

MTMM.00.202 Optimiseerimismeetodid

Evely Kirsiaed

`evely.kirsiaed@ut.ee`

sügis 2020

6 Lineaarne planeerimine

- Leksikograafiline simpleksmeetod
- Duaalne simpleksmeetod
- Duaalse ja primaarse simpleksmeetodi järjestikune rakendamine
- Simplekstabeli veeruteisendused
- Leksikograafiline duaalne simpleksmeetod
- Kunstliku baasi meetod
- Lineaarse planeerimise ülesannete duaalsus

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	-1	2	0	2	0	0	0
0	0.5	-3.5	-2	4	1	0	0
0	0.5	-1	-0.5	0.5	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	-5	-4	10	2	0	0
0	1	-7	-4	8	2	0	0
0	0	2.5	1.5	-3.5	-1	1	0
1	0	7	4	-8	-2	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	-1	3	0	2	0
0	1	0	0.2	-1.8	-0.8	2.8	0
0	0	1	0.6	-1.4	-0.4	0.4	0
1	0	0	-0.2	1.8	0.8	-2.8	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	5	0	0	-6	-4	16	0
0	5	0	1	-9	-4	14	0
0	-3	1	0	4	2	-8	0
1	1	0	0	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0.5	1.5	0	0	-1	4	0
0	-1.75	2.25	1	0	0.5	-4	0
0	-0.75	0.25	0	1	0.5	-2	0
1	1	0	0	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	-3	6	2	0	0	-4	0
0	-3.5	4.5	2	0	1	-8	0
0	1	-2	-1	1	0	2	0
1	1	0	0	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	-1	2	0	2	0	0	0
0	0.5	-3.5	-2	4	1	0	0
0	0.5	-1	-0.5	0.5	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1

Jõudsime pärast kuut simplekssammu tagasi algtabelini.

On tõestatud, et 1) tsükel võib tekkida; 2) tsükel on vähemalt 6 sammu pikk; 3) tsükel saab tekkida, kui simplekstabeli veerus indeksiga 0 on vähemalt kaks elementi $a_{i0} = 0$, $i \in I$.

Leksikograafilises simpleksmeetodis täiustatakse juhtrea valiku reeglit.

Olgu $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. **Leksikograafiline järjestus** $\succ$ hulgas $\mathbb{R}^n$ defineeritakse kui

$$x \succ y \Leftrightarrow x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \vee \dots \vee \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n > y_n)$$

Näiteks $x \succ 0$ tähendab, et vektori x esimene nullist erinev komponent on positiivne.

Kui seos $x \geq y$ on vaid **osaline järjestus** (refleksiivne, antisümmeetriline, transitiivne), siis seos $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succ y \vee x = y$ on täielik ehk **lineaarne järjestus**, st $\forall x, y : x \succcurlyeq y \vee y \succcurlyeq x$.

Leksikograafilise simpleksmeetodi algoritm

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

Olgu A $m \times n$ maatriks, $\text{rank } A = m$.

Eeldame, et

- 1 süsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij}x_j = a_{i0}, \quad i \in I;$$

- 2 kehtib $a^i \succ 0$, $i \in I$;
- 3 vähemalt lubatavas hulgas

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j}x_j.$$

Leksikograafilise simpleksmeetodi algoritm

Eeldus 2) $\Rightarrow a_{i0} \geq 0, i \in I$.

Lubatavas simplekstabelis on eeldus 2) täidetud, kui baasilahend on mittekidunud, sest siis $a_{i0} > 0, i \in I$. Kidunud baasilahendi korral on eeldus 2) täidetud näiteks juhul $I = \{1, \dots, m\}$. Vajadusel võib veergude järjekorda muuta, tõstes ühikveerud algtabelis vasakule.

Eesmärk: simplekssammu korral uued read (va sihifunktsiooni rida) on leksikograafiliselt positiivsed, st $\bar{a}^i \succ 0, i \in \bar{I}$. Regulaarse baasilahendi korral see leiab aset. Üldiselt

$$a^k \succ 0, a_{kl} > 0 \Rightarrow \bar{a}^l = \frac{a^k}{a_{kl}} \succ 0,$$

$$a^i \succ 0, a^k \succ 0, a_{il} \leq 0 \Rightarrow \bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k \succ 0,$$

$$(a^i \succ 0, a^k \succ 0, a_{il} > 0 \Rightarrow \bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k \succ 0) \Leftrightarrow \frac{a^i}{a_{il}} \succ \frac{a^k}{a_{kl}}$$

Juhtrea valiku reegel:

$$\frac{a^k}{a_{kl}} = \text{lexmin} \left\{ \frac{a^i}{a_{il}} \mid a_{il} > 0, i \in I \right\}. \quad (1)$$

See reegel määrab juhtrea üheselt, sest read a^i , $i \in I$, on lineaarselt sõltumatud, seega võetakse leksikograafiline miinimum ridadest, mis on erinevad.

Kui simpleksmeetodi juhtrea valiku reegel

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{il}} \mid a_{il} > 0, i \in I \right\}$$

määrab juhtrea üheselt, siis $\frac{a_{i0}}{a_{il}} > \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$ iga $i \in I \setminus \{k\}$ korral kus $a_{il} > 0$, seega $\frac{a^i}{a_{il}} \succ \frac{a^k}{a_{kl}}$ iga $i \in I \setminus \{k\}$ korral kus $a_{il} > 0$, st kehtib (1).

Kuidas muutub tingimuse (1) täidetuse korral sihifunktsiooni rida?

$$a_{0l} < 0, a_{kl} > 0, a^k \succ 0 \Rightarrow \bar{a}^0 = a^0 - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a^k \succ a^0$$

Sihifunktsiooni rida kasvab leksikograafiliselt. Sihifunktsiooni väärtus ei pruugi kasvada, aga välistatud on jõudmine juba esinenud baasile. (Baasi valikuga on üheselt määratud eelduses 1) toodud süsteemi $Ax = b$ teisendatud kuju, mis omakorda määrab üheselt eelduses 3) toodud sihifunktsiooni kuju ehk sihifunktsiooni rea simplekstabelis.)

Järeldus

Kui lineaarse planeerimise ülesandel on lahend olemas, siis leksikograafiline simpleksmeetod annab lõpliku arvu sammudega optimaalse lahendi.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	-1	2	0	2	0	0	0
0	0.5	-3.5	-2	4	1	0	0
0	0.5	-1	-0.5	0.5	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	-5	-4	10	2	0	0
0	1	-7	-4	8	2	0	0
0	0	2.5	1.5	-3.5	-1	1	0
1	0	7	4	-8	-2	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	-1	3	0	2	0
0	1	0	0.2	-1.8	-0.8	2.8	0
0	0	1	0.6	-1.4	-0.4	0.4	0
1	0	0	-0.2	1.8	0.8	-2.8	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	$5/3$	0	$2/3$	$-2/3$	$8/3$	0
0	1	$-1/3$	0	$-4/3$	$-2/3$	$8/3$	0
0	0	$5/3$	1	$-7/3$	$-2/3$	$2/3$	0
1	0	$1/3$	0	$4/3$	$2/3$	$-8/3$	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0	2	0	2	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	2	1	-1	0	-2	1
3/2	0	1/2	0	2	1	-4	3/2

Simplekstabel on lubatav ja duaalselt lubatav $\Rightarrow x^* = (1, 0, 1, 0, 3/2, 0, 0)$ on ülesande

$$x_1 - x_2 - x_4 \rightarrow \max$$

$$0.5x_1 - 3.5x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 0$$

$$0.5x_1 - x_2 - 0.5x_3 + 0.5x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x \geq 0$$

lahend.

Duaalne simpleksmeetod

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

Olgu A $m \times n$ maatriks, $\text{rank } A = m$.

Eeldame, et

- ① süsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij}x_j = a_{i0}, \quad i \in I;$$

- ② vähemalt lubatavas hulgas

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j}x_j;$$

- ③ kehtib $a_{0j} \geq 0$, $j \in J$, st simplekstabel on duaalselt lubatav.

Duaalne simpleksmeetod

Eesmärk liikuda naaberbaasile nii, et säiliks duaalne lubatavus ning tabel muutuks lubatavaks.

1) Juhtrea valik: $k \in I : a_{k0} < 0$

2) Juhtelemendi valik: $a_{kl} < 0$, sest siis $\bar{a}_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}} > 0$, lisaks

$$\frac{a_{0l}}{|a_{kl}|} = \min \left\{ \frac{a_{0j}}{|a_{kj}|} \mid a_{kj} < 0, j \in J \right\}.$$

Kui reas a^k pole negatiivseid elemente peale a_{k0} , siis lubatava hulga elemendi $x \geq 0$ korral

$$x_k + \sum_{j \in J} a_{kj} x_j = a_{k0},$$

$\begin{matrix} \nearrow 0 & & \nearrow 0 & \nearrow 0 & \nearrow 0 \end{matrix}$

mis on vastuolu. Seega samm 2) on alati teostatav.

3) Simplekssamm

$$\bar{a}^I = \frac{a^k}{a_{kl}}, \quad \bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \quad i \in (I \setminus \{k\}) \cup \{0\}.$$

Miks säilib simplekstabeli duaalne lubatavus?

$$\bar{a}^0 = a^0 - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a^k \Rightarrow \bar{a}_{0j} = a_{0j} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{kj}, \quad j \in I \cup J \cup \{0\}$$

Kui $a_{kj} \geq 0$, siis $\bar{a}_{0j} \geq 0$, see kehtib kindlasti $j \in I$ korral, sest $a_{kk} = 1$ ja $a_{kj} = 0$, $j \in I \setminus \{k\}$. Kui $a_{kj} < 0$, mis saab olla ainult $k \in J$ korral, siis

$$a_{0j} - \frac{a_{0l}}{a_{kl}} a_{kj} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a_{0j}}{|a_{kj}|} \geq \frac{a_{0l}}{|a_{kl}|} \Leftrightarrow \frac{a_{0l}}{|a_{kl}|} = \min \left\{ \frac{a_{0j}}{|a_{kj}|} \mid a_{kj} < 0, j \in J \right\}$$

Kuidas muutub sihifunktsioon?

$$\bar{a}_{00} = a_{00} - \frac{a_{0l} \overset{\nearrow 0}{\phantom{a_{0l}}} a_{k0} \overset{\nwarrow 0}{\phantom{a_{k0}}} \leq a_{00}$$

Sihifunktsiooni väärtus väheneb või jääb samaks. (Asume algse baasilahendiga väljaspool lubatavat hulka, seega on see vähenemine loogiline.)

$$-x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	1	3	0	0	0
2	-2	1	0	1	0	0
-1	-2	-1	-1	0	1	0
-3	1	-1	-2	0	0	1

Baasilahend $(0, 0, 0, 2, -1, -3)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	1	0	1	0	0	1
-1	-1	0	-2	1	0	1
2	-3	0	1	0	1	-1
3	-1	1	2	0	0	-1

Baasilahend $(0, 3, 0, -1, 2, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-7/2$	$1/2$	0	0	$1/2$	0	$3/2$
$1/2$	$1/2$	0	1	$-1/2$	0	$-1/2$
$3/2$	$-7/2$	0	0	$1/2$	1	$-1/2$
2	-2	1	0	1	0	0

Baasilahend $(0, 2, 1/2, 0, 3/2, 0) = x^*$, sihifunktsiooni $c \cdot x^* = -7/2$.

Simpleksmeetodit nimetatakse vajadusel primaarseks simpleksmeetodiks.

Simpleksmeetod on ka üldnimi kõigile meetoditele, mis kasutavad simplekssammu (primaarne, duaalne, leksikograafiline, . . .), erinevus seisneb juhtelemendi valikus, sellele järgnev simplekssamm on kõigil ühine. Kõik need meetodid annavad optimaalse baasilahendi, kui ülesandel on lahend olemas ja ei teki tsüklit.

Duaalse ja primaarse s.m. järjestikune rakendamine

Vaatleme kanoonilisel kujul olevat ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

Olgu A $m \times n$ maatriks, $\text{rank } A = m$.

Eeldame, et

- 1 süsteem $Ax = b$ on viidud kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = a_{i0}, \quad i \in I;$$

- 2 vähemalt lubatavas hulgas

$$c \cdot x = a_{00} - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j.$$

Duaalse ja primaarse s.m. järjestikune rakendamine

Primaarse simpleksmeetodi kasutamise eelduseks oli simplekstabeli lubatavus ($a_{i0} \geq 0, i \in I$), duaalse simpleksmeetodi eelduseks duaalne lubatavus ($a_{0j} \geq 0, j \in J$). Oletame, et tabel ei ole lubatav ega duaalselt lubatav.

Siis lisatakse tabelisse fiktiivse sihifunktsiooni rida – baasiveergude kohale arvud 0 ja baasiväliste veergude kohale suvalised mittenegatiivsed arvud. Duaalse simpleksmeetodi abil leitakse lubatav baasilahend. Primaarse simpleksmeetodi ja õige sihifunktsiooni abil leitakse optimaalne lahend. Mõlemas etapis võib kasutada leksikograafilist varianti.

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
0	-1	-3	0	0
1	1	1	1	0
-2	$\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$	0	1

$$-(-1)x_1 - (-3)x_2 \rightarrow \max$$

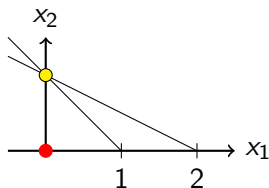
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_4 = -2$$

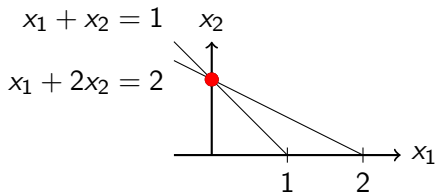
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

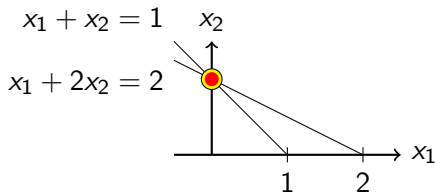
$$x_1 + 2x_2 = 2$$



	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
3	1/2	0	0	-3/2
0	1/2	0	1	1/2
1	1/2	1	0	-1/2



	x_1	x_2	x_3	x_4
3	2	0	3	0
0	1	0	2	1
1	1	1	1	0



$$x^* = (0, 1, 0, 0), \quad c \cdot x^* = 3$$

Vähendatud simplekstabel

Vaatleme süsteemile

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = a_{i0}, \quad i \in \{0\} \cup I; \quad (2)$$

vastavat simplekstabelit, kus juhtelement a_{kl} on valitud. Seejärel teostatakse simplekssamm

$$\bar{a}^l = \frac{a^k}{a_{kl}}, \quad \bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}).$$

Reateisendused – simplekssamm, mille käigus ridadelt a^i , $i \in \{0\} \cup I$, minnakse üle ridadele $\bar{a}^i$, $i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}) \cup \{l\}$.

Vähendatud simplekstabelis jäetakse ühikveerud tabelisse kirjutamata.

Vähendatud simplekstabel

	x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n
a_{00}	0	...	0	...	0	$a_{0,m+1}$	...	a_{0l}	...	a_{0n}
a_{10}	1	...	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1l}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{k0}	0	...	1	...	0	$a_{k,m+1}$	...	a_{kl}	...	a_{kn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_{m0}	0	...	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{ml}	...	a_{mn}

	1	$-x_{m+1}$	...	$-x_l$	...	$-x_n$
x_0	a_{00}	$a_{0,m+1}$	...	a_{0l}	...	a_{0n}
x_1	a_{10}	$a_{1,m+1}$	...	a_{1l}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
x_k	a_{k0}	$a_{k,m+1}$	...	a_{kl}	...	a_{kn}
...	...	...	...	...	...	...
x_m	a_{m0}	$a_{m,m+1}$	...	a_{ml}	...	a_{mn}

Vähendatud simplekstabel

	1	$-x_{m+1}$	$\dots$	$-x_l$	$\dots$	$-x_n$
x_0	a_{00}	$a_{0,m+1}$	$\dots$	a_{0l}	$\dots$	a_{0n}
x_1	a_{10}	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1l}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	a_{k0}	$a_{k,m+1}$	$\dots$	a_{kl}	$\dots$	a_{kn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	a_{m0}	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{ml}	$\dots$	a_{mn}

Võrdused (2) kujul

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in \{0\} \cup I,$$

tähendavad seda, et x_i , $i \in \{0\} \cup I$, on võrdne tabeli ülaseravas oleva rea ja i -nda rea skalaarkorrutisega.

Vähendatud simplekstabel

	x_1	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n
$\bar{a}_{10}$	1	...	$\bar{a}_{1k}$	...	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{1n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_{l0}$	0	...	$\bar{a}_{lk}$	...	0	$\bar{a}_{l,m+1}$	...	1	...	$\bar{a}_{ln}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_{m0}$	0	...	$\bar{a}_{mk}$	...	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	...	0	...	$\bar{a}_{mn}$

	1	$-x_{m+1}$	...	$-x_k$	...	$-x_n$
x_0	$\bar{a}_{00}$	$\bar{a}_{0,m+1}$	...	$\bar{a}_{0k}$	...	$\bar{a}_{0n}$
x_1	$\bar{a}_{10}$	$\bar{a}_{1,m+1}$	...	$\bar{a}_{1k}$	...	$\bar{a}_{1n}$
...	...	...	...	...	...	...
x_l	$\bar{a}_{l0}$	$\bar{a}_{l,m+1}$	...	$\bar{a}_{lk}$	...	$\bar{a}_{ln}$
...	...	...	...	...	...	...
x_m	$\bar{a}_{m0}$	$\bar{a}_{m,m+1}$	...	$\bar{a}_{mk}$	...	$\bar{a}_{mn}$

Vähendatud simplekstabel

	1	$-x_{m+1}$	$\dots$	$-x_k$	$\dots$	$-x_n$
x_0	$\bar{a}_{00}$	$\bar{a}_{0,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{0k}$	$\dots$	$\bar{a}_{0n}$
x_1	$\bar{a}_{10}$	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1k}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_l	$\bar{a}_{l0}$	$\bar{a}_{l,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{lk}$	$\dots$	$\bar{a}_{ln}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$\bar{a}_{m0}$	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mk}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$

Vähendatud simplekstabelis ei asetse veerud indeksite kasvamise järjekorras (ka read ei pruugi olla indeksite kasvamise järjekorras).

Vähendatud simplekstabelis esinevad ainult need elemendid a_{ij} , mis võivad arvutuste tulemusel muutuda.

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$-x_1 - 4x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -1$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	1	4	1
x_4	2	1	1	2
x_5	-1	-1	-2	-1
x_6	-1	1	-1	-2

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	1	4	1
x_4	2	1	1	2
x_5	-1	-1	-2	-1
x_6	-1	1	-1	-2

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_4	1	1	-1	1
x_1	1	-1	2	1
x_6	-2	1	-3	-3

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_6$
x_0	-1	1	2	0
x_4	1/3	4/3	-2	1/3
x_1	1/3	-2/3	1	1/3
x_3	2/3	-1/3	1	-1/3

$$x^* = (1/3, 0, 2/3, 1/3, 0, 0)$$

Algülesandes $x^* = (1/3, 0, 2/3)$, sihifunktsiooni minimaalne väärtus $c \cdot x^* = 1$ (kanoonilisele kujule viies muutsime sihifunktsiooni märki, et saada maksimiseerimisülesanne).

Vaatleme vähendatud simplekstabelit ja lisame selle ridadesse triviaalsed võrdused $x_j = -(-x_j)$, $j \in J$. Saame vähendatud simplekstabeli laiendi

	1	$-x_{m+1}$	...	$-x_l$	...	$-x_n$
x_0	a_{00}	$a_{0,m+1}$	...	a_{0l}	...	a_{0n}
x_1	a_{10}	$a_{1,m+1}$	...	a_{1l}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
x_k	a_{k0}	$a_{k,m+1}$	...	a_{kl}	...	a_{kn}
...	...	...	...	...	...	...
x_m	a_{m0}	$a_{m,m+1}$	...	a_{ml}	...	a_{mn}
x_{m+1}	0	-1	...	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...
x_l	0	0	...	-1	...	0
...	...	...	...	...	...	...
x_n	0	0	...	0	...	-1
	a_0	a_{m+1}	...	a_l	...	a_n

(3)

Pärast simpleksteisendust vähendatud tabeliga paneme kirja saadud tabeli laiendi, kuid säilitame sama ridade järjekorra mis tabelis (3)

	1	$-x_{m+1}$	$\dots$	$-x_k$	$\dots$	$-x_n$
x_0	$\bar{a}_{00}$	$\bar{a}_{0,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{0k}$	$\dots$	$\bar{a}_{0n}$
x_1	$\bar{a}_{10}$	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1k}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	0	0	$\dots$	-1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$\bar{a}_{m0}$	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{mk}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$
x_{m+1}	0	-1	$\dots$	0	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_l	$\bar{a}_{l0}$	$\bar{a}_{l,m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{lk}$	$\dots$	$\bar{a}_{ln}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	0	0	$\dots$	0	$\dots$	-1
	$\bar{a}_0$	$\bar{a}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_k$	$\dots$	$\bar{a}_n$

(4)

Veeruteisendusteks nimetame üleminekut tabeli (3) veergudele a_j , $j \in \{0\} \cup J$ tabeli (4) veergudele $\bar{a}_j$, $j \in \{0\} \cup \bar{J} = \{0\} \cup (J \setminus \{I\}) \cup \{k\}$. Eesmärk on tuletada veeruteisenduste eeskiri.

Kirjutame vähendatud simplekstabeli reateisendused

$$\bar{a}^I = \frac{a^k}{a_{kl}}, \quad \bar{a}^i = a^i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a^k, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}),$$

koordinaatide kaupa

$$\bar{a}_{lj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}} = \frac{-a_{kj}}{a_{kl}}(-1), \quad \bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{il}}{a_{kl}} a_{kj} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{il},$$
$$j \in \{0\} \cup (J \setminus \{I\}) \cup \{k\}, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}).$$

Juhul $j = k$ saame

$$\bar{a}_{lk} = \frac{-a_{kk}}{a_{kl}}(-1) = -\frac{1}{a_{kl}}(-1), \quad \bar{a}_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{kk}}{a_{kl}} a_{il} = -\frac{1}{a_{kl}} a_{il},$$

sest $a_{kk} = 1$ ja $a_{ik} = 0$, $i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\})$.

Ühendame võrdused veergude kaupa. Veerus indeksiga k on elemendid

$$\bar{a}_{lk} = -\frac{1}{a_{kl}}(-1) = -\frac{1}{a_{kl}}a_{ll},$$

$$\bar{a}_{ik} = -\frac{1}{a_{kl}}a_{il}, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}),$$

$$\bar{a}_{kk} = -1 = -\frac{1}{a_{kl}}a_{kl},$$

$$\bar{a}_{jk} = 0 = -\frac{1}{a_{kl}} \underbrace{a_{jl}}_{=0}, \quad j \in J \setminus \{l\},$$

seega

$$\bar{a}_k = -\frac{1}{a_{kl}}a_l. \tag{5}$$

Veerus indeksiga $j \in \{0\} \cup J \setminus \{I\}$ on elemendid

$$\bar{a}_{lj} = \underbrace{0}_{a_{lj}} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \underbrace{(-1)}_{a_{ll}},$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{il}, \quad i \in \{0\} \cup (I \setminus \{k\}),$$

$$\bar{a}_{kj} = 0 = a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{kl},$$

$$\bar{a}_{ij} = 0 = \underbrace{a_{ij}}_{0, i \neq j} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \underbrace{a_{il}}_{0, i \neq I}, \quad i \in J \setminus \{I, j\},$$

$$\bar{a}_{jj} = -1 = \underbrace{a_{jj}}_{-1} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \underbrace{a_{jl}}_{0, j \neq I}, \quad j \neq 0.$$

Seega

$$\bar{a}_j = a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_I, \quad j \in \{0\} \cup J \setminus \{I\}. \quad (6)$$

Veeruteisendused (5), (6) on kujul

$$\bar{a}_k = -\frac{1}{a_{kl}}a_l, \quad \bar{a}_j = a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}}a_l, \quad j \in \{0\} \cup J \setminus \{l\}.$$

Teoreem 1

Vähendatud simplekstabelis tehtav reateisendus ühtib vähendatud simplekstabeli laiendis tehtava veeruteisendusega (5), (6).

Võrreldes reateisendusega, kus juhtveerg teisendatakse ühikveeruks, on veeruteisendus selline, et juhtrida teisendatakse miinus-ühikreaks.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	1	4	1
x_4	2	1	1	2
x_5	-1	-1	-2	-1
x_6	-1	1	-1	-2

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_4	1	1	-1	1
x_1	1	-1	2	1
x_6	-2	1	-3	-3

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	0	1	4	1
x_1	0	-1	0	0
x_2	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1
x_4	2	1	1	2
x_5	-1	-1	-2	-1
x_6	-1	1	-1	-2

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_1	1	-1	2	1
x_2	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1
x_4	1	1	-1	1
x_5	0	-1	0	0
x_6	-2	1	-3	-3

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_4	1	1	-1	1
x_1	1	-1	2	1
x_6	-2	1	-3	-3

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_6$
x_0	-1	1	2	0
x_4	1/3	4/3	-2	1/3
x_1	1/3	-2/3	1	1/3
x_3	2/3	-1/3	1	-1/3

$$x^* = (1/3, 0, 2/3, 1/3, 0, 0)$$

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
x_0	-1	1	2	0
x_1	1	-1	2	1
x_2	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1
x_4	1	1	-1	1
x_5	0	-1	0	0
x_6	-2	1	-3	-3

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_6$
x_0	-1	1	2	0
x_1	1/3	-2/3	1	1/3
x_2	0	0	-1	0
x_3	2/3	-1/3	1	-1/3
x_4	1/3	4/3	-2	1/3
x_5	0	-1	0	0
x_6	0	0	0	-1

Leksikograafiline duaalne simpleksmeetod

Veeruteisendustega tehakse simplekssamm, st minnakse ühelt baasilahendilt teisele. Nii primaarse kui duaalse simpleksmeetodi võib realiseerida veeruteisendustega. Seega ka veeruteisendustes on võimalik tsükli tekkimine.

Leksikograafilises duaalses simpleksmeetodis eeldame, et tabelis (3) on veerud $a_j, j \in J$, leksikograafiliselt positiivsed, see tagab duaalse lubatavuse.

Valime juhtrea $k \in I$ nii, et $a_{k0} < 0$. Valime juhtveeru $l \in J$ (st juhtelemendi a_{kl}) nii, et säilib duaalne lubatavus ning veerud $\bar{a}_j, j \in \bar{J}$, on leksikograafiliselt positiivsed:

$$\frac{a_l}{|a_{kl}|} = \text{lexmin} \left\{ \frac{a_j}{|a_{kj}|} \mid a_{kj} < 0, j \in J \right\}. \quad (7)$$

Leksikograafiline duaalne simpleksmeetod

Miks säilib duaalne lubatavus ning miks veerud $\bar{a}_j$, $j \in \bar{J}$, on leksikograafiliselt positiivsed?

Eeldasime, et $a_I \succ 0$, seega $\bar{a}_k = -\frac{1}{a_{kl}}a_I \succ 0 \Leftrightarrow a_{kl} < 0$. Kui $j \in J \setminus \{I\}$, siis

$$\bar{a}_j = a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}}a_I \succ 0 \Leftrightarrow a_{kj} \geq 0 \text{ või } (a_{kj} < 0 \text{ ja kehtib (7)}),$$

sest $a_{kj} < 0$ korral

$$a_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}}a_I \succ 0 \Leftrightarrow a_j \succ \frac{|a_{kj}|}{|a_{kl}|}a_I \Leftrightarrow \frac{a_j}{|a_{kj}|} \succ \frac{a_I}{|a_{kl}|}.$$

Leksikograafiline duaalne simpleksmeetod

Veeruteisendustega meetodit, mis kasutab juhtveeru valiku reeglit (7), nimetatakse **leksikograafiliseks duaalseks simpleksmeetodiks**.

Reegel (7) määrab juhtveeru üheselt, sest $a_j, j \in J$, on lineaarselt sõltumatud, mistõttu ei saa $a_{kj} < 0, j \in J$, korral veergude $\frac{a_j}{|a_{kj}|}$ hulgas olla kahte võrdset.

Võrdus (6) juhul $j = 0$ annab

$$\bar{a}_0 = a_0 - \frac{a_{k0}}{a_{kl}} a_l \prec a_0.$$

St veerus a_0 sihifunktsiooni väärtus a_{00} kas väheneb või jääb samaks, veerg ise väheneb leksikograafilise järjestuse mõttes, seega ei ole võimalik jõuda juba esinenud baasile.

Lause

Kui lineaarse planeerimise ülesandel on lahend olemas, siis leksikograafiline duaalne simpleksmeetod on lõplik.

Leksikograafilises (primaarses) simpleksmeetodis piisas tabeli lubatavusest selleks, et read oleks leksikograafiliselt positiivsed, vajadusel tuli muutujate (st veergude) järjekorda muuta. Leksikograafilises duaalses simpleksmeetodis ei piisa duaalsest lubatavusest, et veerud oleks leksikograafiliselt positiivsed, muutujate (st ridade) järjestuse muutmine ei pruugi aidata, sest miinus-ühikridade ülespoole tõstmine ei tee veerge leksikograafiliselt positiivseks. Tuleks kasutada fiktiivset sihifunktsiooni

$$\tilde{c} \cdot x = \sum_{j \in J} (-x_j).$$

Lineaarse planeerimise ülesande lahendamine simpleksmeetodiga:

- 1 Viia ülesanne kanoonilisele kujule;
- 2 eraldada ühikvektoritest baas (nt Gaussi elimineerimismetodiga);
- 3 duaalse simpleksmeetodiga (fiktiivse sihifunktsiooniga) jõuda lubatava baasilahendini (vajadusel kasutada leksikograafilist varianti ja veeruteisendusi);
- 4 primaarse simpleksmeetodiga (vajadusel leksikograafilise variandiga) õige sihifunktsiooni juhul leida optimaalne lahend.

Leksikograafilise variandi kasutamise asemel on võimalik tsükli vältimiseks kasutada ka Blandi strateegiat: alati valitakse minimaalse indeksiga veerg ja rida.

(Tõestus konspektis)

Kunstliku baasi meetod

Vaatleme ülesannet

$$\max\{c \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

kus A on $m \times n$ maatriks, $\text{rank } A = m$. Kirjutame selle ülesande nii, et $b \geq 0$ (vajadusel korrutame mõne võrrandi läbi arvuga -1). Võtame kasutusele lisamuutujad $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ ja moodustame laiendatud ülesande

$$c \cdot x - M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n + m$$

kus M on suur positiivne arv. Lisamuutujad $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ võtame baasimuutujateks ($I = \{n + 1, \dots, n + m\}$), sihifunktsioonist elimineerime baasimuutujad.

Kunstliku baasi meetod

Laiendatud ülesande lubatava lahendi $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})$ n esimest komponenti $x = (x_1, \dots, x_n)$ on algülesande lubatav lahend parajasti siis, kui $x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0$.

Laiendatud ülesandel on lubatav lahend alati olemas $\bar{x} = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ ja ta on ka lubatav baasilahend. Algülesandel ei tarvitse lubatavat lahendit olla.

Kui laiendatud ülesande optimaalses lahendis $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{n+m}^*)$ on $x_{n+1}^* = \dots = x_{n+m}^* = 0$, siis $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ on algülesande optimaalne lahend, sihifunktsioonide väärtused ühtivad.

Kui algülesandel on lahend olemas, siis eksisteerib $M_0 > 0$ nii, et iga $M \geq M_0$ korral on laiendatud ülesanne lahenduv ja tema iga optimaalne lahend $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{n+m}^*)$ on selline, et $x_{n+1}^* = \dots = x_{n+m}^* = 0$.

(Tõestused konspektis.)

Kui võtta M küllalt suur, siis võib algülesande asemel lahendada laiendatud ülesande – **kunstliku baasi meetod**. Kuna laiendatud ülesande algtabel on alati lubatav ning baas on eraldatud, jääb ära nii baasi eraldamise kui duaalse simpleksmeetodi etapp, et jõuda lubatava baasilahendini.

Teostada tuleb simpleksmeetodi etapp optimaalse lahendi leidmiseks.

Ei ole algoritmi selle kohta, kui suur M tuleb valida. Kui ei õnnestu optimaalset lahendit leida (st mingi $k \geq 1$ korral $x_{n+k} \neq 0$), siis võib arvu M suurendada. Kui algülesandel ei ole lahendit, siis M suurendamine ei vii sihile.

Definitsioon

Olgu A $m \times n$ matriks, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Põhikujul oleva ülesande

$$\max\{c \cdot x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (1)$$

duaalseks ülesandeks nimetatakse ülesannet

$$\min\{b \cdot y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}. \quad (2)$$

Lause

Ülesande (2) duaalseks ülesandeks on ülesanne (1), st duaalsus on vastastikune.

Duaalsete ülesannete mõiste

Duaalsuse juures esinevad järgmised vastavused:

- 1 Üks on maksimiseerimisülesanne, teine minimiseerimisülesanne.
- 2 Põhikitsendustes on ühes $\leq$, teises $\geq$.
- 3 Vabaliikmete vektor ja sihifunktsiooni vektor vahetavad kohad, põhikitsenduste arv ja muutujate arv samuti.
- 4 Põhikitsenduste matriksid on vastastikku transponeeritud.

Näide 1

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$3y_1 + 4y_2 \rightarrow \min$$

$$3y_1 - y_2 \geq 1$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Duaalsete ülesannete omadused

Vaatleme ülesandeid (1) ja (2).

Lause 1

Kui x ja y on vastavalt ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid, siis $c \cdot x \leq b \cdot y$.

Lause 2

Kui ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid x^ ja y^* rahuldavad võrdust $c \cdot x^* = b \cdot y^*$, siis x^* ja y^* on nende ülesannete optimaalsed lahendid.*

Lause 3

Kui ülesande (1) sihifunktsioon on lubatavas hulgas ülalt tõkestamata, siis ülesande (2) lubatav hulk on tühi; kui ülesande (2) sihifunktsioon on lubatavas hulgas alt tõkestamata, siis ülesande (1) lubatav hulk on tühi.

Lineaarse planeerimise põhiteoreemid

Teoreem 1

Kui ühel duaalsetest ülesannetest on olemas optimaalne lahend, siis on optimaalne lahend olemas ka teisel ja sihifunktsioonide ekstremaalsed väärtused ühtivad.

Järeldus 1

Selleks, et ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid x ja y oleksid optimaalsed, on tarvilik ja piisav, et $c \cdot x = b \cdot y$.

Tõestus. $\overset{T1}{\Rightarrow}, \overset{L2}{\Leftarrow}$



Järeldus 2

Kanoonilisele kujule viidud ülesande (1) optimaalsele baasilahendile vastavas simplekstabelis on sihifunktsiooni reas lisamuutujate kordajate vektor duaalse ülesande lahend.

Lineaarse planeerimise põhiteoreemid

Lemma (lemma lubatava hulga esitusest)

Hulk $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ koosneb elementidest kujul

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^q \mu_j e^j, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0,$$

kus $x^1, \dots, x^p$ on hulga Ω tipud, $e^1, \dots, e^q$ hulga Ω tõkestamata servade sihivektorid.

(Ei tõesta)

Kui $\Omega \neq \emptyset$, siis siis hulgal Ω on vähemalt üks tipp.

Järeldus 3

Kui ülesande (1) sihifunktsioon on lubatavas hulgas Ω ülalt tõkestatud, siis ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend.

Lineaarse planeerimise põhiteoreemid

Teoreem 2

Lineaarse planeerimise ülesandel (1) on olemas optimaalne lahend parajasti siis, kui temal ja temaga duaalsel ülesandel (2) on olemas lubatav lahend.

Teoreem 3

Ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid x^ ja y^* on optimaalsed parajasti siis, kui kehtivad järgmised ortogonaalsuse tingimused*

$$(Ax^* - b) \cdot y^* = 0 \quad \text{ja} \quad (A^T y^* - c) \cdot x^* = 0$$

ehk

$$\begin{aligned}(a^i \cdot x^* - b_i)y_i^* &= 0, & i &= 1, \dots, m, \\ (a_j \cdot y^* - c_j)x_j^* &= 0, & j &= 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Järeldus 4

Kui ülesande (1) või (2) optimaalse lahendi mingi komponent on rangelt positiivne, siis sama indeksiga põhikitsendus teises ülesandes on rahuldatud võrdusena:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow a_j \cdot y^* = c_j \text{ ja } y_i^* > 0 \Rightarrow a^i \cdot x^* = b_i.$$

Järeldus 5

Kui ülesandes (1) või (2) on optimaalse lahendi korral mingi põhikitsendus rahuldatud range võrratusena, siis teise ülesande optimaalse lahendi sama indeksiga komponent on 0:

$$a^i \cdot x^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \text{ ja } a_j \cdot y^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0.$$

Algülesanne

$$x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Duaalne ülesanne

$$2y_1 + 2y_2 \rightarrow \min$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

0	-1	-1	-1	0	0
2	2	1	2	1	0
2	4	2	1	0	1
1	1	0	-1/2	0	1/2
1	0	0	3/2	1	-1/2
1	2	1	1/2	0	1/2
4/3	1	0	0	1/3	1/3
2/3	0	0	1	2/3	-1/3
2/3	2	1	0	-1/3	2/3

$$x^* = (0, 2/3, 2/3), y^* = (1/3, 1/3)$$

$$c \cdot x^* = b \cdot y^*$$

$$2x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 2, y_1^* > 0$$

$$4x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 2, y_2^* > 0$$

$$2y_1^* + 4y_2^* > 1, x_1^* = 0$$

$$y_1^* + 2y_2^* = 1, x_2^* > 0$$

$$2y_1^* + y_2^* = 1, x_3^* > 0$$