

Mõnda projektiivsest geomeetriast

Selles peatükis vaatleme projektiivset ruumi ja projektiivseid teisendusi. Kogu käsitus toimub aksiomaatiliselt.

Lähtepunktina peab jälle olema ette antud mingi vektorruum $\mathbf{V} \neq 0$ (põhiliselt vaatleme vektorruume üle reaalarvude korpuse).

Projektiivse ruumi mõiste

Definitsioon 1. Mittetühja hulka $\mathcal{P}$ nimetatakse *projektiivseks ruumiks*, kui leidub vektorruum $\mathbf{V}$ (üle korpuse K) ja kujutus $\pi: \mathbf{V}' \rightarrow \mathcal{P}$, kus $\mathbf{V}' := \mathbf{V} \setminus \{0\}$, millel on omadused

1° $\pi(\mathbf{V}') = \mathcal{P}$ (π on sürjektiivne),

2° mistahes vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}'$ korral $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K : \vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Projektiivse ruumi $\mathcal{P}$ elemente $A, B, \dots, X, Y, \dots$ nimetatakse *punktideks*.

On ilmne, et tingimuses 2° arv λ ei võrdu nulliga. (Nimelt $\vec{x} \neq \vec{0}$ ja $\vec{y} \neq \vec{0}$.) Seega on ka ilmne, et tingimus 2° on korrektne: kui $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$, siis $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, millest $\vec{x} = \lambda^{-1} \vec{y}$, seega $\pi(\vec{y}) = \pi(\vec{x})$.

Lause 1. Mistahes punkti $X \in \mathcal{P}$ korral hulk

$$\pi^{-1}(X) \cup \{\vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbf{V} : \pi(\vec{x}) = X\} \cup \{\vec{0}\}$$

on vektorruumi $\mathbf{V}$ ühemõõtmeline alamruum.

Tõestus. Olgu $X \in \mathcal{P}$ ning valime suvalise $\vec{x}_0 \in \pi^{-1}(X) \subset \mathbf{V}'$. (Selle $\vec{x}_0$ leidub, sest π on sürjektsioon.) Lause tõestamiseks veendume, et $\langle \vec{x}_0 \rangle = \pi^{-1}(X) \cup \{\vec{0}\}$.

Olgu $\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$, siis $\pi(\vec{x}_0) = X = \pi(\vec{x})$. Aksioomi 2° kohaselt leidub λ nii, et $\vec{x} = \lambda \vec{x}_0$. Siit järelneb, et $\pi^{-1}(X) \subset \langle \vec{x}_0 \rangle$.

Teiselt poolt, olgu $\vec{x} = \lambda \vec{x}_0$. Kui $\lambda \neq 0$, siis aksioomi 2° kohaselt $\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$. $\square$

Definitsioon 2. Kui projektiivse ruumiga $\mathcal{P}$ seotud vektorruumi $\mathbf{V}$ mõõde on $n + 1$, siis projektiivse ruumi *mõõtmeks* nimetatakse n . (Seega lubame ka nullmõõtmelist projektiivset ruumi.) Kui vektorruum $\mathbf{V}$ on lõpmatumõõtmeline, siis nimetatakse projektiivset ruumi $\mathcal{P}$ lõpmatumõõtmeliseks. n -mõõtmelist projektiivset ruumi tähistame $\mathcal{P}$ asemel $\mathcal{P}_n$ abil.

Definitsioon 3. Projektiivse ruumi $\mathcal{P}$ mittetühja alamhulka $\mathcal{Q}$ nimetatakse $\mathcal{P}$ alamruumiks, kui $\pi^{-1}(\mathcal{Q}) \cup \{\vec{0}\}$ on vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruum.

Definitsioon ütleb, et projektiivse ruumi $\mathcal{P}$ alamruumid on kõik kujul $\pi(\mathbf{M}')$, kus $\mathbf{M}$ on vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruum. (Nimelt, lihtne hulgateooria kontroll näitab, et kirjutised $\pi(\mathbf{M}') = \mathcal{Q}$ ja $\pi^{-1}(\mathcal{Q}) = \mathbf{M}'$ on samaväärsed.)

Teoreem 2. Projektiivse ruumi iga alamruum on projektiivne ruum.

Tõestus. Olgu $\mathcal{Q}$ projektiivse ruumi $\mathcal{P}$ alamruum. Siis $\mathbf{M} := \pi^{-1}(\mathcal{Q}) \cup \{\vec{0}\}$ on $\mathbf{V}$ alamruum, $\mathbf{M}' := \mathbf{V} \setminus \{\vec{0}\} = \pi^{-1}(\mathcal{Q})$. Jääb kontrollida, et ahend $\pi|_{\mathbf{M}'}: \mathbf{M}' \rightarrow \mathcal{Q}$ defineerib projektiivse ruumi struktuuri hulgas $\mathcal{Q}$. Pealekujutus: $\pi(\mathbf{M}') = \pi(\pi^{-1}(\mathcal{Q})) = \mathcal{Q}$. Aksiom 2° kehtib suuremas hulgas $\mathbf{V}'$, seega ka väiksemas $\mathbf{M}'$. $\square$

Paneme tähele, et kui $\dim \mathcal{P} < \infty$, siis alamruumi $\mathcal{Q}$ mõõde on $\dim(\pi^{-1}(\mathcal{Q}) \cup \{\vec{0}\}) - 1$.

Definitsioon 4. Projektiivse ruumi ühemõõtmelist ja kahemõõtmelist alamruumi nimetatakse vastavalt *projektiivseks sirgeks* ja *projektiivseks tasandiks*.

Lause 3. Projektiivse ruumi $\mathcal{P}$ nullmõõtmeline alamruum $\mathcal{Q}_0$ koosneb ühest punktist.

Tõestus. Olgu meil vektorruumi $\mathbf{V}$ ühemõõtmeline alamruum $\mathbf{M}_1 = \langle \vec{x}_0 \rangle$ (kus $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$) nii, et $\pi(\mathbf{M}'_1) = \mathcal{Q}_0$. Seega $\mathcal{Q}_0$ on mittetühi. Vaatleme suvalist punkti $X \in \mathcal{Q}_0$, siis π sürjektiivsuse tõttu leidub $\vec{x} \in \mathbf{M}'_1$ omadusega $\pi(\vec{x}) = X$. Kuna $\vec{x} = \lambda \vec{x}_0$ mingi λ korral (kus $\lambda \neq 0$, muidu $\vec{x} \notin \mathbf{M}'_1$), siis $X = \pi(\vec{x}) = \pi(\vec{x}_0) =: X_0$. Saime, et hulga $\mathcal{Q}_0$ kõik punktid langevad kokku elemendiga X_0 . Seega $\mathcal{Q} = \{X_0\}$. $\square$

Järgnevalt toome näiteid projektiivsetest ruumidest.

Näide 1. Olgu antud suvaline vektorruum $\mathbf{V} \neq \{\vec{0}\}$ üle korpuse K . Defineerime hulgas $\mathbf{V}' = \mathbf{V} \setminus \{\vec{0}\}$ ekvivalentsusseose järgmiselt: $\vec{x} \sim \vec{y}$ parajasti siis, kui leidub $\lambda \in K$ omadusega $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. (Vahetu kontroll näitab, et seos $\sim$ on tõepoolest ekvivalentsusseos.) Seose $\sim$ järgi moodustub faktorhulk $\mathcal{P}(\mathbf{V}) := \mathbf{V}'/\sim$, mille elemendid (ekvivalentsiklassid) antakse valemiga

$$[\vec{x}] := \{\lambda \vec{x} : \lambda \in K \setminus \{0\}\}.$$

Tähistanud kujutuse $\pi: \mathbf{V}' \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{V})$, kus $\pi(\vec{x}) = [\vec{x}]$, saab kergesti kontrollida, et aksiomid 1° ja 2° on täidetud.

Näide 2. Olgu antud kolmemõõtmeline afinne ruum $\mathcal{A}_3$ sihiruumiga $\mathbf{V}_3$ (üle $\mathbb{R}$). Fikseerime temas mingi punkti O . Tähistame

$$S(O) = \{O + \lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\} =: \{O + \langle \vec{x} \rangle : \vec{x} \in \mathbf{V}_3'\}.$$

Hulka $S(O)$ nimetame afinse ruumi $\mathcal{A}_3$ *sirgesidumiks* keskpunktiga O . Osutub, et $S(O)$ on projektiivne ruum, kui anname kujutuse $\pi: \mathbf{V}_3' \rightarrow S(O)$ järgmiselt:

$$\pi(\vec{x}) = \{O + \lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \vec{x} \in \mathbf{V}_3'.$$

Aksioom 1° ilmselt kehtib. Aksioomi 2° kontrollimiseks vaatleme vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_3'$ jaoks olukorda $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ ehk

$$\{O + \lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{O + \mu \vec{y} : \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Viimasest võrdusest järeldub, et $O + \vec{y} = O + \lambda \vec{x}$ mingi λ korral. Afinse ruumi teise aksioomi kohaselt $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Teiselt poolt, kui $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, on võrduse (1) kehtivus vahetult näha.

Kuna $\dim S(O) = 2$, siis saadud sirgesidum on projektiivne tasand. Projektiivse tasandi ühemõõtmeline alamruum (projektiivne sirge) saadakse vektorruumi $\mathbf{V}_3$ suvalise kahemõõtmelise alamruumi $\mathbf{M}_2$ kaudu, leides $\pi(\mathbf{M}_2') \subset S(O)$. Hulk $\pi(\mathbf{M}_2')$ koosneb tasandil $O + \mathbf{M}_2$ asuvatest sirgetest. Seega projektiivne sirge koosneb sidumi keskpunkti läbivatest samal tasandil paiknevatest sirgetest.

Näide 3. Olgu eukleidilises ruumis $\mathcal{E}_3$ sihiruumiga $\mathbf{E}_3$ võetud sfäär S_2 keskpunktiga O ja raadiusega $r \neq 0$. Moodustame sirgesidumi $S(O)$. Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ korral tähistame $X := (O + \langle \vec{x} \rangle) \cap S_2$. Täpsemalt, $X = (X_1, X_2)$, kus X_1 ja X_2 on sirge $O + \langle \vec{x} \rangle$ ja sfääri S_2 lõikepunktid. (Me loeme $(X_1, X_2) = (X_2, X_1)$.)

Oleme saanud punktide hulga

$$\overline{S_2} := \{(O + \langle \vec{x} \rangle) \cap S_2 : O + \langle \vec{x} \rangle \in S(O)\} = \{(O + \langle \vec{x} \rangle) \cap S_2 : \vec{x} \in \mathbf{E}_3'\}.$$

Defineerime kujutuse $\pi: \mathbf{E}_3' \rightarrow \overline{S_2}$ seosega

$$\pi(\vec{x}) = (O + \langle \vec{x} \rangle) \cap S_2 = (X_1, X_2), \quad \vec{x} \in \mathbf{E}_3'.$$

Ilmselt π on sürjektiivne. Kui $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$, siis $(O + \langle \vec{x} \rangle) \cap S_2 = (O + \langle \vec{y} \rangle) \cap S_2$. Et kaks punkti määravad afiinses ruumis sirge, annab $(X_1, X_2) = (Y_1, Y_2)$ meile, et $O + \langle \vec{x} \rangle = O + \langle \vec{y} \rangle$, millest juba ülal saime, et $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ mingi λ korral. Aksioomide 1° ja 2° kehtivus on näidatud, järelikult $\overline{S_2}$ on projektiivne ruum (projektiivne tasand).

Analoogiliselt eelmise näitega võib kontrollida, et projektiivse sirge moodustavad sfääri S_2 punktipaarid, mis asuvad ühel ja samal punkti O sisaldaval tasandil (ehk sfääri S_2 mingil suuringjoonel).

Näide 4. Olgu meil afinne ruum $\mathcal{A}_3$ sihiruumiga $\mathbf{V}_3$. Olgu $S(O)$ sirgesidum keskpunktiga O ning olgu $\mathcal{A}_2$ fikseeritud tasand nõudega $O \notin \mathcal{A}_2$ sihiruumiga $\mathbf{M}_2$.

Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}'_3$ korral saame sidumi sirge $\mathcal{X} := O + \langle \vec{x} \rangle$. Kui $\vec{x} \notin \mathbf{M}'_2$, siis sirge $\mathcal{X}$ lõikab tasandit $\mathcal{A}_2$ täpselt ühes punktis X .

Meie eesmärk on defineerida kujutus π määramispiirkonnaga $\mathbf{V}'_3$, kus $\pi(\vec{x}) = X$ iga $\vec{x} \in \mathbf{V}'_3$ korral. Praeguseks on veel defineerimata vektorite $\vec{x}$ kujutised, kui $\vec{x} \in \mathbf{M}'_2$. Selliste kujutiste $\pi(\vec{x})$ defineerimiseks teostame järgmise konstruktsiooni.

Lisame tasandile $\mathcal{A}_2$ iga sirge $O + \langle \vec{x} \rangle$, kus $\vec{x} \in \mathbf{M}'_2$, jaoks uue elemendi (kõik sellised elemendid peavad olema erinevad ning erinevad ka $\mathcal{A}_2$ „vanadest“ punktidest). Selliseid uusi elemente nimetame *ebapunktideks* (ehk „lõpmata kaugeteks punktideks“). Olgu $\pi(\vec{x})$ vektorile $\vec{x}$ vastav ebapunkt. Olgu $\overline{\mathcal{A}_2}$ hulk, mis on saadud $\mathcal{A}_2$ punktide ja kõigi ebapunktide ühendina. Kokkuvõttes oleme saanud sürjektsiooni $\pi: \mathbf{V}'_3 \rightarrow \overline{\mathcal{A}_2}$.

Konstruktsiooni tõttu tähendab kirjutis $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$, et punktid (või ebapunktid) $X := \pi(\vec{x})$ ja $Y := \pi(\vec{y})$ on määratud sama sirge poolt (sirge määratakse ära kahe punktiga), seega $O + \langle \vec{x} \rangle = O + \langle \vec{y} \rangle$, mis afinse ruumi omaduste tõttu on samaväärne sellega, et mingi $\lambda \in \mathbb{R}$ korral $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Oleme saanud projektiivse tasandi $\overline{\mathcal{A}_2}$.

Vaatleme $\overline{\mathcal{A}_2}$ projektiivseid sirgeid. Selleks tuleb võtta mistahes alamruum $\mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{V}_3$ ja saame alamruumi $\pi(\mathbf{Q}'_2) \subset \overline{\mathcal{A}_2}$. Valides $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{M}_2$, saame sirge $\pi(\mathbf{M}'_2) = \overline{\mathcal{A}_2} \setminus \mathcal{A}_2$ ehk kõik ebapunktid. Seega kõik ebapunktid moodustavad projektiivse sirge. Nimetame seda sirget *ebasirgeks*. Kui aga $\mathbf{Q}_2 \neq \mathbf{M}_2$, siis $\pi(\mathbf{Q}'_2)$ on tasandi $\mathcal{A}_2$ sirge, millele tuleb lisada üks ebapunkt $\pi(\vec{x})$, kus $\vec{x} \in \mathbf{Q}'_2 \cap \mathbf{M}'_2$. Siit näeme, et projektiivne sirge on kinnine. (NB! Lõpmatu kauge punkt on tasandi $\mathcal{A}_2$ iga sirge jaoks üksainus, seega justkui „sirge mõlemas otsas“ olev lõpmatuspunkt on „üheks kokku kleebitud“.)

Projektiivse ruumi projektiivne reeper. Punkti koordinaadid

Meenutame, et afinse ruumi ja tema sihiruumi vaheline kujutus on bijektiivne. Selle bijektsiooni abil saab kergesti defineerida punkti koordinaadid tema koha-vektori koordinaatidena (olles enne fikseerinud afinses ruumis mingi punkti O). Ent projektiivset ruumi $\mathcal{P}$ ja vektorruumi $\mathbf{V}$ siduv kujutus π on ainult sürjektiivne. Teine aksioom küll selgitab, et injektiivsust „läheb kaduma“ ühe mõõtmega jagu. Siiski projektiivsete koordinaatide defineerimine on mõnevõrra keerukam võrreldes afinse ruumi juhuga.

Definitsioon 5. Projektiivse ruumi $\mathcal{P}$ punktisüsteemi $A_1, A_2, \dots, A_m$ nimetame

projektiivselt sõltumatuks (projektiivselt sõltuvaks), kui vektorsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, kus $\vec{a}_k \in \pi^{-1}(A_k)$, $k = 1, \dots, m$, on lineaarselt sõltumatu (lineaarselt sõltuv).

Kontroll näitab, et projektiivse sõltumatuse definitsioon on korrektne. Nimelt, kui valida esindajate $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ asemel $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \dots, \vec{a}_m'$, siis mingite nullist erinevate kordajate λ_k korral kehtivad seosed $\vec{a}_k' = \lambda_k \vec{a}_k$, $k = 1, \dots, m$. Seega süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui süsteem $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \dots, \vec{a}_m'$ on lineaarselt sõltumatu.

Lause 4. Olgu $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$. Punktisüsteem A_1, A_2 on projektiivselt sõltuv parajasti siis, kui $A_1 = A_2$.

Tõestus. Süsteemi A_1, A_2 on projektiivne sõltuvus on samaväärne sellega, et (suvaliste) esindajate $\vec{a}_1 \in \pi^{-1}(A_1)$ ja $\vec{a}_2 \in \pi^{-1}(A_2)$ korral kehtib $\vec{a}_2 = \mu \vec{a}_1$ mingi $\mu \in K$ jaoks. See on omakorda samaväärne sellega, et $\pi(\vec{a}_1) = \pi(\vec{a}_2)$ ehk $A_1 = A_2$. $\square$

Kuna vektorruumis $\mathbf{V}_{n+1}$ lin-sõltumatu vektorsüsteem saab koosneda ülimalt $n+1$ vektorist, siis projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ projektiivselt sõltumatu punktisüsteem saab koosneda ka ülimalt $n+1$ punktist. Järelikult kõik punktisüsteemid $A_1, A_2, \dots, A_m$, kus $m > n+1$, on projektiivselt sõltuvad.

Defineerime nüüd projektiivse reeperi mõiste.

Definitsioon 6. Öeldakse, et projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ $n+2$ punkti $E_0, E_1, \dots, E_n, E$ on *üldasendis*, kui mistahes ühe punkti väljajätmisel nende punktide seast saadakse projektiivselt sõltumatu punktide süsteem.

Definitsioon 7. Öeldakse, et vektorsüsteem $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}$ on *normeeritud*, kui $\vec{e} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n$.

Lause 5. Olgu antud projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ üldasendis punktid $E_0, E_1, \dots, E_n, E$. Siis saab leida esindajad $\vec{e}_i \in \pi^{-1}(E_i)$, $i = 0, \dots, n$, ja $\vec{e} = \pi^{-1}(E)$ nii, et vektorsüsteem $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}$ on normeeritud.

Tõestus. Valime vektorid $\vec{e}_k' \in \pi^{-1}(E_k)$, $k = 0, \dots, n$. Kuna $\vec{e}_0', \vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'$ on ruumi $\mathbf{V}_{n+1}$ baas, siis leiame kordajad ξ_k , $k = 0, \dots, n$, nii, et $\vec{e} = \sum_{k=0}^n \xi_k \vec{e}_k'$. Ilmselt kõik kordajad ξ_k on nullist erinevad. (Kui näiteks oletada, et $\xi_0 = 0$, siis leiaksime mittetriviaalse lahendi vektorvõrrandile $\eta_1 \vec{e}_1' + \dots + \eta_n \vec{e}_n' + \eta \vec{e} = \vec{0}$, nimelt $\eta_1 = \xi_1, \dots, \eta_n = \xi_n, \eta = -1$. Niisiis oleks süsteem $E_1, E_2, \dots, E_n, E$ projektiivselt sõltuv, vastuolu üldasendis olemisega.)

On jäänud tähistada $\vec{e}_0 = \xi_0 \vec{e}_0', \dots, \vec{e}_n = \xi_n \vec{e}_n'$. $\square$

Järgmine lause näitab, et antud üldasendis punktikogumile vastavaid normeeritud vektorsüsteeme polegi eriti palju: nad erinevad üksteisest ainult kordaja täpsuseni.

Lause 6. Olgu antud projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ üldasendis punktid $E_0, E_1, \dots, E_n, E$. Kui meil on kaks normeeritud vektorsüsteemi $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}$ ja $\vec{e}'_0, \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n, \vec{e}'$, kus $\vec{e}_k, \vec{e}'_k \in \pi^{-1}(E_k)$, $k = 0, \dots, n$, $\vec{e}, \vec{e}' \in \pi^{-1}(E)$, siis leidub konstant $\lambda \in K$ nii, et $\vec{e}'_k = \lambda \vec{e}_k$, $k = 0, \dots, n$, ja $\vec{e}' = \lambda \vec{e}$.

Tõestus. Olgu $\vec{e}'_k = \lambda_k \vec{e}_k$, kus $k = 0, 1, \dots, n$, ja $\vec{e}' = \lambda \vec{e}$, kusjuures kõik kordajad on nullist erinevad. Normeerituse tingimused annavad, et

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \vec{e}_k = \lambda \vec{e} = \lambda \left(\sum_{k=0}^n \vec{e}_k \right) = \sum_{k=0}^n \lambda \vec{e}_k.$$

Siit järeldub süsteemi $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ lin-sõltumatuse tõttu, et $\lambda_k = \lambda$ kõigi $k = 0, 1, \dots, n$ korral. $\square$

Definitsioon 8. Projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ üldasendis punktisüsteemi $\{E_0, E_1, \dots, E_n; E\}$ (lühidalt, $\{E_k; E\}$) nimetatakse projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ projektiivseks reeperiks. Punkte E_k nimetatakse baasipunktideks ja punkti E ühikpunktiks.

Definitsioon 9. Punkti $X \in \mathcal{P}_n$ projektiivseteks koordinaatideks (ehk lihtsalt koordinaatideks) projektiivses reeperis $\{E_k; E\}$ nimetatakse vektori $\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$ koordinaate baasil $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, kus $\vec{e}_k \in \pi^{-1}(E_k)$, $\vec{e} \in \pi^{-1}(E)$ ning vektorsüsteem $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}$ on normeeritud. Projektiivseid koordinaate nimetatakse sageli ka *homogeenseteks koordinaatideks*.

Punkti $X \in \mathcal{P}_n$ koordinaate tähistatakse $X(\lambda x^k)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, või $X(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$.

Paneme näiteks tähele, et $E_0(1 : 0 : \dots : 0)$ ehk $E_0(\lambda : 0 : \dots : 0)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Analoogiliselt $E_1(0 : 1 : 0 : \dots : 0)$, $\dots$, $E_n(0 : 0 : \dots : 0 : 1)$ ja $E(1 : 1 : \dots : 1)$.

Ilmselt punkti koordinaadid ei ole üheselt määratud, kuna esindajavektoreid võib valida paljudel viisidel. Me saame järgmised tähelepanekud.

1. Ühegi punkti $X \in \mathcal{P}_n$ koordinaadid ei saa olla korraga nullid. Tõepoolest, $\vec{x} = 0\vec{e}_0 + 0\vec{e}_1 + \dots + 0\vec{e}_n = \vec{0} \notin \mathbf{V}'$.
2. Punkti $X \in \mathcal{P}_n$ koordinaadid on määratud kordaja täpsuseni. Veendume selles.

Normeeritud vektorsüsteemid erinevad üksteisest kordaja täpsuseni. Olgu niisiis punkti X , kus $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{x}') = X$ ja $\vec{x}' = \mu\vec{x}$, $\mu \neq 0$, koordinaadid antud kahel viisil:

$$\vec{x} = \sum_{k=0}^n x^k \vec{e}_k, \quad \vec{x}' = \sum_{k=0}^n {}'x^k \vec{e}_k',$$

kus $\vec{e}_n' = \lambda \vec{e}_n$, $\lambda \neq 0$. Saame, et

$$\sum_{k=0}^n {}'x^k \lambda \vec{e}_k = \sum_{k=0}^n {}'x^k \vec{e}_k' = \vec{x}' = \mu \vec{x} = \sum_{k=0}^n \mu x^k \vec{e}_k,$$

millest $'x^k \lambda = \mu x^k$ ehk $'x^k = \frac{\mu}{\lambda} \cdot x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Saime, et koordinaadid $'x^0 : 'x^1 : \dots : 'x^n$ on koordinaatidest $x^0 : x^1 : \dots : x^n$ saadud konstandiga $\frac{\mu}{\lambda}$ korrumtamise teel.

Koordinaatide vahele koolonite panemine ongi kombeks seetõttu, et rõhutada: tegelik tähtsus on koordinaatide suhetel.

3. Kui punkti X koordinaadid reeperi $\{E_k; E\}$ suhtes on $x^0 : x^1 : \dots : x^n$ ja reeperi $\{F_k; F\}$ suhtes on $y^0 : y^1 : \dots : y^n$, siis saab anda harjumuspäraseid teisendusvalemid

$$\begin{aligned} y^0 &= \lambda c_{00} x^0 + \lambda c_{01} x^1 + \dots + \lambda c_{0n} x^n, \\ y^1 &= \lambda c_{10} x^0 + \lambda c_{11} x^1 + \dots + \lambda c_{1n} x^n, \\ &\dots \\ y^n &= \lambda c_{n0} x^0 + \lambda c_{n1} x^1 + \dots + \lambda c_{nn} x^n, \end{aligned}$$

kus λ on suvaline mittenulline kordaja. Sealjuures reeperiteisenduse $\{E_k; E\} \rightarrow \{F_k; F\}$ maatriks

$$\lambda C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

on $(n+1) \times (n+1)$ kordaja täpsuseni määratud regulaarne maatriks. Kordaja täpsuseni määratust võib lühemalt üles kirjutada kuulumisena faktorühma (maatriksite korrumtamise suhtes)

$$\lambda C \in \text{GL}(n+1, K)/H,$$

kus $H = \{\lambda E_{n+1} : \lambda \in K \setminus \{0\}\}$, kus E_{n+1} on $(n+1) \times (n+1)$ ühikmaatriks. Sümbol $/$ tähistab siin faktorühma võtmist (ekvivalentsusseoseks on $C_1 \sim C_2$ parajasti juhul, kui $C_1 = \lambda C_2$ mingi $\lambda \neq 0$ korral; ekvivalentsiklasside vaheline tehe defineeritakse esindajaviisi $[C_1] \cdot [C_2] = [C_1 C_2]$).

4. Saab näidata, et

- $\{E_k; E\} \xrightarrow{\lambda E_n + 1} \{E_k; E\};$
- kui $\{E_k; E\} \xrightarrow{\lambda C} \{F_k; F\}$, siis $\{F_k; F\} \xrightarrow{\lambda C^{-1}} \{E_k; E\};$
- kui $\{E_k; E\} \xrightarrow{\lambda C_1} \{F_k; F\}$ ja kui $\{F_k; F\} \xrightarrow{\lambda C_2} \{G_k; G\}$, siis kui $\{E_k; E\} \xrightarrow{\lambda C_1 C_2} \{G_k; G\}.$

Praktikas lisatakse mõnikord projektiivsetele koordinaatidele kitsendus, et $x^0 + x^1 + \dots + x^n = 1$. Sedasi on punkti koordinaadid küll üheselt määratud, aga sellise kitsendusega kõiki punkte „normeerida“ ei saa – nimelt ei saa nii teha punktidega, mille korral $x^0 + x^1 + \dots + x^n = 0$. Osutub, et ruumis $\overline{\mathcal{A}_2}$ on sellisteks punktideks parajasti ebapunktid.

Toome järgnevas kaks praktikas kasutatavat näidet projektiivsete koordinaatide kohta.

Barütsentrilised koordinaadid. Vaatleme eelmise alapeatüki näidet 4. Fikseerime tasandil $\mathcal{A}_2$ lisaks kolm erinevat punkti E_0, E_1, E_2 , mis ei asu ühel sirgel. Need punktid moodustavad (mittekidunud) kolmnurga. Olgu E selle kolmnurga mediaanide lõikepunkt.

Kuna kõigile neile neljale punktile vastavad sirged (ja seega ka sihivektorite sihid) on erinevad ning ükski kolm punkti ei asu ühel sirgel (st. ükski sirgekolmik ei asu samal tasandil – ehk ükski esindajavektorite kolmik pole komplanaarne ehk lin-sõltuv), siis on tegemist üldasendis punktidega.

Projektiivse ruumi $\overline{\mathcal{A}_2}$ punktide koordinaate projektiivse reeperi $\{E_0, E_1, E_2; E\}$ nimetatakse *barütsentrilisteks koordinaatideks*.

Barütsentrilisi koordinaate on kerge üldistada ka projektiivsesse ruumi $\overline{\mathcal{A}_3}$, sealjuures ühikpunktiks E sobib tetraeedri raskuskese.

Paneme tähele, et

- punkt asub kolmnurga sisepiirkonnas parajasti siis, kui kõik koordinaadid on rangelt ühemärgilised;
- punkt asub küljel (mitte tipus) parajasti siis, kui täpselt üks koordinaat on null;
- punkt on üks kolmnurga tippudest parajasti siis, kui täpselt kaks koordinaati on nullid;

- punkt on ebapunkt parajasti siis, kui tema koordinaatide summa on 0.

Kui afinse ruumi $\mathcal{A}_2$ sihiruum on eukleidiline ruum, kolmnurga $E_0E_1E_2$ küljepikkused on vastavalt $a = |E_1E_2|$, $b = |E_2E_0|$ ja $c = |E_0E_1|$ ning nurgad on $\alpha = \angle E_0$, $\beta = \angle E_1$ ja $\gamma = \angle E_2$, saab kolmnurgas olulised punktid anda järgmiselt:

- mediaanide lõikepunkt ongi ühikpunkt $E(1 : 1 : 1)$;
- nurgapoolitajate lõikepunkt $I(a : b : c)$;
- kõrguste lõikepunkt $H(\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma)$;
- keskristsirgete lõikepunkt $O(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$.

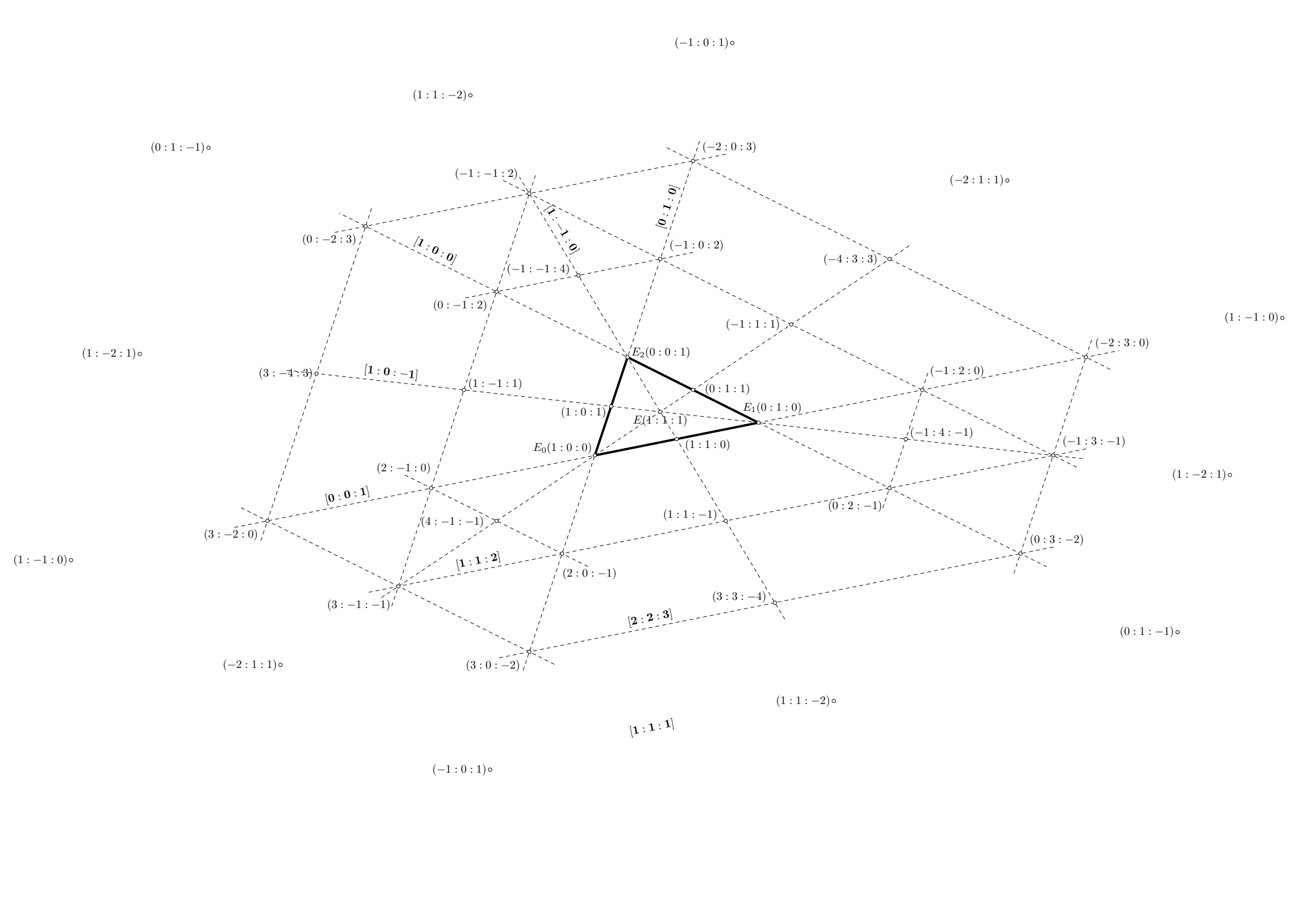
Pärast lineaari mõiste ja tema koordinaatidega tutvumist saab teha järgmised (duaalsed) tähelepanekud ka sirge võrrandi kohta:

- sirge asub kolmnurgast väljaspool parajasti siis, kui kõik koordinaadid on rangelt ühemärgilised;
- sirge läbib tippu (aga pole külge) parajasti siis, kui täpselt üks koordinaat on null;
- sirge on üks kolmnurga küljesirgetest parajasti siis, kui täpselt kaks koordinaati on nullid;
- sirge on ebasirge parajasti siis, kui tema koordinaadid on võrdsed.
- sirge läbib ühikpunkti parajasti siis, kui koordinaatide summa on 0.

Tähelepaneliku lugeja jaoks on tekkinud teatav duaalne vastavus

- ebapunkt $\leftrightarrow$ ühikpunkti läbiv sirge;
- ühikpunkt $\leftrightarrow$ ebasirge;
- kolmnurga tipp $\leftrightarrow$ vastaskülje sirge;
- küljel asuv punkt $\leftrightarrow$ vastastippu läbiv sirge;
- sisepiirkonna punkt $\leftrightarrow$ kolmnurka mitteläbiv sirge.

Taoline duaalsus pole sugugi juhuslik; teatavat aimu selle kohta saab järgmises alapeatükis. Põhjalikuks teooriaarenduseks pole siinkohal piisavalt mahti.



Trilineaarsed koordinaadid. Kõik korraldatakse samal viisil nagu barütsentriliste koordinaatide juures, selle vahega, et ühikpunktiks E valitakse nurgapoolitajate lõikepunkt I . Kõik „projektiivse iseloomuga“ (st. suhetega tegelevad) tähelepanekud punktide ja sirgete kohta kehtivad samuti nagu barütsentriliste koordinaatide juhul. Kolmnurgas tähtsad punktid antakse siinkohal järgmiste koordinaatidega:

- mediaanide lõikepunkt $M \left(\frac{1}{\sin \alpha} : \frac{1}{\sin \beta} : \frac{1}{\sin \gamma} \right)$;
- nurgapoolitajate lõikepunkt $I(1 : 1 : 1)$;
- kõrguste lõikepunkt $H \left(\frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma} \right)$;
- keskristsirgete lõikepunkt $O(\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma)$.

Projektiivse ruumi hüpertasand ehk lineaar

Olgu antud projektiivne ruum $\mathcal{P}_n$ ning vastav kujutus $\pi: \mathbf{V}'_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n$.

Definitsioon 10. Projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ alamruumi, mille mõõde on ühe võrra väiksem kui tema enda mõõde, nimetatakse *hüpertasandiks* ehk *lineaariks*.

Näiteks projektiivse ruumi $\overline{\mathcal{A}_2}$ lineaarideks on 1-mõõtmelised alamruumid ehk projektiivsed sirged.

Lineaar määratakse vektorruumi $\mathbf{V}_{n+1}$ mingi n -mõõtmelise alamruumi $\mathbf{M}_n$ kaudu. Alamruum on antud, kui on teada tema suvalised n lineaarselt sõltumatut moodustajat. Seega on lineaar antud, kui on teada suvalised n projektiivselt sõltumatut punkti. Muuseas tuleb projektiivse sirge määramiseks ette anda temalt kaks projektiivselt sõltumatut punkti ehk kaks erinevat punkti.

Saab näidata, et projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ kõik lineaarid on parajasti hulgad kujul

$$[a_0 : a_1 : \dots : a_n] := \{(x^0 : x^1 : \dots : x^n) \in \mathcal{P}_n : a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n = 0\},$$

kus kordajad $a_0, a_1, \dots, a_n$ on määratud konstandiga korrutamise täpsuseni.

Definitsioon 11. Kui punkt $A(a^0 : a^1 : \dots : a^n)$ ja lineaar $U[u_0 : u_1 : \dots : u_n]$ on seoses

$$u_0 a^0 + u_1 a^1 + \dots + u_n a^n = 0,$$

siis öeldakse, et punkt ja lineaar on *intsidentsed*.

Mõiste „intsidentsed“ võimaldab asendada sõnad „asetseb“, „kuulub“, „sisaldab“, „läbib“ jne. Niisiis edaspidi ütleme ruumis $\overline{\mathcal{A}_2}$ „punkt asub sirgel“ asemel *punkt ja sirge on intsidentsed*.

Põhjus, miks punkti koordinaatidele on indeksid kombeks panna üles, lineaari koordinaatidele aga alla, peitub *Einsteini summeerimiskokkuleppes*. Kokkuleppe sisuks on: kui üks ja sama indeks on üksliikme ühes teguris paigutatud alla, teises aga üles, tuleb sellist üksliiget mõista kui üksliikmete summat, kus indeks saab kõik lubatavad väärtused. Näiteks

$$u_k a^k$$

tähendab (eeldusel, et antud kirjatükis järgitakse Einsteini summeerimiskokkulepet) avaldist

$$\sum_{k=0}^n u_k a^k.$$

Niisiis saab punkti $A(a^0 : a^1 : \dots : a^n)$ ja lineaari $U[u_0 : u_1 : \dots : u_n]$ intsidentsuse panna kirja kui

$$u_k a^k = 0.$$

Teoreem 7. *Projektiivse ruumi $\pi: \mathbf{V}'_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n$ lineaaride hulk Π_n on samuti projektiivne ruum $\bar{\pi}: \mathbf{V}'_{n+1} \rightarrow \Pi_n$. Seejuures $\dim \Pi_n = \dim \mathcal{P}_n$.*

Teoreemi tõestuse sisuks on bijektsiooni $f: \mathcal{P}_n \rightarrow \Pi_n$ konstrueerimine. See tehakse järgmiselt. Suvalisel punktil $A \in \mathcal{P}_n$ tekivad koordinaadid $(a^0 : a^1 : \dots : a^n)$. Tähistame

$$f(A) = [a^0 : a^1 : \dots : a^n].$$

Saab kontrollida, et kujutus f on korrektselt defineeritud: kui punkti koordinaadid korrutada konstandiga, korrutub ka võrrand konstandiga ja saadakse lineaarina sama hulk. Osutub ka, et f on bijektsioon.

Kujutus $\bar{\pi}: \mathbf{V}'_{n+1} \rightarrow \Pi_n$ defineeritakse seosega $\bar{\pi} = f \circ \pi$.

Taolist loomulikku bijektsiooni „punkt $\leftrightarrow$ lineaar“ ei saa korraldada afinses ega eukleidilises geomeetrias. Näiteks ruumis $\mathcal{A}_2$ on punkti määramiseks tarvis kaht koordinaati, sirge määramiseks aga kolme parameetrit. Sealjuures sirgete puhul tuleb parameetritele seada ka kitsendusi (näiteks normaalkõrrandi kordajatena ei tohi normaalvektor olla nullvektor), aga punktide koordinaatidele pole mingeid kitsendusi. Seevastu projektiivses ruumis $\overline{\mathcal{A}_2}$ antakse nii punkt kui sirge (ehk lineaar) kolme projektiivse koordinaadiga, millele mõlemale on sümmeetriliselt kitsendus: koordinaadid ei tohi olla korraga nullid.

Samasugused probleemid tekivad ruumis $\mathcal{A}_3$ punktide ja tasandite (ning ka sirgete) vastavusse seadmisel. Ruumis $\mathcal{A}_3$ on iga punkt antav kolme koordinaadi,

tasand antav nelja, sirge aga kuue parameetriga (sealjuures esinevad ebasümmeetrilised kitsendused). Seevastu projektiivses ruumis $\overline{\mathcal{A}_3}$ (see on saadav ruumi $\overline{\mathcal{A}_2}$ konstruktsiooni loomuliku üldistusena, lisades ruumile $\mathcal{A}_3$ ebapunktid, ebasirged ning ebatastandi, millel asuvad kõik ebasirged ja ebapunktid) on nii punkt kui tasand (ehk lineaar) antav nelja projektiivse koordinaadiga, millele mõlemale on sümmeetriliselt kitsendus: koordinaadid ei tohi olla korraga nullid.

Märgime, et lisaks ülaltoodud punkti-lineaari vastavusel on projektiivses ruumis töötamisel muidki paremusi. Uurides kvadrikuid projektiivses ruumis $\overline{\mathcal{A}_2}$ (vt. näide 4) selgub, et afinses ruumis $\mathcal{A}_2$ nii iga ellipsi (kanooniline võrrand $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$), parabooli (kanooniline võrrand $x_2^2 = 2px_1$) kui ka hüperbooli (kanooniline võrrand $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$) jaoks, vaadelduna projektiivses ruumis $\overline{\mathcal{A}_2}$, saab anda nn. kanoonilise (täpsemalt, autopolaarse) projektiivse reeperi, milles kvadriku võrrandiks (nn. *normaalvõrrandiks*) on $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$. (Projektiivses geomeetrias nimetatakse sellise võrrandiga kvadrikut *ovaalkvadrikuks*.)

Sealjuures ruumi ellipsid $\mathcal{A}_2$ on parajasti ovaalkvadrikud, millel pole ühiseid punkte ruumi $\overline{\mathcal{A}_2}$ ebasirgega. Paraboolid on parajasti ovaalkvadrikud, mis puutuvad ebasirget. Hüperboolid on parajasti ovaalkvadrikud, millel on ebasirgega kaks ühist punkti.

Analoogilised kvadrikutüüpid „ühitumised“ leiavad aset ka projektiivses ruumis $\overline{\mathcal{A}_3}$, kui ta on moodustatud lähtudes afinsest ruumist $\mathcal{A}_3$ näite 4 konstruktsiooni analoogi kasutades (st. lisades ruumile ebapunktid, mis kokku moodustavad ebatastandi). Nii tekivad ruumis $\overline{\mathcal{A}_3}$ näiteks järgmised kvadrikud (loetelu pole täielik, kõrvale on jäetud tasandite paarid ja imaginaarset tüüpi kvadrikud):

- *ovaalkvadrik* $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^3 - (x^4)^2 = 0$ – afinses ruumis reaalne ellipsoid, elliptiline paraboloid, kahekattene hüperboloid;
- *rõngaskvadrik* $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^3 - (x^4)^2 = 0$ – afinses ruumis ühekattene hüperboloid, hüperboolne paraboloid;
- *kooniline kvadrik* $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^3 = 0$ – afinses ruumis reaalne koonus, elliptiline silinder, paraboolne silinder ja hüperboolne silinder.

Niisiis, „lõpmata kaugete punktide“ käsitlemine samaväärselt ruumi teiste punktidega võimaldab mitmeid hulki ja nendega seotud tulemusi uurida ühekorraga viisil, mis afinses geomeetrias on võimatu.

Projektiivse ruumi sidumid. Duaalsusprintsip

Definitsioon 12. Projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ m -mõõtmelise alamruumi $\mathcal{P}_m$ poolt määratud lineaaride hulka

$$f(\mathcal{P}_m) = \{f(A) : A \in \mathcal{P}_m\} \subset \Pi_n$$

nimetatakse lineaaride m -sidumiks.

Lineaaride m -sidumisse $f(\mathcal{P}_m)$ kuuluvate lineaaride ühiste punktide hulka

$$T(\mathcal{P}_m) := \bigcap_{A \in \mathcal{P}_m} f(A)$$

nimetatakse m -sidumi $f(\mathcal{P}_m)$ tuumaks $T(\mathcal{P}_m)$.

Saab näidata, et kui alamruum $\mathcal{P}_m$ anda $m + 1$ projektiivselt sõltumatu punkti $A_0(a_0^0 : a_1^1 : \dots : a_n^n)$, $A_1(a_1^0 : a_1^1 : \dots : a_1^n)$, $\dots$, $A_m(a_m^0 : a_m^1 : \dots : a_m^n)$ kaudu, siis

$$T(\mathcal{P}_m) = \left\{ (x^0 : x^1 : \dots : x^n) : \sum_{k=0}^n a_k^0 x_k = 0, \sum_{k=0}^n a_k^1 x_k = 0, \dots, \sum_{k=0}^n a_k^m x_k = 0 \right\}.$$

See omakorda näitab, et m -sidumi tuum $T(\mathcal{P}_m)$ on $(n - m - 1)$ -mõõtmeline alamruum projektiivses ruumis $\mathcal{P}_m$.

Teoreem 8 (Duaalsusprintsip). Olgu $\mathcal{P}_r$ ja $\mathcal{P}_s$ projektiivse ruumi $\mathcal{P}_n$ alamruumid. Kehitib implikatsioon

$$\mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}_s \quad \Rightarrow \quad T(\mathcal{P}_s) \subset T(\mathcal{P}_r).$$

Tõestus. Anname $\mathcal{P}_r$ ja $\mathcal{P}_s$, kus $\mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}_s$, projektiivselt sõltumatute punktide $A_0, A_1, \dots, A_r, \dots, A_s$ abil, kus

$$A_0(\lambda a_0^k), A_1(\lambda a_1^k), \dots, A_r(\lambda a_r^k), \dots, A_s(\lambda a_s^k).$$

Siis tuumade muutuv punkt $X(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$ rahuldab vastavalt võrrandisüsteemidele

$$T(\mathcal{P}_s) \quad : \quad \sum_{k=0}^n a_0^k x^k = 0, \dots, \sum_{k=0}^n a_r^k x^k = 0, \dots, \sum_{k=0}^n a_s^k x^k = 0$$

ning

$$T(\mathcal{P}_r) \quad : \quad \sum_{k=0}^n a_0^k x^k = 0, \dots, \sum_{k=0}^n a_r^k x^k = 0.$$

Kuna esimese süsteemi iga lahend on teise süsteemi lahend (esimeses süsteemis on kõik teise süsteemi võrrandid ja võib-olla mõned veel), siis $T(\mathcal{P}_s) \subset T(\mathcal{P}_r)$. $\square$

Duaalsusprintsii rakendamise näiteid. Valime kaks erinevat punkti A ja B projektiivses ruumis $\mathcal{P}_2$. Nagu lineaari defineerimisel arutlesime, siis *punktid A ja B on intsidentsed täpselt ühe projektiivse sirgega $\mathcal{P}_1$.*

Duaalsusprintsii ütleb, et kuna $\mathcal{P}_1$ on projektiivne sirge, mille korral $A \in \mathcal{P}_1$ ja $B \in \mathcal{P}_1$, siis $T(\mathcal{P}_1) \in T(A)$ ja $T(\mathcal{P}_1) \in T(B)$. Niisiis $T(\mathcal{P}_1) \in T(A) \cap T(B)$. Kuna $\mathcal{P}_1$ on ainus selline sirge, et $A \in \mathcal{P}_1$ ja $B \in \mathcal{P}_1$, siis $T(\mathcal{P}_1)$ on ühisosa ainus element. Kuna $T(A)$ on projektiivse sirge üldkuju, siis saime, et *kaks erinevat projektiivset sirget on intsidentsed täpselt ühe punktiga.*

Duaalsusprintsii lubab vahetada sõnad „lineaar“ (ruumis $\mathcal{P}_2$ „sirge“, ruumis $\mathcal{P}_3$ „tasand“) ja „punkt“ väidetes, mis on kirja pandud intsidentsuse terminites.

Näiteks ruumis $\mathcal{P}_2$ saab kirja panna järgmised duaalsete väidete paarid.

Iga kaks erinevat punkti on intsidentsed täpselt ühe sirgega.	Iga kaks erinevat sirget on intsidentsed täpselt ühe punktiga.
Punktidega $A(a^1 : a^2 : a^3)$ ja $B(b^1 : b^2 : b^3)$ intsidentse sirge võrrand on $\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$	Sirgetega $S[s_1 : s_2 : s_3]$ ja $T[t_1 : t_2 : t_3]$ intsidentse punkti võrrand on $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$
(Pappos-Pascal) Kuus antud punkti kuuluvad tasandi $\mathcal{P}_2$ regulaarsele või kaheks lõikuvaks sirgeks laguvale kvadrikule parajasti siis, kui nende punktidega määratud lihtsa kuustipu vastaskülgede lõikepunktid asetsevad ühel sirgel.	(Brianchon) Kuus antud sirget, millest ükski kolm ei ole ühes kimbus, on tasandi $\mathcal{P}_2$ regulaarse kvadriku puutuajateks parajasti siis, kui nende sirgetega määratud lihtsa kuuskülje vastastippe ühendavad sirged lõikuvad ühes punktis.

Ruumis $\mathcal{P}_3$ saab kirja panna näiteks järgmised duaalsete väidete paarid.

Iga kaks erinevat punkti on intsidentsed täpselt ühe sirgega.	Iga kaks erinevat tasandit on intsidentsed täpselt ühe sirgega.
Iga kolm punkti, mis ei ole intsidentsed ühe sirgega, on intsidentsed täpselt ühe tasandiga.	Iga kolm tasandit, mis ei ole intsidentsed ühe sirgega, on intsidentsed täpselt ühe punktiga.