

MTMM.00.202 Optimiseerimismeetodid

Evely Kirsiaed

`evely.kirsiaed@ut.ee`

sügis 2020

6 Lineaarne planeerimine

- Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud
- Lubatava hulga omadused ja lahendi olemasolu
- Kumerad hulgad
- Graafiline lahendamine
- Lahendite paiknemine
- Võrrandisüsteemi baasilahendid
- Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel
- Üleminek ühelt baasilt teisele
- Üleminek lubatavalt baasilahendilt lubatavale baasilahendile

Vahekokkuvõte

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Tähistame vektorite $x, y \in \mathbb{R}^n$ skalaarkorrustist $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Lisaks $x, y \in \mathbb{R}^n$ korral $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n$

Lineaarse planeerimise ülesande **üldkuju**: leida $x^* \in \Omega$ nii, et

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x) \quad \left(\text{või } f(x^*) = \max_{x \in \Omega} f(x) \right)$$

kus

$$f(x) = c \cdot x, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

on lineaarne sihifunktsioon ning lubatav hulk on kujul

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq b_i, i \in I_1, \quad a^i \cdot x = b_i, i \in I_2, \quad a^i \cdot x \geq b_i, i \in I_3\},$$

siin I_1, I_2, I_3 on paarikaupa mittelõikuvad (lõplikud või tühjad) indeksite hulgad.

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Lineaarse planeerimise ülesande **kanoonline kuju**:

$$\max_{x \in \Omega} c \cdot x,$$

kus

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i, i \in I, x \geq 0\}.$$

Lubatava hulga saab esitada kujul

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i, i \in I, e^j \cdot x \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

kus $e^j = (0, \dots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \dots, 0)$.

Olgu $m = |I|$, A $m \times n$ maatriks ridadega $a^i \in \mathbb{R}^n, i \in I$, ning $b \in \mathbb{R}^m$ komponentidega $b_i, i \in I$, siis

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Lineaarse planeerimise ülesande **põhikuju**:

$$\max_{x \in \Omega} c \cdot x,$$

kus

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Lause

Igat lineaarse planeerimise ülesannet saab esitada temaga samaväärsel kanoonilisel või põhikujul.

Tõestus.

$$\min c \cdot x \Leftrightarrow \max (-c) \cdot x$$

Standardmetoodika kitsenduste teisendamisel (üldkuju $\rightarrow$ kan kuju):

1) $a^i \cdot x \leq b_i \Leftrightarrow z_i \geq 0$, kus lisamuutuja $z_i = b_i - a^i \cdot x$

$$a^i \cdot x + z_i = b_i \Leftrightarrow (a_1^i, \dots, a_n^i, 1) \cdot (x_1, \dots, x_n, z_i) = b_i$$

$a^i \cdot x \geq b_i \Leftrightarrow z_i \geq 0$, kus lisamuutuja $z_i = a^i \cdot x - b_i$

$$a^i \cdot x - z_i = b_i \Leftrightarrow (a_1^i, \dots, a_n^i, -1) \cdot (x_1, \dots, x_n, z_i) = b_i$$

$$c \cdot x = \bar{c} \cdot \bar{x}, \quad \bar{c} = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n, z_j, j \in I_1 \cup I_3)$$

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

2) kui ei ole x_j mittenegatiivsuse nõuet, siis asendusmuutuja $x'_j \geq 0$ ja lisamuutuja $x_{n+1} \geq 0$ (kõigil ühine) ning muutuja vahetus $x_j = x'_j - x_{n+1}$

$$\begin{aligned}c \cdot x &= \sum_{x_j \geq 0} c_j x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j x_j = \\&= \sum_{x_j \geq 0} c_j x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j x'_j + \left(- \sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j \right) x_{n+1} = \bar{c} \cdot \bar{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ax = b &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in I \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \sum_{x_j \geq 0} a_{ij} x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij} (x'_j - x_{n+1}) = b_i, i \in I \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \sum_{x_j \geq 0} a_{ij} x_j + \sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij} x'_j + \left(- \sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij} \right) x_{n+1} = b_i, i \in I \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \bar{A} \bar{x} = b\end{aligned}$$

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Siin $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_j, x_j \geq 0 \\ x'_j, x_j \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, vektor c muutub ühe elemendi $-\sum_{x_j \in \mathbb{R}} c_j$ võrra pikemaks, maatriksi A ridade arv ei muutu, kuid read on ühe elemendi $-\sum_{x_j \in \mathbb{R}} a_{ij}$ võrra pikemad.

3) ($\rightarrow$ põhikuju) $a^i \cdot x = b_i \Leftrightarrow a^i \cdot x \leq b_i \wedge (-a^i) \cdot x \leq -b_i$



Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Ökonoomne meetoodika kitsenduste teisendamisel:

$$a) \ x_k \geq d_k \Leftrightarrow x'_k \geq 0, x'_k = x_k - d_k$$

$$\begin{aligned} c \cdot x &= c_k x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j = c_k (x'_k + d_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j = \\ &= c_k x'_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j + c_k d_k = c \cdot \bar{x} + c_k d_k \end{aligned}$$

Vektoris $\bar{x}$ on vektoriga x võrreldes x_k asemel x'_k , sihifunktsioonidel $c \cdot x$ ja $c \cdot \bar{x}$ on samad miinimum- või maksimumpunktid.

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

$$\begin{aligned}Ax = b &\Leftrightarrow a^i \cdot x = b_i, i \in I \Leftrightarrow a_{ik}x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}x_j = b_i, i \in I \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow a_{ik}(x'_k + d_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}x_j = b_i, i \in I \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow a_{ik}x'_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}x_j = b_i - a_{ik}d_k, i \in I \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b}\end{aligned}$$

Maatriks A ja vektor c ei muutu, muutub vektor b , muutujate arv ei suurene(!).

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

$$x_k \leq d_k \Leftrightarrow x'_k \geq 0, x'_k = d_k - x_k$$

$$c \cdot x = c_k x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j = c_k(-x'_k + d_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j =$$

$$= -c_k x'_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_j x_j + c_k d_k = \bar{c} \cdot \bar{x} + c_k d_k$$

$$Ax = b \Leftrightarrow a_{ik}(-x'_k + d_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a_{ik} x'_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij} x_j = b_i - a_{ik} d_k, i \in I \Leftrightarrow \bar{A} \bar{x} = \bar{b}$$

Märgimuutus vektori c ühes komponendis ja maatriksi A ühes veerus, muutub vektor b .

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

b) ($\rightarrow$ põhikuju)

$$\begin{aligned}a^i \cdot x = b_i, i \in I &\Leftrightarrow a^i \cdot x \leq b_i, i \in I \wedge \sum_{i \in I} (a^i \cdot x - b_i) \geq 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow a^i \cdot x \leq b_i, i \in I \wedge \left(- \sum_{i \in I} a^i \right) \cdot x \leq - \sum_{i \in I} b_i\end{aligned}$$

Kitsenduste arv suureneb ühe võrra.

Lineaarse planeerimise ülesande tähtsamad kujud

Näide 1

Viia ülesanne

$$x_2 - x_1 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 = x_2 - 5,$$

$$|x_2| \leq 2,$$

$$x_1 \leq 0$$

kanoonilisele ja põhikujule nii standard- kui ka ökonoomse metoodikaga.

Lubatava hulga omadused

Vaatleme kanoonilisel kujul ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Kronecker-Capelli teoreemi põhjal on süsteemil $Ax = b$ olemas lahend $\Leftrightarrow \text{rank } A = \text{rank}(A|b)$. Vastasel korral $\Omega = \emptyset$.

Eeldame, et $\text{rank } A = \text{rank}(A|b)$ ning lineaarselt sõltuvad võrrandid on eemaldatud. Siis $m = \text{rank } A = |I|$ ning $m \leq n$.

Kui $Ax = b$ lahendite x seas on selliseid, et $x \geq 0$, siis $\Omega \neq \emptyset$.

Juhul $m = n$ on süsteemil parajasti üks lahend x ja kui $x \geq 0$, siis on see lubatava hulga ainus element ja ka ülesande lahend.

Sisukas ülesandes $m < n$ ning süsteemil $Ax = b$ on lõpmata palju lahendeid. Ω võib siis olla tühi, üheelemendiline või lõpmatu hulk.

Lubatava hulga omadused

Vaatleme põhikujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Olgu $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Hulka $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b\}$ nimetatakse **hüpertasandiks**. Hulka $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\}$ nimetatakse **(kinniseks) poolruumiks**. Hüpertasand on kahe poolruumi ühisosa

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid (-a) \cdot x \leq -b\}.$$

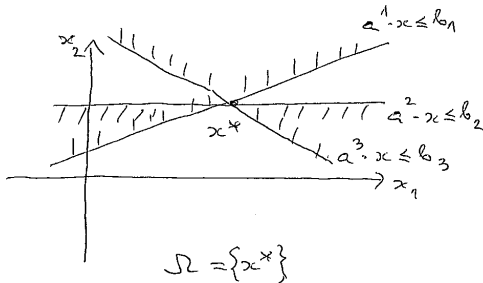
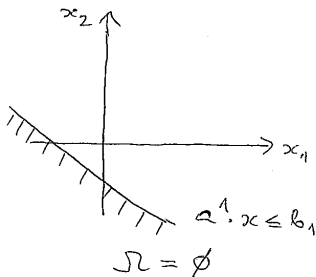
Näiteks tasandil $\mathbb{R}^2$ on hüpertasanditeks kõikvõimalikud sirged $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$, ruumis $\mathbb{R}^3$ on hüpertasanditeks kõikvõimalikud tasandid $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$.

Lõpliku hulga poolruumide ühisosa nimetatakse **polüedriliseks hulgaks**. Tõkestatud polüeedrilist hulka nimetatakse **polüeedriks** ehk **hulktahukaks**.

Lubatava hulga omadused

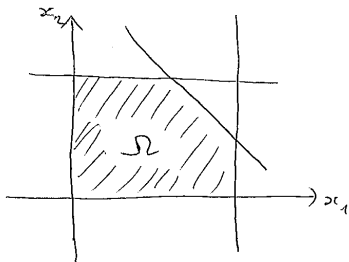
Põhikujul oleva ülesande lubatav hulk on polüeedriline hulk.

Põhikitsenduste arv võib olla kuitahes suur.

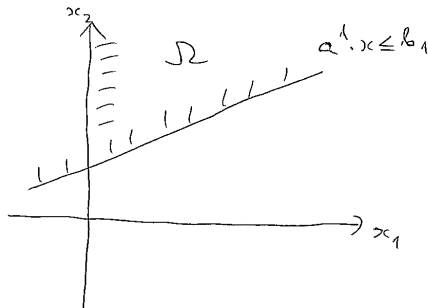


Lubatava hulga omadused

Põhikujul oleva ülesande lubatav hulk on polüeedriline hulk.
Põhikitsenduste arv võib olla kuitahes suur.



Ω on tõestatud,
lõpmatu



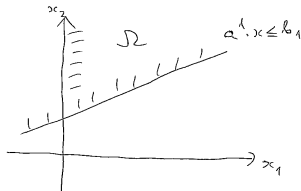
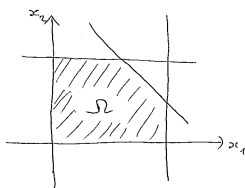
Ω on tõestamata

Lubatava hulga omadused

Ka kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatav hulk on lõpliku arvu poolruumide ühisosa, sest iga võrrand süsteemis $Ax = b$ määrab hüpertasandi ehk kahe poolruumi ühisosa ning süsteemi lahend on vastavate hüpertasandite ühisosa.

Kanoonilisel kujul ülesande lubatav hulk on aga spetsiifilise kujuga, ta on $\mathbb{R}^n$ alamruumi nihke ühisosa hulgaga $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$.

Näiteks $\mathbb{R}^2$ alamruumideks on $\{(0,0)\}$, kõikvõimalikud nullpunkti läbivad sirged ja $\mathbb{R}^2$ ise. Seega järgmised hulgad ei saa olla kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatavad hulgad.



Lahendi olemasolu

Polüeedriline hulk (seega ka lineaarse planeerimise ülesande lubatav hulk) on alati kinnine. Kui $\Omega \neq \emptyset$ ja Ω on tõkestatud, siis Weierstrassi teoreemi põhjal on ülesandel lahend olemas. Kui Ω on tõkestamata, aga sihifunktsioon on lubataval hulgal ülalt tõkestatud, siis ülesandel on lahend olemas. Kui Ω on tõkestamata ja sihifunktsioon on lubataval hulgal ülalt tõkestamata, siis lahend puudub.

Kumerad hulgad

Olgu V vektorruum.

Hulka $X \subset V$ nimetatakse **kumeraks**, kui iga $x, y \in X$, $x \neq y$, ja iga $\lambda \in (0, 1)$ korral $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

Hulka $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ nimetatakse punkte x ja y ühendavaks lõiguks.

Hulk on kumer $\Leftrightarrow$ ta sisaldab igat oma kahte punkti ühendavat lõiku.

Hulka $X \subset \mathbb{R}^n$ nimetatakse **kinniseks**, kui $x_k \in X$, $x_k \rightarrow x$ korral $x \in X$.

Poolruum $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\}$ on kumer ja kinnine (Ül 18).

Kui hulgad X_α on kumerad, siis $\bigcap_{\alpha} X_\alpha$ on kumer (Ül 19).

Kui hulgad X_α on kinnised, siis $\bigcap_{\alpha} X_\alpha$ on kinnine. Seega iga polüeedriline hulk (lineaarse planeerimise ülesande lubatav hulk) on kumer ja kinnine.

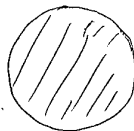
Kumerad hulgad

Kumera hulga **tipuks** nimetatakse selle hulga punkti, mis ei ole ühegi sellesse hulka kuuluva lõigu sisepunktiks.

$x \in X$ on hulga X tipp parajasti siis, kui ei ole võimalik esitus $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, $\lambda \in (0, 1)$, $y, z \in X$, $y \neq z$.



on kolm tippu



iga ringjoone punkt
on ringi tipp

Graafiline lahendamine

Graafiliselt saab lahendada lineaarse planeerimise ülesannet (üldkujul), kui $n = 2$, mõnikord juhul $n = 3$.

Sihifunktsiooni $c \cdot x$, $c \neq 0$, korral vaatleme hüpertasandeid $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = \alpha\}$, kus $\alpha \in \mathbb{R}$, st sihifunktsiooni nivootasandeid (juhul $n = 2$ nivoo sirgeid). Erinevatele α väärtustele vastavad erinevad mittelõikuvad, seega paralleelsed nivootasandid.

Graafilise lahendamise (juhul $n = 2$)

Graafilise lahendamise etapid:

- ① Joonisele kantakse lubatav hulk – polüeedriline hulk (erijuhul polüeeder);
- ② võetakse üks nivoosirge ja määratakse sihifunktsiooni kasvamise suund nivoosirge paralleellükkel;
- ③ liigutakse nivoosirgega maksimiseerimisülesandes kasvamise suunas, minimeerimisülesandes kahanemise suunas seni kuni edasi minnes nivoosirge lubatavat hulka enam ei lõika. Viimase nivoosirge ja lubatava hulga ühisosa on lahendite hulk.

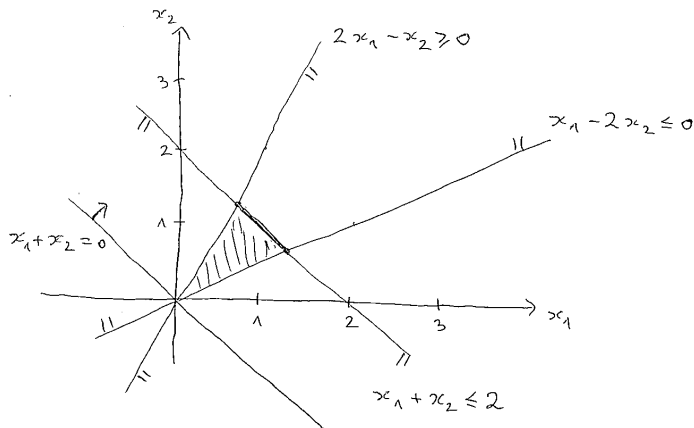
Graafiline lahendamine, näide 1

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$



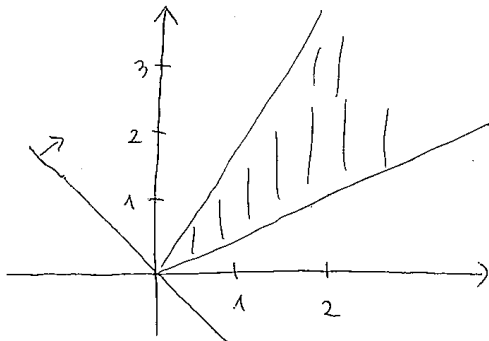
$$\Omega_* = \left\{ \lambda \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right), \lambda \in [0, 1] \right\}$$

Graafiline lahendamine, näide 2

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$



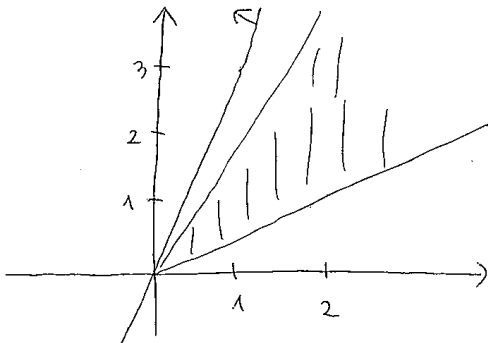
$$\Omega_* = \emptyset$$

Graafiline lahendamise näide 3

$$-3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$



$$\Omega_* = \{(0; 0)\}$$

Lahendite paiknemine

Vaatleme kanoonilisel kujul ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}. \quad (1)$$

Siin lubatav hulk on kujul $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Teoreem 1

Kui ülesandel (1) on olemas lahend, siis vähemalt üks lahenditest asub lubatava hulga tipus.

Lahendite paiknemine

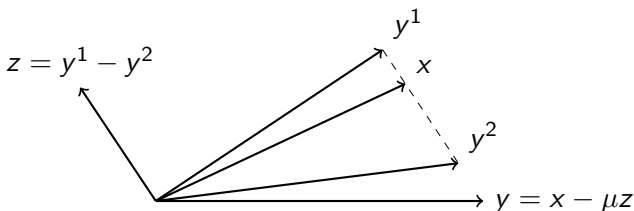
Tõestuse skeem:

$x = 0$ on (1) lahend $\Rightarrow x$ on Ω tipp

$x \neq 0$ on (1) lahend, ei ole tipp $\Rightarrow x \in [y^1, y^2] \subset \Omega$, y^1, y^2 on (1) lahendid

$z = y^1 - y^2$ või $z = y^2 - y^1$, $\mu = \min \left\{ \frac{x_i}{z_i} \mid z_i > 0 \right\} > 0$

$y = x - \mu z$ on (1) lahend, millel on vähem nullist erinevaid komponente võrreldes vektoriga x . Kui y ei ole Ω tipp, saab protsessi korrata.



Lahendite paiknemine

Tõestus. Kui 0 on (1) lahend, siis $0 \in \Omega$. Oletame, et 0 ei ole Ω tipp, siis leiduvad $\lambda \in (0, 1)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$, nii, et $0 = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Leidub i nii, et $x_i > 0$ või $y_i > 0$, siis aga $0 = \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i > 0$, mis on vastuolu. Näitasime tegelikult, et 0 on alati hulga $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ tipp ning ka seda, et kui $0 \in \Omega$, siis 0 on osahulga $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ tipp.

Olgu nüüd $x \neq 0$ ülesande (1) lahend ning oletame, et x ei ole Ω tipp. Leidub esitus $x = \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2$, $y^1, y^2 \in \Omega$, $y^1 \neq y^2$, $\lambda \in (0, 1)$. Olgu lahendi x komponentidest k nullist erinevad (ehk positiivsed). Näitame, et on olemas ülesande (1) lahend, millel on ülimalt $k - 1$ nullist erinevat komponenti.

Lahendite paiknemine

x on ülesande (1) lahend, seega $c \cdot x \geq c \cdot y^1$, $c \cdot x \geq c \cdot y^2$ ning võrduse $x = \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2$ põhjal

$$\lambda c \cdot y^1 = c \cdot x - (1 - \lambda)c \cdot y^2 \geq c \cdot x - (1 - \lambda)c \cdot x = \lambda c \cdot x,$$

seega $c \cdot y^1 = c \cdot x$. Analoogiliselt $c \cdot y^2 = c \cdot x$, mistõttu y^1 ja y^2 on ülesande (1) lahendid.

Olgu $z = y^1 - y^2$. Võime eeldada, et z mingi komponent on positiivne, sest $y^1 \neq y^2$ ja kui z kõik komponendid on mittepositiivsed, siis defineerime $z = y^2 - y^1$. Olgu

$$\mu = \min \left\{ \frac{x_i}{z_i} \mid z_i > 0 \right\}.$$

Kui $z_i \neq 0$, siis $x_i > 0$, sest kui $x_i = 0$, siis $y_i^1 = y_i^2 = 0$ ja $z_i = 0$. Seega $\mu > 0$.

Lahendite paiknemine

Defineerime $y = x - \mu z$. Siis

$$\left. \begin{array}{l} z_i \leq 0 \Rightarrow y_i = x_i - \mu z_i \geq x_i \geq 0 \\ z_i > 0 \Rightarrow y_i = x_i - \mu z_i \geq x_i - \frac{x_i}{z_i} z_i = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y \geq 0,$$

$$Ay = Ax - \mu Az = b - \mu(Ay^1 - Ay^2) = b - \mu(b - b) = b,$$

ja

$$c \cdot y = c \cdot x - \mu(c \cdot y^1 - c \cdot y^2) = c \cdot x - \mu(c \cdot x - c \cdot x) = c \cdot x,$$

seega y on ülesande (1) lahend.

Lahendite paiknemine

Nüüd

$$x_i = 0 \Rightarrow z_i = 0, y_i = x_i - \mu z_i = 0,$$

$$\exists j : \mu = \frac{x_j}{z_j}, z_j > 0, x_j > 0 \Rightarrow y_j = x_j - \mu z_j = x_j - \frac{x_j}{z_j} z_j = 0.$$

Seega vektoril y on ülimalt $k - 1$ nullist erinevat komponenti.

Kui y on Ω tipp, on teoreem tõestatud, kui ei, siis kordame protseduuri ja ülimalt n sammuga jõuame lahendini, mis on Ω tipp. $\square$

Lahendite paiknemine

Olgu X_0, X_1 kumerad hulgad ja $X_0 \subset X_1$. Kui $x_0 \in X_0$ ja x_0 on hulga X_1 tipp, siis x_0 on ka hulga X_0 tipp (Ül 21).

Kui ülesande (1) lubatav hulk on mittetühi, siis lubataval hulgal on olemas tipp. (Tõestus analoogiline teoreemi tõestusega.)

Olgu A $m \times n$ maatriks. Vaatleme põhikujul ülesande lubatavat hulka

$$\Omega_p = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$$

ning üleminekul kanoonilisele kujule tekkivat lubatavat hulka

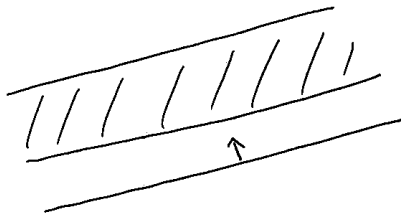
$$\Omega_k = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} | Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0\}.$$

Siis x on Ω_p tipp $\Leftrightarrow (x, b - Ax)$ on Ω_k tipp (Ül 22).

Kui põhikujul oleval ülesandel on olemas lahend, siis vähemalt üks lahenditest asub lubatava hulga tipus (Ül 23).

Lahendite paiknemine

Suvalise lineaarse planeerimise ülesande korral ei saa väita, et kui lahend on olemas, siis leidub lahend, mis on lubatava hulga tipp. Näide:



Siin kahe paralleelse sirgega määratud lubataval hulgal ei ole ühtegi tippu. Nivoosirge on lubatavat hulka määravate sirgetega paralleelne, seega lahend on olemas.

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Vaatleme kanoonilisel kujul ülesande lubatavat hulka

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Eeldame, et A on $m \times n$ maatriks ja $\text{rank } A = m$. Siit järeldeb, et $m \leq n$ ning $\text{rank}(A|b) = m$. Kui $m < n$, siis süsteemil $Ax = b$ on lõpmata palju lahendeid.

Et $\text{rank } A = m$, siis leidub m lineaarselt sõltumatut veergu $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ (ruumi $\mathbb{R}^m$ baas), nimetame neid **baasiveergudeks**. Nimetame **baasiindeksiteks** hulga $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ elemente ning **baasivälisteks indeksiteks** hulga $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$ elemente. Olgu x_i , $i \in I$, **baasimuutujad**, x_j , $j \in J$, on **baasivälised muutujad**.

Definitsioon

*Võrrandisüsteemi $Ax = b$ lahendit x , mille korral $x_j = 0$, $j \in J$, nimetatakse **baasilahendiks**.*

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Baasilahendi **baasikomponendid** on x_i , $i \in I$, ja **baasivälised komponendid** x_j , $j \in J$ ($x_j = 0$, $j \in J$).

Baasilahendit nimetatakse **kidunud** (kõdunud, singulaarseks) baasilahendiks, kui $\exists i \in I : x_i = 0$, vastasel juhul **mittekidunud** (regulaarseks) baasilahendiks (siis $x_i \neq 0 \forall i \in I$).

Süsteemi $Ax = b$ lahend ei saa olla kidunud baasilahend ühe baasi suhtes ja mittekidunud teise baasi suhtes.

Definitsioon

Süsteemi $Ax = b$ baasilahendit x nimetatakse **lubatavaks**, kui $x_i \geq 0$, $i \in I$, ehk $x \geq 0$.

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Oluline erijuht süsteemi $Ax = b$ korral on selline, kus

$a_{i_1} = e_1, \dots, a_{i_m} = e_m$ ($e_i, i = 1, \dots, m$, on veeruvektorid, mille komponent indeksiga i on 1, teised komponendid on nullid). Siis süsteem esitub kujul

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, i \in I.$$

Siin saab välja kirjutada süsteemi üldlahendi

$$x_i = b_i - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j, i \in I,$$

kus $x_j, j \in J$, on vabad muutujad, suvaliselt valitavad. Kui baasivälised muutujad $x_j, j \in J$, on väärtuse saanud, saab baasimuutujad $x_i, i \in I$, üheselt määrata. Kui võtame $x_j = 0, j \in J$, siis saame $x_i = b_i, i \in I$, ning kokku baasilahendi

$$\begin{cases} x_i = b_i, i \in I, \\ x_j = 0, j \in J. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Näide 2

Vaatleme süsteemi $Ax = b$, kus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

ja $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, st

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_4 = 2.$$

a) Valime baasiindeksiteks $I = \{1, 2\}$, siis $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on ühikvektoritest baas, baasimuutujad on x_1 ja x_2 ning baasilahend $x = (3, 2, 0, 0)$ on lubatav.

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Näide 2

Vaatleme süsteemi $Ax = b$, kus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

ja $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, st

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_4 = 2.$$

b) Valime baasiindeksiteks $I = \{2, 3\}$, siis $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on ühikvektoritest baas, baasimuutujad on x_2 ja x_3 ning baasilahend $x = (0, 2, 3, 0)$ on lubatav.

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Näide 2

Vaatleme süsteemi $Ax = b$, kus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

ja $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, st

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_4 = 2.$$

c) Baasiindeksite hulgaks ei saa võtta $I = \{1, 3\}$, sest a_1 ja a_3 on lineaarselt sõltuvad.

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Näide 2

Vaatleme süsteemi $Ax = b$, kus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

ja $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, st

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_4 = 2.$$

d) Valime baasiindeksiteks $I = \{3, 4\}$, siis $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on baas, baasimuutujad on x_3 ja x_4 , baasilahend $x = (0, 0, -1, 2)$ ei ole lubatav.

Võrrandisüsteemi baasilahendid

Näide 2

Vaatleme süsteemi $Ax = b$, kus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

ja $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, st

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_4 = 2.$$

e) Baasilahendite $x^1 = (3, 2, 0, 0)$ ja $x^2 = (0, 2, 3, 0)$ korral $\frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ on samuti võrrandisüsteemi lahend, aga ta ei ole baasilahend.

Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

Vaatleme kanoonilisel kujul ülesande lubatavat hulka

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Eeldame, et A on $m \times n$ maatriks ja $\text{rank } A = m$. Siis $m \leq n$.

Teoreem 2

Süsteemi $Ax = b$ lubatavad baasilahendid ühtivad hulga Ω tippudega.

Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

Tõestus. ($\Rightarrow$) Olgu x süsteemi $Ax = b$ lubatav baasilahend, baasiindeksite hulk olgu $I = \{i_1, \dots, i_m\}$. Siis $x_i \geq 0$, $i \in I$, $x_i = 0$, $i \notin I$, $x \in \Omega$.

Oletame vastuväiteliselt, et x ei ole hulga Ω tipp. Siis leiduvad $y, z \in \Omega$, $y \neq z$, ja $\lambda \in (0, 1)$ nii, et $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Kui $x_i = 0$, siis ka $y_i = 0$ ja $z_i = 0$, seega $y_i = z_i = 0$, $i \notin I$. Et $y \in \Omega$, siis $Ay = b$, mille võib $y_i = 0$, $i \notin I$, tõttu kirjutada

$$(a_{i_1} \dots a_{i_m})(y_i)_{i \in I} = b.$$

Analoogiliselt

$$(a_{i_1} \dots a_{i_m})(z_i)_{i \in I} = b.$$

Et aga maatriks $(a_{i_1} \dots a_{i_m})$ on regulaarne, siis $y_i = z_i$, $i \in I$ ja $y = z$, mis on vastuolu.

Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

($\Leftarrow$) Olgu x hulga Ω tipp. Tähistame $I_+ = \{i \mid x_i > 0\}$. Kui $I_+ = \emptyset$, siis $x = 0$, $Ax = b = 0$ ja x on lubatav baasilahend mistahes baasi suhtes.

Olgu $I_+ \neq \emptyset$. Näitame, et A veerud a_i , $i \in I_+$, on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et nad on lineaarselt sõltuvad

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in I_+, \sum_{i \in I_+} |\alpha_i| \neq 0 : \sum_{i \in I_+} \alpha_i a_i = 0.$$

Olgu $\alpha_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I_+$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, siis

$$\sum_{i \in I_+} \alpha_i a_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0 \Leftrightarrow A\alpha = 0.$$

Defineerime $\mu = \min \left\{ \frac{x_i}{|\alpha_i|} \mid \alpha_i \neq 0 \right\} > 0$, $y = x + \mu\alpha$ ja $z = x - \mu\alpha$.

Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

Vektorite $y = x + \mu\alpha$ ja $z = x - \mu\alpha$ korral

$$Ax = b, A\alpha = 0 \Rightarrow Ay = b, Az = b,$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = 0 \Rightarrow y_i = z_i = x_i \geq 0 \\ \alpha_i \neq 0 \Rightarrow i \in I_+, x_i \pm \mu\alpha_i \geq x_i - \mu|\alpha_i| \geq x_i - \frac{x_i}{|\alpha_i|}|\alpha_i| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y, z \geq 0.$$

Seega $y, z \in \Omega$. Seejuures $y \neq z$, sest $\exists \alpha_i \neq 0$.

Et $x = \frac{1}{2}(y + z)$, siis x ei ole hulga Ω tipp. Vastuolu. Seega A veerud a_i , $i \in I_+$, on lineaarselt sõltumatud.

Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

Maatriksi A veergudel on m komponenti, seega $|I_+| \leq m$. Kui $|I_+| = m$, siis a_i , $i \in I_+$, on baas ja x talle vastav lubatav baasilahend.

Kui $|I_+| < m$, siis saab veergudele a_i , $i \in I_+$, lisada A veerge nii, et tulemuseks on lineaarselt sõltumatu süsteem a_i , $i \in I$, $I_+ \subset I$, $|I| = m$ (kui nii täiendada ei saaks, siis oleks A astak väiksem kui m). Seejuures $x_i = 0$, $i \notin I$, mistõttu x on baasile a_i , $i \in I$, vastav lubatav baasilahend. $\square$

Seos baasilahendite ja lubatava hulga tippude vahel

Järeldus. Kui kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatav hulk on mittetühi, siis sellel ülesandel on olemas lubatav baasilahend. (Mittetühjal lubataval hulgal on olemas tipp, see on lubatav baasilahend.)

Märkus 1. Kui baas a_i , $i \in I$, on välja valitud, siis talle vastab parajasti üks baasilahend, sest süsteemil $(a_{i_1} \dots a_{i_m})(x_i)_{i \in I} = b$ on parajasti üks lahend. See baasilahend võib olla lubatav või mitte. Kui ta on lubatav, siis ta on lubatava hulga tipp. Kui ei ole lubatav, siis ta ei kuulu lubatavasse hulka.

Märkus 2. Kui on fikseeritud lubatava hulga tipp, siis on see lubatav baasilahend ja juhul $|I_+| = m$ on baas, millele ta vastab, üheselt määratud. Juhul $|I_+| < m$, st lubatav baasilahend on kidunud, on kaks võimalust: baasi võib saada veergude a_i , $i \in I_+$, täiendamisel a) mitmel viisil või b) ainult ühel võimalikul viisil. Seega lubatava hulga kidunud tipp võib olla a) mitme baasi suhtes lubatav baasilahend või b) parajasti ühe baasi suhtes lubatav baasilahend.

Üleminek ühelt baasilt teisele

Vaatleme kanoonilisel kujul oleva ülesande lubatavat hulka

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Olgu A $m \times n$ maatriks, $\text{rank } A = m$. Eeldame, et on välja valitud baasimuutujad ehk baasiindeksite hulk I , siis $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Lisaks eeldame, et süsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i = a_{i0}, \quad i \in I. \quad (2)$$

Ühtlasi on teada süsteemi üldlahend

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j, \quad i \in I,$$

ja baasilahend

$$\begin{cases} x_i = a_{i0}, & i \in I, \\ x_j = 0, & j \in J. \end{cases}$$

Üleminek ühelt baasilt teisele

Vaatleme sellist üleminekut ühelt baasilt teisele, kus ainult üks baasimuutuja ehk baasiindeks asendub uuega baasiväliste hulgast: baasimuutuja x_k , $k \in I$, asemele tuleb x_l , $l \in J$. Võrrandi (2) esitame $k \in I$ korral

$$x_k + a_{kl}x_l + \sum_{j \in J \setminus \{l\}} a_{kj}x_j = a_{k0}.$$

Jagame läbi arvuga $a_{kl} \neq 0$ (peame seda eeldama) ja saame

$$x_l + \frac{1}{a_{kl}}x_k + \sum_{j \in J \setminus \{l\}} \frac{a_{kj}}{a_{kl}}x_j = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}.$$

Seega võrrandi indeksiga k asendame võrrandiga, mille indeks on l

$$x_k + \sum_{j \in J} a_{kj}x_j = a_{k0} \quad \Leftrightarrow \quad x_l + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{lj}x_j = \bar{a}_{l0}, \quad (3)$$

kus $\bar{J} = (J \setminus \{l\}) \cup \{k\}$, $\bar{a}_{lk} = \frac{1}{a_{kl}}$, $\bar{a}_{lj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}$, $j \in J \setminus \{l\}$, $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$.

Üleminek ühelt baasilt teisele

Seejärel elimineerime $x_I = \bar{a}_{I0} - \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{Ij} x_j$ süsteemi (2) võrranditest $i \in I \setminus \{k\}$ korral. Selle tulemusel saame võrrandid

$$x_i + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}, \quad i \in I \setminus \{k\}.$$

Lisades võrrandi (3) jõuame uue süsteemini

$$x_i + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}, \quad i \in \bar{I}, \quad (4)$$

kus $\bar{I} = (I \setminus \{k\}) \cup \{I\}$ on uus baasiindeksite hulk ning

$$\begin{cases} x_i = \bar{a}_{i0}, & i \in \bar{I}, \\ x_j = 0, & j \in \bar{J}. \end{cases}$$

vastav baasilahend.

Üleminek ühelt baasilt teisele

Vaatleme võrrandisüsteemi (2) kujul

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1} + \dots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1} + \dots + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{cases}$$

Siin baasiindeksid on $I = \{1, \dots, m\}$ ning baasimuutujad $x_1, \dots, x_m$.

Moodustame tabeli

	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_I	$\dots$	x_n	
a_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1I}	$\dots$	a_{1n}	a^1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{k0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$a_{k,m+1}$	$\dots$	a_{kI}	$\dots$	a_{kn}	a^k
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{mI}	$\dots$	a_{mn}	a^m

milles paremal servas on märgitud reavektorid

$$a^i = (a_{i0}, 0, \dots, 1_i, \dots, 0, a_{i,m+1}, \dots, a_{in})$$

Üleminek ühelt baasilt teisele

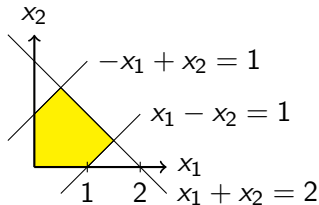
Valime juhtreaks rea indeksiga k ning juhtveeruks veeru indeksiga l . Elementi $a_{kl} \neq 0$ nimetatakse juhtelemendiks. Süsteemi (4) tabel on järgmine

	x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n	
$\bar{a}_{10}$	1	...	$\bar{a}_{1k}$	...	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{1n}$	a^1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_{l0}$	0	...	$\bar{a}_{lk}$	...	0	$\bar{a}_{l,m+1}$	...	1	...	$\bar{a}_{ln}$	a^l
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_{m0}$	0	...	$\bar{a}_{mk}$	...	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{mn}$	a^m

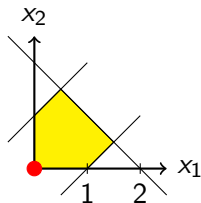
Uues tabelis on endiselt m ühikveergu, indeksiga k veeru asemel on ühikveerg nüüd veerus indeksiga l . Rida indeksiga k on ümber nimetatud reaks, mille indeks on l . Üleminek süsteemilt (2) süsteemile (4) toimub elementaarteisendustega.

Näide

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$



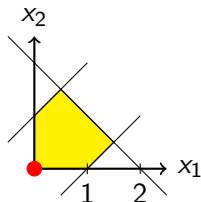
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	0	0	a^3
1	1	-1	0	1	0	a^4
2	1	1	0	0	1	a^5



Baasilahend on $(0,0,1,1,2)$. Valime $l = 1$, $k = 5$.

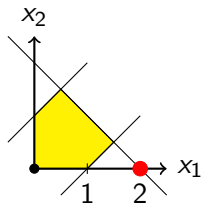
Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	0	0	a^3
1	1	-1	0	1	0	a^4
2	1	1	0	0	1	a^5



Baasilahend on $(0, 0, 1, 1, 2)$. Valime $l = 1$, $k = 5$.

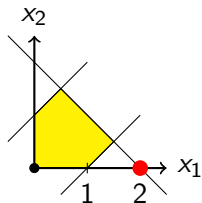
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	0	2	1	0	1	$\bar{a}^3$
-1	0	-2	0	1	-1	$\bar{a}^4$
2	1	1	0	0	1	$\bar{a}^1$



Baasilahend on $(2, 0, 3, -1, 0)$. Valime $l = 2$, $k = 3$.

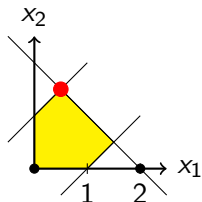
Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	0	2	1	0	1	$\bar{a}^3$
-1	0	-2	0	1	-1	$\bar{a}^4$
2	1	1	0	0	1	$\bar{a}^1$



Baasilahend on $(2, 0, 3, -1, 0)$. Valime $l = 2$, $k = 3$.

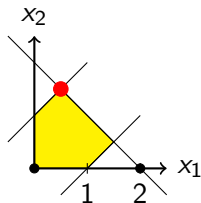
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$3/2$	0	1	$1/2$	0	$1/2$	$\bar{a}^2$
2	0	0	1	1	0	$\bar{a}^4$
$1/2$	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	$\bar{a}^1$



Baasilahend on $(1/2, 3/2, 0, 2, 0)$. Valime $l = 3$, $k = 4$.

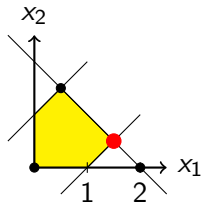
Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$3/2$	0	1	$1/2$	0	$1/2$	$\bar{a}^2$
2	0	0	1	1	0	$\bar{a}^4$
$1/2$	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	$\bar{a}^1$



Baasilahend on $(1/2, 3/2, 0, 2, 0)$. Valime $l = 3$, $k = 4$.

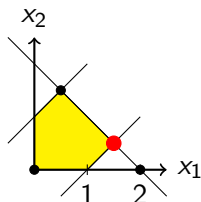
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$1/2$	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	$\tilde{a}^2$
2	0	0	1	1	0	$\tilde{a}^3$
$3/2$	1	0	0	$1/2$	$1/2$	$\tilde{a}^1$



Baasilahend on $(3/2, 1/2, 2, 0, 0)$. Valime $l = 5$, $k = 2$.

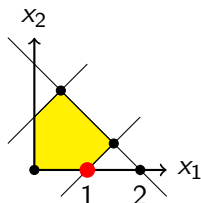
Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1/2	0	1	0	-1/2	1/2	$\tilde{a}^2$
2	0	0	1	1	0	$\tilde{a}^3$
3/2	1	0	0	1/2	1/2	$\tilde{a}^1$



Baasilahend on $(3/2, 1/2, 2, 0, 0)$. Valime $l = 5$, $k = 2$.

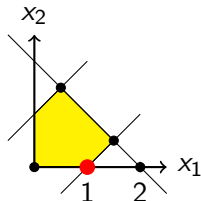
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	0	-1	1	$\tilde{\tilde{a}}^5$
2	0	0	1	1	0	$\tilde{\tilde{a}}^3$
1	1	-1	0	1	0	$\tilde{\tilde{a}}^1$



Baasilahend on $(1, 0, 2, 0, 1)$. Valime $l = 4$, $k = 1$.

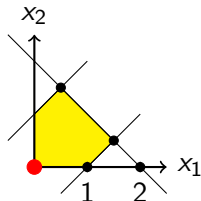
Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	0	-1	1	$\hat{a}^5$
2	0	0	1	1	0	$\hat{a}^3$
1	1	-1	0	1	0	$\hat{a}^1$



Baasilahend on $(1, 0, 2, 0, 1)$. Valime $l = 4$, $k = 1$.

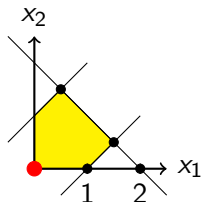
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	1	0	0	1	$\hat{a}^5$
1	-1	1	1	0	0	$\hat{a}^3$
1	1	-1	0	1	0	$\hat{a}^4$



Baasilahend on $(0, 0, 1, 1, 2)$. Valime $l = 2$, $k = 5$.

Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	1	0	0	1	$\hat{a}^5$
1	-1	1	1	0	0	$\hat{a}^3$
1	1	-1	0	1	0	$\hat{a}^4$

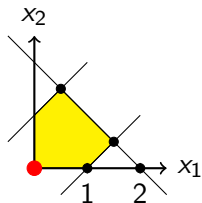


Baasilahend on $(0, 0, 1, 1, 2)$. Valime $l = 2$, $k = 5$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	0	0	a^3
1	1	-1	0	1	0	a^4
2	1	1	0	0	1	a^5

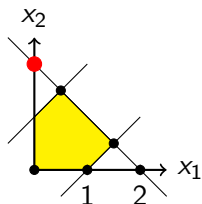
Näide

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	1	0	0	1	$\hat{a}^5$
1	-1	1	1	0	0	$\hat{a}^3$
1	1	-1	0	1	0	$\hat{a}^4$



Baasilahend on $(0, 0, 1, 1, 2)$. Valime $l = 2$, $k = 5$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	1	0	0	1	$\hat{\hat{a}}^2$
-1	-2	0	1	0	-1	$\hat{\hat{a}}^3$
3	2	0	0	1	1	$\hat{\hat{a}}^4$

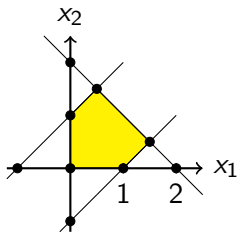


Baasilahend on $(0, 2, -1, 3, 0)$.

Näide

Kombinatsioone viiest kolme kaupa on $\frac{5!}{3!2!} = 10$, erinevaid baasilahendeid on aga 9, sest baasimuutujateks ei saa valida komplekti $\{x_1, x_2, x_5\}$ (vastavad veeruvektorid on lineaarselt sõltuvad). Lubatavaid baasilahendeid on 5, mittelubatavaid 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	0	0	a^3
1	1	-1	0	1	0	a^4
2	1	1	0	0	1	a^5



Eesmärk on 1) saada lubatavaid baasilahendeid ($x \geq 0$); 2) minna lubatavalt baasilahendilt sellisele lubatavale baasilahendile (lubatava hulga tipust naabertippu), kus sihifunktsioon kasvab või vähemalt ei kahane.

Üleminek lubatavalt baasilahendilt lubatavale baasilahendile

Eeldame, et süsteemist

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i = a_{i0}, \quad i \in I. \quad (2)$$

saadav baasilahend on lubatav, st $a_{i0} \geq 0$, $i \in I$.

Kuidas valida juhtelement nii, et pärast üleminekut saadav baasilahend oleks lubatav?

Üleminek lubatavalt baasilahendilt lubatavale baasilahendile

Oletame, et juhtveerg (indeks I) on valitud. Üleminek ühelt baasilt teisele toimub elementaarteisendustega. Kui juhtelemendiks on a_{kl} , siis

1) rida indeksiga k jagatakse arvuga $a_{kl} \neq 0$, st

$$\bar{a}^l = \frac{a^k}{a_{kl}};$$

2) igast reast indeksiga $i \in I \setminus \{k\}$ lahutatakse arvuga a_{il} korrutatud rida $\bar{a}^l$, st

$$\bar{a}^i = a^i - a_{il}\bar{a}^l = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}}a^k, \quad i \in I \setminus \{k\}.$$

Ridade esimesed liikmed on $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$ ja $\bar{a}_{i0} = a_{i0} - \frac{a_{il}}{a_{kl}}a_{k0}$, $i \in I \setminus \{k\}$.

Üleminek lubatavalt baasilahendilt lubatavale baasilahendile

Kui $a_{k0} = 0$, siis $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}} = 0$ ja $\bar{a}_{i0} = a_{i0} - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a_{k0} = a_{i0} \geq 0$, $i \in I \setminus \{k\}$, mis tähendab, et uus baasilahend on lubatav.

Kui $a_{k0} > 0$, siis peab kehtima $a_{kl} > 0$, et saada $\bar{a}_{l0} \geq 0$. (Eeldame edaspidi, et juhtelement a_{kl} on positiivne.) Lisaks $\bar{a}_{i0} \geq 0$ parajasti siis, kui $a_{i0} \geq \frac{a_{il}}{a_{kl}} a_{k0}$. Kui $a_{il} \leq 0$, siis võrratus kehtib. Kui $a_{il} > 0$, siis peab kehtima $\frac{a_{i0}}{a_{il}} \geq \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$. Juhtrida (indeks k) tuleks valida nii, et

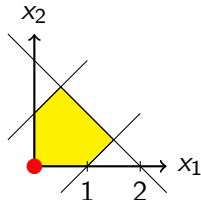
$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{il}} \mid a_{il} > 0, i \in I \right\}. \quad (6)$$

Juhtrea valiku reegel: Kui juhtveerg (indeks l) on valitud, siis juhtrida indeksiga k valitakse nii, et juhtelement a_{kl} oleks positiivne ning veerus 0 paikneva elemendi suhe veerus l oleva positiivse elemendiga oleks minimaalne.

Näide

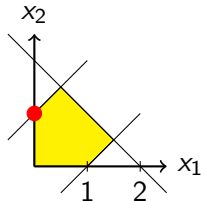
Vaatleme eelmist näidet, kus juhtrea valiku reeglit rikuti esimesel sammul.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	0	0	a^3
1	1	-1	0	1	0	a^4
2	1	1	0	0	1	a^5



Siin baasilahend $(0, 0, 1, 1, 2)$ on lubatav. Olgu juhtveerg $l = 1$ valitud. Siis (6) põhjal $k = 4$ ehk $a_{41} = 1$ on juhtelement.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	0	0	1	1	0	$\bar{a}^3$
1	1	-1	0	1	0	$\bar{a}^1$
1	0	2	0	-1	1	$\bar{a}^5$



Baasilahend $(1, 0, 2, 0, 1)$ on lubatav.

Vahekokkuvõte

Üldkujul ülesanne

$$\min_{x \in \Omega} c \cdot x \quad \text{või} \quad \max_{x \in \Omega} c \cdot x,$$

kus

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq b_i, i \in I_1, \quad a^i \cdot x = b_i, i \in I_2, \quad a^i \cdot x \geq b_i, i \in I_3\}.$$

Kanoonilisel kujul ülesanne

$$\max_{x \in \Omega} c \cdot x, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Põhikujul ülesanne

$$\max_{x \in \Omega} c \cdot x, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Igat lineaarse planeerimise ülesannet saab esitada temaga samaväärsel kanoonilisel või põhikujul.

Vahekokkuvõte

Lineaarse planeerimise ülesande lubatav hulk on a) polüeedriline hulk – lõpliku hulga poolruumide ühisosa; b) kinnine; c) kumer.

Kui kanoonilisel või põhikujul ülesande lubatav hulk on mittetühi, siis lubataval hulgal on olemas tipp.

Kui kanoonilisel või põhikujul ülesandel on olemas lahend, siis vähemalt üks lahenditest asub lubatava hulga tipus. (Üldkujul ülesande korral see ei kehti.)

Võrrandisüsteemi $Ax = b$ korral eeldame, et A on $m \times n$ maatriks, $\text{rank } A = m$ ja $m \neq n$ (seega $m < n$). Valime maatriksis A m lineaarselt sõltumatut veergu, mis määravad ära baasiindeksid I ning baasimuutujad x_i , $i \in I$. Ülejäänud muutujad x_j , $j \in J$, on baasivälised muutujad. Baasilahendi korral $x_j = 0$, $j \in J$. Baasilahendit x nimetatakse lubatavaks, kui $x \geq 0$.

Vahekokkuvõte

Süsteemi $Ax = b$ lubatavad baasilahendid ühtivad kanoonilisel kujul ülesande lubatava hulga tippudega.

Üleminek ühelt baasilt teisele toimub elementaarteisenduste ehk Gaussi elimineerimismeetodi abil. Eesmärk on 1) saada lubatavaid baasilahendeid ($x \geq 0$); 2) minna lubatavalt baasilahendilt sellisele lubatavale baasilahendile (lubatava hulga tipust naabertippu), kus sihifunktsioon kasvab või vähemalt ei kahane.

Eeldame, et on valitud baas, millele vastav baasilahend on lubatav. Juhtrea valiku reegel: Kui juhtveerg (indeks l) on valitud, siis juhtrida indeksiga k valitakse nii, et juhtelement a_{kl} oleks positiivne ning veerus 0 paikneva elemendi suhe veerus l oleva positiivse elemendiga oleks minimaalne.

Simpleksmeetod

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\} \quad (1)$$

Olgu A $m \times n$ matriks, $\text{rank } A = m$.

Kui ülesandel (1) on olemas lahend, siis vähemalt üks lahenditest paikneb lubatava hulga tipus. Lubatava hulga tipp on süsteemi $Ax = b$ lubatav baasilahend ja kuna baaside hulk on lõplik, on lõplik ka lubatava hulga tippude hulk. Kõigi baaside läbivaatamine ei ole aga ökonoomne. Näiteks $n = 100$ ja $m = 50$ korral on maksimaalne baaside arv

$$\binom{n}{m} = \frac{100!}{50!50!} \approx \frac{\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{\left(\frac{50}{e}\right)^{50} \left(\frac{50}{e}\right)^{50}} = 2^{100} > 10^{30}.$$

Kusjuures iga tipu leidmiseks on vaja lahendada $m \times m$ matriksiga süsteem $(a_{i_1} \dots a_{i_m})(x_i)_{i \in I} = b$.

Simpleksmeetod

Simpleksmeetodi eeldused:

- ① Süsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij}x_j = a_{i0}, \quad i \in I. \quad (2)$$

- ② Baasiindeksite hulgale I vastav baasilahend on lubatav, st $a_{i0} \geq 0$, $i \in I$.
- ③ Sihifunktsioon on (vähemalt lubatavas hulgas) esitatud kujul

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j}x_j = x_0, \quad (3)$$

kus x_0 on uus sihimuutuja.

Simpleksmeetod

Kujule (3) saab sihifunktsiooni viia järgmiselt:

$$\begin{aligned}c \cdot x &= \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{j \in J} c_j x_j \stackrel{(2)}{=} \\&= \sum_{i \in I} c_i \left(a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j = \\&= \underbrace{\sum_{i \in I} c_i a_{i0}}_{a_{00}} - \sum_{j \in J} \underbrace{\left(\sum_{i \in I} c_i a_{ij} - c_j \right)}_{a_{0j}} x_j.\end{aligned}$$

Teisendusi saab teha $Ax = b$ lahendite korral, st kui kehtib (2), st lubatavas hulgas.

Simpleksmeetod

Vaatame sihifunktsiooni (3)

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j.$$

Baasiindeksite hulga I vastava baasilahendi korral $c \cdot x = a_{00}$, sest $x_j = 0$, $j \in J$. Oletame, et $a_{0j} \geq 0$, $j \in J$. Siis $x \in \Omega$ korral

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} \underbrace{a_{0j}}_{\geq 0} \underbrace{x_j}_{\geq 0} \leq a_{00}.$$

Eelduses 2) vaadeldud baasilahend $x_i = a_{i0}$, $i \in I$, $x_j = 0$, $j \in J$, on optimaalne.

Lause (optimaalsuse piisav tingimus)

Kui sihifunktsioonis kujul (3) kehtib $a_{0j} \geq 0$ iga $j \in J$ korral, siis baasiindeksite hulga I vastav lubatav baasilahend on optimaalne.

Simpleksmeetod

Arutelu 1. Vaatame juhtu, kus leidub $a_{0l} < 0$, $l \in J$. Süsteemi $Ax = b$ kujul (2) esitame

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij}x_j, \quad i \in I. \quad (4)$$

Eeldame, et baasilahend on mittekidunud, st $a_{i0} > 0$, $i \in I$. Konstrueerime elemendi x järgmiselt: $x_l > 0$, $x_j = 0$, $j \in J \setminus \{l\}$, ning x_i , $i \in I$, määrame võrranditest (4). Küllalt väikese $x_l > 0$ korral $x_i = a_{i0} - a_{il}x_l \geq 0$, $i \in I$, seega $x \in \Omega$.

Elemendi x korral on sihifunktsiooni väärtus $a_{00} - a_{0l}x_l > a_{00}$, st vaadeldav baasilahend ei ole optimaalne.

Järeldus

Mittekidunud baasilahendi korral on optimaalsuse piisav tingimus ka tarvilik.

Simpleksmeetod

Vaatleme nüüd kidunud baasilahendi juhtu. Olgu $I_0 = \{i \in I \mid a_{i0} = 0\}$ ning endiselt leidugu $a_{0l} < 0$, $l \in J$. Kui $a_{il} \leq 0$ iga $i \in I_0$ korral, saame sama konstruktsiooni abil lubatava hulga elemendi: $x_l > 0$, $x_j = 0$, $j \in J \setminus \{l\}$, x_i , $i \in I$, määrame võrranditest (4). Siis $i \in I_0$ korral $x_i = a_{i0} - a_{il}x_l = -a_{il}x_l \geq 0$, ning $i \in I \setminus I_0$ korral $x_i = a_{i0} - a_{il}x_l \geq 0$, kui $x_l > 0$ on küllalt väike.

Järeldus

Optimaalsuse tingimus on tarvilik ka mõningate kidunud baasilahendite korral.

Simpleksmeetod

Arutelu 2. Olgu juhtveerg $l \in J$ välja valitud, $a_{0l} < 0$. Vaatleme juhtu, kus $a_{il} \leq 0$ iga $i \in I$ korral, st pole võimalik rakendada juhtrea valiku reeglit. Võtame suvalise $x_l > 0$, lisaks $x_j = 0$, $j \in J \setminus \{l\}$ ning (4) abil $x_i = a_{i0} - a_{il}x_l$, $i \in I$. Tegemist on Ω elemendiga, kuid sihifunktsiooni väärtus $a_{00} - a_{0l}x_l$ on kuitahes suur, kui x_l on kuitahes suur. Seega pole (1) lahenduv.

Järeldus

Kui optimaalsuse tingimus ei ole täidetud, st leidub $a_{0l} < 0$ ning ülesanne (1) on lahenduv, siis alati saab rakendada veerus l juhtrea valiku reeglit.

Simpleksmeetod

Simplekstabelisse lisame rea 0: sihifunktsioonile $c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j}x_j$ vastava rea ehk sihivõrrandi (3) kujul $x_0 + \sum_{j \in J} a_{0j}x_j = a_{00}$. (Uuele baasile üle minnes peab optimaalsuse tingimuse kontrollimiseks olema sihifunktsioon avaldatud uute baasiväliste muutujate kaudu, uus baasimuutuja x_l tuleb sihifunktsioonist elimineerida.)

	x_0	x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n	
a_{00}	1	0	...	0	...	0	$a_{0,m+1}$	...	a_{0l}	...	a_{0n}	a^0
a_{10}	0	1	...	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1l}	...	a_{1n}	a^1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{k0}	0	0	...	1	...	0	$a_{k,m+1}$	...	a_{kl}	...	a_{kn}	a^k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{m0}	0	0	...	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{ml}	...	a_{mn}	a^m

Simpleksmeetod

Üleminekut naaberbaasile koos sihifunktsiooni avaldamisega uute baasiväliste muutujate kaudu nimetatakse **simplekssammuks** ehk **simpleksteisenduseks**.

Pärast simplekssammu saame tabeli

	x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n	
$\bar{a}_{00}$	0	...	$\bar{a}_{0k}$	...	0	$\bar{a}_{0,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{0n}$	$\bar{a}^0$
$\bar{a}_{10}$	1	...	$\bar{a}_{1k}$	...	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{a}^1$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_{l0}$	0	...	$\bar{a}_{lk}$	...	0	$\bar{a}_{l,m+1}$	...	1	...	$\bar{a}_{ln}$	$\bar{a}^l$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_{m0}$	0	...	$\bar{a}_{mk}$	...	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{a}^m$

Simplekstabel on **lubatav**, kui $a_{i0} \geq 0$, $i \in I$ (eeldus 2). Simplekstabel on **duaalselt lubatav**, kui $a_{0j} \geq 0$, $j \in J$. Simplekstabel on lubatav ja duaalselt lubatav $\Rightarrow$ optimaalsuse tingimus on täidetud $\Rightarrow$ leitud baasilahend on optimaalne.

Simpleksmeetodi algoritm

Kehtigu eeldused 1)–3).

- Juhtveeru valik: Valime $l \in J$ nii, et $a_{0l} < 0$. Kui ei leidu, on lahend käes. Kui on mitu, siis valitakse üks.
- Juhtrea valik: Kui veerus l ei ole positiivseid elemente, siis on sihifunktsioon lubatavas hulgas ülalt tõkestamata ja lahend puudub. Kui on positiivseid, siis valitakse juhtrida $k \in I$ nii, et $a_{kl} > 0$ ja

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{il}} \mid a_{il} > 0, i \in I \right\}.$$

Kui selliseid on mitu, valitakse üks.

- Tehakse simplekssamm

$$\bar{a}^l = \frac{a^k}{a_{kl}}, \quad \bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \quad i \in I \setminus \{k\} \cup \{0\},$$

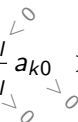
millega minnakse üle uuele baasile indeksite hulgaga

$\bar{I} = (I \setminus \{k\}) \cup \{l\}$ tagades eeldused 1)–3).

Kuidas muutub sihifunktsiooni väärtus simplekssammul?

$$\bar{a}^0 = a^0 - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a^k \Rightarrow \bar{a}_{00} = a_{00} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{k0}$$

Mittekidunud baasilahendi korral

$$\bar{a}_{00} = a_{00} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{k0} > a_{00}$$


Kidunud baasilahendi korral, kui $a_{k0} > 0$, siis $\bar{a}_{00} > a_{00}$. See on võimalik, kui kõigi nende indeksite $i \in I$ korral, kus $a_{i0} = 0$, kehtib $a_{il} \leq 0$, sest siis ei saa nende indeksite hulgast valida juhtrea indeksit.

Kidunud baasilahendi korral, kui $a_{k0} = 0$, $a_{kl} > 0$ ja rida indeksiga k on juhtrida, siis $\bar{a}_{00} = a_{00}$.

Järeldus

Kui ülesandel (1) on lahend olemas ja ei ole ühtegi kidunud lubatavat baasilahendit, siis suvalisest lubatavast baasilahendist algav simpleksmeetod annab lõpliku arvu sammudega optimaalse lahendi.