

MTMM.00.202 Optimiseerimismeetodid

Evely Kirsiaed

`evely.kirsiaed@ut.ee`

sügis 2020

1 Sissejuhatus

- ## 2 Ühe muutuja funktsioonide ekstreemumülesannete lahendamine
- Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul
 - Lõigu poolitamise meetod
 - Kuldlõike meetod

Sissejuhatus

Näiteid praktilistest optimeerimisülesannetest:

- mingi materjali teatud kujuga tükkideks lõikamine nii, et materjali kadu oleks minimaalne;
- piiratud tooraine kogusest erinevate toodete valmistamine nii, et kasum oleks maksimaalne;
- toodete transportimine tootmishoone(te)st ladudesse ja/või lõpptarbijani nii, et transpordikulud oleks minimaalsed;
- lennuki meeskondade komplekteerimine eeldusel, et vahetus algab ja lõpeb samas punktis nii, et kulud oleks minimaalsed.

Sissejuhatus

Optimiseerimine tegeleb järgmiste ülesannetega:

Antud $X \neq \emptyset$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Leida $x_* \in X$ nii, et $f(x_*) = \inf_{x \in X} f(x)$.

(2) Leida $\inf_{x \in X} f(x)$.

(1a) Leida $x_* \in X$ nii, et $f(x_*) = \sup_{x \in X} f(x)$. $\left(= - \inf_{x \in X} (-f(x)) \right)$

Märkused:

- alati eksisteerib $\inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X)$, $f(X) \subset \mathbb{R}$
- võib juhtuda, et $\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$
- $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$ (Ül 1)
- $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset \Rightarrow \inf A \leq \sup A$

Sissejuhatus

Põhilised probleemid:

ülesande (1) lahendi olemasolu, ühesus ja **lahendi leidmine**.

Kui lahend on olemas, saab kirjutada $f(x_*) = \min_{x \in X} f(x)$ (minimiseerimine)
või $f(x_*) = \max_{x \in X} f(x)$ (maksimiseerimine).

Sissejuhatus

Ülesannete klassifikatsioon hulga X järgi:

- ① X on (lõplikumõõtmeline) vektorruum – kitsendusteta ülesanne;
- ② X on osahulk mingis vektorruumis, ise ei ole vektorruum (st ei ole alamruum) – kitsendustega ülesanne, X on lubatav hulk

Klassifikatsioon funktsiooni f järgi (eeldame, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$):

- ① f lineaarne (siis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) ja Ω määratud lõpliku arvu lineaarsete kitsendustega – lineaarse planeerimise ülesanne
- ② mittelineaarne planeerimine
 - f ruutfunktsioon, Ω määratud lõpliku arvu lineaarsete kitsendustega – ruutplaneerimine
 - f kumer funktsioon, Ω kumer hulk – kumer planeerimine
- ③ f on sile (vähemalt diferentseeruv) või ei ole diferentseeruv

Sissejuhatus

Olgu $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Kui on vaja leida $x_* \in \Omega$ nii, et $f(x_*) = \min_{x \in \Omega} f(x)$, siis $f(x) \geq f(x_*)$ iga $x \in \Omega$ korral, st x_* on **globaalne miinimumpunkt**. Analoogiliselt ülesande $f(x_*) = \max_{x \in \Omega} f(x)$ lahend on **globaalne maksimumpunkt**.

Punkti x_* nimetatakse **lokaalseks miinimumpunktiks**, kui eksisteerib $\delta > 0$ nii, et $f(x) \geq f(x_*)$ iga $x \in \Omega \cap \left\{ x : \|x - x_*\| \leq \delta \right\}$ korral. Analoogiliselt defineeritakse lokaalne maksimumpunkt.

Sissejuhatus

Definitsioon

Jada $x_k \in \Omega$ nimetatakse funktsiooni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **minimiseerivaks jadaks**, kui $f(x_k) \rightarrow \inf_{x \in \Omega} f(x)$. Jada $x_k \in \Omega$ nimetatakse funktsiooni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **maksimiseerivaks jadaks**, kui $f(x_k) \rightarrow \sup_{x \in \Omega} f(x)$.

Infiimumi (supreemumi) definitsiooni kohaselt on minimiseeriv (maksimiseeriv) jada alati olemas (eeldusel $\Omega \neq \emptyset$).

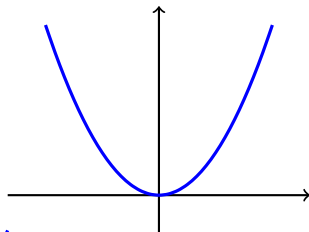
Funktsioon f on **ülalt tõkestatud** hulgas Ω , kui eksisteerib $M \in \mathbb{R}$ nii, et $f(x) \leq M$ iga $x \in \Omega$ korral. Analoogiliselt defineeritakse alt tõkestatus.

Ülesande $\min_{x \in \Omega} f(x)$ või $\max_{x \in \Omega} f(x)$ **lahendite hulka** tähistame Ω_* . Võib juhtuda, et $\Omega_* = \emptyset$.

Näited

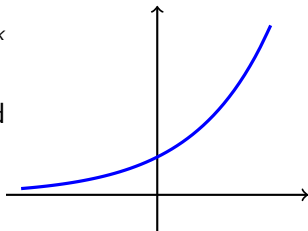
① $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

f on alt tõkestatud, ei ole ülalt tõkestatud
minimiseerimisülesandes $\Omega_* = \{0\}$
maksimiseerimisülesandes $\Omega_* = \emptyset$



② $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

f on alt tõkestatud,
ei ole ülalt tõkestatud
 $\Omega_* = \emptyset$



Näited

$$\textcircled{3} \quad f(x) = |x| + |x - 1| - 1 = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

minimiseerimisülesandes

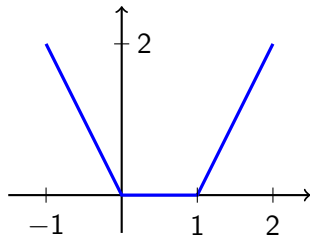
$\Omega = \mathbb{R}$ korral $\Omega_* = [0, 1]$

$\Omega = [1, 2]$ korral $\Omega_* = \{1\}$

maksimiseerimisülesandes

$\Omega = [0, 2]$ korral $\Omega_* = \{2\}$

$\Omega = [0, 2)$ korral $\Omega_* = \emptyset$



Näited

$$④ \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

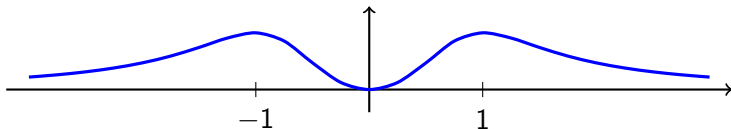
$$f'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

minimiseerimisülesandes

$\Omega = \mathbb{R}$ korral $\Omega_* = \{0\}$

$x_k = k$ on minimiseeriv jada (ei koonu)

$x_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ on samuti minimiseeriv jada (koondub miinimumülesande lahendiks)



Weierstrassi teoreem

Teoreem (Weierstrassi teoreem)

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kinnine tõkestatud hulk ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pidev. Siis f on alt ja ülalt tõkestatud, miinimum- ja maksimumülesandel on olemas lahend ($\Omega_ \neq \emptyset$), iga minimiseeriva või maksimiseeriva jada x_k korral $\rho(x_k, \Omega_*) \rightarrow 0$.*

Weierstrassi teoreem

Teoreem (Weierstrassi teoreem)

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kinnine tõkestatud hulk ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pidev. Siis f on alt ja ülalt tõkestatud, miinimum- ja maksimumülesandel on olemas lahend ($\Omega_ \neq \emptyset$), iga minimiseeriva või maksimiseeriva jada x_k korral $\rho(x_k, \Omega_*) \rightarrow 0$.*

Tõestus. Elemendi kaugus hulgast defineeritakse $\rho(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \rho(x, y)$.

Kinnine tõkestatud hulk ruumis $\mathbb{R}^n$ on kompaktne (Bolzano-Weierstrassi teoreem). Meetrilises ruumis on kompaktsus samaväärne sellega, et igast jadast saab eraldada koonduva osajada.

a) *Tõkestatus.* Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole alt tõkestatud, siis leidub jada $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, nii, et $f(x_k) \rightarrow -\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Hulga Ω kompaktsuse tõttu leidub koonduv osajada x_k , $k \in N' \subset \mathbb{N}$, $x_k \rightarrow x_0 \in \Omega$, $k \in N'$. Funktsiooni f pidevuse tõttu $f(x_k) \rightarrow f(x_0) \in \mathbb{R}$. Vastuolu eeldusega. Ülalt tõkestatus tõestatakse analoogiliselt.

Weierstrassi teoreem

b) *Lahendi olemasolu*. Olgu miinimumülesandes $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, minimiseeriv jada. Eraldame sellest koonduva osajada $x_k \rightarrow x_0 \in \Omega$, $k \in N' \subset \mathbb{N}$. Siis f pidevuse tõttu $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$, $k \in N'$. Samal ajal minimiseeriva jada mõiste kohaselt $f(x_k) \rightarrow \inf_{x \in \Omega} f(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Seega $f(x_0) = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ ja $x_0 \in \Omega_*$, mistõttu $\Omega_* \neq \emptyset$.

c) Olgu miinimumülesandes $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, minimiseeriv jada. Teame, et $\Omega_* \neq \emptyset$. Oletame, et $\rho(x_k, \Omega_*) \not\rightarrow 0$, $k \in \mathbb{N}$. Siis leidub osajada x_k , $k \in N' \subset \mathbb{N}$, ja $\delta > 0$ nii, et $\rho(x_k, \Omega_*) \geq \delta$, $k \in N'$. Eraldame jadast x_k , $k \in N'$, osajada x_k , $k \in N'' \subset N'$, nii, et $x_k \rightarrow x_0 \in \Omega$, $k \in N''$. Minimiseeriva jada koonduva osajada piirväärtus on miinimumülesande lahend, $x_0 \in \Omega_*$. Nüüd $k \in N''$ korral

$$0 < \delta \leq \rho(x_k, \Omega_*) = \inf_{y \in \Omega_*} \rho(x_k, y) \leq \rho(x_k, x_0) \rightarrow 0,$$

mis on vastuolu. □

Kas minimiseeriv jada koondub miinimumülesande lahendiks? (Ül 2)

Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul

Ülesanne 4. Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defineeritud võrdusega

$$f(x) = \max_{0 \leq t \leq 1} |t^2 - xt|.$$

Leida ülesande

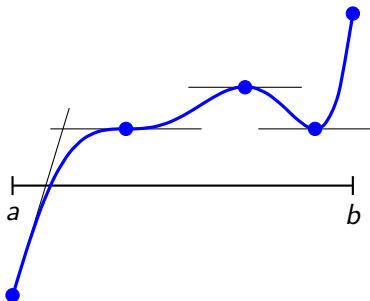
$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$

lahend, kui $\Omega = \mathbb{R}$ ja $\Omega = [1, \infty)$.

Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul

Kui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv, siis funktsioonil $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ saab olla lokaalne ekstreemum punktides x , kus $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$, või punktides a ja b .

Kui $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) iga $x \in (a, a + \delta)$, $\delta > 0$, korral, siis punktis a on lokaalne miinimum (maksimum). Analoogilised väited kehtivad teises lõigu otspunktis (Ül 5).



Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul

Olgu $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ küllaldane arv kordi diferentseeruv. Olgu $x_0 \in (a, b)$ korral $f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- Kui n paaris, siis punktis x_0 on lokaalne ekstreemum,
 $f^{(n)}(x_0) > 0$ korral lokaalne miinimum,
 $f^{(n)}(x_0) < 0$ korral lokaalne maksimum.

Mõlemal juhul on tegemist **isoleeritud ekstreemumiga**, st punktil x_0 leidub ümbrus, kus ei ole teisi ekstreemumpunkte.

- Kui n paaritu, siis punktis x_0 ei ole lokaalset ekstreemumit.

Näide.

$$f(x) = x^2, f'(0) = 0, f''(0) = 2 > 0 \rightarrow \text{lok min}$$

$$f(x) = x^3, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 6 \rightarrow \text{ei ole lok ekstr}$$

Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul

Tõestus. Kasutame Taylori valemit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x_0; x) \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x_0; x), \quad \frac{\alpha(x_0; x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \end{aligned}$$

Seega

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{\alpha(x_0; x)}{(x - x_0)^n} \right) (x - x_0)^n.$$

Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul

Valime $\delta > 0$ sellise, et iga $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, korral oleks avaldised $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{\alpha(x_0; x)}{(x - x_0)^n}$ ja $f^{(n)}(x_0)$ samamärgilised.

Olgu n paaris, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, siis sõltuvalt $f^{(n)}(x_0)$ märgist

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{\alpha(x_0; x)}{(x - x_0)^n} \right)}_{>0} \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0} \Rightarrow f(x) > f(x_0),$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{\alpha(x_0; x)}{(x - x_0)^n} \right)}_{<0} \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0} \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Paaritu n korral muudab $(x - x_0)^n$ märki vastavalt sellele, kas $x > x_0$ või $x < x_0$ ning x_0 ei ole lokaalne ekstreemum. □

Diferentseeruvuse kasutamine ühe muutuja juhul

Selleks, et lõigu sisepunktis x diferentseerual funktsioonil oleks seal ekstreemum, on tarvilik, et $f'(x) = 0$. Seda võrrandit saab ligikaudselt (aga kuitahes täpselt) lahendada nt hariliku iteratsioonimeetodi, Newtoni, lõikajate vmt meetodiga.

Järgnevalt vaatleme meetodeid, mis ei kasuta diferentsiaalarvutuse vahendeid ja on seega rakendatavad ka mittediferentseeruvate funktsioonide minimiseerimiseks.

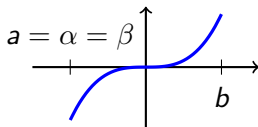
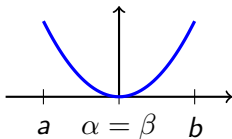
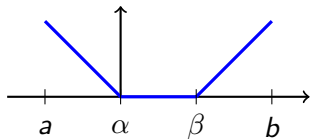
Lõigu poolitamise meetod

Definitsioon

Funktsiooni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **unimodaalseks**, kui eksisteerivad α ja β nii, et $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ ja

- f on rangelt kahanev lõigus $[a, \alpha]$, kui $a < \alpha$;
- f on rangelt kasvav lõigus $[\beta, b]$, kui $\beta < b$;
- $f(z) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ iga $z \in [\alpha, \beta]$ korral ehk minimiseerimisülesandes $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ on $\Omega_* = [\alpha, \beta]$.

Mõned lõigud võivad olla ühepunktilised; lõigus unimodaalne funktsioon on unimodaalne igas osalõigus.



Lõigu poolitamise meetod

Lahendame ülesannet

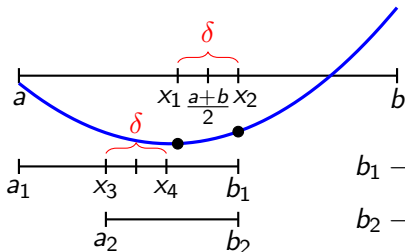
$$\min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (1)$$

Eeldame, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on unimodaalne. Valime δ , $0 < \delta < b - a$.

Arvutame

$$x_1 = \frac{a + b - \delta}{2}, x_2 = \frac{a + b + \delta}{2}, f(x_1) \text{ ja } f(x_2).$$

Kui $f(x_1) \leq f(x_2)$, siis võtame $a_1 = a$, $b_1 = x_2$; kui aga $f(x_1) > f(x_2)$, siis võtame $a_1 = x_1$, $b_1 = b$. Lõiguga $[a_1, b_1]$ toimime nagu algse lõiguga.



$$b_1 - a_1 = \frac{b-a-\delta}{2} + \delta$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1 - \delta}{2} + \delta = \frac{b-a-\delta}{4} + \delta$$

Lõigu poolitamise meetod

Üldine samm. Olgu leitud lõik $[a_k, b_k]$, kusjuures

$$b_k - a_k = \frac{b - a - \delta}{2^k} + \delta. \quad (2)$$

Võtame

$$x_{2k+1} = \frac{a_k + b_k - \delta}{2} \quad \text{ja} \quad x_{2k+2} = \frac{a_k + b_k + \delta}{2}.$$

Kui $f(x_{2k+1}) \leq f(x_{2k+2})$, siis võtame $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{2k+2}$; kui aga $f(x_{2k+1}) > f(x_{2k+2})$, siis võtame $a_{k+1} = x_{2k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.

Induktsiooni eeldust kasutades

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k - \delta}{2} + \delta = \frac{b - a - \delta}{2^{k+1}} + \delta.$$

Lõigu poolitamise meetod

f unimodaalsuse tõttu igal sammul $\Omega_* \cap [a_k, b_k] \neq \emptyset$. (?)

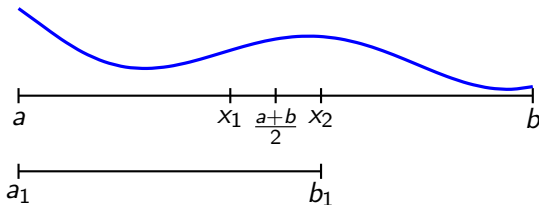
Lõigu $[a_k, b_k]$ leidmiseks ehk k iteratsioonisammu sooritamiseks on vaja arvutada $2k$ funktsiooni f väärtust.

$$(2) \Rightarrow b_k - a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \delta, \quad b_k - a_k > \delta$$

Lahendi täpsuse $\varepsilon > 0$ saavutamiseks võetakse $\delta < \varepsilon$ ja itereeritakse kuni $b_k - a_k < \varepsilon$, lähislahendiks sobib suvaline punkt lõigust $[a_k, b_k]$.

Lõigu poolitamise meetod

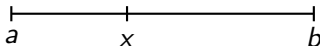
Kui funktsioon f ei ole unimodaalne, siis ei pruugi meetod anda miinimumülesande lähislahendit.



Kuldlõike meetod

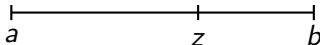
Lõigu $[a, b]$ **kuldlõikeks** nimetatakse tema sellist jaotust $[a, x]$, $[x, b]$, kus

$$\frac{b-a}{b-x} = \frac{b-x}{x-a} \quad (3)$$



või $[a, z]$, $[z, b]$, kus

$$\frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z}. \quad (4)$$



Nimetame punkti x vasakpoolseks ja punkti z parempoolseks kuldlõike punktiks.

Kuldlõike meetod

$$(4) \Leftrightarrow \frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{(b-a)-(z-a)} \Leftrightarrow \frac{b-a}{z-a} = \frac{1}{\frac{b-a}{z-a} - 1}$$

Tähistame $\varphi = \frac{b-a}{z-a}$, siis

(*)

$$(4) \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{\varphi - 1} \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Avaldame seosest (*) muutuja z :

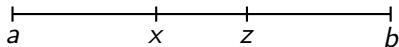
$$z = a + \frac{b-a}{\varphi} = a + \underbrace{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}_{\approx 0.618} (b-a)$$

Analoogiliselt saame $x = a + \underbrace{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{\approx 0.382} (b-a)$.

Kuldlõike meetod

$$x = a + \underbrace{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}_{\approx 0.382} (b - a)$$

$$z = a + \underbrace{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}_{\approx 0.618} (b - a)$$

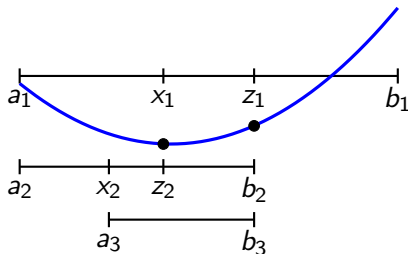


Kuldlõike meetod

Lahendame ülesannet

$$\min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (1)$$

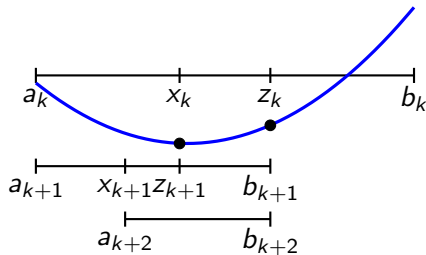
Eeldame, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on unimodaalne. Olgu $a_1 = a$, $b_1 = b$. Võtame lõigus $[a_1, b_1]$ kuldlõike punktid x_1, z_1 nii, et $a_1 < x_1 < z_1 < b_1$. Leiame $f(x_1)$ ja $f(z_1)$. Kui $f(x_1) \leq f(z_1)$, siis võtame $a_2 = a_1$, $b_2 = z_1$; kui aga $f(x_1) > f(z_1)$, siis võtame $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$. Funktsiooni f unimodaalsuse tõttu $\Omega_* \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$.



Kuldlõike meetod

Üldine samm. Olgu leitud $[a_k, b_k]$, milles võtame kuldlõike punktid x_k, z_k nii, et $a_k < x_k < z_k < b_k$. Juhul $k \geq 2$ on üks punktidest x_k, z_k eelmises lõigus $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ juba leitud (Ül 7), seega ka üks väärtustest $f(x_k), f(z_k)$ on eelmisel sammul juba leitud.

Kui $f(x_k) \leq f(z_k)$, siis valime $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, z_k]$;
kui $f(x_k) > f(z_k)$, siis valime $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$.
Funktsiooni f unimodaalsuse tõttu $\Omega_* \cap [a_{k+1}, b_{k+1}] \neq \emptyset$.

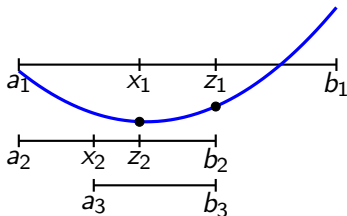


Kuldlõike meetod

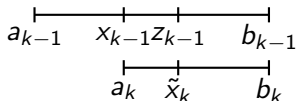
Igal iteratsioonisammul korrutub eelmise lõigu pikkus teguriga $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$b_2 - a_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$$

$$b_k - a_k = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{k-1} (b-a)$$



Kui lõik $[a_k, b_k]$ jääb viimaseks, siis on selles leitud ka üks kuldlõike punkt, mille võib võtta lähislahendiks $\tilde{x}_k$.



$$\rho(\tilde{x}_k, \Omega_*) \leq \max\{b_k - \tilde{x}_k, \tilde{x}_k - a_k\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_k - a_k) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a)$$

Kuldlõike meetod

Esimesel sammul arvutatakse kaks funktsiooni väärtust, igal järgneval sammul lisandub üks funktsiooni väärtus. Viimasel sammul enam funktsiooni väärtusi ei lisandu. Seega $\tilde{x}_k$ leidmiseks on arvutatud k funktsiooni f väärtust.

Kui lõigus $[a_k, b_k]$ on teada eelmisest lõigust üks kuldlõike punkt, siis teise leidmiseks on kaks võimalust:

1) kui x_k on teada, siis $z_k = a_k + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_k - a_k)$;

kui z_k on teada, siis $x_k = a_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_k - a_k)$;

2) sümmeetria tõttu $\frac{x_k+z_k}{2} = \frac{a_k+b_k}{2}$, millest $z_k = a_k + b_k - x_k$ ja $x_k = a_k + b_k - z_k$.

Lõigu poolitamise ja kuldlõike meetodi võrdlus

Lõigu poolitamise meetod. Valitakse δ , $0 < \delta < b - a$; k sammuga leitakse lõik $[a_k, b_k]$, selleks arvutatakse $2k$ funktsiooni väärtust, saavutatakse täpsus $b_k - a_k = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta \approx \frac{b-a}{2^k} =: LP_k$.

Kuldlõike meetod. $k - 1$ sammuga leitakse lõik $[a_k, b_k]$, selleks arvutatakse k funktsiooni väärtust, saavutatakse täpsus $\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_k - a_k) = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^k(b - a) =: KL_k$.

$$\frac{KL_{2k}}{LP_k} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2k} (b-a)}{\frac{b-a}{2^k}} = \left(\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}\right)^k \approx 0.764^k$$

Seega kuldlõike meetod on efektiivsem.