rightarrow 10^3 = x^2 \Rightarrow x = \pm 10^{\frac{3}{2}}.$$

Selliselt lahendades võrrandi määramispiirkond laienes ja juurde tuli ka vöörlahend. Kuid järgmisel viisil lahendades seda ei juhtu:

$$2 \log x = 3 \Rightarrow \log x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000}.$$

Kui kasutame vaadeldud teisendusi, on alati vöörlahendite tekke võimalus. Kuidas vöörlahendeid eraldada? Selleks on kaks võimalust:

- 1) lahendite kontroll

¹ See teema on vajalik gümnaasiumis

Asendades kõik leitud lahendid esialgsesse võrrandisse näeme, missugused neist ei rahulda seda võrrandit ja need jätame lahendite hulgast välja.

Lahendit kontrollima õpetatakse õpilast juba esimestest (lineaar)võrranditest alates. Kuid sellel kontrollil on teine funktsioon: oma tegevuse õigsuse kontrolli funktsioon, võib-olla ka mõiste *võrrandi lahend* kinnistamise funktsioon. Kui aga jõutakse võrranditeni, kus lahendamisel tekib võõrlahendeid, lisandub kontrolli uus funktsioon – võõrlahendite väljaeraldamise funktsioon. Neid lahendite kontrolli kahte funktsiooni tuleb tutvustada ka õpilastele ja selgitada, millal on lahendi kontroll ülesande kohustuslik koostisosa. Ka kontrolltöodes (eksamitöodes, tasemetöodes) tuleb arvestada, et näiteks lineaarvõrrandi korral ei ole kirjalik lahendi kontroll kohustuslik, kui seda otse ülesande tekstis ei nõuta.

2) *võrrandi määramispiirkonna leidmine (gümnaasiumis vajalik)

Sellega saab välja eraldada osa võõrlahendeid, kuid alati mitte kõiki.

Näiteks murdvõrrandit $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$ lahendades saame selliselt

võõrlahendi $x = 2$ eraldada ja kuna uuel võrrandil rohkem lahendeid pole, võimegi öelda, et esialgsel võrrandil lahendid puuduvad.

Kuid võrrandit $\sqrt{x} = x - 2$ lahendades saame pärast võrrandi poolte ruututõstmist lahendid $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Need lahendid kuuluvad mõlemad võrrandi määramispiirkonda $x \geq 0$, kuid ometi osutub arv 1 võõrlahendiks. Siin saaks võtta juurde veel ühe lisatingimuse ja leida võrrandi võimalike lahendite piirkonna: kuna vasakul on ruutjuur, mille väärtus saab olla mittenegatiivne, peab ka võrrandi parem pool olema mittenegatiivne ehk peab olema $x - 2 \geq 0$. Nüüd võime kirjutada:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x = (x - 2)^2 \end{cases} \quad \text{ja viimase süsteemi lahend } x = 4 \text{ rahuldab}$$

esialgset võrrandit.

Meie matemaatikaõpikutes on võõrlahendite väljaeraldamiseks valitud esimene tee – lahendite kontroll. Paljude murdvõrrandite korral saab kõik võõrlahendid välja eraldada võrrandi määramispiirkonda arvestades. Kuid enamikel juhtudel osutub võrrandi määramispiirkonna (ja võimalike lahendite piirkonna) leidmine keerukaks, näiteks juba kahe ruutjuure summat või vahet sisaldava võrrandi korral.

6.4.2. ²Teisendused, mille tulemusena võib tekkida lahendite kadu

Need teisendused on järgmised:

- 1) selliste tinglike samasuste kasutamine, mille tulemusena võrrandi määramispiirkond kitseneb

Näiteks juhtub see siis, kui võrrandi $\log x^2 = 3$ asemel lahendame võrrandi $2\log x = 3$. Selliselt toimides läheb kaotsi esialgse võrrandi lahend $x = -\sqrt{1000}$.

Vaatleme võrrandit $(x+1)^{x-4} = 1$. Selle võrrandi määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk. Logaritmides võrrandi pooli alusel 10 saame võrrandi $(x-4) \cdot \log(x+1) = 0$, mille määramispiirkonnaks on $x > -1$.

Viimase võrrandi lahenditeks on arvud 0 ja 4.

Uurides esialgses võrrandis $(x+1)^{x-4} = 1$ seda, millal saab astendamise tulemus olla 1, saame järgmised tingimused:

- 1) astme alus $x+1$ on 1, siis $x = 0$
- 2) astendaja $x-4 = 0$, siis $x = 4$
- 3) astme alus $x+1 = -1$, kust $x = -2$, astendaja $x-4$ tuleb sel juhul paarisarv ning ka $x = -2$ rahuldab esialgset võrrandit.

Järelikult on võrrandil $(x+1)^{x-4} = 1$ ka kolmas lahend, arv -2.

- 2) võrrandi poolte jagamine tundmatut sisaldava avaldisega

Vaatleme võrrandit $x(x-1) = x^2 - 1$. Jagades selle pooli avaldisega $x-1$ saame võrrandi $x = x+1$, millel lahend puudub. Selliselt lahendades läks lahend $x = 1$ kaotsi.

Ka näiteks võrrandit $x^2 = x$ lahendades tekib kiusatus jagada võrrandi pooli tundmatuga x , kuid siis kaotame võrrandi lahendi $x = 0$.

Põhimõtteliselt ei ole võrrandi poolte jagamine tundmatut sisaldava avaldisega keelatud, kui teeme eelduse, et selle avaldise väärtus ei ole 0. Seejärel peaksime täiendavalt kontrollima, kas selle avaldise nullkoht on esialgse võrrandi lahendiks. Kui on, lisame selle arvu võrrandi lahendite hulka. Kuid meetodilises plaanis ei soovitata võrrandi lahendamisel poolte jagamist tundmatut sisaldava avaldisega. Selle asemel soovitatakse tuua liikmed ühele poole ja tegurdada.

² See on teema, mis on vajalik gümnaasiumis

6.5. Võrrandite lahendamise üldised võtted

Mõnedel võrranditel on olemas spetsiaalsed lahendivalemid, nagu näiteks ruutvõrranditel.

Võrrandite lahendamist õppides tuleb alati tähelepanu pöörata ka nn erijuhtudele. Näiteks võivad õpilased küll hästi osata lahendada täielikku ruutvõrrandit, kui eksida võrrandi $x^2 = 4$ lahendamisel.

Lahenduskäiku vormistades tuleb silmas pidada, et

- igas võrrandis on üks võrdusmärk
- ülesande vastus tuleb korralikult välja kirjutada, eriti siis, kui lahenduse käigus tekib vöörlahendeid
- soovitatav on võrrandi järele kirjutada lühidalt ka tehtav teisendus, näiteks $2x - 6 = 12 \mid :2$.

Laiemas plaanis saab võrrandi lahendamisel kasutatavad teisendused jaotada järgnevalt (*edasi on pigem gümnaasiumile vajalik selgitus*):

- 1) teisendatakse vaid võrrandi ühte poolt, näiteks

$$\cos x \tan x = 1 \Rightarrow \sin x = 1$$

$$2x + 6 - 3(3x + 4) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$$

- 2) teisendatakse võrrandi mõlemaid pooli, siia kuuluvad ka eespool vaadeldud võrrandi samasusteisendused, ka näiteks teisendus

$$\log(x - 5) = \log 3 \Rightarrow x - 5 = 3$$

- 3) muudetakse võrrandi loogilist struktuuri, kasutades eeskätt konjunktsiooni või disjunktsiooni, näiteks

$$f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \wedge g(x) \neq 0$$

$$2x + 3|x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 3x = 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Sellesse rubriiki kuuluvad ka muutuja vahetus, võrrandite liitmine võrrandisüsteemi lahendades jne.

6.6. Tekstülesande lahendamine võrrandi abil

Tekstülesanded kuuluvad tavaliselt mittestandardsete ülesannete hulka ja nende lahendamine peaks toimuma Polya üldskeemi kohaselt:

- 1) te peate ülesandest aru saama (mis antud, mida otsitakse)
- 2) koosta lahendusplaan
- 3) täida lahendusplaan
- 4) uuri saadud lahendit.

Teisel lahendusetapil tuleb eraldada osa tingimustest, mis võimaldavad üht ja sama suurust leida kahel erineval viisil. Selliselt tekibki võrrand. Esimesed ülesanded, kus tavakeeles antud tekst tuleb esitada sümbolites (muutujaid kasutades võrrandina), tuleks eriti hoolikalt läbi analüüsida. On kasulik iga lauseosa juurde kirjutada vastav avaldis.

Näiteks

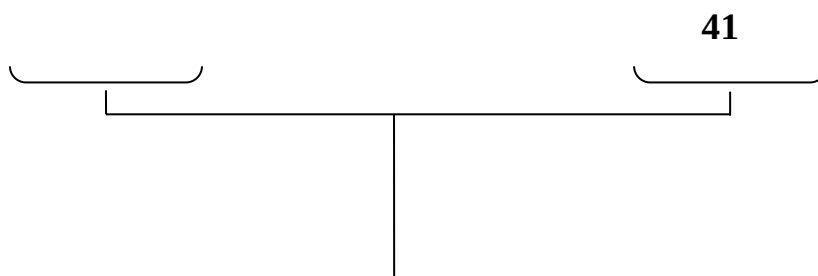
Kui üht arvu	x
korrutada 3-ga	$3x$
ja sellest lahutada 8, saame	$3x - 8$
sama arvu, mille saaksime esialgse arvu korrutamisel 5-ga	$5x = 3x - 8$

Esimesteks võrrandi abil lahendatavateks tekstülesanneteks soovitataksegi võtta lihtsad ülesanded, milles tuleb teatud arvudega sooritada tehteid.

Vaja on ülesandes antud situatsiooni näitlikult esitada, et paremini mõista ülesandes antud seoseid suuruste vahel. Võib kasutada ka joonist kangkaaludega (näide A. Unduski VII klassi töövihikust):

Anne mõtles ühe arvu, korrutas seda 5-ga, lahutas korrutisest 14 ja sai 41. Mis arvu Anne mõtles?

Mõtles arvu	korrutas 5-ga	lahutas 14	sai 41
x			



Hiljem on soovitatav andmete süstematiseerimiseks kasutada tabelit. Näiteks ülesande (näide käesoleval ajal X klassi matemaatikast)

Tööline pidi teatud tähtajaks valmistama 240 detaili. Ta täiustas tööpinki ja nii sai ta igas tunnis teha 2 detaili rohkem kui oli algul kavandanud. Seetõttu sai töö valmis 4 päeva enne tähtaega. Mitu detaili oli töölisel algul plaanis teha?

jaoks võib teha järgmise tabeli:

	plaani järgi	tegelikult
detailide arv päevas	x	2 tükki rohkem: $x+2$
päevade arv	?	4 päeva vähem
kõigi detailide arv	240	240

Kui teame detailide koguarvu ja tootmiseks kulunud päevade arvu, saame igas päevas tehtud detailide arvud leida: plaani järgi $\frac{240}{x}$ detaili päevas ja

tegelikult $\frac{240}{x+2}$ detaili päevas. Täidame tabelit edasi:

	plaani järgi	tegelikult
detailide arv päevas	x	2 tükki rohkem: $x+2$
päevade arv	$\frac{240}{x}$	4 päeva vähem, $\frac{240}{x+2}$
kõigi detailide arv	240	240

Enne võrrandi väljakirjutamist tuleks kindlasti selgeks teha, kumb päevade arv on suurem, kas plaanikohane või tegelik päevade arv. Seda võib ka võrratusena esitada: $\frac{240}{x} > \frac{240}{x+2}$.

Nüüd arutame, kuidas saaks need suurused võrdusena esitada. Selleks on 3 võimalust: lahutame suuremast 4, saame väiksema; liidame väiksemale 4, saame suurema või lahutame suuremast väiksema, saame 4. Näiteks esimesel juhul saaksime võrrandi $\frac{240}{x} - 4 = \frac{240}{x+2}$.

Õpilastele tuleb rõhutada, et tekstülesande korral tuleb alati teha lahendi kontroll ja seda teksti, mitte koostatud võrrandi järgi.

Küsimused ja ülesanded

1. Kirjutage võrrandi samasusteisendused üles üldkujul.
2. Millal saame võrrandi poolte korrutamisel (jagamisel) tundmatut sisaldava avaldisega esialgse võrrandiga samaväärse võrrandi?
3. Võtke üks 5. klassi tekstülesanne, mida saab lahendada aritmeetiliselt ja ka võrrandi abil. Lahendage mõlemal moel. Õpetaja peab olema tähelepanelik, milliseid lahendusviise õpilane selleks hetkeks on näinud.