

Splainid

Peeter Oja

Tartu 2022

Sisukord

Sissejuhatus	4
§1. Splaini mõiste	6
§2. Splainide ruumid	10
§3. B-splainid	15
§4. Normaliseeritud B-splainid	26
§5. Ülevaade funktsionaalruumidest ja mõnedest abitulemustest	30
§6. Lineaarsplainidega interpoleerimine	35
§7. Hermite'i kuupsplainid	39
§8. Interpoleerivate kuupsplainide konstrueerimine	45
1. Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine teiste momentide abil . .	46
2. Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine esimeste momentide abil	54
3. Splainidega interpoleerimisel tekkivate lineaarsete süsteemide lahendamisest	55
§9. Interpoleerivate kuupsplainide veahinnangud	61
§10. Silumisülesanded	72
1. Sobolevi ruum $H^m(a, b) = W^{2,m}(a, b)$	72
2. Silumisülesannete püstitused	73
3. Minimaalse poolnormiga interpolant	75
4. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendi olemasolu	78
5. Tehniline abitulemus	80
6. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendit iseloomustav tingimus	81
7. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendi ühesus	82

6. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendit iseloomustav tarvilik ja piisav...3

8. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendi leidmine	83
--	----

§11. Harilike diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamine

kuupsplainidega kollokatsioonimeetodil	85
---	-----------

1. Rajaülesande püstitus	85
2. Kuupsplainidega kollokatsioonimeetod	85
3. Lähislahendi olemasolu ja ühesus, koondumine	88

§12. Integraalvõrrandite lahendamine splainidega

kollokatsioonimeetodil	94
-------------------------------	-----------

1. Splaine kasutava kollokatsioonimeetodi kirjeldus	94
1.1. Lineaarsplainide kasutamine	94
1.2. Kuupsplainide kasutamine	96
2. Klassikaline projektsioonimeetodite koonduvusteoreem	98
3. Lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodi koondumine	100
4. Projektorite koondumine kuupsplainide juhul	101
5. Kuupsplainidega kollokatsioonimeetodi koondumine	103

§13. Ruutsplainidega histopoleerimine

106

1. Histopoleerimisülesannete ja interpoleerimisülesannete vahetamine . .	107
2. Ruutsplainidega histopoleerimisülesanne	108

Sissejuhatus

Meenutame mõningaid tulemusi funktsioonide lähendamisest polünoomidega.

Olgu antud reaalarvud x_i , $i = 0, \dots, n$, kus $x_i \neq x_j$, kui $i \neq j$, ning f_i , $i = 0, \dots, n$. Siis on olemas parajasti üks ülimalt n astme polünoom $P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$, kus $c_0, \dots, c_n$ on reaalarvud, nii, et $P_n(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Selle nn. interpoleeriva polünoomi saab leida näiteks Lagrange'i või Newtoni valemi abil, kumbki nõuab $O(n^2)$ aritmeetilist tehet, mille all peetakse silmas eelkõige korrumtamisi ja jagamisi. Antud funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korral, kui $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$, on seega olemas parajasti üks interpoleeriv polünoom $P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ nii, et $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Loomulik on näiteks pideva funktsiooni f korral küsida, kuidas käitub $\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - f(x)| = \|P_n - f\|_{C[a,b]}$, kui $n \rightarrow \infty$? Sel juhul muidugi $x_i = x_{ni}$ ehk iga n korral on oma interpolatsioonisõlmede komplekt. Üldisemal juhul, kui f ei tarvitse olla pidev, võib uurida $\sup_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - f(x)|$ käitumist.

Weierstrassi teoreem väidab, et igat pidevat funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ saab ühtlasusnormis kuitahes hästi lähendada polünoomidega, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas polünoom P nii, et $\|P - f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tähistades $\mathcal{P}_n = \{P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$ – kõigi ülimalt n astme polünoomide hulk, siis antud $f \in C[a, b]$ ja antud n korral on olemas parajasti üks polünoom $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n$ nii, et

$$\|\bar{P}_n - f\|_{C[a,b]} = \min_{P \in \mathcal{P}_n} \|P - f\|_{C[a,b]},$$

seda polünoomi $\bar{P}_n$ nimetatakse parimaks ühtlase lähenduse polünoomiks funktsioonile f . Weierstrassi teoreemile tuginedes võib väita, et $\|\bar{P}_n - f\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. Lisaks leiab aset Tšebõšovi alternanss, mille kohaselt on olemas punktid $\xi_i \in [a, b]$, $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n+1}$ nii, et $\bar{P}_n(\xi_i) - f(\xi_i) = (-1)^i \delta \|\bar{P}_n - f\|_{C[a,b]}$, kus $\delta = 1$ või $\delta = -1$. Sellest aga järeldeb, et on olemas punktid x_i , $i = 0, \dots, n$, nii, et $\xi_i < x_i < \xi_{i+1}$ ja $\bar{P}_n(x_i) = f(x_i)$, mistõttu parimad ühtlase lähenduse polünoomid on ühtlasi funktsiooni f interpoleerivad polünoomid mingites lõigu $[a, b]$ punktides. Väärrib märkimist, et parimaid ühtlase lähenduse polünoome ei saa kaugeltki nii lihtsalt leida kui näiteks interpolatsioonipolünoome Lagrange'i või Newtoni valemi

abil.

Äärmiselt heidutav polünoomidega ühtlasel lähendamisel on järgmine Faberi teoreem: igasuguse sõlmede süsteemi $x_{ni} \in [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$, $i = 0, \dots, n$, korral on olemas funktsioon $f \in C[a, b]$ nii, et sõlmedega x_{ni} interpolatsioonipolünoomide jada P_n (siis $P_n \in \mathcal{P}_n$ ja $P_n(x_{ni}) = f(x_{ni})$, $n = 0, 1, \dots$, $i = 0, \dots, n$) korral $\|P_n - f\|_{C[a, b]} \rightarrow \infty$, kui $n \rightarrow \infty$. Näiteks lõigus $[-1, 1]$ punktide $x_{00} = 0$, $x_{ni} = -1 + i\frac{2}{n}$, $n \geq 1$, $i = 0, \dots, n$, (mida tavaliselt nimetatakse ühtlaseks võrguks) korral sobib funktsioon $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Ühtlase võrgu korral ei paranda olukorda funktsiooni f suurem siledus (pidevate tuletiste olemasolu): funktsioonil $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, (seda nimetatakse C. Runge näiteks) on olemas kõik tuletised, kuid ikkagi $\|P_n - f\|_{C[a, b]} \rightarrow \infty$, kui $n \rightarrow \infty$. Selline polünoomidega interpolatsiooniprotsessi praktilisteks rakendusteks sobimatu käitumine oli tugevasti motiveeriv asjaolu splineide teooria arendamiseks.

Esimeseks spetsiaalselt splineidele pühendatud tööks loetakse ühte I. J. Schoenbergi 1946. aastal avaldatud artiklit. Splineid kui matemaatilised objektid esinesid muidugi juba varem ja neid näeme esituse käigus. Splineide teooria intensiivsem areng algas 1960. aastate alguses. Eraldi väärrib märkimist J. C. Holladay artikkel aastast 1957, mis oli lähtekohaks splineide variatsiooniteooria arengus.

Järgnevas materjali esituses peame silmas loomulikku võimalust, et lugejal ei ole varasemat kokkupuudet splineide teooriaga. Küll aga eeldame, et tuttavad on mitmed põhimõisted ja tulemused matemaatilisest analüüsist, lineaaralgebrast, arvutusmeetoditest ning mõningal määral funktsionaalanalüüsist.

§1. Splaini mõiste

Alustame enim kasutatavatest splainidest. Olgu antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Definitsioon. Funktsiooni $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse m astme splainiks defektiga k , kui

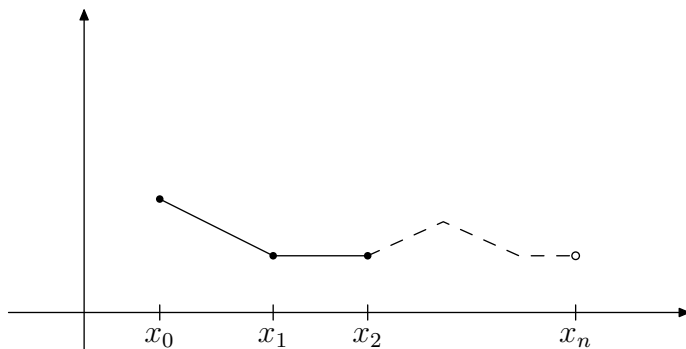
- 1) $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$,
- 2) $S \in C^{m-k}[a, b]$.

Siin $P^m[x_{i-1}, x_i]$ on kõigi ülimalt m astme polünoomide hulk ning neid polünoome vaadeldakse määratuna lõigus $[x_{i-1}, x_i]$. Hulk $C^k[a, b]$ koosneb funktsioonidest $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral $f^{(k)} \in C[a, b]$, seejuures $C^0[a, b] = C[a, b]$.

Punkte $x_0, \dots, x_n$ nimetatakse splaini sõlmedeks, punkte $x_1, \dots, x_{n-1}$ splaini sisesõlmedeks.

Definitsioonis toodud funktsioonide hulka tähistatakse $S^{m,k}$, $S_{\Delta}^{m,k}$ või $S_{\Delta}^{m,k}[a, b]$.

Näide 1. Olgu $m = 1$, $k = 1$, siis $S \in S^{1,1}$. Et $S \in P^1[x_{i-1}, x_i]$, siis igas osalõigus on S ülimalt esimese astme polünoom ja tema graafik lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ on sirglõik. Need sirglõigud peavad tingimuse $S \in C[a, b]$ tõttu olema ühendatud nii, et S graafikul tervikuna ei ole katkevuspunkte ehk graafik on pidev murdjoon.

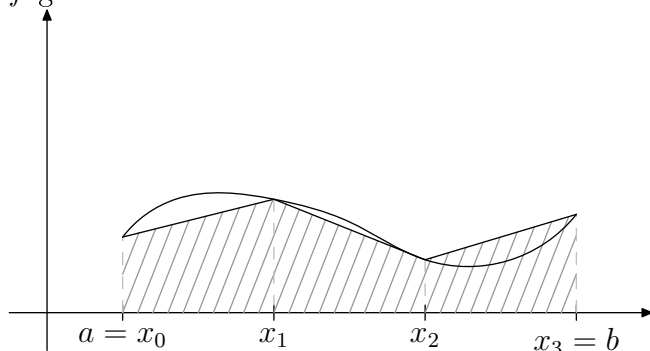


Sellist splaini nimetatakse lineaarsplainiks. Ta esineb (mõningal määral ilmutamatult) määratud integraali arvutamisel trapetsvalemiga, kus integraali täpse vää-

tuse asemel kasutatakse integraali linearsplainist ehk

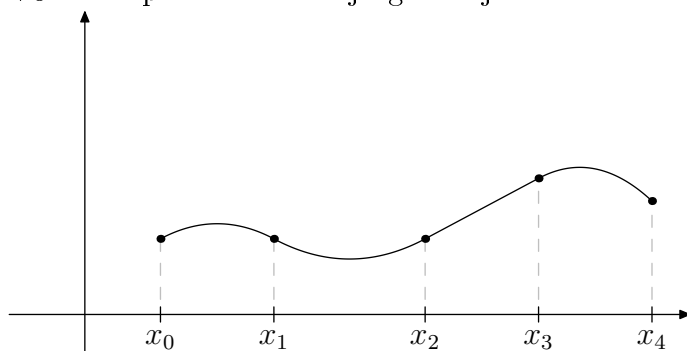
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b S(x) dx + R(f).$$

Seda saab piltlikult näha näiteks järgmisel joonisel, kus kõverjoon on funktsiooni f graafik.



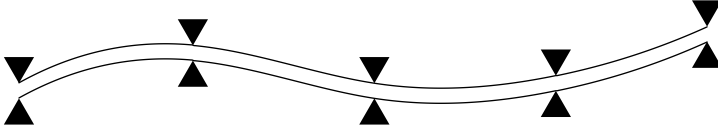
Taolisi pidevaid murdjooni esineb tihti andmete graafilisel esitamisel, mida kasutati ammu enne splineide teooria arendamist.

Näide 2. Olgu $m = 2$, $k = 1$, siis $S \in S^{2,1}$. Selles näites $S \in P^2[x_{i-1}, x_i]$, mis tähendab, et igas osalõiguses on splaini S graafik sirglõik või ruutparabool. Tingimus $S \in C^1[a, b]$ tähendab, et graafiku osad on sisesõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$ ühendatud nii, et splaini S tuletis oleks pidev, mis ei luba S graafiku puutuja hüppelist muutumist. Võimalik pilt on toodud järgmisel joonisel.



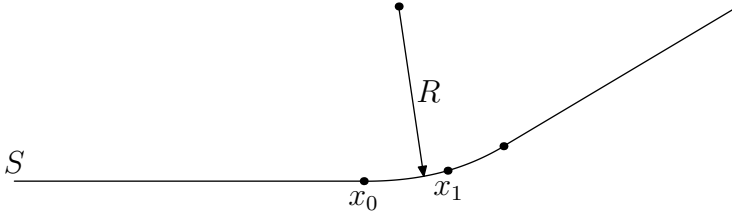
Selles näites toodud splaine nimetatakse ruutsplainideks.

Näide 3. Olgu $m = 3$, $k = 1$, siis $S \in S^{3,1}$ ning vadeldavaid splaine nimetatakse kuupsplainideks, sest tingimus $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$ tähendab, et S võib olla osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$ kuni 3. astme polünoom. Nõue $S \in C^2[a, b]$ tähendab, et splainil S peab olema lõiguses $[a, b]$ pidev teist järku tuletis. Kui võtta elastne varras ja kinnitada see mingis arvus punktides nagu näha allpool oleval joonisel, siis see varras on kuupsplaini kujuline.



Taolise joonestamisvahendi nimest splain ongi tulnud üldnimi funktsioonide klassile.

Raudteed, samuti maanteed ei saa ehitada täiesti sirgena, paratamatult esinevad kurvid. Kurvis mõjub liikuvale kehale massiga m jõud $F = \frac{mv^2}{R}$, kus v on liikumiskiirus ja R kõverusraadius, näiteks ringjoont mööda liikumisel on R ringjoone raadius. Täiesti kõlbmatu on sirgelt teosalt kurvi alustades minna edasi mööda ringjoone kaart, sest siis tekib hetkeliselt jõud, mis viskab näiteks rongireisija istmelt vastu vaguni külgselina. Kõvera teeosa õige ligikaudne kuju on splain $S \in S^{3,1}$. Püüame seda põhjendada, pidades silmas ka järgnevat joonist.



Joone S kõverus $\varkappa$ ja kõverusraadius R on seotud võrdusega

$$\varkappa = \frac{S''(x)}{(1 + (S'(x))^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}, \quad R = R(x), \quad \varkappa = \varkappa(x).$$

Arvestame seda, et $x \in [x_0, x_1]$ korral $S''(x) \approx \frac{1}{R}$. Sobiv on olukord, kus $S''(x)$ ehk $\frac{1}{R}$, mis on võrdeline jõuga F , kasvab lineaarselt, s.t. $S''(x) = c(x - x_0)$, $c = \text{const}$, seejuures $S''(x_0) = 0$. Siis $S \in P^3[x_0, x_1]$. Niiviisi jätkates suurendatakse kõverust $\varkappa$ (ehk vähendatakse kõverusraadiust R) sujuvalt kurvi keskpäigani, pärast seda vähendatakse sujuvalt $\varkappa$ väärtuseni 0, kus jätkub sirge teeosa.

Näide 4. Olgu m suvaline, $k = 0$. Siis iga i korral $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$ ja $S \in C^m[a, b]$. Näitame, et siis $S \in P^m[a, b]$. Tingimuse $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$ tõttu $S^{(m)}(x) = d_i$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Et $S^{(m)}$ on pidev, siis arvud d_i peavad olema kõik omavahel võrdsed ehk $S^{(m)}(x) = c_0$, $x \in [a, b]$. Siis $S^{(m-1)}(x) = c_0x + c_1$, $x \in [a, b]$, seejärel $S^{(m-2)}(x) = c_0 \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$, $x \in [a, b]$, ja jätkates jõuame selleni, et S on ülimalt m astme polünoom.

Näide 4 kinnitab juba definitsioonist tulenevat asjaolu, et kõik polünoomid on ühtlasi ka splainid.

Kui defektist ei räägita, siis vaikumisi eeldatakse, et see on 1. Lisaks juba vaadeldud lineaar-, ruut- ja kuupsplainidele on mõningase tähtsusega kvartsplainid $S^{4,1}$ ja kvintsplainid $S^{5,1}$, enamasti küll abivahendina teoreetilistes küsimustes.

Igat polünoomi $P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$, $x \in [a, b]$, võib vaadelda kui funktsiooni $P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$, $x \in \mathbb{R}$, samuti vastupidi: polünoomi $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ võib vaadelda kui funktsiooni $P: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Splaini $S \in S_{\Delta}^{m,k}[a, b]$ korral $S(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$, $x \in [x_0, x_1]$, ning võime määrata $S(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$, $x \in (-\infty, x_1]$. Analoogiliselt, $S(x) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1x + \dots + \bar{c}_mx^m$, $x \in [x_{n-1}, x_n]$, võimaldab vaadelda $S(x) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1x + \dots + \bar{c}_mx^m$, $x \in [x_{n-1}, \infty)$, seega $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kui on fikseeritud võrk $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_n$, siis mõnikord kirjutis $S \in S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,k}$ tähendab, et $S \in P^m(-\infty, x_0]$, $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, $S \in P^m[x_n, \infty)$, $S \in C^{m-k}(-\infty, \infty)$. Viimane tingimus tähendab seejuures, et $S^{(m-k)}$ on pidev, kuid ei tarvitse olla tõkestatud.

§2. Splainide ruumid

Olgu antud $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, loeme selle fikseerituks, antud m, k loeme samuti fikseerituks. Vaatleme hulka $S_{\Delta}^{m,k}$. See on vektorruum, sest vahetult saab kontrollida, et

$$1) S_1, S_2 \in S_{\Delta}^{m,k} \Rightarrow S_1 + S_2 \in S_{\Delta}^{m,k},$$

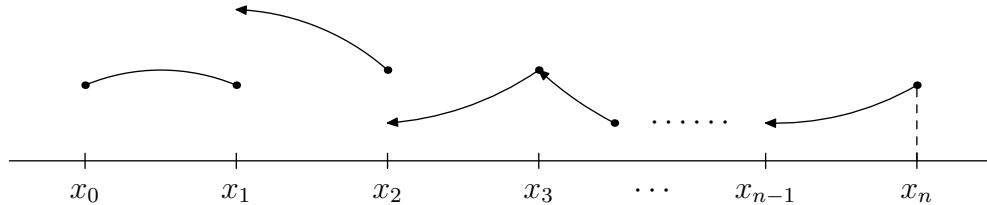
$$2) \lambda \in \mathbb{R}, S \in S_{\Delta}^{m,k} \Rightarrow \lambda S \in S_{\Delta}^{m,k},$$

seejuures $S_{\Delta}^{m,k} \subset C[a, b]$. Märgime, et siiani oleme vaikinisi eeldanud, et $k \leq m$, mis on mõneti loomulik eeldus. Seame eesmärgiks leida vektorruumi $S_{\Delta}^{m,k}$ dimensioon.

Vaatleme hulka

$$P_{\Delta}^m = \{P: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, P \in P^m[x_0, x_1], P \in P^m(x_{i-1}, x_i], i = 2, \dots, n\},$$

mille ühte tüüpilist esindajat võib näha järgneval joonisel.



Igas vahemikus (x_{i-1}, x_i) on $P \in P_{\Delta}^m$ ülimalt m astme polünoom, seejuures sõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$ ei seata mingisuguseid pidevuse nõudeid. Sõlmedes $x_i, i = 0, \dots, n$, tuleb funktsioonile P määrata väärtused ja kokkuleppeliselt loeme näiteks, et P on vasakult pidev, samuti paremalt pidev punktis x_0 . Mõnikord loetakse ka tavaline P_{Δ}^m splineide klassi osaks, kasutades tähistust $S_{\Delta}^{m,m+1}$, s.t. defekt on $m + 1$. Hulk P_{Δ}^m on vektorruum, seejuures $S_{\Delta}^{m,k} \subset P_{\Delta}^m$. Leiame esialgu P_{Δ}^m dimensiooni. Iga $i = 1, \dots, n$ korral on $P^m(x_{i-1}, x_i]$ dimensioon $m + 1$, sest niipalju on ülimalt m astme polünoomi määramiseks vabu kordajaid. Kokku annab see, et $\dim P_{\Delta}^m = (m + 1)n$. Kui $S \in S_{\Delta}^{m,k}$, siis funktsioonid $S, S', \dots, S^{(m-k)}$ on pidevad

sisesõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$, mis annab $(m - k + 1)(n - 1)$ tingimust lisaks kuulumisele ruumi P_Δ^m . Nüüd $(m + 1)n - (m - k + 1)(n - 1) = (m + 1) + k(n - 1)$, seepärast $\dim S_\Delta^{m,k} = m + 1 + k(n - 1)$. Splainidele kõige tüüpilisemal erijuhul $k = 1$ saame $\dim S_\Delta^{m,1} = m + n$. Samuti tuleb üldjuhust juba teadaolev $\dim S_\Delta^{m,0} = \dim P^m = m + 1$.

Ülesanne 1. Leida $\dim S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,k}$.

Märgime, et ülaltoodud $\dim S_\Delta^{m,k}$ leidmine ei ole esitatud kõigi detailidega. Tervikliku tõestuse esitus viiks meid põhiteemast natuke kõrvale, seepärast anname siin võimaluse seda iseseisvalt teha.

Lemma. Olgu X vektorruum ja $\dim X = n$. Kui lineaarsed funktsionaalid $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, on lineaarselt sõltumatud, siis

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \right) = n - p.$$

Selgituseks lisame, et $\ker \varphi_i = \{x \in X \mid \varphi_i(x) = 0\}$.

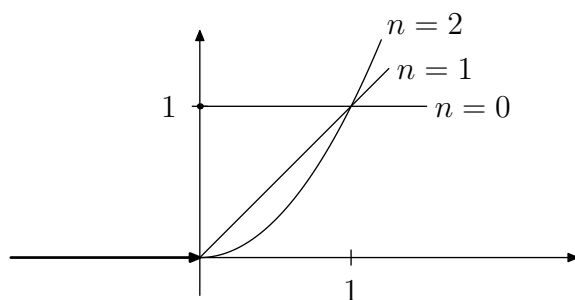
Ülesanne* 1. Tõestada lemma ja näidata selle abil, et $\dim S_\Delta^{m,k} = m + 1 + k(n - 1)$.

Lemma kasutamisel tuleb võtta $X = P_\Delta^m$, leida sobivad funktsionaalid ja näidata nende lineaarset sõltumatust.

Järgnevas leiame ruumis $S_\Delta^{m,k}$ baasi. Defineerime

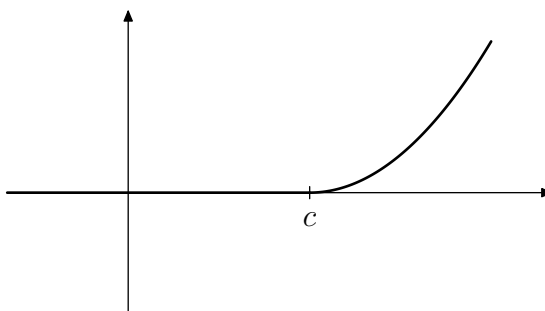
$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & \text{kui } x \geq 0, \\ 0, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Nende graafikud on esitatud joonisel



Taolisi funktsioone nimetatakse lõigatud astmefunktsioonideks. Nende abil moodustame

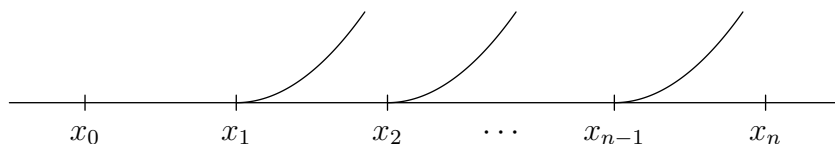
$$(x - c)_+^n = \begin{cases} (x - c)^n, & \text{kui } x \geq c, \\ 0, & \text{kui } x < c, \end{cases}$$



midas nimetatakse samuti lõigatud astmefunktsioonideks.

Teoreem. Funktsioonid x^α , $\alpha = 0, 1, \dots, m$, $(x - x_i)_+^\alpha$, $i = 1, \dots, n - 1$ (vastavad Δ sisesõlmedele), $\alpha = m - k + 1, \dots, m$, moodustavad baasi ruumis $S_\Delta^{m,k}$.

Lisame, et osa neist funktsioonidest on tavalised astmefunktsioonid, lõigatud astmefunktsioonid aga paiknevad järgmise joonise kohaselt:



Tõestus. Meenutame, et kui X on vektorruum ja $\dim X = n$, siis baas ruumis X on lineaarselt sõltumatute elementide komplekt $e_1, \dots, e_n \in X$. Samaväärne tingimus on, et iga $x \in X$ esitub üheselt elementide $e_1, \dots, e_n \in X$ kaudu kujul

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

Alustuseks vaatame, kas teoreemis toodud funktsioonid kuuluvad ruumi $S_\Delta^{m,k}$. Polünoomid x^α , $\alpha = 0, \dots, m$, muidugi sinna kuuluvad. Vaatleme funktsioone $(x - x_i)_+^\alpha$, $\alpha = m - k + 1, \dots, m$. Punktist x_i vasakul ja paremal on tegemist polünoomiga, seega tingimus, et funktsioon oleks osalõikudes ülimalt m astme polünoom, on täidetud. Tuleb veel veenduda funktsiooni küllaldane arv korda pidevalt diferentseeruvuses ja sedagi ainult punktis x_i . Leiame

$$\begin{aligned} ((x - x_i)_+^\alpha)' &= \alpha(x - x_i)_+^{\alpha-1}, \\ ((x - x_i)_+^\alpha)'' &= \alpha(\alpha - 1)(x - x_i)_+^{\alpha-2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$((x - x_i)_+^\alpha)^{(m-k)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (m - k - 1)) (x - x_i)_+^{\alpha - (m-k)},$$

seejuures minimaalne α väärtus on $m - k + 1$, seega $\alpha - (m - k) \geq m - k + 1 - (m - k) = 1$, mis tähendab, et diferentseerimisel saadud lõigatud astmefunktsiooni aste on alati vähemalt 1 ja on tagatud selle pidevus.

Küsimus, kas toodud elementide arv on võrdne dimensiooniga, saab vastuse nii: astmefunktsioone x^α on $m+1$, lõigatud astmefunktsioone $(x-x_i)_+^\alpha$ on ühe x_i kohta $m - (m-k+1) + 1 = k$, sisesõlmi on $n-1$, seega kokku on toodud funktsioone $m+1+k(n-1)$.

Näitame esitatud funktsioonide lineaarset sõltumatust. Oletame, et

$$\sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha 0} x^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha=m-k+1}^m c_{\alpha i} (x-x_i)_+^\alpha = 0, \quad x \in [x_0, x_n].$$

Olgu $x_0 \leq x < x_1$. Siis $(x-x_i)_+^\alpha = 0$ iga $i = 1, \dots, n-1$ ja iga $\alpha = m-k+1, \dots, m$ korral. Võrdus $\sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha 0} x^\alpha = 0$ annab siis, et $c_{\alpha 0} = 0$ iga $\alpha = 0, \dots, m$ korral. Seejärel

$x_1 < x < x_2$ korral $\sum_{\alpha=m-k+1}^m c_{\alpha 1} (x-x_1)^\alpha = 0$, millest $c_{\alpha 1} = 0$, $\alpha = m-k+1, \dots, m$.

Analoogiliselt jätkates näeme, et funktsioonide lineaarses kombinatsioonis on kõik kordajad võrdsed nulliga ja sellega on teoreem tõestatud.

Järeldusena näeme, et iga spline $S \in S_{\Delta}^{m,k}$ esitub üheselt

$$S(x) = \sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha 0} x^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha=m-k+1}^m c_{\alpha i} (x-x_i)_+^\alpha, \quad x \in [x_0, x_n].$$

Märkus. Arvutuslikult ei ole toodud baas stabiilne. Kui kõrvuti eespool tooduga veel

$$\tilde{S}(x) = \sum_{\alpha=0}^m \tilde{c}_{\alpha 0} x^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha=m-k+1}^m \tilde{c}_{\alpha i} (x-x_i)_+^\alpha,$$

siis arvude $|c_{\alpha i} - \tilde{c}_{\alpha i}|$ väiksus (arvutuste mõttes) ei taga seda, et $|\tilde{S}(x) - S(x)|$ oleks väike ja see avaldub eriti siis, kui mingid naabersõlmed x_j ja x_{j+1} asuvad lähestikku. Seepärast ei ole toodud baas sobiv praktilistes arvutustes. Samal ajal on selle kasutamine efektiivne mitmete teoreetiliste probleemide lahendamisel.

Ülesanne 2. Leida astmefunktsioonidest ja lõigatud astmefunktsioonidest koosnev baas ruumis $S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,k}$.

Soovitus: vaadelda ruumi $S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,k}$ ruumina $S_{\Delta'}^{m,k}$, kus $\Delta': a < x_0 < \dots < x_n < b$ ja $\Delta: x_0 < \dots < x_n$.

Üldistame siiani vaadeldud splineide ruumi mõistet. Nagu varemgi, olgu $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, lisaks olgu antud m ja $k_1, \dots, k_{n-1}$. Defineerime

$$S_{\Delta}^{m, k_1, \dots, k_{n-1}} = \{S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid S \in P^m[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

$S, S', \dots, S^{(m-k_i)}$ on pidevad punktis x_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Varasemaga võrreldes on siin igas sisesõlmes oma sileduse nõuded ehk igale sisesõlmele vastab oma defekt.

Ülesanne 3. Leida $\dim S_{\Delta}^{m, k_1, \dots, k_{n-1}}$ ja sama tüüpi baas nagu eelmistes ruumides.

§3. B-splainid

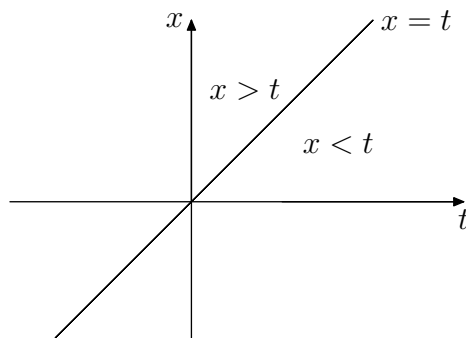
Esitame siin B-splainide teooria juhul, kui defekt on 1. Üldisem juht, eriti selline, kus igas sisesõlmes on sõlmele omane defekt, nõuaks kordsete sõlmedega splineide käsitlemist, mis teeks esituse tehniliselt tunduvalt keerukamaks.

On üldiselt aktsepteeritud väide, et B-splainide kasutamine on tööstuslik standard. See tähendab seda, et nende asemel millegi muu kasutamiseks praktikas peab olema väga kaalukas põhjus. Ka seetõttu pöörame B-splainidele erilist tähelepanu.

Olgu antud võrk $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ja täisarv $m \geq 0$. Kasutame funktsiooni

$$\varphi_m(x, t) = (x - t)_+^m = \begin{cases} (x - t)^m, & \text{kui } x \geq t, \\ 0, & \text{kui } x < t. \end{cases}$$

Funktsioon φ_m on määratud kõikjal tasandil $\mathbb{R}^2$ ja järgneval joonisel, mis kujutab tema määramispiirkonda, on ta sirgest $x = t$ ülalpool määratuna kahe muutuja polünoom, sirgest $x = t$ allpool määratuna nullfunktsioon.



Laiendame võrku Δ lisapunktidega

$$\Delta': x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+m}.$$

Defineerime funktsioonid

$$B_m^i(x) = (-1)^{m+1} \varphi_m(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = -m, \dots, n-1.$$

Ülesanne 4. Tõestada võrdus

$$(x - t)_+^m = (x - t)^m + (-1)^{m+1}(t - x)_+^m.$$

Lause 1. Kehtib võrdus

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tõestus. Alustame ühe tehnilise vahendiga, mida hiljem kasutame.

Vaatleme olukorda, kus $f(t) = f_1(t)f_2(t)$. Väidame, et siis

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_n). \quad (3)$$

Tõestame selle induktsiooniga. Kui $n = 0$, siis $f(x_0) = f_1(x_0)f_2(x_0)$ ning väide kehtib. Induktsioonisammuna näitame ülemineku n sõlmelt $n + 1$ sõlmele. Saame

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_n) &= \frac{f(x_0, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \\ &/ \text{ kasutame diferentssuhete omadusi ja induktsioonieeldust } / \\ &= \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_{n-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1}}^n f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_n) \right) = \\ &\quad \begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \text{puudub} & \text{puudub} \\ & \text{sõlm } x_{n-1} & \text{sõlm } x_{n-1} \end{array} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} f_1(x_0, \dots, x_j) \frac{f_2(x_j, \dots, x_{n-1}) - f_2(x_j, \dots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} + \\ &\quad + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} (f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) f_2(x_{n-1}) - f_1(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n) f_2(x_n)) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_n) + \\ &\quad + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} (f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) (f_2(x_{n-1}) - f_2(x_n)) + \\ &\quad + f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) f_2(x_n) - f_1(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n) f_2(x_n)), \end{aligned}$$

kus summamärgiga osale lisanduv liidetav annab

$$f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) f_2(x_{n-1}, x_n) + f_1(x_0, \dots, x_n) f_2(x_n),$$

millega on (3) kehtivus tõestatud. Võrdust (3) nimetatakse Leibnizi valemiks (diferentssuhete jaoks).

Lisatulemusena märgime, et kuna n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide korral

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (x_0, x_n),$$

ja kui $x_0, \dots, x_n \rightarrow x$, siis $\xi \rightarrow x$, ning piirväärtusena saame võrduse

$$(f_1(x)f_2(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_1^{(i)}(x) f_2^{(n-i)}(x),$$

mida tuntakse samuti Leibnizi valemina (tuletiste jaoks). See on tegelikult korru-tise diferentseerimise valem.

Lause 1 tõestuse jätkuna esitame

$$\varphi_m(x, t) = (x - t)_+^m = (x - t)_+^{m-1}(x - t) = \varphi_{m-1}(x, t)\psi(x, t),$$

kus kasutasime tähistust $\psi(x, t) = x - t$. Funktsioonist ψ diferentssuhted t järgi esituvad tuletistena

$$\frac{d}{dt}\psi(x, t) = -1, \quad \frac{d^2}{dt^2}\psi(x, t) = 0, \quad \dots,$$

seega valemi (3) põhjal

$$\begin{aligned} B_m^i(x) &= (-1)^{m+1}(\varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m})\psi(x; x_{i+m}, x_{i+m+1}) + \\ &\quad + \varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m+1})\psi(x; x_{i+m+1})). \end{aligned}$$

Selles

$$\psi(x; x_{i+m}, x_{i+m+1}) = -1,$$

$$\psi(x; x_{i+m+1}) = x - x_{i+m+1},$$

$$\varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}) = \frac{\varphi_{m-1}(x; x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}) - \varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m})}{x_{i+m+1} - x_i}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} B_m^i(x) &= (-1)^m \varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) + \\ &\quad + \frac{x - x_{i+m+1}}{x_{i+m+1} - x_i} (-1)^{m+1} \varphi_{m-1}(x; x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}) + \\ &\quad + \frac{x - x_{i+m+1}}{x_{i+m+1} - x_i} (-1)^m \varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^m \left(1 + \frac{x - x_{i+m+1}}{x_{i+m+1} - x_i} \right) \varphi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) + \\
&\quad + (-1)^m \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} \varphi_{m-1}(x; x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}),
\end{aligned}$$

mis annabki võrduse (2).

Lause 2. *Juhul* $m \geq 1$

$$\begin{cases} B_m^i(x) > 0, & \text{kui } x \in (x_i, x_{i+m+1}), \\ B_m^i(x) = 0, & \text{kui } x \notin (x_i, x_{i+m+1}), \end{cases}$$

ning

$$\begin{cases} B_0^i(x) > 0, & \text{kui } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ B_0^i(x) = 0, & \text{kui } x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Tõestus. Esitame tõestuse osade kaupa.

1) Vaatleme juhtu, kus $x < x_i$. Siis $(x - x_j)_+^m = 0$, sest $x < x_j$, kui $j = i, \dots, i + m + 1$. Võrduse (1) põhjal $B_m^i(x) = 0$ olenemata m väärtusest.

2) Olgu $x \geq x_{i+m+1}$. Siis $B_m^i(x)$ defineerivas võrduses $\varphi_m(x; x_i, \dots, x_{i+m+1})$ arvutatakse funktsiooni $\varphi_m(x, t) = (x - t)^m$ ehk muutuja t järgi m astme polünoomi väärtusi kasutades. Kuid $m + 1$ järku diferentssuhe esitub

$$\varphi_m(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}) = \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(x - t)^m = 0,$$

mistõttu $B_m^i(x) = 0$ iga m korral.

3) Kui $x \in [x_i, x_{i+1})$, siis

$$\begin{aligned}
B_0^i(x) &= (-1)\varphi_0(x; x_i, x_{i+1}) = \\
&= -\frac{\varphi_0(x; x_i) - \varphi_0(x; x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} > 0,
\end{aligned}$$

sest $\varphi_0(x; x_i) = 1$ ja $\varphi_0(x; x_{i+1}) = 0$. Sellega on tõestatud kõik väited B_0^i väärtuste kohta.

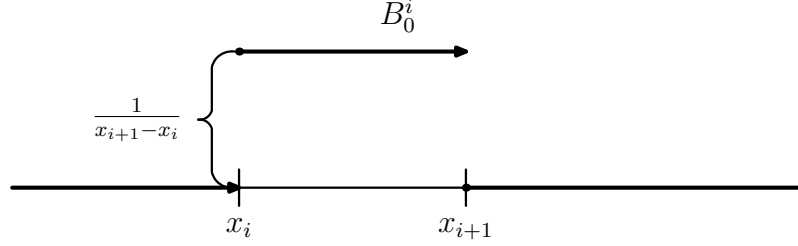
4) Olgu $m \geq 1$ ja $x \in (x_i, x_{i+m+1})$. Kasutame induktsiooni ja võrdust (2). Võrduses (2)

$$\frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} > 0.$$

Induktsiooni alustades, kui võtta $m = 1$, siis $x \in (x_i, x_{i+2})$ ja vähemalt üks väärtustest $B_0^i(x), B_0^{i+1}(x)$ on rangelt positiivne, millest järeldub (2) abil, et $B_1^i(x) > 0$. Järgmistel sammudel $m \geq 2$ ja vähemalt üks väärtustest $B_{m-1}^i(x), B_{m-1}^{i+1}(x)$ on $x \in (x_i, x_{i+m+1})$ korral rangelt positiivne, seepärast $B_m^i(x) > 0$.

5) Kui $m \geq 1$, siis B_m^i on pidev ja $B_m^i(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x < x_i}} B_m^i(x) = 0$. Sellega on kõik lause 2 väited tõestatud.

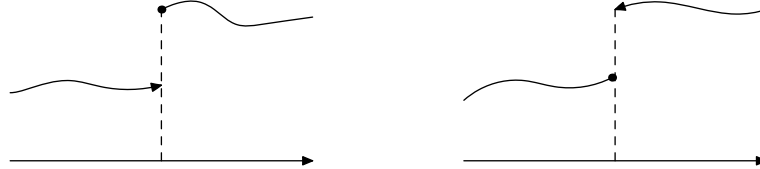
Analüüsime lähemalt B-splainide erijuhte sõltuvalt m väärtustest. Kui $m = 0$, siis B_0^i graafik on esitatud järgmisel joonisel.



§1 algul toodud splaini definitsiooni tuleb siin modifitseerida. Kuuluvus $S \in S_{\Delta}^{0,1}$ tähendab, et $S \in P^0[x_i, x_{i+1})$ iga i korral ning $S \in C^{-1}[a, b]$, seejuures defineeritakse

$$C^{-1}[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{funktsioonil } f \text{ on ülimalt lõplik arv esimest liiki katkevuspunkte}\}.$$

Esimest liiki katkevuspunkti mõistame siin nii, et funktsioon on pidev kas paremalt või vasakult, seejuures eksisteerivad mõlemad ühepoolsed lõplikud piirväärtused, kuid need ei ole võrdsed. Tüüpilised näited on järgmistel joonistel.

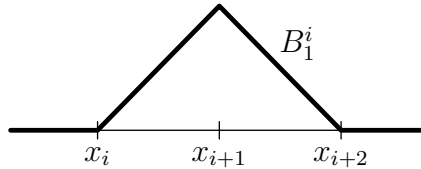


Meile praegu ebaolulise käsitlusena võib defineerida ka $m \geq 1$ korral

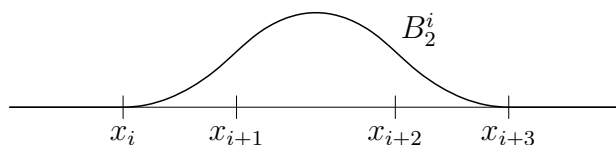
$$S_{\Delta}^{m,m+1} = \{S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid S \in P^m(x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n, S \in C^{-1}[a, b]\},$$

mis sisuliselt ühtib eespool vaadeldud hulgaga P_{Δ}^m , kus on funktsiooni väärtused sõlmedes üheselt määratud.

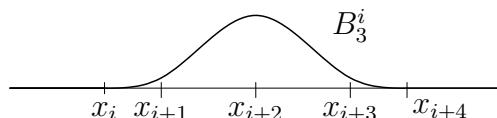
Kui $m = 1$, siis B-splain on pidev, tema graafik on kujutatud järgmisel joonisel.



Kui $m = 2$, siis B-splaini tuletis on pidev, tema graafik on järgmisel joonisel.



Kui $m = 3$, siis B-splainil on juba pidev teine tuletis ja graafikut näeme järgmisel joonisel.



Märkus. Defineerisime B-splainid, kasutades funktsiooni φ_m diferentssuhteid teise argumendi järgi. Teine võimalus B-splaine defineerida on rekurrentse seose (2) abil, lähtudes suhteliselt lihtsalt kirjeldatavatest splainidest B_0^i ja minnes sammhaaval järjest kõrgema astme splainideni. Lisame, et võrduses (2) on $x \in [x_i, x_{i+m+1}]$ korral $B_m^i(x)$ kumer kombinatsioon kahest madalama astme splaini väärtusest.

Funktsiooni f kandjaks nimetatakse hulka $\{x \mid f(x) \neq 0\}$, see on sellise hulga sulund, kus funktsioon erineb nullist. Kandjat tähistatakse $\text{supp } f$. Lause 2 põhjal $\text{supp } B_m^i = [x_i, x_{i+m+1}]$.

Lause 3. *B-splainid on minimaalse kandjaga splainid hulka $S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,1}$ kuuluvate nullist erinevate splainide hulgas.*

Enne tõestust märgime, et $0 \in S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,1}$ ning $\text{supp } 0 = \emptyset$.

Tõestus. Vaatleme olukorda, kus $S \in S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,1}$, $S \neq 0$ ja $\text{supp } S \subset [x_i, x_{i+m+1}]$. Paneme tähele, et ei ole võimalik järgmisel joonisel kujutatud olukord,



sest igas osalõiguses on splain polünoom ja nullist erineval polünoomil on ülimalt lõplik arv nullkohti. Formaalsemalt, kui $\xi = \min\{x \mid x \in \text{supp } S\}$, siis ei ole võimalik, et $x_j < \xi < x_{j+1}$, sama olukord on ka juhul $\xi = \max\{x \mid x \in \text{supp } S\}$. Seepärast peab kandja algama ja lõppema sõlmes. Oletame näiteks vastuväiteliselt, et $\text{supp } S \subset [x_i, x_{i+m}]$. Võime lugeda, et splaini S sõlmedeks on $x_i, \dots, x_{i+m}$. Esitame splaini S baasi kaudu

$$S(x) = \sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha} x^{\alpha} + \sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)_+^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kui $x < x_i$, siis $S(x) = 0$ ehk $\sum_{\alpha=0}^m c_\alpha x^\alpha = 0$, millest $c_\alpha = 0$, $\alpha = 0, \dots, m$. Seega

$$S(x) = \sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)_+^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kui $x > x_{i+m}$, siis $x \notin \text{supp } S$, seepärast

$$\sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)^m = 0.$$

Kõrvalise märkusena juhime tähelepanu sellele, et siin ei saa otse järeldada, et $c_{mj} = 0$, $j = i, \dots, i+m$, sest me veel ei tea, kas funktsioonid $x \rightarrow (x - x_j)^m$, $j = i, \dots, i+m$, on lineaarsed sõltumatud.

Vaadeldavate x väärtuste korral $S'(x) = 0, \dots, S^{(m)}(x) = 0$, seega

$$\sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)^{m-k} = 0, \quad k = 0, \dots, m,$$

mis on homogeenne süsteem kordajate c_{mj} määramiseks. Süsteemi determinant on

$$\begin{vmatrix} (x - x_i)^m & \dots & (x - x_{i+m})^m \\ (x - x_i)^{m-1} & \dots & (x - x_{i+m})^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x - x_i & \dots & x - x_{i+m} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

sest tegemist on Vandermonde'i determinandiga. Niisiis, $c_{mj} = 0$, $j = i, \dots, i+m$. Kuid siis $S = 0$, mis on vastuolus eeldusega, ja sellega on lause 3 tõestatud.

Teoreem. *Splainid B_m^i , $i = -m, \dots, n-1$, moodustavad baasi ruumis $S_\Delta^{m,1}[x_0, x_n]$, kus $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_n$.*

Enne otseselt tõestuse juurde asumist märgime, et B-splainid B_m^i on määratud kõikjal reaalteljel $\mathbb{R}$ ning nad ahendatakse lõigule $[x_0, x_n]$. Teoreemi väide on selliste ahendite kohta.

Tõestus. On arusaadav, et algselt hulgal $\mathbb{R}$ defineeritud B-splainide ahendid lõigule $[x_0, x_n]$, mida tähistame ikka B_m^i , kuuluvad hulka $S_\Delta^{m,1}$. Nende arv on $m+n$, mis on ühtlasi $\dim S_\Delta^{m,1}$, seepärast näitame nende lineaarset sõltumatust lõigul $[x_0, x_n]$.

Tõestame kõigepealt, et B_m^i , $i = -m, \dots, n-1$, on linearselt sõltumatud hulgal $\mathbb{R}$. Olgu

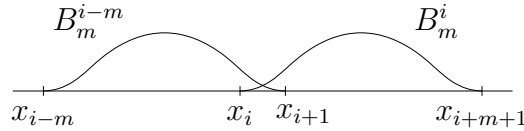
$$\sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_m^i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Võtame $x \in (x_{-m}, x_{-m+1})$, siis $c_{-m} B_m^{-m}(x) = 0$. Et $B_m^{-m}(x) > 0$, siis $c_{-m} = 0$. Seejärel võtame $x \in (x_{-m+1}, x_{-m+2})$ ning saame, et $c_{-m+1} = 0$. Analoogiliselt jätkates näeme, et $c_i = 0$, $i = -m, \dots, n-1$.

Näitame järgnevas, et B_m^i on linearselt sõltumatud lõigul $[x_0, x_n]$. Olgu

$$\sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_m^i(x) = 0, \quad x \in [x_0, x_n].$$

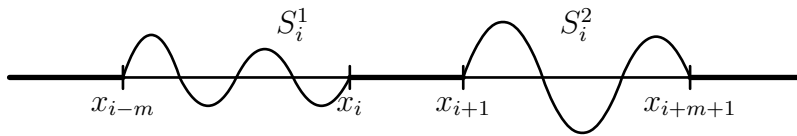
Valime $x \in (x_i, x_{i+1})$, kus i on üks väärtustest $0, \dots, n-1$, loeme ta fikseerituks. Arvestades splineide B_m^i kandjate ulatust (vt. joonist),



näeme, et valitud x korral $B_m^j(x) = 0$, kui $j < i - m$ või $j > i$. Seega

$$\sum_{j=i-m}^i c_j B_m^j(x) = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}).$$

Kasutame tähistust $S_i(x) = \sum_{j=i-m}^i c_j B_m^j(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Teame, et $S_i(x) = 0$, kui $x < x_{i-m}$ või $x > x_{i+m+1}$, samuti $x \in (x_i, x_{i+1})$ korral. Seega S_i võib olla nullist erinev intervallides $[x_{i-m}, x_i]$ ja $[x_{i+1}, x_{i+m+1}]$.



Defineerime

$$S_i^1(x) = \begin{cases} S_i(x), & x \in [x_{i-m}, x_i], \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Analoogiliselt määrame S_i^2 ehk $S_i^2 = S_i - S_i^1$ või $S_i^1 + S_i^2 = S_i$. Seejuures $S_i^2, S_i^2 \in S^{m,1}$, kuid $\text{supp } S_i^1 \subset [x_{i-m}, x_i]$, $\text{supp } S_i^2 \subset [x_{i+1}, x_{i+m+1}]$, mis on lause 3 põhjal võimalik

vaid siis, kui $S_i^1 = 0$, $S_i^2 = 0$ ehk $S_i(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Võrdus

$$S_i(x) = \sum_{j=i-m}^i c_j B_m^j(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

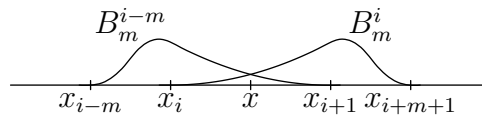
annab nüüd, et $c_j = 0$, $j = i - m, \dots, i$. Sellise arutelu saab läbi viia iga $i = 0, \dots, n - 1$ korral. Kui $i = 0$, siis saame $c_{-m} = 0, \dots, c_0 = 0$; kui $i = 1$, siis $c_{-m+1} = 0, \dots, c_1 = 0$; lõpuks, kui $i = n - 1$, siis $c_{-m+n-1} = 0, \dots, c_{n-1} = 0$. Kokkuvõttes, $c_{-m} = 0, \dots, c_{n-1} = 0$, mis lõpetab teoreemi tõestuse.

Järeldus. Iga spline $S \in S_{\Delta}^{m,1}$ on üheselt esitatav

$$S(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_m^i(x), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Märkus. B-splainide B_m^i , $i = -m, \dots, n - 1$, defineerimisel laiendasime võrgu Δ lisasõlmedega $x_{-m}, \dots, x_{-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$. On selge, et need B-splainid, mis kasutavad lisasõlmi, sõltuvad nende valikust (erinevad võrgu Δ laiendid annavad erinevad B-splainid). Splainide B_m^i ahendid lõigule $[x_0, x_n]$ sõltuvad samuti võrgu Δ laiendist ning B-splainidest baas ei ole üheselt määratud võrguga Δ . Seepärast tuleb teoreemile järgnevat järeldust mõista nii, et kui võrgu Δ laiend on välja valitud ja fikseeritud, siis on B-splainid kui baas ruumis $S_{\Delta}^{m,1}$ ja splaini esitus selle kaudu üheselt määratud.

B-splainidest baasi kasutamisel ilmneb üks soodne asjaolu. Praktikas kasutatavatel splainidel ei ole aste suur, enamasti $m = 1, 2, 3$. Fikseeritud x korral on summas $\sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_m^i(x)$ ülimalt $m + 1$ nullist erinevat liidetavat, mida illustreerib juba esinenud joonis:



Kui $x \in [x_i, x_{i+1}]$, siis ainult $m + 1$ B-splaini väärtust $B_m^{i-m}(x), \dots, B_m^i(x)$ saavad olla nullist erinevad. Seejuures sõlmede arvu määrav n võib olla suur, praktikas isegi tuhandetes.

Ülesanne 5. Tõestada, et minimaalse kandjaga splainid ühtivad kordaja täpsuseni B-splainidega.

Formaalselt tähendab selle ülesande väide, et kui $S \in S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m,1}$ on selline, et kehtib $\text{supp } S \subset [x_i, x_{i+m+1}]$, siis $S(x) = cB_m^i(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kus $c = \text{const}$. Soovitus: ülesande lahendamisel kasutada esitust B-splainidest baasi kaudu.

Lisame, et on mõeldav sõnastada ülesande väide, et kui $S \in S_{\Delta', \mathbb{R}}^{m,1}$ ja seejuures $\text{supp } S \subset [x_i, x_{i+m+1}]$, siis $S(x) = cB_m^i(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $c = \text{const}$. Sel juhul tuleb Δ' laiendada võrguks Δ'' : $x_{-2m} < \dots < x_{-m} < \dots < x_0 < \dots < x_n < \dots < x_{n+2m}$ ja võtta B-splainidest baas, mis kasutab võrku Δ'' , ning arendada S selle järgi.

§4. Normaliseeritud B-splainid

Kui vektorruumi baasidelemendid korrutada mingite nullist erinevate arvudega, siis saadakse ikka baas. Vaatleme siin sellist võtet B-splainide korral.

Defineerime

$$\overline{B}_m^i(x) = (x_{i+m+1} - x_i)B_m^i(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

s.t. eespool toodud B-splainid korrutatakse kandja pikkusega. Splaine $\overline{B}_m^i$ nimetatakse normaliseeritud B-splainideks. Eespool toodud võrdusest

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1}^{i+1}(x)$$

saadakse peale korrutamist arvuga $x_{i+m+1} - x_i$ võrdus

$$\overline{B}_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \overline{B}_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \overline{B}_{m-1}^{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Teoreem. *Kehtib*

$$\sum_{i=-m}^{n-1} \overline{B}_m^i(x) = 1, \quad x \in [x_0, x_n], \text{ kui } m \geq 1,$$

ning

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{B}_0^i(x) = 1, \quad x \in [x_0, x_n).$$

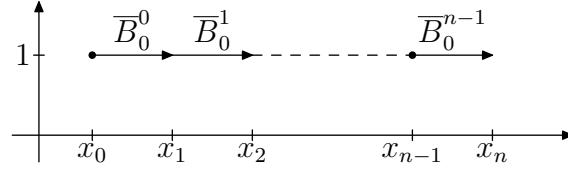
Tõestus. Eespool nägime, et

$$B_0^i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, & \text{kui } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Sellest saame, et

$$\overline{B}_0^i(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Nüüd on selge teoreemis toodud väite kehtivus $m = 0$ korral ning seda illustreerib järgnev joonis.



Tõestame võrduse $m \geq 1$ korral induktsiooniga. Eeldame, et on tõestatud võrdus

$\sum_{i=-(m-1)}^{n-1} \bar{B}_{m-1}^i(x) = 1, x \in (x_0, x_n)$. Siis $x \in (x_0, x_n)$ korral võrduse (1) abil

$$\sum_{i=-m}^{n-1} \bar{B}_m^i(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \sum_{i=-m}^{n-1} \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \bar{B}_{m-1}^{i+1}(x) =$$

/ paremas pooles esimeses summas $\bar{B}_{m-1}^{-m}(x) = 0$,

sest $\text{supp } B_{m-1}^{-m} = [x_{-m}, x_0]$, teises summas $\bar{B}_{m-1}^n(x) = 0$, /

sest $\text{supp } B_{m-1}^n = [x_n, x_{n+m}]$ /

$$= \sum_{i=-(m-1)}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \sum_{i=-m}^{n-2} \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \bar{B}_{m-1}^{i+1}(x) =$$

/ teises summas teeme indeksi nihke $i + 1 = j$, siis

$i = -m \leftrightarrow j = -(m-1)$, $i = n-2 \leftrightarrow j = n-1$,

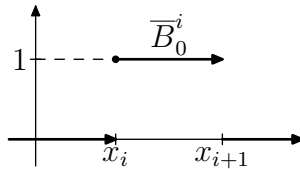
aga jätkame vana indeksi tähisega /

$$= \sum_{i=-(m-1)}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \sum_{i=-(m-1)}^{n-1} \frac{x_{i+m} - x}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) =$$

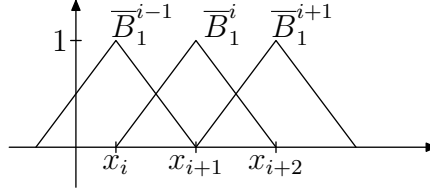
$$= \sum_{i=-(m-1)}^{n-1} \bar{B}_{m-1}^i(x) = 1.$$

Punktidesse x_0 ja x_n laiendame võrduse pidevuse järgi (võttes piirväärtuse), sest $m \geq 1$ korral on splineid $\bar{B}_m^i$ pidevad. Sellega on teoreem tõestatud.

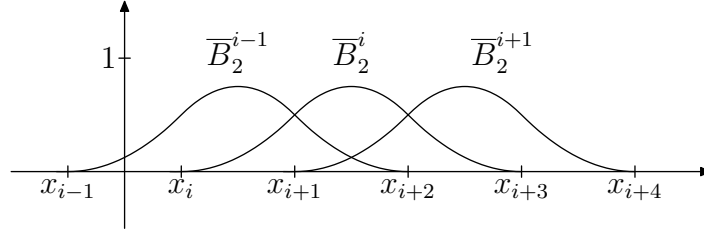
Kirjeldame veel erijuhte. Sisuliselt juba nägime eespool joonist $m = 0$ korral:



Juhul $m = 1$ on normaliseeritud B-splainid kujutatud järgmisel joonisel:



Juhul $m = 2$ on splineide $\overline{B}_2^i$ graafikud joonisel



Siin splinei $\overline{B}_2^i$ väärtus punktis $x \in (x_i, x_{i+3})$ on $\overline{B}_2^i(x) < 1$, sest ka mingi teine B-spline on samas punktis x positiivse väärtusega.

B-splaine võib vaadelda ka mitmete normeeritud ruumide elementidena ning siis võib neid korrutada selliste arvudega, et nende normid oleksid võrdsed arvuga 1. Selliseid B-splaine võib nimetada normeerituteks. Näiteks ruumis $L_1(-\infty, \infty)$ on

B-splainid B_0^i normeeritud, sest nende norm on $\int_{-\infty}^{\infty} B_0^i(x) dx = 1$.

Ülesanne 6. Näidata B-splainide vahelist rekurrentset seost kasutades, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_1^i(x) dx = \frac{1}{2} \text{ ja } \int_{-\infty}^{\infty} B_2^i(x) dx = \frac{1}{3} \text{ (need on B-splainide } B_1^i \text{ ja } B_2^i \text{ normid ruumis } L_1(-\infty, \infty)).$$

Tehniline soovitus: kasutada tähistusi $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, kirjutiste lühendamiseks.

Ülesandes 6 väidetuga on kooskõlas järgmine tulemus.

Lause. Kehtib $\int_{-\infty}^{\infty} B_m^i(x) dx = \frac{1}{m+1}$.

Tõestus. Kasutame siin Tayloriga valemiga jääkliikmega integraalsel kujul

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(l-1)}(a)}{(l-1)!}(x-a)^{l-1} +$$

$$+ \frac{1}{(l-1)!} \int_a^x (x-s)^{l-1} f^{(l)}(s) ds.$$

Ülesanne 7. Tõestada esitatud valem. Soovitus: lähtudes Newton–Leibnizi valemist $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds$ kasutada ositi integreerimist, võttes algul $u = f'(s)$, $dv = ds$, $v = s - x$ ning edaspidi induktsiooni järgu l järgi.

Kui $a \leq x \leq b$, siis saab jääkliikme kirjutada kujul

$$\frac{1}{(l-1)!} \int_a^b (x-s)_+^{l-1} f^{(l)}(s) ds, \quad (2)$$

sest $a \leq s \leq x$ korral $(x-s)_+^{l-1} = (x-s)^{l-1}$, kuid $x < s \leq b$ korral $(x-s)_+^{l-1} = 0$. Leiame Tayloriga valemis mõlemas pooles diferentssuhte muutuja x järgi sõlmedega $x_i, \dots, x_{i+m+1} \in [a, b]$. Siis vasakul saame, kasutades diferentssuhte esitust tuletise kaudu,

$$f(x_i, \dots, x_{i+m+1}) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \quad \xi \in (x_i, x_{i+m+1}).$$

Kui võtta $l = m+1$, siis Tayloriga valemis polünoomidest astmeni m tulevad diferentssuhted nullid (nende polünoomide $m+1$ järku tuletised on nullid). Integraali alla tekib jääkliiget (2) silmas pidades vastav diferentssuhe x järgi, mille esitame funktsiooni väärtuste kaudu. Sellega saame võrduse

$$\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} = \frac{1}{m!} \int_a^b \sum_{j=i}^{i+m+1} \frac{(x_j - s)_+^m}{\omega'(x_j)} f^{(m+1)}(s) ds.$$

Kui nüüd võtame $f(x) = x^{m+1}$, siis $f^{(m+1)}(x) = (m+1)!$ ning võrdust (1') , §3, silmas pidades jõuame võrduseni

$$1 = (m+1) \int_{x_i}^{x_{i+m+1}} B_m^i(s) ds,$$

millega oleme lause tõestanud.

§5. Ülevaade funktsionaalruumidest ja mõnedest abitulemustest

Edaspidi vaatleme funktsioonide lähendamist splineidega, seejuures eeldame lähendatavate funktsioonide kuulumist kindlatesse funktsionaalruumidesse. See on oluline sellepärast, et teha kindlaks lähendamise veahinnangud, mis iseloomustavad koonduvuskiirust.

Lõigus pidevate funktsioonide ruum on $C[a, b] = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ on pidev}\}$. Ruumi norm on $\|f\|_{C[a, b]} = \|f\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Lõigus k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide ruum on $C^k[a, b] = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f^{(k)} \text{ on pidev}\}$, seejuures $k \geq 1$. Täpsustuseks lisame, et nõutakse funktsioonil $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tuletise $f^{(k)}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ olemasolu (teatavasti saab tuletise mõistest rääkida funktsiooni puhul, mis on defineeritud lahtises hulgas), kusjuures on olemas lõplikud piirväärtused $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{(k)}(x)$ ja $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f^{(k)}(x)$.

Norm ruumis $C^k[a, b]$ defineeritakse $\|f\|_{C^k[a, b]} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{C[a, b]}$ või ekvivalentsetena

$\max_{0 \leq i \leq k} \|f^{(i)}\|_{C[a, b]}$, kusjuures siin mõistetakse $f^{(0)} = f$.

Integreeruva astmega funktsioonide ruum on

$$L_p(a, b) = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ on mõõtv, } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

kusjuures ruumi $L_p(a, b)$ elemendid on ekvivalentsete funktsioonide klassid, s.t. $f = g$ parajasti siis, kui $f(x) = g(x)$ peaaegu kõikjal intervallis $[a, b]$ ehk $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Norm selles ruumis on

$$\|f\|_{L_p(a, b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

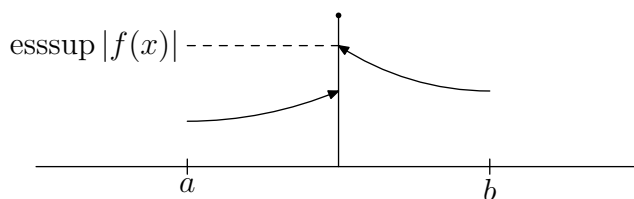
Tõkestatud (mõõtuvate) funktsioonide ruum defineeritakse

$$L_\infty(a, b) = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ on mõõtuv, } \operatorname{esssup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| < \infty\},$$

kus funktsiooni $|f|$ oluline tõke on

$$\operatorname{esssup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \inf \{c > 0 \mid |f(x)| \leq c \text{ peaaegu kõikide } x \in [a, b] \text{ väärtuste korral}\}.$$

Siin $\|f\|_{L_\infty(a, b)} = \operatorname{esssup}_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Illustreerime funktsiooni olulist tõket joonisega



samuti näitega, kus $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 1$, $x \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, milles $\operatorname{esssup} |f(x)| = 1$, kuigi f on tavalise funktsioonina tõkestamata. Seepärast oleks täpsem nimetada seda oluliselt tõkestatud funktsioonide ruumiks, mis ei ole aga eriti tähtis, sest ka see ruum koosneb nagu eespool $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, ekvivalentsete funktsioonide klassidest ja igas klassis on olemas tõkestatud liige.

Tükiti pidevate funktsioonide ruum

$$C^{-1}[a, b] = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ funktsioonil } f \text{ on ülimalt lõplik arv esimest liiki katkevuspunkte, mis asuvad vahemikus } (a, b)\}.$$

Tavaliselt piisab sellisest käsitlusest, kus $C^{-1}[a, b]$ vaadeldakse alamruumina ruumis $L_\infty(a, b)$, milles ei ole funktsiooni väärtused katkevuspunktides olulised. Kui aga $C^{-1}[a, b]$ elemente vaadeldakse funktsioonidena, siis lepitakse kokku, et funktsioonid on katkevuspunktides näiteks paremalt pidevad.

Ruume L_p , $1 \leq p \leq \infty$, võib vaadelda ka tõkestamata piirkondade korral ja eespool juba esines meil $L_1(-\infty, \infty)$.

Olgu $p, q \in [1, \infty]$ sellised, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (siis $p = 1$ korral $q = \infty$ ja $p = \infty$ korral $q = 1$). Kui $f \in L_p(a, b)$ ja $g \in L_q(a, b)$, siis kehtib Hölder'i võrratus

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}.$$

Juhul $p = q = 2$ on see Cauchy–Bunjakovski–Schwarzi võrratus.

Sobolevi ruumid on

$$W^{p,l}(a,b) = \{f \mid f \in L_p(a,b), f^{(l-1)} \text{ on absoluutselt pidev, } f^{(l)} \in L_p(a,b)\},$$

kus $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{N}$. Siin peetakse silmas funktsiooni tavalist tuletist ehk piirväärtust

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

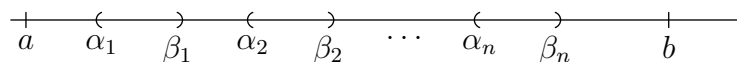
Terviklikkuse huvides toome ka funktsiooni $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ absoluutse pidevuse mõiste: iga $\varepsilon > 0$ korral eksisteerib $\delta > 0$ nii, et kui $\alpha_i, \beta_i \in [a,b]$, $(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \emptyset$, kui $i \neq j$, siis

$$\sum_{i=1}^n |\beta_i - \alpha_i| < \delta$$

korral

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Märgime, et $n = 1$ korral tähendab see rohkem tuntud ühtlase pidevuse mõistet, aga absoluutses pidevuses on nõue kõikide naturaalarvude n korral. Illustratsiooniks toome veel joonise intervallide (α_i, β_i) paiknemise kohta:



Absoluutselt pidev funktsioon on ühtlaselt pidev, ühtlaselt pidev funktsioon on pidev ning $a, b \in \mathbb{R}$ korral on lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon ka ühtlaselt pidev.

Kui f on absoluutselt pidev, siis peaaegu kõikjal on olemas (tavalises mõttes) f' . Sobolevi ruumis toodud nõudest, et $f^{(l-1)}$ on absoluutselt pidev, järeldub peaaegu kõikjal $f^{(l)}$ olemasolu, kuid tingimus on, et $f^{(l)} \in L_p$.

Teine võimalus Sobolevi ruume defineerida on

$$W^{p,l}(a,b) = \{f \in L_p(a,b) \mid f', f'', \dots, f^{(l)} \in L_p(a,b)\},$$

kus tuletisi mõistetakse distributsioonide mõttes. Need tuletised eksisteerivad iga $f \in L_p(a,b)$ korral, nõue on f tuletiste kuulumine ruumi $L_p(a,b)$.

Norm ruumis $W^{p,l}(a,b)$ defineeritakse

$$\|f\|_{W^{p,l}(a,b)} = \left(\sum_{i=0}^l \|f^{(i)}\|_{L_p(a,b)}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=0}^l \int_a^b |f^{(i)}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

tavaliselt

$$\|f\|_{W^{\infty,l}(a,b)} = \max_{0 \leq i \leq l} \|f^{(i)}\|_{L^{\infty}(a,b)}.$$

Olgu antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Defineerime

$$C^k C_{\Delta}^l[a, b] = \{f \mid f \in C^k[a, b], f \in C^l[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n\},$$

see on mõistlik, kui $l > k$. Veel olgu

$$C^k W_{\Delta}^{p,l}[a, b] = \{f \mid f \in C^k[a, b], f \in W^{p,l}[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n\}.$$

Teoreem (pidevate funktsioonide keskväärtusteoreem). *Kui $f \in C[a, b]$ ja $\alpha\beta > 0$, siis on olemas $\xi \in [a, b]$ nii, et*

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta)f(\xi).$$

Tõestus. Olgu $\varphi(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) - (\alpha + \beta)f(x)$, $x \in [a, b]$. Siis $\varphi \in C[a, b]$. Saame

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \beta(f(b) - f(a)), \\ \varphi(b) &= \alpha(f(a) - f(b)).\end{aligned}$$

Kui $f(a) = f(b)$, siis võib võtta $\xi = a$ või $\xi = b$. Kui aga $f(a) \neq f(b)$, siis $\varphi(a)\varphi(b) < 0$ (φ väärtused on vastandmärgilised), seepärast eksisteerib $\xi \in (a, b)$ nii, et $\varphi(\xi) = 0$.

Teoreem (keskväärtusteoreem integraalide jaoks). *Kui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruv ja $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral või $g(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral (g säilitab märki lõigus $[a, b]$), siis on olemas $\xi \in [a, b]$ nii, et*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Tõestus. Oletame näiteks, et $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Siis $\int_a^b g(x) dx \geq 0$.

Pidev funktsioon f on tõkestatud, seepärast on olemas arvud m ja M nii, et $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Seepärast $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ ja integreerides

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Kui $\int_a^b g(x) dx = 0$, siis viimase kahepoolse võrratuse põhjal $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ ja teoreemis toodud võrdus kehtib iga $\xi \in [a, b]$ korral. Kui aga $\int_a^b g(x) dx > 0$, siis saame

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon f saavutab kõik väärtused miinimumi ja maksimumi vahel ehk on olemas $\xi \in [a, b]$ nii, et

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx},$$

mis annabki soovitud väite.

Kui on antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siis defineerime

$$\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|,$$

see on funktsiooni f võnkumine intervallis $[x_{i-1}, x_i]$. Olgu veel $\omega(f) = \max_{1 \leq i \leq n} \omega_i(f)$. Funktsiooni $f \in C[a, b]$ korral $\omega(f) \rightarrow 0$, kui $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ (siis vaadatakse võrkude jada või peret). Sel juhul muidugi $n \rightarrow \infty$ ja $x_i = x_{ni}$, $i = 1, \dots, n-1$.

§6. Linearsplainidega interpoleerimine

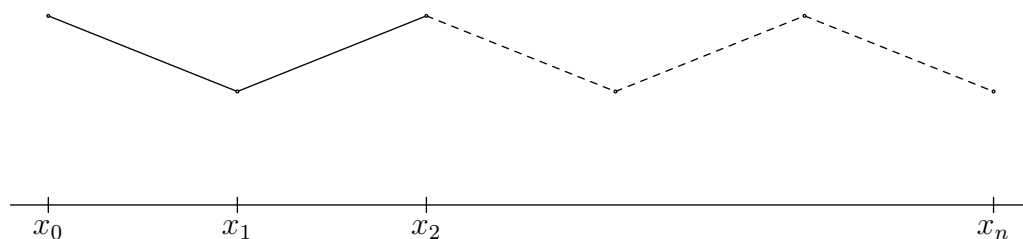
Olgu antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja veel vastavad arvud $f_0, \dots, f_n$. Olgu vaja leida $S \in S_{\Delta}^{1,1}$ nii, et $S(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$, sellist funktsiooni S nimetatakse interpoleerivaks linearsplainiks. Sellise splaini saab leida lokaalselt, igas lõigu $[a, b]$ osalõiguses eraldi. Leitakse $S \in P^1[x_{i-1}, x_i]$ nii, et $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$ ja $S(x_i) = f_i$. Selleks võib kasutada Lagrange'i interpolatsioonivalemit

$$S(x) = f_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

või Newtoni interpolatsioonivalemit

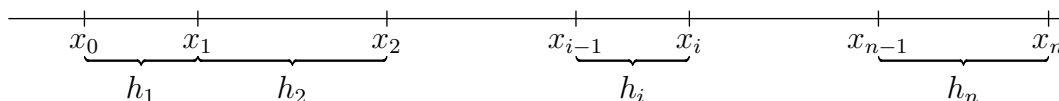
$$S(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}),$$

kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Graafiliselt võib linearsplainidega interpoleerimist näha väga tihti andmete esitamisel, vt. näiteks joonist



Siin punktide $(x_i, f_i), i = 0, \dots, n$, hulgas naaberpunktid ühendatakse sirglõikudega, mis on esimese astme polünoomide graafikud osalõikudel. Kõrgema astme polünoomidega interpoleerimist praktiliselt ei kasutatagi, sest seda ei osata ja polegi vaja, sest see käitub halvasti.

Tähistame $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$, need on jaotuses Δ osalõikude pikkused.



Interpoleeriva lineaarsplaini saab $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral esitada

$$S(x) = \frac{x_i - x}{h_i} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} f_i = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} (x - x_{i-1}).$$

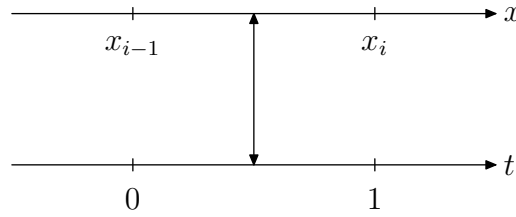
Vaatleme olukorda, kus lisaks võrgule Δ on antud funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siis saab leida $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Olgu S neid andmeid interpoleeriv lineaarsplain. Kasutame tähistust $R(x) = S(x) - f(x)$ (mõnikord võetakse $R(x) = f(x) - S(x)$, siis $f(x) = S(x) + R(x)$). Tähistame veel $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Järgmises teoreemis (ja ka hiljem) $\|f\|_\infty$ tähendab funktsiooni f normi ruumis $L_\infty(a, b)$, mis pideva funktsiooni f korral ühtib normiga ruumis $C[a, b]$.

Teoreem. *Interpoleeriva lineaarsplaini korral kehtivad hinnangud*

$f \in$	$\ R\ _\infty \leq$	$\ R'\ _\infty \leq$
$C[a, b]$	$\omega(f)$	–
$W^{\infty,1}(a, b)$	$\frac{h}{2} \ f'\ _\infty$	–
$CC_\Delta^1[a, b]$	$\frac{h}{4} \omega(f')$	$\omega(f')$
$CW_\Delta^{\infty,2}[a, b]$	$\frac{h^2}{8} \ f''\ _\infty$	$\frac{h}{2} \ f''\ _\infty$

Tabeli viimases reas toodud hinnangud on olulised ruumis $C^2[a, b] \subset CW_\Delta^{\infty,2}[a, b]$.

Tõestus. Paneme tähele, et hinnangud piisab tõestada suvaliselt valitud osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$. Kasutame muutujavahetust $x = x_{i-1} + th_i$, kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Siis vastavalt $t \in [0, 1]$.



Leiame veel $x_i - x = x_i - (x_{i-1} + th_i) = (1 - t)h_i$ ning Lagrange'i valemi põhjal $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral $S(x) = (1 - t)f_{i-1} + tf_i$.

Juhul $f \in C[a, b]$ saame keskväärtusteoreemi kasutades

$$S(x) - f(x) = (1 - t)f_{i-1} + tf_i - f(x) = f(\xi) - f(x), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sellest

$$|R(x)| = |S(x) - f(x)| = |f(\xi) - f(x)| \leq \omega_i(f) \leq \omega(f).$$

Olgu $f \in CW_{\Delta}^{\infty,2}[a, b]$, siis $f \in W^{\infty,2}[x_{i-1}, x_i]$. Kasutame Tayloriga valemite jääkliikmega integraalsel kujul. Selle abil

$$f_{i-1} = f(x_{i-1}) = f(x) + f'(x)(x_{i-1} - x) + \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)f''(s) ds,$$

$$f_i = f(x_i) = f(x) + f'(x)(x_i - x) + \int_x^{x_i} (x_i - s)f''(s) ds.$$

Nendest võrdustest esimese korrutame teguriga $1-t$, teise teguriga t ja liidame tulemused, kusjuures veel asendame $x_{i-1} - x = -th_i$ ja $x_i - x = (1-t)h_i$, tulemusena saame Lagrange'i valemi abil

$$S(x) - f(x) = (1-t) \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)f''(s) ds + t \int_x^{x_i} (x_i - s)f''(s) ds.$$

Sellest

$$|R(x)| \leq (1-t) \int_{x_{i-1}}^x (s - x_{i-1})|f''(s)| ds + t \int_x^{x_i} (x_i - s)|f''(s)| ds \leq$$

$$/ \text{ mõlemas integraalis hindame } |f''(s)| \leq \|f''\|_{\infty} /$$

$$\leq \left((1-t) \frac{(s - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{s=x_{i-1}}^{s=x} + t \left(-\frac{(x_i - s)^2}{2} \right) \Big|_{s=x}^{s=x_i} \right) \|f''\|_{\infty} =$$

$$= \left((1-t) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + t \frac{(x_i - x)^2}{2} \right) \|f''\|_{\infty} =$$

$$= \frac{(1-t)t^2 + t(1-t)^2}{2} h_i^2 \|f''\|_{\infty} = \frac{1}{2} t(1-t) h_i^2 \|f''\|_{\infty} \leq \frac{h_i^2}{8} \|f''\|_{\infty},$$

kus viimases hinnangus kasutasime seda, et $t \in [0, 1]$ korral $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.

Märgime, et kui $f \in C^2[a, b]$, siis saab kasutada interpolatsioonivalemi jääkliikme esitust

$$|R(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2!} (x - x_{i-1})(x_i - x),$$

millest tuleb kohe nõutud hinnang.

Ülesanne 8. Tõestada teoreemis toodud ülejäänud hinnangud.

Lisame, et $f \in C[a, b]$ korral, kui $h \rightarrow 0$, siis $\omega(f) \rightarrow 0$ funktsiooni f ühtlase pidevuse tõttu.

Lineaarsplainidega andmete või funktsioonide lähendamise puuduseks on see, et splain ei ole sile, tema graafikul esinevad murdepunktid. Teine puudus on suhteliselt madal lähendamisjark $O(h^2)$, mida ei saa parandada lähendatava funktsiooni suuremat siledust (kõrgemat järku diferentseeruvust) eeldades. Kui näiteks $f''(x) = \text{const}$ (sobib $f(x) = x^2$), siis ruumi $C^2[a, b]$ jaoks saadud $\|R\|_\infty$ hinnang realiseerub täpselt. Meie lähemaks eesmärgiks on vaadelda kõrgema astme splainidega (eelkõige kuupsplainidega) interpoleerimist. Sellega ületame mõlemad mainitud puudused: lähendav splain on ise sile ja vähemalt siledamate funktsioonide lähendamisjark on kõrgem.

§7. Hermite'i kuupsplainid

Olgu antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja vastavad arvud f_i, f'_i , $i = 0, \dots, n$. Seame eesmärgiks leida $S \in S_{\Delta}^{3,2}[a, b]$ nii, et $S(x_i) = f_i, S'(x_i) = f'_i$, $i = 0, \dots, n$. Üldisest splineide ruumi dimensioonivalemist $\dim S_{\Delta}^{m,k} = m + 1 + k(n - 1)$ saame nüüd $\dim S_{\Delta}^{3,2} = 3 + 1 + 2(n - 1) = 2n + 2$, samapalju on ka interpolatsioonitingimusi. Taolisi nõudeid rahuldavaid splaine nimetatakse Hermite'i kuupsplainideks, mis seostub sellega, et üldisemas Hermite'i interpoleerimisülesandes esinevad interpolatsioonitingimused ka tuletiste kohta ehk interpolatsiooni-sõlmed on kordsed.

Meie esimene eesmärk on näidata, kuidas Hermite'i kuupsplaine leida. Need saab leida lokaalselt (nagu interpoleerivad lineaarsplainid) igas osalõiguses eraldi. Piisab leida $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$, mis rahuldab nelja interpolatsioonitingimust

$$S(x_{i-1}) = f_{i-1}, S(x_i) = f_i, S'(x_{i-1}) = f'_{i-1}, S'(x_i) = f'_i. \quad (1)$$

Interpolatsioonitingimuste täidetust kõigis sõlmedes tagab ka selle, et $S \in C^1[a, b]$, mis kaasneb tingimusega $S \in S_{\Delta}^{3,2}$. Üks võimalus on vaadelda splaini S hulga $P^3[x_{i-1}, x_i]$ elemendina $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral kujul $S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ või, veelgi sobivamalt, $S(x) = c_0 + c_1(x - x_{i-1}) + c_2(x - x_{i-1})^2 + c_3(x - x_{i-1})^3$ ja lahendada lineaarne võrrandisüsteem nelja tundmatuga $c_0, \dots, c_3$ ja nelja võrrandiga, mis tulevad interpolatsioonitingimustest (1).

Ülesanne 9. Moodustada tingimustest (1) võrrandisüsteem kordajate $c_0, \dots, c_3$ määramiseks ja näidata, et see on üheselt lahenduv (sellega saame, et interpoleeriv Hermite'i kuupsplain eksisteerib ja on üheselt määratud igasuguste f_i, f'_i , $i = 0, \dots, n$, korral).

Toimime Hermite'i kuupsplaini leidmiseks järgmiselt. Nagu varemgi, teeme muutjavahetuse $x = x_{i-1} + th_i$ ehk $t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$, $h_i = x_i - x_{i-1}$. Olgu

$$S(x) = \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_if'_{i-1} + \varphi_3(t)h_if'_i,$$

kus

$$\varphi_0(t) = (1 - t)^2(1 + 2t),$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= t^2(3-2t), \\ \varphi_2(t) &= t(1-t)^2, \\ \varphi_3(t) &= -t^2(1-t).\end{aligned}$$

Et $\varphi_0, \dots, \varphi_3$ on kuuppolünoomid, siis $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$. Jääb kontrollida interpolatsioonitingimuste (1) täidetust. Näeme, et $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, seepärast $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$, sest võrdusele $x = x_{i-1}$ vastab $t = 0$. Lisaks, $\varphi_0(1) = 0$, $\varphi_1(1) = 1$, $\varphi_2(1) = 0$, $\varphi_3(1) = 0$, seepärast $S(x_i) = f_i$, sest $x = x_i$ tähendab, et $t = 1$. Tuletiste juures arvestame, et $\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{dx}$ ja $dx = h_i dt$, millest $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h_i}$, seepärast $S'(x) = \frac{1}{h_i} \frac{dS}{dt}(t)$. Siis

$$S'(x) = \frac{1}{h_i} (\varphi'_0(t)f_{i-1} + \varphi'_1(t)f_i + \varphi'_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi'_3(t)h_i f'_i).$$

Vahetult arvutades saab leida, et

$$\begin{aligned}\varphi'_0(t) &= 6t(t-1), \\ \varphi'_1(t) &= 6t(1-t), \\ \varphi'_2(t) &= (1-t)(1-3t), \\ \varphi'_3(t) &= t(3t-2).\end{aligned}$$

Siis $\varphi'_0(0) = 0$, $\varphi'_1(0) = 0$, $\varphi'_2(0) = 1$, $\varphi'_3(0) = 0$ ning seepärast $S'(x_{i-1}) = f'_{i-1}$. Veel leiame, et $\varphi'_0(1) = 0$, $\varphi'_1(1) = 0$, $\varphi'_2(1) = 0$, $\varphi'_3(1) = 1$ ning seega $S'(x_i) = f'_i$.

Vaatleme järgnevas olukorda, kus on antud funktsioon $f \in C^1[a, b]$ ning võetud $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Teoreem. *Interpoleeriva Hermite'i kuupsplaini $S \in S_{\Delta}^{3,2}$ korral kehtivad jääkliikme $R(x) = S(x) - f(x)$ hinnangud*

$f \in$	$\ R\ _{\infty} \leq$	$\ R'\ _{\infty} \leq$	$\ R''\ _{\infty} \leq$	$\ R'''\ _{\infty} \leq$
$C^1[a, b]$	$\frac{3}{8}h\omega(f')$	$\frac{3}{2}\omega(f')$	–	–
$W^{\infty,2}(a, b)$	$\frac{1}{16}h^2\ f''\ _{\infty}$	$0.24750h\ f''\ _{\infty}$	–	–
$C^2[a, b]$	$\frac{1}{32}h^2\omega(f'')$	$0.12375h\omega(f'')$	$\frac{4}{3}\omega(f'')$	–
$C^1W_{\Delta}^{\infty,4}[a, b]$	$\frac{1}{384}h^4\ f^{IV}\ _{\infty}$	$\frac{\sqrt{3}}{216}h^3\ f^{IV}\ _{\infty}$	$\frac{1}{12}h^2\ f^{IV}\ _{\infty}$	$\frac{1}{2}h\ f^{IV}\ _{\infty}$

Viimases reas toodud hinnangud on tähtsad muuhulgas laialdaselt kasutatavas ruumis $C^4[a, b] \subset C^1W_{\Delta}^{\infty,4}[a, b]$.

Tõestus. Tõestame hinnangud $\|R\|_{\infty}$ jaoks ruumide $C^1[a, b]$ ja $C^1W_{\Delta}^{\infty,4}[a, b]$ juhul.

1) Olgu $f \in C^1[a, b]$. Arvestame, et $R(x_{i-1}) = R(x_i) = 0$, seepärast võime võtta $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Siis

$$\begin{aligned}
S(x) - f(x) &= \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_if'_{i-1} + \varphi_3(t)h_if'_i - f(x) = \\
&= \varphi_0(t)(f(x) + f'(\xi)(x_{i-1} - x)) + \varphi_1(t)(f(x) + f'(\eta)(x_i - x)) + \\
&\quad / \text{ siin } \xi \in (x_{i-1}, x), \eta \in (x, x_i) / \\
&+ \varphi_2(t)h_if'_{i-1} + \varphi_3(t)h_if'_i - f(x) = \\
&\quad / f(x) \text{ kordaja tuleb } \varphi_0(t) + \varphi_1(t) - 1 = 1 - 3t^2 + 2t^3 + \\
&\quad + 3t^2 - 2t^3 - 1 = 0; \text{ järgnevas kasutame seda, et } \\
&\quad x_{i-1} - x = -th_i, x_i - x = (1 - t)h_i / \\
&= -t\varphi_0(t)h_if'(\xi) + (1 - t)\varphi_1(t)h_if'(\eta) + \\
&+ \varphi_2(t)h_if'_{i-1} + \varphi_3(t)h_if'_i = \\
&\quad / \text{ siin } -t\varphi_0(t) \leq 0, (1 - t)\varphi_1(t) \geq 0, \varphi_2(t) \geq 0, \varphi_3(t) \leq 0, \\
&\quad \text{kasutame keskväärtusteoreemi pidevate funktsioonide jaoks} / \\
&= ((1 - t)\varphi_1(t) + \varphi_2(t))h_if'(\bar{\eta}) + (-t\varphi_0(t) + \varphi_3(t))h_if'(\bar{\xi}) = \\
&\quad / \text{ siin } \bar{\eta} \in [x_{i-1}, \eta], \bar{\xi} \in [\xi, x_i], \\
&\quad (1 - t)\varphi_1(t) + \varphi_2(t) = (1 - t)t^2(3 - 2t) + t(1 - t)^2 = \\
&\quad = t(1 - t)(1 + 2t - 2t^2) = \\
&\quad = t(1 - t)(1 + 2t(1 - t)), \\
&\quad -t\varphi_0(t) + \varphi_3(t) = -t(1 - t)^2(1 + 2t) - t^2(1 - t) = \\
&\quad = -t(1 - t)(1 + 2t - 2t^2) = \\
&\quad = -t(1 - t)(1 + 2t(1 - t)) / \\
&= t(1 - t)(1 + 2t(1 - t))h_i(f'(\bar{\eta}) - f'(\bar{\xi})).
\end{aligned}$$

Kasutame asjaolu, et funktsioon $t \mapsto t(1 - t)(1 + 2t(1 - t))$ saavutab lõigus $[0, 1]$ maksimumi punktis $t = \frac{1}{2}$ (sest $t \mapsto t(1 - t)$ maksimum on punktis $t = \frac{1}{2}$ ja seda juba eespool kasutasime). Sellest saame

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \right) h_i \omega_i(f') \leq \frac{3}{8} h \omega(f').$$

2) Olgu $f \in C^1 W_{\Delta}^{\infty,4}[a, b]$. Ka siin püüame saada $x \in (x_{i-1}, x_i)$ korral hinnangut jääkliikmele

$$R(x) = \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i - f(x).$$

Arendame $f_{i-1}, f_i, f'_{i-1}, f'_i$ Tayloriga valemi abil punktis x jääkliikmega integraalsel kujul. Nendes tekivad liikmed $x_{i-1} - x$ ja $x_i - x$, mille asemel kirjutame vastavalt $-th_i$ ja $(1-t)h_i$. Saame

$$\begin{aligned} f_{i-1} &= f(x_{i-1}) = f(x) + f'(x)(-th_i) + \frac{f''(x)}{2!}(-th_i)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(-th_i)^3 + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^3 f^{IV}(s) ds, \\ f_i &= f(x_i) = f(x) + f'(x)(1-t)h_i + \frac{f''(x)}{2!}((1-t)h_i)^2 + \\ &\quad + \frac{f'''(x)}{3!}((1-t)h_i)^3 + \frac{1}{3!} \int_x^{x_i} (x_i - s)^3 f^{IV}(s) ds, \\ f'_{i-1} &= f'(x_{i-1}) = f'(x) + f''(x)(-th_i) + \frac{f'''(x)}{2!}(-th_i)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^2 f^{IV}(s) ds, \\ f'_i &= f'(x_i) = f'(x) + f''(x)(1-t)h_i + \frac{f'''(x)}{2!}((1-t)h_i)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_x^{x_i} (x_i - s)^2 f^{IV}(s) ds. \end{aligned}$$

Asetame need $R(x)$ avaldisse. Eraldi maksab välja arvutada funktsiooni f väärtuse $f(x)$ ja tuletiste väärtuste kordajad. Näeme, et $f(x)$ kordaja on $\varphi_0(t) + \varphi_1(t) - 1 = 0$, mis juba esines eespool. Analoogiliselt tuleb vahetu arvutamisega, et $f'(x)$, $f''(x)$ ja $f'''(x)$ kordajad on võrdsed nulliga, seda me siin üksikasjalikult välja ei kirjuta. Niisiis säilib

$$\begin{aligned} R(x) &= (1-t)^2(1+2t) \frac{1}{3!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^3 f^{IV}(s) ds + \\ &\quad + t^2(3-2t) \frac{1}{3!} \int_x^{x_i} (x_i - s)^3 f^{IV}(s) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t(1-t)^2 h_i \frac{1}{2!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^2 f^{IV}(s) ds - \\
& - t^2(1-t) h_i \frac{1}{2!} \int_x^{x_i} (x_i - s)^2 f^{IV}(s) ds.
\end{aligned}$$

Teeme integraalides muutujavahetuse $s = x_{i-1} + \tau h_i$, siis $ds = h_i d\tau$, $x_{i-1} - s = -\tau h_i$, $x_i - s = (1 - \tau)h_i$, integraali rajades võrdusele $s = x_{i-1}$ vastab $\tau = 0$, võrdus $s = x_i$ annab $\tau = 1$ ja $s = x$ tähendab $\tau = t$. Selle tulemusena

$$\begin{aligned}
R(x) &= (1-t)^2(1+2t) \frac{1}{3!} h_i \int_t^0 (-\tau h_i)^3 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
& + t^2(3-2t) \frac{1}{3!} h_i \int_t^1 ((1-\tau) h_i)^3 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
& + t(1-t)^2 \frac{1}{2!} h_i^2 \int_t^0 (-\tau h_i)^2 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
& + (-t^2(1-t)) \frac{1}{2!} h_i^2 \int_t^1 ((1-\tau) h_i)^2 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau = \\
& = \frac{h_i^4}{3!} (1-t)^2 \int_0^t ((1+2t)\tau^3 - 3t\tau^2) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
& + \frac{h_i^4}{3!} t^2 \int_t^1 ((3-2t)(1-\tau)^3 - 3(1-t)(1-\tau)^2) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau.
\end{aligned}$$

Uurime lähemalt integraalialuseid funktsioone. Saame $(1+2t)\tau^3 - 3t\tau^2 = \tau^2((1+2t)\tau - 3t)$, milles tegur $(1+2t)\tau - 3t$ on τ suhtes lineaarne funktsioon (esimese astme polünoom). Integreerimislõigus $[0, t]$ saame $\tau = 0$ korral $-3t \leq 0$, $\tau = t$ korral $(1+2t)t - 3t = 2t^2 - 2t = 2t(t-1) \leq 0$, mis tähendab mittepositiivsust, kui $\tau \in [0, t]$. Teises integraalis $(3-2t)(1-\tau)^3 - 3(1-t)(1-\tau)^2 = (1-\tau)^2((3-2t)(1-\tau) - 3(1-t))$ on samuti teine tegur τ suhtes lineaarne funktsioon. Integreerimislõigu otspunktides $\tau = t$ korral $(3-2t)(1-t) - 3(1-t) = (1-t)(-2t) \leq 0$, $\tau = 1$ korral $-3(1-t) \leq 0$ ja ka siin on vastav funktsioon mittepositiivne, kui $\tau \in [t, 1]$. Integraalide hindamisel võtame arvesse, et $|f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i)| \leq \|f^{IV}\|_\infty$. Siis saame

$$|R(x)| \leq \left(\frac{h_i^4}{3!} (1-t)^2 \int_0^t (3t\tau^2 - (1+2t)\tau^3) d\tau + \frac{h_i^4}{3!} t^2 \int_t^1 (3(1-t)(1-\tau)^2 - (3-2t)(1-\tau)^3) d\tau \right) \|f^{IV}\|_\infty.$$

Leiame eraldi integraalid

$$\begin{aligned} \int_0^t (3t\tau^2 - (1+2t)\tau^3) d\tau &= \left(t\tau^3 - \frac{1+2t}{4}\tau^4 \right)_{\tau=0}^{\tau=t} = \\ &= t^4 - \frac{1+2t}{4}t^4 = \frac{t^4(3-2t)}{4}, \\ \int_t^1 (3(1-t)(1-\tau)^2 - (3-2t)(1-\tau)^3) d\tau &= \\ &= \left(-(1-t)(1-\tau)^3 + \frac{(3-2t)(1-\tau)^4}{4} \right)_{\tau=t}^{\tau=1} = \\ &= (1-t)^4 - \frac{3-2t}{4}(1-t)^4 = (1-t)^4 \frac{1+2t}{4}. \end{aligned}$$

Nüüd saame

$$|R(x)| \leq \frac{h_i^4}{4!} t^2 (1-t)^2 (t^2(3-2t) + (1-t)^2(1+2t)) \|f^{IV}\|_\infty \leq \frac{h^4}{384} \|f^{IV}\|_\infty,$$

sest $t^2(1-t)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ ja $t^2(3-2t) + (1-t)^2(1+2t) = \varphi_1(t) + \varphi_0(t) = 1$.

Ülesanne 10. Tõestada $\|R\|_\infty$ hinnangud ruumides $W^{\infty,2}(a,b)$ ja $C^2[a,b]$.

Märkus. Kui $f \in C^4[a,b]$, siis $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral

$$R(x) = -\frac{f^{IV}(\xi)}{4!} (x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2, \quad \xi \in [x_{i-1}, x_i],$$

ja sellest saab kohe $\|R\|_\infty$ hinnangu kätte, ilma et peaks teoreemi tõestuses toodud suhteliselt komplitseeritud tehnikat kasutama. Iseasi on sellisel kordsete sõlmedega interpoleerimisel jääkliikme esituse saamine, mida tavalistes polünoomidega interpoleerimist käsitlevates algkursustes ei vaadelda. Materjali terviklikkuse huvides sõnastame järgmise ülesande.

Ülesanne* 2. Lugesdes teadaolevaks ühekordsete sõlmede juhul polünoomidega interpoleerimise jääkliikme esituse, tuletada märkuses toodud jääkliikme esitus kahekordsete sõlmede juhul.

§8. Interpoleerivate kuupsplainide konstrueerimine

Eeldame, et on antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, sõlmedele vastavad arvud $f_0, \dots, f_n$, soovitakse leida kuupsplain $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ nii, et $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Meenutame, et saime üldise valemi $\dim S_{\Delta}^{m,1} = m + n$, kuupsplainide juhul $m = 3$, seega $\dim S_{\Delta}^{3,1} = n + 3$. Interpolatsioonitingimusi on $n + 1$, seepärast on splaini määramiseks vaja lisatingimusi. Enimkasutatavad on järgnevas toodavad, mida nimetatakse rajatingimusteks, sest need seatakse rajapunktides või rajapunktidele lähedastes punktides:

$$(I) \quad S'(a) = \alpha', \quad S'(b) = \beta' \quad (\alpha' \text{ ja } \beta' \text{ on antud}),$$

$$(II) \quad S''(a) = \alpha'', \quad S''(b) = \beta'',$$

$$(III) \quad S(x_{-1}) = \alpha, \quad S(x_{n+1}) = \beta, \text{ kus } x_{-1} \text{ ja } x_{n+1} \text{ on lisapunktid, } x_{-1} \neq x_i \text{ ja } x_{n+1} \neq x_i, i = 0, \dots, n,$$

$$(IV) \quad S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0), \quad S'''(x_{n-1} - 0) = S'''(x_{n-1} + 0), \text{ seejuures üldiselt } f(x_1 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} f(x) \text{ ja } f(x_1 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x > x_1}} f(x),$$

$$(V) \quad S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b), \text{ mida nimetatakse perioodilisteks tingimusteks ning neid on sobiv kasutada siis, kui } f_0 = f_n, \text{ mis tagab ühtlasi selle, et } S(a) = S(b).$$

Tingimusi (I)–(IV) võib kasutada segavariandina, ühes lõigu $[a, b]$ otspunktis ühte tüüpi tingimus, teises otspunktis teist tüüpi tingimus. Märgime esialgu tõestuseta, et kui kasutada näiteks lisatingimustena $S'(a) = \alpha'$, $S''(a) = \alpha''$, siis saadakse eelkõige arvutuslikult halb ülesanne.

Kuupsplaini $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ võib esitada näiteks vastavate B-splainide kui baasi kaudu, interpolateerimisel saadakse siis esituses olevate baasikordajate määramiseks lineaarne süsteem, mis on üheselt lahenduv, ja interpolateerimisülesandel on olemas ühene lahend (selle väite tõestust näeme hiljem). B-splainid kui baas on väga üldine töövahend ning erijuhtudel võib sageli leida üldistest vahenditest paremaid. Vaatame siin kuupsplainide esitamist momentide kaudu, mis otseselt võttes on baasideväline meetod.

1. Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine teiste momentide abil

Tähistame $S_i = S(x_i)$, $M_i = S''(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Meenutame, et $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ sisaldab endas tingimust $S \in C^2[a, b]$, seepärast eksisteerivad $S''(x_i)$. Arve M_i nimetatakse splinei teisteks momentideks. Kui on teada arvud S_{i-1} , S_i , M_{i-1} , M_i , saame moodustada funktsiooni

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (1)$$

mida vaatleme määratuna $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral. On selge, et võrdusega (1) defineeritult $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$. Näitame, et sellise funktsiooni S korral

$$S(x_{i-1}) = S_{i-1}, S(x_i) = S_i, S''(x_{i-1}) = M_{i-1}, S''(x_i) = M_i. \quad (2)$$

Arvutades näeme, et

$$\begin{aligned} S(x_{i-1}) &= M_{i-1} \frac{h_i^3}{6h_i} + M_i \cdot 0 + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \frac{h_i}{h_i} + \\ &\quad + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \cdot 0 = S_{i-1}, \\ S(x_i) &= M_{i-1} \cdot 0 + M_i \frac{h_i^3}{6h_i} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \cdot 0 + \\ &\quad + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{h_i}{h_i} = S_i. \end{aligned}$$

Esitusest (1) leiame

$$\begin{aligned} S'(x) &= -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \\ &\quad + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{1}{h_i}, \end{aligned} \quad (3)$$

millest omakorda

$$S''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (4)$$

ja (4) põhjal $S''(x_{i-1}) = M_{i-1}$, $S''(x_i) = M_i$. Märgime, et võrdus (4) on sisuliselt Lagrange'i interpolatsioonivalem, sest S'' on osalõigust $[x_{i-1}, x_i]$ esimese astme polünoom ja M_{i-1} , M_i on selle väärtused sõlmedes.

On loomulik küsida, kuidas esitust (1) leida. Teame, et S on osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ kuuppolünoom, seega näiteks $S(x) = c_{0i} + c_{1i}x + c_{2i}x^2 + c_{3i}x^3$ ning tingimused (2) määravad lineaarse süsteemina kordajad $c_{0i}, c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}$.

Ülesanne 11. Tuletada esitus (1), lahendades nelja tundmatu ja nelja võrrandiga lineaarse süsteemi, mis tekib esituses $S(x) = c_{0i} + c_{1i}x + c_{2i}x^2 + c_{3i}x^3$ kordajate määramisel tingimuste (2) abil.

Kui $S_i, M_i, i = 0, \dots, n$, on teada, saab (1) abil üheselt määrata funktsiooni $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Seejuures $S \in P^3[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$. Lisaks näeme, et $S(x_i - 0) = S_i, S(x_i + 0) = S_i, i = 1, \dots, n - 1$, samuti $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), i = 1, \dots, n - 1$. Kui $S_i, M_i, i = 0, \dots, n$, valida suvaliselt, siis ei tarvitse S' (on määratud osalõikudel) olla pidev ja S ei tarvitse olla spline ruumis $S_{\Delta}^{3,1}$. Ruumi $S_{\Delta}^{3,1}$ kuulumiseks on seejuures tarvilik ja piisav, et $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), i = 1, \dots, n - 1$ (tuletise S' pidevus sisesõlmedes). Võttes võrduses (3) $x = x_{i-1}$, saame

$$S'(x_{i-1} + 0) = -M_{i-1} \frac{h_i}{2} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{1}{h_i}$$

ja indeksi nihkega (sisuliselt naaberintervallist)

$$S'(x_i + 0) = -M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_{i+1}^2 \right) \left(-\frac{1}{h_{i+1}} \right) + \left(S_{i+1} - \frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1}^2 \right) \frac{1}{h_{i+1}}.$$

Kui võtame võrduses (3) $x = x_i$, saame

$$S'(x_i - 0) = M_i \frac{h_i}{2} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{1}{h_i}.$$

Tuletise S' pidevuse tingimused tulevad

$$\begin{aligned} M_i \frac{h_i}{2} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{1}{h_i} = \\ = -M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_{i+1}^2 \right) \left(-\frac{1}{h_{i+1}} \right) + \left(S_{i+1} - \frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1}^2 \right) \frac{1}{h_{i+1}} \end{aligned}$$

ehk

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} \right) M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i},$$

mis peale korrutamist teguriga $\frac{6}{h_i + h_{i+1}}$ on

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}M_{i+1} = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}}, \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

Võrrandeid (5) nimetatakse kuupsplaini sisevõrranditeks (kui vaja, siis täpsustatakse, et esituse (1) korral) ja nad on kuupsplainide teooria ühed olulisemad võrrandid. Sõnastame saadud tulemuse eraldi.

Lause. *Suvaliste arvude $S_i, M_i, i = 0, \dots, n$, korral kuulub võrdusega (1) määratud funktsioon S ruumi $S_{\Delta}^{3,1}[x_0, x_n]$ parajasti siis, kui kehtivad võrdused (5).*

Tähistades

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad d_i = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}},$$

saab sisevõrrandid kirjutada

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

seejuures $\mu_i + \lambda_i = 1$. Märgime, et

$$\begin{aligned} \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}} &= \frac{S(x_i, x_{i+1}) - S(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \\ &= S(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \\ &= \frac{S''(\xi_i)}{2}, \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \quad d_i = 3S''(\xi_i). \end{aligned}$$

Kui on vaja leida interpoleerivat kuupsplaini, siis võetakse $S_i = S(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, sellega on arvud S_i teada. Et leida $M_i, i = 0, \dots, n$, võetakse sisevõrrandites (neid on $n-1$) $d_i = 6 \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}}$ ja lisatakse kaks lisatingimust, millega saadakse $n+1$ võrrandist koosnev lineaarne süsteem $n+1$ tundmatu $M_0, \dots, M_n$ määramiseks.

1.1. Kasutame rajatingimusi (II). Siis saadakse süsteem

$$\begin{cases} M_0 = \alpha'', \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ M_n = \beta''. \end{cases}$$

Kirjutame süsteemi veel maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ \beta'' \end{pmatrix}.$$

Selles süsteemis on M_0 ja M_n teada, need võib asendada vastavalt võrrandites indeksitega 1 ja $n-1$, mille tulemusena saadakse

$$\begin{cases} 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 \alpha'', \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, & i = 2, \dots, n-2, \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \lambda_{n-1} \beta''. \end{cases}$$

Maatrikskujul on see süsteem

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 \alpha'' \\ d_2 \\ \dots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} \beta'' \end{pmatrix}.$$

Meenutame, et maatriksis

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonaal (peadiagonaal) domineerib ridade kaupa, kui $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$.

Punktis 1.1 saadud süsteemides maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa, sest $\mu_i + \lambda_i = 1 < 2$.

1.2. Kasutame rajatingimusi (I), mis on $S'(x_0) = \alpha'$, $S'(x_n) = \beta'$. Eespool leidsime

$$\begin{aligned} S'(x_0) = S'(x_0 + 0) &= -M_0 \frac{h_1}{2} + \left(S_0 - \frac{M_0}{6} h_1^2 \right) \left(-\frac{1}{h_1} \right) + \left(S_1 - \frac{M_1}{6} h_1^2 \right) \frac{1}{h_1} = \\ &= -\frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{S_1 - S_0}{h_1}. \end{aligned}$$

Võrdus $S'(x_0) = \alpha'$ on siis

$$-\frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{S_1 - S_0}{h_1} = \alpha'$$

ehk peale teguriga $-\frac{6}{h_1}$ korrutamist

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{S_1 - S_0}{h_1} - \alpha' \right) = d_0,$$

kus võtsime kasutusele tähise d_0 . Analoogiliselt saame

$$\begin{aligned} S'(x_n - 0) &= M_n \frac{h_n}{2} + \left(S_{n-1} - \frac{M_{n-1}}{6} h_n^2 \right) \left(-\frac{1}{h_n} \right) + \left(S_n - \frac{M_n}{6} h_n^2 \right) \frac{1}{h_n} = \\ &= \frac{h_n}{3} M_n + \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n} = \beta' \end{aligned}$$

ehk

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left(\beta' - \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n} \right) = d_n.$$

Lisades need kaks rajatingimustest saadud võrrandit sisevõrranditele, jõuame süsteemini

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n, \end{cases}$$

mis maatrikskujul on

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Ka siin süsteemi maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa.

1.3. Vaatame rajatingimuste (IV) kasutamist. Nägime, et esituse (1) kasutamine annab võrduse (4)

$$S''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sellest leiame

$$S'''(x) = -\frac{M_{i-1}}{h_i} + \frac{M_i}{h_i} = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Juhul $i = 1$ saab sellest

$$S'''(x_1 - 0) = \frac{M_1 - M_0}{h_1},$$

$i = 2$ korral

$$S'''(x_1 + 0) = \frac{M_2 - M_1}{h_2}.$$

Siis võrdus $S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0)$ on

$$\frac{M_1 - M_0}{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{h_2}.$$

Avaldame sellest

$$M_0 = \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 - \frac{h_1}{h_2} M_2,$$

mille asendame esimeses sisevõrrandis

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} M_0 + 2M_1 + \frac{h_2}{h_1 + h_2} M_2 = d_1.$$

Selle tulemusena

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} \left(\left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 - \frac{h_1}{h_2} M_2 \right) + 2M_1 + \frac{h_2}{h_1 + h_2} M_2 = d_1.$$

Saadud võrrandis on M_1 kordaja $2 + \frac{h_1}{h_2}$ ja M_2 kordaja

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1^2}{h_2(h_1 + h_2)} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2(h_1 + h_2)} = \frac{h_2 - h_1}{h_2} = 1 - \frac{h_1}{h_2}$$

ning võrrandiks jääb

$$\left(2 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) M_2 = d_1.$$

Analoogilised arvutused teeme ka tingimuse $S'''(x_{n-1} - 0) = S'''(x_{n-1} + 0)$ korral ning koos teisendamisel puutumata jäänud sisevõrranditega saame süsteemi

$$\begin{cases} \left(2 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) M_2 = d_1, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \left(1 - \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) M_{n-2} + \left(2 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) M_{n-1} = d_{n-1}. \end{cases}$$

Selle süsteemi maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa, sest näiteks

$$\left|2 + \frac{h_1}{h_2}\right| - \left|1 - \frac{h_1}{h_2}\right| \geq 2 + \frac{h_1}{h_2} - \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) = 1.$$

Märkus. Kui jätta süsteemi algsest tuletatud võrrand

$$\frac{M_1 - M_0}{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{h_2}$$

ehk

$$-\frac{1}{h_1}M_0 + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)M_1 - \frac{1}{h_2}M_2 = 0,$$

siis saadud süsteemi maatriksis ei ole diagonaali domineerimist, sest diagonaalil on M_0 kordaja.

Punktides 1.1–1.3 saadud süsteemide maatriksid on kolmediagonaalsed, mis tähendab seda, et nullist erinevad elemendid on ainult peadiagonaalil ja sellest all- ja ülalpool olevatel naaberdiagonaalidel.

1.4. Vaatame tingimusi (III), s.t. $S(x_{-1}) = \alpha$, $S(x_{n+1}) = \beta$. Näitame, et need saab taandada tingimustele (IV). Olgu esialgu $x_{-1} < x_0 < x_1$ ja $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$, millega tekib võrk

$$\Delta': x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & & | & | & | \\ \hline x_{-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n & x_{n+1} \end{array}$$

Teeme analüüsi ühes otspunktis, teises toimitakse analoogiliselt. Tekib loomulik küsimus, mida tingimus $S(x_{-1}) = \alpha$ tähendab, sest S on mõeldud olema funktsioon $S: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ ja S ei pea olema defineeritud punktis x_{-1} . Meie algseks eesmärgiks on leida spline $S \in S_{\Delta}^{3,1}[x_0, x_n]$, mis interpoleerib andmeid sõlmedes x_i , $i = 0, \dots, n$. Muuhulgas tähendab see, et $S \in P^3[x_0, x_1]$ ehk $S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$,

$x \in [x_0, x_1]$. Sama polünoomi (sama analüütilise avaldisega) vaadeldakse ka $x \in [x_{-1}, x_1]$ korral, mistõttu $S \in P^3[x_{-1}, x_1]$. Sellisel puhul $S'''(x_0 - 0) = S'''(x_0 + 0)$, mis tähendab tingimuse (IV) täidetust võrgu Δ' esimeses sisepunktis x_0 . Tingimus $S(x_{-1}) = \alpha$ lisab ühe interpolatsioonitingimuse võrgu Δ' punktis x_{-1} . Analoogiliselt viib tingimus $S(x_{n+1}) = \beta$ ülesande ümberformuleerimiseni, kus nõutakse, et $S \in P^3[x_{n-1}, x_{n+1}]$, mistõttu $S'''(x_n - 0) = S'''(x_n + 0)$, ja $S(x_{n+1}) = \beta$ on interpolatsioonitingimus võrgu Δ' parempoolses otspunktis x_{n+1} . Vaatame nüüd olukorda, kus $x_0 < x_{-1} < x_1$ ja $x_{n-1} < x_{n+1} < x_n$. Sellisel juhul võtame võrgu

$$\Delta' : x_0 < x_{-1} < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_{n+1} < x_n$$

ja saame ülesande leida $S \in S_{\Delta'}^{3,1}[x_0, x_n]$, mille korral on kõigis võrgu Δ' sõlmedes rahuldatud interpolatsioonitingimused, kusjuures $S \in P^3[x_0, x_1]$ tõttu $S'''(x_{-1} - 0) = S'''(x_{-1} + 0)$ ja $S \in P^3[x_{n-1}, x_n]$ tähendab, et $S'''(x_{n+1} - 0) = S'''(x_{n+1} + 0)$. Muidugi võib võrgu Δ erinevates otstes olla erinev olukord, näiteks $x_{-1} < x_0 < x_1$ ja $x_{n-1} < x_{n+1} < x_n$, kuid eelnevast on selge, kuidas siis tuleb ülesanne samaväärselt ümber formuleerida.

Kõigil vaadeldud juhtudel suureneb ümbersõnastamisel interpolatsioonitingimuste arv kahe võrra ja rajatingimused (III) teisenevad rajatingimusteks (IV).

1.5. Vaatleme perioodilisi rajatingimusi (V), s.t. nõuame, et $S'(a) = S'(b)$, $S''(a) = S''(b)$. Tingimus $S''(a) = S''(b)$ on samaväärne tingimusega $M_0 = M_n$. Interpolatsioonitingimustest $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, on teada $S_0, \dots, S_n$. Splaini määramiseks esituse (1) abil on vaja veel leida $M_1, \dots, M_n$, milleks peab olema n võrrandit. Kasutada on sisevõrrandid

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Neist esimene on võrduse $M_0 = M_n$ tõttu

$$\mu_1 M_n + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1,$$

milles on diagonaali domineerimine, kui diagonaalielemendiks on M_1 kordaja. Paneme kirja tingimuse $S'(a) = S'(b)$. Selles

$$\begin{aligned} S'(a) &= S'(x_0 + 0) = -\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{S_1 - S_0}{h_1}, \\ S'(b) &= S'(x_n - 0) = \frac{h_n}{3}M_n + \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n}, \end{aligned}$$

mis olid leitud punktis 1.2. Nende võrdumine annab

$$-\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{S_1 - S_0}{h_1} = \frac{h_n}{3}M_n + \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n}$$

ehk võrdust $M_0 = M_n$ arvestades

$$\frac{h_1 + h_n}{3} M_n + \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_n}{6} M_{n-1} = \frac{S_1 - S_0}{h_1} - \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n}$$

või

$$\frac{h_1}{h_1 + h_n} M_1 + 2M_n + \frac{h_n}{h_1 + h_n} M_{n-1} = 6 \frac{\frac{S_1 - S_0}{h_1} - \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n}}{h_1 + h_n}.$$

Kui tähistada $\lambda_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n}$, $\mu_n = \frac{h_n}{h_1 + h_n}$, $d_n = 6 \frac{\frac{S_1 - S_0}{h_1} - \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n}}{h_1 + h_n}$, võib saadud võrrandi kirjutada

$$\mu_n M_{n-1} + 2M_n + \lambda_n M_1 = d_n.$$

Kokkuvõttes oleme saanud süsteemi

$$\begin{cases} 2M_1 + \lambda_1 M_2 + \mu_1 M_n = d_1, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n, \end{cases}$$

mis maatrikskujul kirjutatuna on

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Selle süsteemi maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa, kuid punktides 1.1–1.3 saadud maatriksitega võrreldes ei ole see enam kolmediagonaalne.

2. Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine esimeste momentide abil

Splaini esimesteks momentideks nimetatakse esimese tuletise väärtusi sõlmedes, s.o. $m_i = S'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Kui on antud suvalised arvud S_i, m_i , $i = 0, \dots, n$, siis võib $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral moodustada

$$S(x) = \varphi_0(t)S_{i-1} + \varphi_1(t)S_i + \varphi_2(t)h_i m_{i-1} + \varphi_3(t)h_i m_i, \quad (6)$$

kus $x = x_{i-1} + th_i$. Hermite'i kuupsplainide käsitlemisel nägime, et sellise esituse juures $S(x_i) = S_i$, $S'(x_i) = m_i$, $i = 0, \dots, n$. See tagab, et esitusega (6) määratud funktsioon S on selline, et $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, ja S ning S' on pidevad. Tingimuse $S \in C^2[a, b]$ täidetuseks nõuame, et $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$, $i = 1, \dots, n - 1$. Muutujavahetus $x = x_{i-1} + th_i$ annab $dx = h_i dt$, seepärast

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h_i} \frac{dS}{dt}, \quad \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1}{h_i^2} \frac{d^2S}{dt^2}$$

ning

$$S''(x) = \frac{1}{h_i^2} (\varphi_0''(t)S_{i-1} + \varphi_1''(t)S_i + \varphi_2''(t)h_im_{i-1} + \varphi_3''(t)h_im_i).$$

Ülesanne 12. Tuletada esituse (6) abil moodustatud kuupsplaini $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ sisevõrrandid

$$\lambda_im_{i-1} + 2m_i + \mu_im_{i+1} = 3\mu_i \frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} + 3\lambda_i \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (7)$$

mis on tegelikult tingimused $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Käesolevas punktis toodud esituse (6) kasutamisel interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimiseks saab arvud $S_0, \dots, S_n$ interpolatsioonitingimustest. Arvude $m_0, \dots, m_n$ määramiseks ei piisa $n-1$ sisevõrrandist (7), neile lisatakse, nagu eelmises punktis, kaks võrrandit, mis saadakse rajatingimustest (I)–(V). Kui näiteks kasutada rajatingimusi (I), siis saadakse süsteem

$$\begin{cases} m_0 = \alpha', \\ \lambda_im_{i-1} + 2m_i + \mu_im_{i+1} = \bar{d}_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ m_n = \beta', \end{cases}$$

kus $\bar{d}_i$ tähistab võrdustes (7) paremat poolt.

Ülesanne 13. Tuletada esimeste momentide m_i , $i = 0, \dots, n$, määramiseks saadavad võrrandisüsteemid rajatingimuste (II), (IV) ja (V) korral.

3. Splineidega interpoleerimisel tekkivate lineaarsete süsteemide lahendamisest

Vaatleme lineaarset süsteemi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

kus kasutame veel tähiseid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

ja süsteemi (8) võib siis kirjutada $Ax = f$. Meenutame, et maatriksi A diagonaal on domineeriv ridade kaupa, kui

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sellisel juhul on olemas $q > 0$ nii, et

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq q, \quad i = 1, \dots, n,$$

ning öeldakse, et diagonaal domineerib ridade kaupa vahega q (on diagonaali domineerimine ridade kaupa vahega q). Nägime, et kuupsplainidega interpoleerimisel nii teiste kui ka esimeste momentide kasutamine andis süsteimid, kus maatriksi diagonaal domineeris ridade kaupa vahega 1.

Lause. Kui lineaarse süsteemi (8) maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa vahega q , siis süsteem on üheselt lahenduv ja lahendi korral kehtib hinnang

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \frac{1}{q} \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|.$$

Tõestus. Süsteem (8) on üheselt lahenduv, kui tingimusest $Ax = 0$ järeldeb, et $x = 0$. Seega piisab tõestada toodud hinnang: kui $Ax = 0$, siis hinnangust, kus $f = 0$, saadakse, et $x = 0$. Niisiis, olgu x selline, et $Ax = f$. Olgu $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Võtame vaatluse alla võrrandi indeksiga k

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = f_k$$

ehk

$$a_{kk} x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} x_j = f_k.$$

Siis

$$\begin{aligned}
 |f_k| &\geq |a_{kk}||x_k| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \geq \\
 &/ \text{ kasutame seda, et } |x_j| \leq |x_k| \text{ ja } |a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \geq q / \\
 &\geq (|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|)|x_k| \geq q|x_k|,
 \end{aligned}$$

millest saame

$$|x_k| \leq \frac{1}{q}|f_k| \leq \frac{1}{q} \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|.$$

Järeldus. Kuupsplainidega interpoleerimisel tuletatud süsteemid on üheselt lahenduvad ja seega on ka vastavad interpoleerimisülesanded kõikide vaadeldud rajatitingimuste korral üheselt lahenduvad.

Märkus. Kuupsplainidega interpoleerimisel võib kasutada kuup-B-splaine, need moodustavad baasi ruumis $S_{\Delta}^{3,1}$. Summas $S(x) = \sum_{j=-3}^{n-1} c_j B_3^j(x)$ on iga $x \in [a, b]$ korral maksimaalselt neli nullist erinevat liidetavat. Interpolatsioonitingimustes $S(x_i) = f_i$, s.o. $\sum_{j=-3}^{n-1} c_j B_3^j(x_i) = f_i$, on kolm nullist erinevat liidetavat. Rajatitingimustest saadavaid võrrandeid on mitteperioodilisel juhul võimalik nii teisendada, et arvude c_j määramiseks tuleb kolmediagonaalne süsteem. Kui aga jaotus Δ on tugevalt ebaühtlane, siis selles süsteemis ei ole maatriksi diagonaali domineerimist interpolatsioonitingimustele vastavates ridades.

Järgnevas käsitleme kolmediagonaalse maatriksiga süsteemi lahendamist Gaussi elimineerimismeetodil. Meetod on tuntud suvalise maatriksiga süsteemi lahendamisel, kuid kolmediagonaalsel juhul saab mõningaid aspekte käsitleda detailsemalt. Olgu antud süsteem

$$\begin{pmatrix}
 b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & b_n
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 \dots \\
 x_{n-1} \\
 x_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_3 \\
 \dots \\
 f_{n-1} \\
 f_n
 \end{pmatrix}.$$

Esimene võrrand süsteemis on $b_1x_1 + c_1x_2 = f_1$ ning see jagatakse arvuga b_1 :
 $x_1 + \frac{c_1}{b_1}x_2 = \frac{f_1}{b_1}$. Defineerime

$$e_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad g_1 = \frac{f_1}{b_1}, \quad (9.1)$$

millega saame esimese võrrandi kujule $x_1 + e_1x_2 = g_1$. Teise sammuna vaatleme koos võrrandeid

$$\begin{cases} x_1 + e_1x_2 & = g_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = f_2. \end{cases}$$

Korrutame esimese neist arvuga $-a_2$ ja liidame teisele võrrandile. Selle tulemusena

$$(b_2 - e_1a_2)x_2 + c_2x_3 = f_2 - a_2g_1,$$

mis peale jagamist x_2 kordajaga annab

$$x_2 + \frac{c_2}{b_2 - e_1a_2}x_3 = \frac{f_2 - a_2g_1}{b_2 - e_1a_2}.$$

Defineerime

$$e_2 = \frac{c_2}{b_2 - e_1a_2}, \quad g_2 = \frac{f_2 - a_2g_1}{b_2 - e_1a_2}, \quad (9.2)$$

millega saame võrrandi $x_2 + e_2x_3 = g_2$. Teeme läbi i . sammu, milles on koos võrrandid

$$\begin{cases} x_{i-1} + e_{i-1}x_i & = g_{i-1}, \\ a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} & = f_i. \end{cases}$$

Siin korrutame esimese võrrandi arvuga $-a_i$ ja liidame teisele. Saame

$$(b_i - e_{i-1}a_i)x_i + c_ix_{i+1} = f_i - a_ig_{i-1}$$

ja peale jagamist x_i kordajaga

$$x_i + \frac{c_i}{b_i - e_{i-1}a_i}x_{i+1} = \frac{f_i - a_ig_{i-1}}{b_i - e_{i-1}a_i}.$$

Defineerime

$$e_i = \frac{c_i}{b_i - e_{i-1}a_i}, \quad g_i = \frac{f_i - a_ig_{i-1}}{b_i - e_{i-1}a_i} \quad (9.i)$$

(siin $i = 2, \dots, n-1$) ja nii viisi oleme saanud võrrandid

$$x_i + e_ix_{i+1} = g_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (10)$$

Eraldi vaatleme koos võrrandeid

$$\begin{cases} x_{n-1} + e_{n-1}x_n = g_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = f_n. \end{cases}$$

Ka siin korrutame esimese võrrandi arvuga $-a_n$ ja liidame teisele, mis annab

$$(b_n - e_{n-1}a_n)x_n = f_n - a_n g_{n-1}.$$

Sellest

$$x_n = \frac{f_n - a_n g_{n-1}}{b_n - e_{n-1}a_n},$$

kus võime veel defineerida

$$g_n = \frac{f_n - a_n g_{n-1}}{b_n - e_{n-1}a_n} \quad (9.n)$$

ning siis $x_n = g_n$. Siiani tehtud arvutused (9.i), $i = 1, \dots, n$, on tegelikult peadiagonaali all olevate arvude elimineerimised, ühtlasi on leitud x_n . Lahendi ülejäänud komponendid leitakse võrdustest (10) saadava eeskirja abil

$$x_i = g_i - e_i x_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (11)$$

Tegelikult teostatavad arvutused on (9.i), $i = 1, \dots, n$, ja (11). Loeme veel kokku nendes tehtavad korrutamised ja jagamised. Kõigepealt, (9.1) nõuab 2 jagamist. Arvutused (9.i), $i = 2, \dots, n-1$, sisaldavad igaüks 2 korrutamist ja 2 jagamist, kokku $4(n-2)$ tehet. Arvutus (9.n) lisab kaks korrutamist ja ühe jagamise, kokku 3 tehet. Arvutustes (11) tehakse igaühes üks korrutamine, kokku on neid $n-1$. Kõik arvutused kokku sisaldavad $2 + 4(n-2) + 3 + n-1 = 5n-4$ korrutamist, jagamist. Märgime võrdluseks, et $n \times n$ täismaatriksiga süsteemis tehakse elimineerimismeetodis $\sim \frac{n^3}{3}$ korrutamist, jagamist.

Loomulik on küsida, millal selline elimineerimismeetod on teostatav? Eeldame, et lisaks kolmediagonaalsusele on süsteemi maatriksi diagonaal domineeriv ridade kaupa, mis tähendab, et $|b_1| > |c_1|$, $|b_i| > |a_i| + |c_i|$, $i = 2, \dots, n-1$, $|b_n| > |a_n|$. Siis $b_1 \neq 0$, mistõttu on leitavad e_1 ja g_1 , seejuures $|e_1| = \frac{|c_1|}{|b_1|} < 1$. Oletame üldise sammu jaoks, et $|e_{i-1}| < 1$. Siis $|b_i - e_{i-1}a_i| \geq |b_i| - |e_{i-1}||a_i| \geq |b_i| - |a_i| > |c_i| \geq 0$, mistõttu $b_i - e_{i-1}a_i \neq 0$ ning e_i , g_i on leitavad. Lisaks $|e_i| = \frac{|c_i|}{|b_i - e_{i-1}a_i|} < 1$. Sellega on selge, et kõik elimineerimisel vajalikud arvutused on teostatavad. Sõnastame tulemuse eraldi.

Lause. Gaussi elimineerimismeetod on teostatav süsteemis, kus maatriks on kolmediagonaalne ja peadiagonaal domineerib ridade kaupa.

Lisame, et toodud olukorras on elimineerimismeetod stabiilne, mis tähendab järgmist. Lisaks süsteemile

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

vaatleme veel süsteemi

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}\bar{x}_j = \bar{f}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Kui $|\bar{a}_{ij} - a_{ij}|$ ja $|\bar{f}_i - f_i|$ on iga i, j korral „väikesed“ (see hõlmab ka ümardamisvigu a_{ij} ja f_i esitamisel), siis on „väikesed“ ka $|\bar{x}_i - x_i|$ iga i korral. Sellise stabiilsuse detailne põhjendamine on suhteliselt töömahukas, väide leiab aset ka üldisemate eelduste korral (ei ole iseloomulik ainult splainide teooriale) ja käesolevas kursuses me seda ei esita.

Perioodiliste rajatingimuste kasutamisel jõudsimme süsteemini, mille võib üldisemalt kirjutada kujul

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Ülesanne* 3. Panna kirja elimineerimismeetodi algoritm selle süsteemi lahendamiseks ning uurida meetodi teostatavust, kui süsteemi maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa. Leida, kui palju korrutamisi ja jagamisi on elimineerimismetodis vaja teha.

§9. Interpoleerivate kuupsplainide veahinnangud

Antud on funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, lõigu jaotus $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, on võimalik leida $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ nii, et $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, lisaks on rahuldatud kaks rajatingimust. Loomulik on rajatingimustes arvestada funktsiooniga f , näiteks $S''(a) = f''(a)$, $S''(b) = f''(b)$, kui $f \in C^2[a, b]$. Osades rajatingimustes f ei esine. Üldine eesmärk on hinnata $\|S - f\|_{\infty}$, $\|S' - f'\|_{\infty}, \dots$

Üks võimalik lähenemine probleemile on järgmine. Eeldame, et $f \in C^1[a, b]$. Leiame Hermite'i kuupsplaini $\bar{S} \in S_{\Delta}^{3,2}$ nii, et $\bar{S}(x_i) = f(x_i)$, $\bar{S}'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Siis

$$\|S - f\|_{\infty} = \|S - \bar{S} + \bar{S} - f\|_{\infty} \leq \|S - \bar{S}\|_{\infty} + \|\bar{S} - f\|_{\infty},$$

analoogilised hinnangud saab anda tuletiste jaoks. Me oleme juba hinnanud $\|\bar{S} - f\|_{\infty}, \|\bar{S}' - f'\|_{\infty}, \dots$, seega piisab hinnata $\|S - \bar{S}\|_{\infty}, \|S' - \bar{S}'\|_{\infty}, \dots$. Nende jaoks hinnangute saamine peaks olema lootusrikas, sest on vaja toimetada splineidega.

Kasutame tähistusi $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Siis

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i, \\ x &\in [x_{i-1}, x_i], \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad x = x_{i-1} + th_i. \end{aligned}$$

Sisalduvus $S_{\Delta}^{3,1} \subset S_{\Delta}^{3,2}$ lubab kasutada interpolandi $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ korral esitust

$$S(x) = \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_i m_{i-1} + \varphi_3(t)h_i m_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

kus $m_i = S'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Seepärast

$$S(x) - \bar{S}(x) = \varphi_2(t)h_i(m_{i-1} - f'_{i-1}) + \varphi_3(t)h_i(m_i - f'_i),$$

mille juures meenutame, et $\varphi_2(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_3(t) = -t^2(1-t)$. Sellest saame

$$|S(x) - \bar{S}(x)| \leq t(1-t)h_i \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'_i|, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (1)$$

Püüame saada hinnangut tuletise jaoks. Võrdus $x = x_{i-1} + th_i$ annab $dx = h_i dt$, $\frac{d}{dx} = \frac{1}{h_i} \frac{d}{dt}$, seega

$$S'(x) - \bar{S}'(x) = \varphi'_2(t)(m_{i-1} - f'_{i-1}) + \varphi'_3(t)(m_i - f'_i).$$

Leiame

$$\begin{aligned}\varphi'_2(t) &= (t - 2t^2 + t^3)' = 1 - 4t + 3t^2 = (1-t)(1-3t), \\ \varphi'_3(t) &= (-t^2 + t^3)' = -2t + 3t^2 = t(3t-2),\end{aligned}$$

nende abil jõuame hinnangu

$$\begin{aligned}|S'(x) - \overline{S}'(x)| &\leq ((1-t)|1-3t| + t|3t-2|) \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'_i|, \\ x &\in [x_{i-1}, x_i].\end{aligned}\tag{2}$$

Järgmisi tuletisi hindame teist esitust lähtekohaks võttes. Eeldame, et $f \in C^2[a, b]$. Et S'' on osalõigis $[x_{i-1}, x_i]$ ülimalt esimese astme polünoom ja $S''(x_{i-1}) = M_{i-1}$, $S''(x_i) = M_i$, siis $S''(x) = (1-t)M_{i-1} + tM_i$ ja

$$\begin{aligned}S''(x) - f''(x) &= (1-t)M_{i-1} + tM_i - f''(x) = \\ &= (1-t)(M_{i-1} - f''(x_{i-1})) + t(M_i - f''(x_i)) + (1-t)f''(x_{i-1}) + tf''(x_i) - f''(x).\end{aligned}$$

Seejuures $S_1(x; f'') = (1-t)f''(x_{i-1}) + tf''(x_i)$ on funktsiooni f'' punktides x_{i-1} ja x_i interpoleeriv lineaarsplain. Seega

$$\begin{aligned}|S''(x) - f''(x)| &\leq \max_{0 \leq i \leq n} |M_i - f''(x_i)| + |S_1(x; f'') - f''(x)|, \\ x &\in [x_{i-1}, x_i],\end{aligned}\tag{3}$$

kusjuures $|S_1(x; f'') - f''(x)|$ kohta oleme eespool hinnangud leidnud. Veel saame f''' olemasolu korral tähistust $f'_i = f''(x_i)$ kasutades

$$S'''(x) - f'''(x) = \frac{1}{h_i}(-(M_{i-1} - f''_{i-1}) + (M_i - f''_i)) + S'_1(x; f'') - f'''(x),$$

millest

$$\begin{aligned}|S'''(x) - f'''(x)| &\leq \frac{2}{h_i} \max_{0 \leq i \leq n} |M_i - f'_i| + |S'_1(x; f'') - f'''(x)|, \\ x &\in [x_{i-1}, x_i],\end{aligned}\tag{4}$$

ning ka siin oleme $|S'_1(x; f'') - f'''(x)|$ varem hinnanud. Võrratused (1)–(4) näitavad, et peaksime hindama interpoleeriva kuupsplaini esimeste ja teiste momentide kõrvalekaldeid funktsiooni f tuletistest, s.o. $|m_i - f'_i|$ ja $|M_i - f'_i|$.

Teoreem 1. Kui $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ rahuldab interpolatsioonitingimusi $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, ja rajatingimusi

$$(I) \quad S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b),$$

$$(II) \quad S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b),$$

$$(V) \quad S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b),$$

siis tähistust $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ silmas pidades kehtivad hinnangud

$f \in$	$ m_i - f'_i \leq$	$ M_i - f''_i \leq$
$C^1[a, b]$	$3\omega(f')$	–
$C^2[a, b]$	$\frac{2}{3}h\omega(f'')$	$3\omega(f'')$
$C^2C_\Delta^3[a, b]$	$\frac{2}{27}h^2\omega(f''')$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}h\omega(f''')$
$C^2W_\Delta^{\infty,4}[a, b]$	$\frac{1}{24}h^3\ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{1}{4}h^2\ f^{IV}\ _\infty$

Tõestus. Märgime, et $f \in C^1[a, b]$ korral rajatingimusi (II) ei vaadelda. Eespool nägime, et rajatingimuste (I) korral, kui märkida $m_i = S'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, saame süsteemi

$$\begin{cases} m_0 = f'_0 \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} + 3\lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \\ \quad \quad \quad i = 1, \dots, n-1, \\ m_n = f'_n. \end{cases}$$

Tähistades $q_i = m_i - f'_i$, saame

$$\begin{cases} q_0 = 0, \\ \lambda_i q_{i-1} + 2q_i + \mu_i q_{i+1} = 3\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} + 3\lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \\ \quad - (\lambda_i f'_{i-1} + 2f'_i + \mu_i f'_{i+1}) = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ q_n = 0, \end{cases} \quad (5)$$

kus võtame võrrandite paremate poolte tähisena kasutusele c_i , $i = 0, \dots, n$. Süsteemis (5) maatriksi diagonaal domineerib ridade kaupa vahega 1, seepärast

$$\max_{0 \leq i \leq n} |q_i| \leq \max_{0 \leq i \leq n} |c_i| = \max_{1 \leq i \leq n-1} |c_i|.$$

1) Eeldame, et $f \in C^1[a, b]$. Siis

$$c_i = 3\mu_i f'(\xi_{i+1}) + 3\lambda_i f'(\xi_i) - (\lambda_i f'(x_{i-1}) + 2f'(x_i) + \mu_i f'(x_{i+1})) =$$

$$\begin{aligned}
& / \text{ siin } \xi_{i+1} \in (x_i, x_{i+1}), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i), \\
& \text{veel kirjutame } f'(x_i) \text{ kordajaks } 2(\mu_i + \lambda_i) / \\
& = \mu_i(f'(\xi_{i+1}) - f'(x_{i+1})) + 2\mu_i(f'(\xi_{i+1}) - f'(x_i)) + \\
& + 2\lambda_i(f'(\xi_i) - f'(x_i)) + \lambda_i(f'(\xi_i) - f'(x_{i-1})).
\end{aligned}$$

Sellest saame hinnangu

$$\begin{aligned}
|c_i| & \leq \mu_i|f'(\xi_{i+1}) - f'(x_{i+1})| + 2\mu_i|f'(\xi_{i+1}) - f'(x_i)| + \\
& + 2\lambda_i|f'(\xi_i) - f'(x_i)| + \lambda_i|f'(\xi_i) - f'(x_{i-1})| \leq \\
& \leq 3\mu_i\omega_{i+1}(f') + 3\lambda_i\omega_i(f') \leq 3(\mu_i + \lambda_i)\omega(f') = 3\omega(f').
\end{aligned}$$

2) Olgu $f \in C^2[a, b]$. Kasutame süsteemi (5) võrrandite paremates pooltes esinevate c_i avaldistes Tayloriga arendisi

$$\begin{aligned}
f_{i+1} & = f_i + h_{i+1}f'_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}), \\
f_{i-1} & = f_i - h_i f'_i + \frac{h_i^2}{2}f''(\eta_i), \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i), \\
f'_{i+1} & = f'_i + h_{i+1}f''(\bar{\xi}_i), \quad \bar{\xi}_i \in (x_i, x_{i+1}), \\
f'_{i-1} & = f'_i - h_i f''(\bar{\eta}_i), \quad \bar{\eta}_i \in (x_{i-1}, x_i).
\end{aligned}$$

Siis asendamise järel f_i kordaja tuleb 0, f'_i kordaja on $3\mu_i + 3\lambda_i - \lambda_i - 2 - \mu_i = 0$,

$$\begin{aligned}
c_i & = \frac{3}{2}\mu_i h_{i+1}f''(\xi_i) - \frac{3}{2}\lambda_i h_i f''(\eta_i) + \lambda_i h_i f''(\bar{\eta}_i) - \mu_i h_{i+1}f''(\bar{\xi}_i) = \\
& / \text{ meenutame, et } \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} / \\
& = \frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{3}{2}f''(\xi_i) - \frac{3}{2}f''(\eta_i) + f''(\bar{\eta}_i) - f''(\bar{\xi}_i) \right) = \\
& = \frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \left(f''(\xi_i) - f''(\bar{\xi}_i) + f''(\bar{\eta}_i) - f''(\eta_i) + \frac{1}{2}(f''(\xi_i) - f''(\eta_i)) \right).
\end{aligned}$$

Selles $\frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \leq \frac{h}{2}$ (sest $h_i \leq h_{i+1}$ korral $\frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} h_{i+1} \leq \frac{1}{2} h_{i+1} \leq \frac{1}{2} h$, analoogiliselt hindame $h_{i+1} \leq h_i$ korral). Veel saame

$$|f''(\xi_i) - f''(\bar{\xi}_i)| \leq \omega_{i+1}(f'') \leq \omega(f''),$$

$$\begin{aligned}
|f''(\bar{\eta}_i) - f''(\eta_i)| &\leq \omega_i(f'') \leq \omega(f''), \\
|f''(\xi_i) - f''(\eta_i)| &\leq |f''(\xi_i) - f''(x_i)| + |f''(x_i) - f''(\eta_i)| \leq \\
&\leq \omega_{i+1}(f'') + \omega_i(f'') \leq 2\omega(f'')
\end{aligned}$$

ning kokkuvõttes

$$|c_i| \leq \frac{h}{2} \cdot 3\omega(f'') = \frac{3}{2}h\omega(f'').$$

Esitame veel teise viisi hinnangu saamiseks. Kasutame Tayloriga valemis jääkliikmeid integraalsel kujul:

$$\begin{aligned}
f_{i+1} &= f_i + h_{i+1}f'_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)f''(s) ds, \\
f_{i-1} &= f_i - h_i f'_i + \int_{x_i}^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)f''(s) ds, \\
f'_{i-1} &= f'_i + \int_{x_i}^{x_{i-1}} f''(s) ds, \\
f'_{i+1} &= f'_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(s) ds.
\end{aligned}$$

Siis saame

$$\begin{aligned}
c_i &= 3\mu_i \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)f''(s) ds - 3\lambda_i \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)f''(s) ds - \\
&\quad - \lambda_i \int_{x_i}^{x_{i-1}} f''(s) ds - \mu_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(s) ds = \\
&= \mu_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{3}{h_{i+1}}(x_{i+1} - s) - 1 \right) f''(s) ds + \\
&\quad + \lambda_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{3}{h_i}(x_{i-1} - s) + 1 \right) f''(s) ds.
\end{aligned}$$

Teeme esimeses integraalis muutujavahetuse $s = x_i + \tau h_{i+1}$, teises integraalis $s = x_{i-1} + \tau h_i$, selle tulemusena

$$c_i = \mu_i h_{i+1} \int_0^1 (2 - 3\tau) f''(x_i + \tau h_{i+1}) d\tau + \lambda_i h_i \int_0^1 (1 - 3\tau) f''(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau.$$

Integraalialused funktsioonid $2 - 3\tau$ ja $1 - 3\tau$ muudavad integreerimislõigus $[0, 1]$ märki, samal ajal on teised tegurid pidevad. Kasutades integraalide jaoks kesk-
väärtusteoreemi, saame

$$\begin{aligned} c_i &= \mu_i h_{i+1} \left(f''(\xi_i) \int_0^{2/3} (2 - 3\tau) d\tau + f''(\bar{\xi}_i) \int_{2/3}^1 (2 - 3\tau) d\tau \right) + \\ &\quad + \lambda_i h_i \left(f''(\eta_i) \int_0^{1/3} (1 - 3\tau) d\tau + f''(\bar{\eta}_i) \int_{1/3}^1 (1 - 3\tau) d\tau \right) = \\ &\quad / \text{ siin } \xi_i, \bar{\xi}_i \in [x_i, x_{i+1}], \eta_i, \bar{\eta}_i \in [x_{i-1}, x_i] / \\ &= \mu_i h_{i+1} \left(\frac{2}{3} f''(\xi_i) - \frac{1}{6} f''(\bar{\xi}_i) \right) + \lambda_i h_i \left(\frac{1}{6} f''(\eta_i) - \frac{2}{3} f''(\bar{\eta}_i) \right) = \\ &= \frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{1}{6} (f''(\xi_i) - f''(\bar{\xi}_i)) + \frac{1}{6} (f''(\eta_i) - f''(\bar{\eta}_i)) + \frac{1}{2} (f''(\xi_i) - f''(\bar{\eta}_i)) \right). \end{aligned}$$

Hinnates siin nagu eespool, saame

$$|c_i| \leq \frac{h}{2} \left(\frac{1}{6} \omega_{i+1}(f'') + \frac{1}{6} \omega_i(f'') + \omega(f'') \right) \leq \frac{2}{3} h \omega(f'').$$

3) Vaatleme juhtu, kus $f \in C^2 W_{\Delta}^{\infty,4}[a, b]$. Siis $f \in C^2[a, b]$ ja $f \in W^{\infty,4}(x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Kasutame jälle c_i avaldises Tayloriga valemit jääkliikmega integraalsel kujul. Leiame

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + h_{i+1} f'_i + \frac{h_{i+1}^2}{2} f''_i + \frac{h_{i+1}^3}{6} f'''_{i+0} + \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^3 f^{IV}(s) ds, \\ &\quad / \text{ siin } f'''_{i+0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x > x_i}} f'''(x), \text{ sest } f \in C^2[a, b] \text{ korral võib } f''' \text{ olla katkev} / \\ f_{i-1} &= f_i - h_i f'_i + \frac{h_i^2}{2} f''_i - \frac{h_i^3}{6} f'''_{i-0} + \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^3 f^{IV}(s) ds, \end{aligned}$$

$$f'_{i+1} = f'_i + h_{i+1}f''_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}f'''_{i+0} + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^2 f^{IV}(s) ds,$$

$$f'_{i-1} = f'_i - h_i f''_i + \frac{h_i^2}{2}f'''_{i-0} + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^2 f^{IV}(s) ds.$$

Nende c_i avaldisse asetamise järel tulevad f_i ja f'_i kordajad nullid, sest need on täpselt samad, mis ruumi $C^2[a, b]$ juhul. Veel saame f''_i kordaja

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\mu_i h_{i+1} - \frac{3}{2}\lambda_i h_i + \lambda_i h_i - \mu_i h_{i+1} &= \frac{1}{2}(\mu_i h_{i+1} - \lambda_i h_i) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} h_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} h_i \right) = 0, \end{aligned}$$

f'''_{i+0} kordaja

$$\frac{1}{2}\mu_i h_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mu_i h_{i+1}^2 = 0,$$

f'''_{i-0} kordaja

$$\frac{1}{2}\lambda_i h_i^2 - \frac{1}{2}\lambda_i h_i^2 = 0.$$

Alles jääb c_i avaldises

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{1}{2} \frac{\mu_i}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^3 f^{IV}(s) ds - \frac{1}{2} \frac{\lambda_i}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^3 f^{IV}(s) ds - \\ &\quad - \frac{\mu_i}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^2 f^{IV}(s) ds - \frac{\lambda_i}{2} \int_{x_i}^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)^2 f^{IV}(s) ds = \\ &= \frac{\mu_i}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x_{i+1} - s)^3}{h_{i+1}} - (x_{i+1} - s)^2 \right) f^{IV}(s) ds + \\ &\quad + \frac{\lambda_i}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{(x_{i-1} - s)^3}{h_i} + (x_{i-1} - s)^2 \right) f^{IV}(s) ds. \end{aligned}$$

Teeme esimeses integraalis muutujavahetuse $s = x_i + \tau h_{i+1}$, teises integraalis $s = x_{i-1} + \tau h_i$. Peale seda jõuame võrduseni

$$c_i = \frac{\mu_i h_{i+1}^3}{2} \int_0^1 ((1 - \tau)^3 - (1 - \tau)^2) f^{IV}(x_i + \tau h_{i+1}) d\tau +$$

$$+ \frac{\lambda_i h_i^3}{2} \int_0^1 ((-\tau)^3 + (-\tau)^2) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau.$$

Integraali all on funktsioonid

$$\begin{aligned} (1 - \tau)^3 - (1 - \tau)^2 &= (1 - \tau)^2(1 - \tau - 1) = -\tau(1 - \tau)^2 \leq 0, \\ (-\tau)^3 + (-\tau)^2 &= \tau^2(-\tau + 1) = \tau^2(1 - \tau) \geq 0. \end{aligned}$$

Neid arvestades saame hinnangu

$$|c_i| \leq \left(\frac{\mu_i h_{i+1}^3}{2} \int_0^1 \tau(1 - \tau)^2 d\tau + \frac{\lambda_i h_i^3}{2} \int_0^1 \tau^2(1 - \tau) d\tau \right) \|f^{IV}\|_\infty.$$

Seejuures $\int_0^1 \tau(1 - \tau)^2 d\tau = \int_0^1 \tau^2(1 - \tau) d\tau = \frac{1}{12}$ ning $h_i \leq h$, $h_{i+1} \leq h$ tõttu

$$|c_i| \leq \frac{1}{24} h^3 (\mu_i + \lambda_i) \|f^{IV}\|_\infty = \frac{1}{24} h^3 \|f^{IV}\|_\infty.$$

Ülesanne 14. Tõestada ülejäänud teoreemis 1 toodud hinnangud ja analüüsida, millised muutused tuleb tõestuses teha teiste rajatingimuste korral.

Teoreem 2. Teoreemi 1 eeldustel kehtivad hinnangud

$f \in$	$\ S - f\ _\infty \leq$	$\ S' - f'\ _\infty \leq$	$\ S'' - f''\ _\infty \leq$	$\ S''' - f'''\ _\infty \leq$
$C^1[a, b]$	$\frac{9}{8} h \omega(f')$	$4 \omega(f')$	–	–
$W^{\infty, 2}(a, b)$	$ch^2 \ f''\ _\infty$	$ch \ f''\ _\infty$	–	–
$C^2[a, b]$	$\frac{19}{96} h^2 \omega(f'')$	$\frac{2}{3} h \omega(f'')$	$4 \omega(f'')$	–
$W^{\infty, 3}(a, b)$	$ch^3 \ f'''\ _\infty$	$ch^2 \ f'''\ _\infty$	$ch \ f'''\ _\infty$	–
$C^2 C_\Delta^3[a, b]$	$ch^3 \omega(f''')$	$ch^2 \omega(f''')$	$ch \omega(f''')$	$\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{h}{h_{\min}}\right) \omega(f''')$
$C^2 W_\Delta^{\infty, 4}[a, b]$	$\frac{5}{384} h^4 \ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{1}{24} h^3 \ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{3}{8} h^2 \ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_{\min}} + \frac{h_{\min}}{h}\right) h \ f^{IV}\ _\infty$

Siin oleme tähistanud $h_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} h_i$ ning c tähendab hinnangutes konstanti, mis ei sõltu funktsioonist f ega jaotusest Δ . Tabeli eelviimases reas toodud hinnangud on iseloomulikud ka ruumis $C^3[a, b] \subset C^2 C_{\Delta}^3[a, b]$, viimases reas aga ruumis $C^4[a, b] \subset C^2 W_{\Delta}^{\infty, 4}[a, b]$.

Tõestusest. Tõestused erinevates ruumides kasutavad suhteliselt sarnast tehnikat, seepärast vaatleme ainult ruumi $C^2 W_{\Delta}^{\infty, 4}[a, b]$. Olgu $\bar{S} \in S_{\Delta}^{3, 2}$ interpoleeriv Hermite'i kuupsplain, seega $\bar{S}(x_i) = f(x_i)$, $\bar{S}'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Eespool nägime, et kui kasutada $x = x_{i-1} + th_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, siis

$$\begin{aligned} |S(x) - f(x)| &\leq |S(x) - \bar{S}(x)| + |\bar{S}(x) - f(x)| \leq \\ &\leq h_i t(1-t) \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'_i| + |\bar{S}(x) - f(x)|, \end{aligned} \quad (6)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} |S'(x) - f'(x)| &\leq ((1-t)|1-3t| + t|3t-2|) \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'_i| + \\ &+ |\bar{S}'(x) - f'(x)|, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned} \quad (7)$$

Teise ja kolmanda tuletisega seotud hinnangud saame võrratustest (3) ja (4).

Teame, et $|\bar{S}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{IV}\|_{\infty}$. Teoreemis 1 saime $\max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'_i| \leq \frac{1}{24} h^3 \|f^{IV}\|_{\infty}$. Arvestades veel, et $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, saame hinnangus (6) teguriks $h^4 \|f^{IV}\|_{\infty}$ ees $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{384} = \frac{5}{384}$.

Vaatleme veel kolmandate tuletiste hindamist, kasutades võrratust (4). Teame, et $|S'_1(x; f'') - f'''(x)| \leq \frac{1}{2} h_i \|f^{IV}\|_{\infty}$ ja $\max_{0 \leq i \leq n} |M_i - f''_i| \leq \frac{1}{4} h^2 \|f^{IV}\|_{\infty}$. Siis

$$\begin{aligned} |S'''(x) - f'''(x)| &\leq \frac{2}{h_i} \cdot \frac{1}{4} h^2 \|f^{IV}\|_{\infty} + \frac{1}{2} h_i \|f^{IV}\|_{\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_i} + \frac{h_i}{h} \right) h \|f^{IV}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Vaatleme funktsiooni $\varphi(x) = \frac{h}{x} + \frac{x}{h}$, $h_{\min} \leq x \leq h$. Siis $\varphi'(x) = -\frac{h}{x^2} + \frac{1}{h} = \frac{x^2 - h^2}{hx^2} \leq 0$, mis tähendab, et funktsioon φ on monotoonselt kahanev ning seepärast

$$\frac{h}{h_i} + \frac{h_i}{h} \leq \frac{h}{h_{\min}} + \frac{h_{\min}}{h}.$$

Märkus. Oletame, et $h \rightarrow 0$, mis tähendab, et fikseeritud lõigu $[a, b]$ korral vaadeldakse näiteks jaotuste Δ jada (sel juhul muidugi jaotustes osalõikude arv $n \rightarrow \infty$). Samas võib juhtuda, et $\frac{h^2}{h_{\min}} \rightarrow 0$ ei leia aset (see on võimalik ebaühtlase võrgu korral) ja leitud $|S'''(x) - f'''(x)|$ hinnangust ei saa järeldada koondumist $\|S''' - f'''\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Näitame, et teoreemis toodud hinnang $\|S - f\|_{\infty}$ kohta ruumis $C^2W_{\Delta}^{\infty,4}[a, b]$ ei ole parandatav. Kasutame ühtlast võrku, s.t. $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

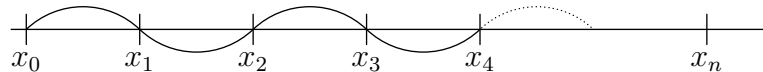
Vaatleme funktsiooni $\varphi(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 2hx^3 + h^3x)$. Defineerime

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x - x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}], \text{ } i \text{ paaris,} \\ -\varphi(x - x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}], \text{ } i \text{ paaritu.} \end{cases}$$

Saame, et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(h) = 0$, seepärast $f(x_i + 0) = \varphi(0) = 0$, $f(x_{i+1} - 0) = \varphi(h) = 0$, mistõttu $f \in C[a, b]$. Leiame veel $\varphi'(x) = \frac{1}{24}(4x^3 - 6hx^2 + h^3)$, millest $\varphi'(0) = \frac{h^3}{24}$, $\varphi'(h) = -\frac{h^3}{24}$. Selle abil saame, kui i on paaris, siis $f'(x) = \varphi'(x - x_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, ja $f'(x_i + 0) = \varphi'(0) = \frac{h^3}{24}$, $f'(x_{i+1} - 0) = \varphi'(h) = -\frac{h^3}{24}$; kui aga i on paaritu, siis $f'(x) = -\varphi'(x - x_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, ja $f'(x_i + 0) = -\varphi'(0) = -\frac{h^3}{24}$, $f'(x_{i+1} - 0) = -\varphi'(h) = \frac{h^3}{24}$. Nendest järeldub, et kui i on paaris, siis $f'(x_i - 0) = \frac{h^3}{24}$ ja $f'(x_i + 0) = \frac{h^3}{24}$, kui aga i on paaritu, siis $f'(x_i - 0) = -\frac{h^3}{24}$, $f'(x_i + 0) = -\frac{h^3}{24}$. Järgnevalt saame $\varphi''(x) = \frac{1}{24}(12x^2 - 12hx)$, $\varphi''(0) = 0$, $\varphi''(h) = 0$, seepärast $f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0) = 0$ ja $f \in C^2[a, b]$. Veel $\varphi'''(x) = \frac{1}{24}(24x - 12h)$, $\varphi'''(0) = -\frac{h}{2}$, $\varphi'''(h) = \frac{h}{2}$, mis annab, et f''' on pidev (analüüs on samasugune nagu f' pidevuse näitamisel). Lõpuks leiame $\varphi^{IV}(x) = 1$ ning

$$f^{IV}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}], \text{ } i \text{ paaris,} \\ -1, & x \in [x_i, x_{i+1}], \text{ } i \text{ paaritu.} \end{cases}$$

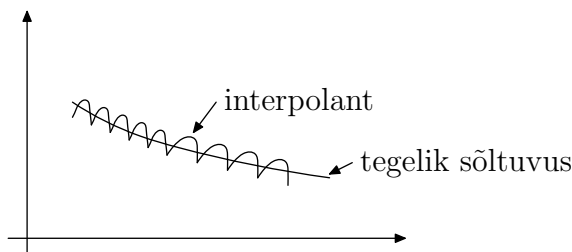
Funktsiooni f käitumine on ette kujutatav järgmiselt jooniselt



Oleme näidanud, et $f \in C^2W_{\Delta}^{\infty,4}[a,b]$, $\|f^{IV}\|_{\infty} = 1$. Interpoleeriv kuupsplain näiteks rajatingimustel $S''(x_0) = f''(x_0)$, $S''(x_n) = f''(x_n)$ tuleb $S = 0$, sest $S(x_i) = f(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Seepärast $\|S - f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$. Näiteks osalõigul $[x_0, x_1]$ on $f(x) = \varphi(x - x_0)$ ning meil on vaja leida selle funktsiooni absoluutväärtuse maksimaalne väärtus. Vahetu arvutus näitab, et $\varphi\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{5}{384}h^4$, $\varphi'\left(\frac{h}{2}\right) = 0$, $\varphi''(x) = \frac{1}{2}x(x - h) \leq 0$, mis ütleb, et vahemikus $(0, h)$ on φ' kahanev ja $\frac{h}{2}$ on ainus φ maksimumpunkt. Niisiis, $\|f\|_{\infty} = \frac{5}{384}h^4$, mis tõestab tabelis toodud hinnangu mitteparandatavuse.

§10. Silumisülesanded

Eeldame, et on antud argumenti väärtused $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, lisaks vastavad arvud f_i , $i = 0, \dots, n$. Soovitakse saada funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mis kuidagi kirjeldaks andmete sõltuvust. Interpoleerimine ei ole alati mõistlik, kui näiteks f_i on antud mõõtmisvigadega, sest need on saadud mingi eksperimendi käigus. Arv n võib olla suur, s.t. mõõtmisi tehakse palju. Interpoleerimisel võib pilt olla järgmine:



Üks võimalus reaalselt sõltuvust leida on vähimruutude meetod. Valitakse funktsioon $\varphi(x, c_0, \dots, c_m)$, kus $c_0, \dots, c_m$ on määramisele tulevad parameetrid, ja nõutakse, et $\sum_{i=0}^n (\varphi(x_i, c_0, \dots, c_m) - f_i)^2$ oleks minimaalne. See on optimeerimise valdkonna ülesanne ja üldiselt väga komplitseeritud. Kui φ on näiteks polünoom: $\varphi(x, c_0, \dots, c_m) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$, siis saadakse parameetrite c_i määramiseks lineaarne süsteem, tihti mõeldaksegi vähimruutude meetodi all seda varianti. Mõnikord mõeldakse vähimruutude meetodi all ainult varianti, kus $\varphi(x, c_1, c_2) = c_0 + c_1x$, selle graafik on sirge. Silumisülesannetes, mida siin vaatame, ei ole funktsioon φ ette antud.

1. Sobolevi ruum $H^m(a, b) = W^{2,m}(a, b)$

Defineerime

$$H^m(a, b) = \{u \in L_2(a, b) \mid u', \dots, u^{(m)} \in L_2(a, b)\} =$$

/ siin mõeldakse tuletisi distributsioonide mõttes;

kui $u \in L_2(a, b)$, siis on olemas $u^{(k)} \in D'(a, b)$, $k = 1, 2, \dots$ /
 $= \{u \in L_2(a, b) \mid u^{(m-1)} \text{ on absoluutselt pidev, } u^{(m)} \in L_2(a, b)\}.$

Viimases määrangus mõeldakse tavalist tuletist, s.o. $u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$.
 Kui u on absoluutselt pidev, siis on olemas $u'(x)$ peaaegu kõikide $x \in (a, b)$ korral (nende x väärtuste hulk, kus tuletist ei eksisteeri, on nullmõõdueline). Kui u on absoluutselt pidev, siis

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(s) ds.$$

Kui u ja v on absoluutselt pidevad, siis

$$\int_a^b u'v dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv' dx.$$

Meenutame, et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse absoluutselt pidevaks, kui iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas $\delta > 0$ nii, et kui $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$, $(a_i, b_i) \subset [a, b]$ iga i korral,

$n \in \mathbb{N}$ on suvaline, $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$, kui $i \neq j$, siis $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Kui $n = 1$, siis on tegemist ühtlase pidevusega. Kehtivad implikatsioonid: f on absoluutselt pidev $\Rightarrow f$ on ühtlaselt pidev $\Rightarrow f$ on pidev, seejuures antud juhul, kus $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on viimane implikatsioon pööratav. Hulk $H^m(a, b)$ on Hilberti ruum, selles on skalaarkorrutis

$$(u, v)_{H^m(a, b)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L_2(a, b)} = \sum_{j=0}^m \int_a^b u^{(j)}(x) v^{(j)}(x) dx.$$

Kehtivad sisalduvused $C^m[a, b] \subset H^m(a, b) \subset C^{m-1}[a, b]$.

2. Silumisülesannete püstitused

Antud on lõigu $[a, b]$ jaotus $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, sõlmedele x_i vastavad arvud $f_0, f_1, \dots, f_n$, arvud $p_i > 0$, $i = 0, \dots, n$, veel $p > 0$. Arve p_i ja p nimetatakse kaaludeks.

Silumisülesanne 1. Leida $f \in H^2(a, b)$, mille korral funktsionaali

$$J(f) = \left(\sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - f_i)^2 + p \int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

väärtus oleks minimaalne.

Lühidalt võib selle kirjutada $\min_{f \in H^2(a, b)} J(f)$.

Silumisülesanne 2. Antud on $x_i, f_i, p_i, \varepsilon > 0$. Leida $f \in H^2(a, b)$, mille korral

$$J_0(f) = \left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

oleks minimaalne tingimusel $\left(\sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - f_i)^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon$.

Lühidalt saab selle kirjutada ülesandena $\min_{f \in K_\varepsilon} J_0(f)$, kus

$$K_\varepsilon = \left\{ f \in H^2(a, b) \mid \left(\sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - f_i)^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \right\}.$$

Silumisülesanne 3. Antud on $x_i, f_i, p_i, M > 0$. Leida $f \in H^2(a, b)$, mille korral

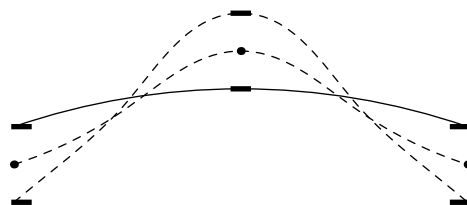
$$J_1(f) = \left(\sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - f_i)^2 \right)^{1/2}$$

oleks minimaalne tingimusel $\left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq M$.

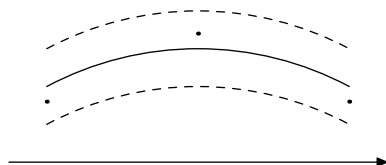
Lühidalt on see ülesanne $\min_{f \in L_M} J_1(f)$, kus

$$L_M = \left\{ f \in H^2(a, b) \mid \left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq M \right\}.$$

Silumisülesandes 2 on antud lubatav kõrvalekalle $f(x_i)$ ja f_i vahel, täpsemalt, nende kõikide kõrvalekallete kombinatsioon etteantud kaaludega ei tohi ületada antud määra. Minimiseeritakse seejuures funktsiooni tervet kõverust lõigus $[a, b]$, mida võib ette kujutada järgmisel joonisel, kus punktid näitavad antud (x_i, f_i) asukohta, pidev joon tähendab lahendit, üks katkendlik joon interpolanti ja teine katkendlik joon lubatavate kõrvalekalletega funktsiooni:



Silumisülesandes 3 on antud joone lubatav kõverus (seda väljendab kõvera kuju), minimiseeritakse kõrvalekallete kombinatsiooni:



Silumisülesandes 1 tuleb minimiseerida terve funktsionaal

$$J(f) = (J_0^2(f) + pJ_1^2(f))^{1/2},$$

seda võib käsitleda kompromissina silumisülesannete 2 ja 3 vahel.

Silumisülesanded 1–3 on kaaludega silumisülesanded, seejuures silumisülesannet 1 võib nimetada klassikaliseks silumisülesandeks. Kõrvuti nendega on loomulik vaadelda tõketega silumisülesannet, milles on antud $x_i, f_i, \varepsilon_i \geq 0, i = 0, \dots, n$, defineeritakse

$$K = \{f \in H^2(a, b) \mid |f(x_i) - f_i| \leq \varepsilon_i, i = 0, \dots, n\}$$

ning on vaja leida $f \in H^2(a, b)$, mille korral $J_0(f)$ oleks minimaalne tingimusel $f \in K$. Tõketega silumisülesande sarnasus silumisülesandega 2 on näiline, tegelikult on nad väga erinevad. Kuigi tõketega silumisülesanne on palju praktilisem, on teda oluliselt raskem lahendada kui kaaludega ülesandeid. See on üks põhjustest, miks me selles kursuses tõketega silumisülesandeid ei käsitle.

3. Minimaalse poolnormiga interpolant

Siin vaatleme ülesannet

Alusülesanne. Antud on $x_i, f_i, i = 0, \dots, n$, leida $f \in H^2(a, b)$, mille korral

$$J_0(f) = \left(\int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

oleks minimaalne tingimustel $f(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$.

Seda võib vaadata ka silumisülesandena 2, kus on võetud $\varepsilon = 0$, kuid säilitame silumisülesandes 2 ikka $\varepsilon > 0$. Märgime, et J_0 on poolnorm ruumis $H^2(a, b)$.

Lemma (Holladay, 1957). *Alusülesande ainsaks lahendiks on kuupsplain $S \in S_{\Delta}^{3,1}$, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, ja rajatingimusi $S''(a) = S''(b) = 0$.*

Seda lahendit nimetatakse loomulikuks kuupsplainiks või naturaalsplainiks. Vaadeldavaid rajatingimusi nimetatakse loomulikeks rajatingimusteks. Lemma on üks olulisemaid lähtetulemusi splineide teoorias.

Tõestus. Eespool toodud kuupsplainidega interpoleerimise teooriast teame, et selline kuupsplain S on üheselt määratud, $S \in C^2[a, b] \subset H^2(a, b)$. Tarvilik ja piisav on näidata, et selline S on alusülesande ainus lahend.

Võtame suvalise $f \in H^2(a, b)$, mille korral $f(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Tõestame esialgu võrduse

$$\int_a^b (f''(x))^2 dx = \int_a^b (S''(x))^2 dx + \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx. \quad (1)$$

Selle võrduse võib ka kirjutada

$$J_0^2(f) = J_0^2(S) + J_0^2(f - S),$$

kuid praegu ei ole see oluline. Teisendades saame

$$\begin{aligned} \int_a^b (f''(x))^2 dx &= \int_a^b (f''(x) - S''(x) + S''(x))^2 dx = \\ &= \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx + 2 \int_a^b (f''(x) - S''(x)) S''(x) dx + \\ &\quad + \int_a^b (S''(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Näitame, et $\int_a^b (f''(x) - S''(x)) S''(x) dx = 0$. Ositi integreerides saame

$$\int_a^b (f''(x) - S''(x)) S''(x) dx =$$

$$= (f'(x) - S'(x)) S''(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx.$$

Selles $(f'(x) - S'(x)) S''(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0$, sest $S''(a) = S''(b) = 0$. Veel saame

$$\begin{aligned} \int_a^b (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx = \\ &/ \text{ kasutame asjaolu, et } S''' \text{ on intervallides } (x_{i-1}, x_i) \text{ konstantne,} \\ &\text{ sest ta on kuuppolünoomi kolmas tuletis} / \\ &= \sum_{i=1}^n S''' \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x) - S'(x)) dx, \end{aligned}$$

seejuures

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x) - S'(x)) dx = (f(x) - S(x)) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} = 0,$$

mis tuleb interpolatsioonitingimustest $f(x_i) = S(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Sellega on võrdus (1) tõestatud.

Võrdusest (1) järeldub, et $J_0(f) \geq J_0(S)$, sest $J_0^2(f - S) \geq 0$ ja ka $J_0(f) \geq 0$, $J_0(S) \geq 0$. Oleme tõestanud, et vaadeldav interpolant S on alusülesande lahend.

Näitame, et S on ainus lahend. Oletame, et $f \in H^2(a, b)$ on samuti alusülesande lahend. Siis $J_0(f) = J_0(S)$ ja $\int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx = 0$. Sellest järeldub integraalialuse funktsiooni mittenegatiivsuse tõttu, et $f''(x) - S''(x) = 0$ peaaegu kõikjal. Kehtib võrdus

$$f'(x) - S'(x) = f'(a) - S'(a) + \int_a^x (f''(s) - S''(s)) ds,$$

mida saab väita ruumi $H^2(a, b)$ kuuluva funktsiooni $f - S$ korral. Kuid et $f''(s) - S''(s) = 0$ peaaegu kõikjal, siis $\int_a^x (f''(s) - S''(s)) ds = 0$ ja $f'(x) - S'(x) = f'(a) - S'(a) = \alpha$ (kasutame siin tähte α konstandi tähisena). Nüüd kasvõi hariliku diferentsiaalvõrrandi $f'(x) - S'(x) = \alpha$ lahendina leiame, et $f(x) - S(x) =$

$= \alpha x + \beta$. Kasutades jälle interpolatsiooniingimuste täidetust, $S(x_i) = f(x_i)$, saame $\alpha x_i + \beta = 0$, $i = 0, \dots, n$, $n \geq 1$, seepärast $\alpha x + \beta = 0$, $x \in [a, b]$. See aga tähendab, et $f = S$.

4. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendi olemasolu

Näitame siin, et silumisülesandel 1 on olemas lahend. See oli ülesanne

$$\min_{f \in H^2(a,b)} J(f), \quad J(f) = \left(\sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - f_i)^2 + p \int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

antud oli x_i, f_i, p_i, p . Tähistame $d = \inf_{f \in H^2(a,b)} J(f)$. Siin $\inf_{f \in H^2(a,b)} J(f)$ eksisteerib reaalarvuna, sest $J(f) \geq 0$ iga $f \in H^2(a,b)$ korral, seejuures $d \geq 0$. Võtame minimiseeriva jada $f_m \in H^2(a,b)$, see on jada, mille korral $J(f_m) \rightarrow d$, kui $m \rightarrow \infty$. Minimiseeriv jada eksisteerib alati, sest infimumi mõiste kohaselt võib funktsionaali väärtustega sellele kuitahes lähedale jõuda. Muidugi leiab aset võrratus $d \leq J(f_m)$. Leiame interpoleerivad kuupsplainid $S_m \in S_{\Delta}^{3,1}$ nii, et $S_m(x_i) = f_m(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, $S_m''(a) = S_m''(b) = 0$, seejuures kuupsplainide interpoleerimise teooriast teame, et splainid S_m on olemas ja üheselt määratud. Alusülesande põhjal võime öelda, et $J_0(S_m) \leq J_0(f_m)$. Lisaks, interpoleerimisest järeldub, et $J_1(S_m) = J_1(f_m)$, seepärast $J(S_m) \leq J(f_m)$. Arvestades veel võrratust $d \leq J(S_m)$, saame $d \leq J(S_m) \leq J(f_m)$ ning $J(f_m) \rightarrow d$ tõttu $J(S_m) \rightarrow d$, s.t. ka S_m on minimiseeriv jada.

Vaatleme ruumi $S_{0,\Delta}^{3,1} = \{S \in S_{\Delta}^{3,1} \mid S''(a) = S''(b) = 0\}$. See ruum on lõpliku mõõtmeline, sest ta on lõplikumõõtmelise ruumi $S_{\Delta}^{3,1}$ alamruum. Kasutame ruumis $S_{0,\Delta}^{3,1}$ kahte normi. Olgu

$$\begin{aligned} \|S\|_1 &= \|S\|_{C^2[a,b]} = \|S\|_{C[a,b]} + \|S'\|_{C[a,b]} + \|S''\|_{C[a,b]}, \\ \|S\|_2 &= \max_{0 \leq i \leq n} |S(x_i)|. \end{aligned}$$

Esimene neist on norm ruumi $C^2[a,b]$ alamruumis. Näitame, et teine on norm. On selge, et

$$\begin{aligned} \|\lambda S\|_2 &= |\lambda| \|S\|_2, \\ \|S_1 + S_2\|_2 &\leq \|S_1\|_2 + \|S_2\|_2. \end{aligned}$$

Olgu $\|S\|_2 = 0$. Siis $S(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, ning et $S''(a) = S''(b) = 0$, siis interpolatsiooniülesande ühese lahenduvuse põhjal $S = 0$.

Näitame järgnevas, et $\|S_m\|_2$ on tõkestatud. Teame, et $J(S_m) \leq c_1$, sest $J(S_m)$ on koonduv jada, c_1 on tõkke tähis. Siis

$$\sum_{i=0}^n p_i (S_m(x_i) - f_i)^2 \leq c_1^2,$$

millest järeldub, et

$$p_i (S_m(x_i) - f_i)^2 \leq c_1^2, \quad i = 0, \dots, n.$$

Sellest omakorda saame iga $i = 0, \dots, n$ korral

$$|S_m(x_i) - f_i| \leq \frac{c_1}{\min_{0 \leq i \leq n} \sqrt{p_i}} = c_2,$$

kus võtsime kasutusele c_2 uue konstandi tähisena. Viimasest võrratusest tuleb

$$|S_m(x_i)| \leq |S_m(x_i) - f_i| + |f_i| \leq c_2 + \max_{0 \leq i \leq n} |f_i| = c_3,$$

kus c_3 on jälle konstandi tähis. Oleme saanud, et $\|S_m\|_2 \leq c_3$. Lõplikumõõtmelises ruumis on igal tõkestatud jadal olemas koonduv osajada, seepärast on olemas $N' \subset \mathbb{N}$ (lõpmatu indeksite osahulk), $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ nii, et $\|S_m - S\|_2 \rightarrow 0$, kui $m \in N'$. Lõplikumõõtmelises ruumis on kõik normid paarikaupa ekvivalentsed, seepärast $\|S_m - S\|_1 \rightarrow 0, m \in N'$. Viimasest järeldub, et $S_m''(x) \rightarrow S''(x)$ ühtlaselt lõigus $[a, b]$, samuti $S_m(x_i) \rightarrow S(x_i), i = 0, \dots, n$, kui $m \in N'$. Siis ikka $m \in N'$ korral nende koondumiste tõttu

$$\begin{aligned} J(S_m) &= \left(\sum_{i=0}^n p_i (S_m(x_i) - f_i)^2 + p \int_a^b (S_m''(x))^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow \\ &\rightarrow J(S) = \left(\sum_{i=0}^n p_i (S(x_i) - f_i)^2 + p \int_a^b (S''(x))^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Et $J(S_m) \rightarrow d$, siis $J(S) = d$, mis ütleb, et S on silumisülesande 1 lahend.

Ülesanne 15. Tõestada, et silumisülesannetel 2 ja 3 on olemas lahendid hulgas $S_{0,\Delta}^{3,1}$. Soovitus: püüda modifitseerida eelnevat tõestust. Hoiatus: olla tähelepanelik arutluse jälgimisel, tervikuna arutelu ei sobi silumisülesannete 2 ja 3 puhul.

Olgu X vektorruum, funktsiooni (või funktsionaali) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse rangelt kumeraks, kui iga $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, ja iga $\lambda \in (0, 1)$ korral

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Lause. Kui f on rangelt kumer, siis ülesandel $\min_{x \in X} f(x)$ ei saa olla kahte erinevat lahendit.

Põhjenduseks märgime, et kui elemendid $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, on lahendid, siis $f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = \min_{x \in X} f(x)$, mis on vastuolu.

Ülesanne* 4. Tõestada, et klassikalises silumisülesandes 1 vaadeldud funktsionaal $J: H^2(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ on rangelt kumer.

Järeldus. Klassikalise silumisülesande 1 lahend on ühene.

5. Tehniline abitulemus

Lemma. Iga $f \in H^2(a, b)$ ja iga $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ korral kehtib

$$\begin{aligned} J^2(f) - J^2(S) &= \sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - S(x_i))^2 + p \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx + \\ &+ 2 \sum_{i=0}^n (f(x_i) - S(x_i)) (p_i (S(x_i) - f_i) + p (S'''(x_i + 0) - S'''(x_i - 0))), \end{aligned} \quad (2)$$

kus $S'''(x_0 - 0) = 0$, $S'''(x_n + 0) = 0$.

Tõestus. Teisendame

$$\begin{aligned} J^2(f) - J^2(S) &= \sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - f_i)^2 + p \int_a^b (f''(x))^2 dx - \\ &- \sum_{i=0}^n p_i (S(x_i) - f_i)^2 - p \int_a^b (S''(x))^2 dx = \end{aligned}$$

/ kasutame siin vahetult kontrollitavat võrdust $A^2 - B^2 = (A - B)^2 + 2(A - B)B$, võttes summas $A = f(x_i) - f_i$, $B = S(x_i) - f_i$ ja integraalis $A = f''(x)$, $B = S''(x)$ /

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - S(x_i))^2 + p \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx + \\ &+ 2 \sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - S(x_i)) (S(x_i) - f_i) + \end{aligned}$$

$$+ 2p \int_a^b (f''(x) - S''(x)) S''(x) dx.$$

Siin on vaja teisendada ainult viimast liidetavat, milles integreerime ositi:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f''(x) - S''(x)) S''(x) dx = \\ &= \left(f'(x) - S'(x) \right) S''(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx = \\ & \quad / \text{ esimene liidetav on 0, sest } S''(a) = 0, S''(b) = 0 / \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x) - S'(x)) S'''(x) dx = \\ &= - \sum_{i=1}^n S''' \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \left(f(x) - S(x) \right) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} = \\ &= - \sum_{i=1}^n S'''(x_i - 0) \left(f(x_i) - S(x_i) \right) + \sum_{i=1}^n S'''(x_{i-1} + 0) \left(f(x_{i-1}) - S(x_{i-1}) \right) = \\ & \quad / \text{ esimeses summas võime lisada indeksi 0, sest } S'''(x_0 - 0) = 0, \\ & \quad \text{teises summas teeme indeksi nihke} / \\ &= - \sum_{i=0}^n S'''(x_i - 0) \left(f(x_i) - S(x_i) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} S'''(x_i + 0) \left(f(x_i) - S(x_i) \right) = \\ & \quad / \text{ lisame teises summas indeksi } n, \text{ sest } S'''(x_n + 0) = 0 / \\ &= \sum_{i=0}^n \left(S'''(x_i + 0) - S'''(x_i - 0) \right) \left(f(x_i) - S(x_i) \right). \end{aligned}$$

6. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendit iseloomustav tarvilik ja piisav tingimus

Lause. Loomulik spline $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ on silumisülesande 1 lahend parajasti siis, kui

$$p_i \left(S(x_i) - f_i \right) + p \left(S'''(x_i + 0) - S'''(x_i - 0) \right) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad (3)$$

kus $S'''(x_0 - 0) = 0$, $S'''(x_n + 0) = 0$.

Tõestus. Tingimuse (3) piisavus. Kui splaini $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ korral (3) kehtib, siis võrduse (2) põhjal iga $f \in H^2(a, b)$ korral $J^2(f) \geq J^2(S)$, mis tähendab, et S on silumisülesande 1 lahend.

Tingimuse (3) tarvilikkus. Olgu $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ silumisülesande 1 lahend. Oletame vastuväiteliselt, et (3) ei kehti. Siis on olemas indeks $k \in \{0, \dots, n\}$ nii, et

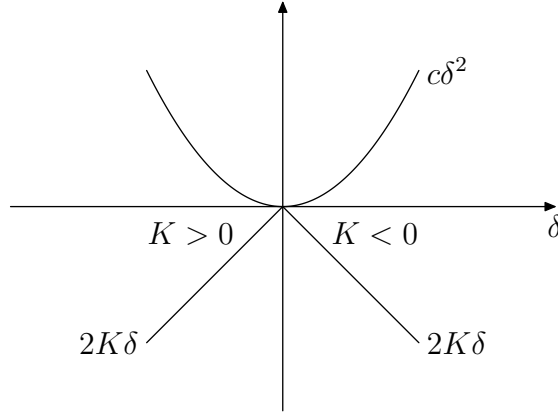
$$K = p_k (S(x_k) - f_k) + p (S'''(x_k + 0) - S'''(x_k - 0)) \neq 0.$$

Võtame splaini $\bar{S} \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ nii, et $\bar{S}(x_k) = 1$, $\bar{S}(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, $i \neq k$. Olgu $f(x) = S(x) + \delta \bar{S}(x)$, kus $\delta \neq 0$, mille valime hiljem. Võib öelda, et $f \in H^2(a, b)$, isegi $f \in S_{0,\Delta}^{3,1}$. Siis võrdusele (2) tuginedes saame

$$J^2(f) - J^2(S) = \sum_{i=0}^n p_i \delta^2 (\bar{S}(x_i))^2 + p \delta^2 \int_a^b (\bar{S}''(x))^2 dx + 2\delta \bar{S}(x_k) K = c\delta^2 + 2K\delta,$$

$$\text{kus } c = p_k + p \int_a^b (\bar{S}''(x))^2 dx > 0, \text{ sest } \bar{S}(x_i) = 0, \quad i \neq k.$$

Kui $K > 0$, siis vaatleme protsessi $\delta \rightarrow 0-$, kui aga $K < 0$, siis olgu $\delta \rightarrow 0+$. See tagab, et küllalt väikese $|\delta| \neq 0$ korral $c\delta^2 + 2K\delta < 0$, mis annab vastuolulise $J(f) < J(S)$. Liidetavate $c\delta^2$ ja $2K\delta$ käitumist iseloomustab joonis



7. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendi ühesus

Siiani oleme tõestanud silumisülesande 1 lahendi olemasolu ja näidanud, kuidas on võimalik näidata lahendi ühesust. Selles punktis esitame veel teise võimaluse lahendi ühesuse saamiseks.

Olgu $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$ silumisülesande 1 lahend. Siis iga $f \in H^2(a, b)$ korral on võrdus (2) tingimuse (3) põhjal

$$J^2(f) - J^2(S) = \sum_{i=0}^n p_i (f(x_i) - S(x_i))^2 + p \int_a^b (f''(x) - S''(x))^2 dx.$$

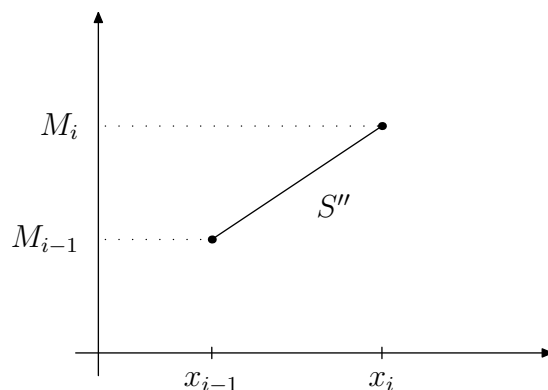
Kui $f \in H^2(a, b)$ on silumisülesande 1 lahend, siis $J(f) = J(S)$ ja seega

$$\begin{aligned} f(x_i) - S(x_i) &= 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ f''(x) - S''(x) &= 0 \quad \text{peaaegu kõikjal.} \end{aligned}$$

Eespool juba nägime, et siis $f(x) - S(x) = \alpha x + \beta$ ja $n \geq 1$ tõttu $f(x) - S(x) = 0$ iga $x \in [a, b]$ korral ehk $f = S$.

8. Klassikalise kaaludega silumisülesande lahendi leidmine

Teame, et silumisülesandel 1 on olemas ühene lahend $S \in S_{0,\Delta}^{3,1}$, mille korral on rahuldatud tingimused (3). Splain S on osalõigis $[x_{i-1}, x_i]$ selline, et S'' on lineaarne, S''' on konstantne, seepärast $S'''(x_{i-1}+0) = S'''(x_i-0) = \frac{M_i - M_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}$, kus $M_i = S''(x_i)$. Illustreerivaks on joonis



Võrdused (3) saame nüüd kirjutada (tähistades $S_i = S(x_i)$)

$$\begin{cases} p_0(S_0 - f_0) + p \frac{M_1 - M_0}{h_1} = 0, \\ p_i(S_i - f_i) + p \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{h_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ p_n(S_n - f_n) + p \left(-\frac{M_n - M_{n-1}}{h_n} \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Splaini määramiseks on meil praegu kasutada tundmatud $S_0, \dots, S_n$, $M_0, \dots, M_n$, võrrandite arv süsteemis (4) on $n + 1$. Lisame veel $n + 1$ võrrandit

$$\begin{cases} M_0 = 0, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ M_n = 0, \end{cases} \quad (5)$$

kus on kirjas loomulikud rajatingimused ja alati kehtivad splaini sisevõrrandid. Võrdustest (4) saame avaldada

$$\begin{cases} S_0 = f_0 - \frac{p}{p_0} \frac{M_1 - M_0}{h_1}, \\ S_i = f_i - \frac{p}{p_i} \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{h_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \right), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ S_n = f_n - \frac{p}{p_n} \left(-\frac{M_n - M_{n-1}}{h_n} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Asendame need võrranditesse (5). Sellega tekib lineaarne võrrandisüsteem, mille tähistame $AM = d$, kus $M = (M_0, \dots, M_n)$ ja A on viiediagonaalne, sest võrrand indeksiga i sisaldab tundmatuid $M_{i-2}, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2}$, seda küll $i = 2, \dots, n-2$ korral. Muidugi on selles süsteemis esimene ja viimane võrrand triviaalsed, need annavad $M_0 = 0, M_n = 0$ ning teistes võrrandites saab need ära jätta, millega tekib $n-1$ tundmatuga $M_1, \dots, M_{n-1}$ süsteem, milles on $n-1$ võrrandit. Eelneva käsitluse põhjal on see süsteem üheselt lahenduv, sest selle lahendamise annab üheselt splaini kui lahendi parameetrid M_i . Arvud S_i saab seejärel arvutada võrdustest (6) ning sellega on määratud splain $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eraldi igas osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$.

Ülesanne* 5. Tõestada, et splaini parameetreid M_i määravas süsteemis $AM = d$ võib diagonaali ridade kaupa domineerimine puududa. Soovitus: vaadelda ühtlast võrku ja juhtu, kus kaalud p_i on kõik võrdsed.

Märkus. Silumisülesannete 2 ja 3 lahendid ei tarvitse olla ühesed. Näiteks piisab võtta punktid $(x_i, f_i), i = 0, \dots, n$, ühel sirgel ning siis on interpolandiks ülimalt esimese astme polünoom S (sellega ka ruumis $S_{0,\Delta}^{3,1}$), mille korral $J_0(S) = 0$ ja $J_1(S) = 0$. Silumisülesandes 2 on sirgele S lähedase sirge $\bar{S} \in K_\epsilon$ korral ikka $J_0(\bar{S}) = 0$. Silumisülesandes 3 aga tarvitseb võtta sirgest S vähe erinev interpolant $\bar{S} \in L_M$, siis $J_1(\bar{S}) = 0$.

§11. Harilike diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamine kuupsplainidega kollokatsioonimeetodil

1. Rajaülesande püstitus

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$(Lu)(x) = p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

millele on lisatud rajatingimused

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= \gamma_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Siin p, q, r, f on antud funktsioonid, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ on antud arvud, $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on otsitav funktsioon, Lu tähistab diferentsiaaloperaatori rakendamisel saadud funktsiooni (L on niisiis lineaarne diferentsiaaloperaator). Rajatingimuste tähtis erijuht on $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0$, mis annab

$$\begin{aligned} u(a) &= \gamma_1, \\ u(b) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

Eeldame, et rajaülesandel (1), (2) on olemas lahend $u \in C^2[a, b]$. Ühesuseks lahendi olemasolul on piisav, et $p, q, r, f \in C[a, b]$, $p(x) \geq p_c > 0$, $r(x) \leq r_c < 0$, $x \in [a, b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2 \geq 0$, $\beta_1 \leq 0$, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2$.

2. Kuupsplainidega kollokatsioonimeetod

Olgu antud rajaülesanne (1), (2). Valime võrgu $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Siis $\dim S_{\Delta}^{3,1} = n + 3$. Rajaülesandele (1), (2) otsime lähilahendit $u_n \in S_{\Delta}^{3,1}$. Selle määramiseks peaks olema $n + 3$ sobivat tingimust. Nõuame, et

$$(Lu_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_n(a) + \beta_1 u'_n(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 u_n(b) + \beta_2 u'_n(b) &= \gamma_2,\end{aligned}\tag{3}$$

neid tingimusi on kokku $n + 3$. Seega nõuame, et lähislahend rahuldaks täpselt rajatingimusi ning rahuldaks diferentsiaalvõrrandit võrgu sõlmedes. Viimaseid nimetatakse kollokatsioonitingimusteks. Seame eesmärgiks vastata järgmistele loomulikele küsimustele: kas selline spline $u_n \in S_{\Delta}^{3,1}$ eksisteerib (lähislahendi olemasolu ehk lähismeetodi rakendatavus), kas u_n on üheselt määratud (lähislahendi ühesus), kuidas lähislahendit u_n leida?

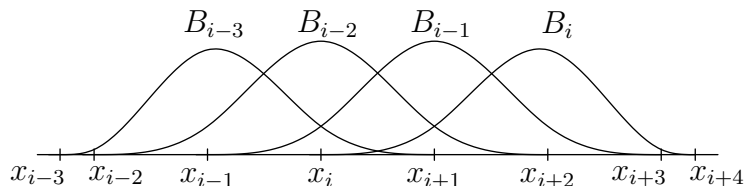
Kasutame siin normaliseeritud kuup-B-splaine. Võtame lisasõlmed nii, et

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < \dots < x_n < x_{n+1} < x_{n+1} < x_{n+3}.$$

Siis saame moodustada (normaliseeritud) B-splainid $B_{-3}, \dots, B_{n-1}$, nad on küll algselt määratud reaalsirgel $\mathbb{R}$, aga nende ahendid lõigule $[a, b]$ moodustavad baasi ruumis $S_{\Delta}^{3,1}[a, b]$. Normaliseerituse tõttu

$$\sum_{i=-3}^{n-1} B_i(x) = 1, \quad x \in [a, b].$$

Seejuures $\text{supp } B_i = [x_i, x_{i+4}]$ ning maksab silmas pidada järgmist joonist



Näeme, et

$$B_j(x_i) = 0, B'_j(x_i) = 0, B''_j(x_i) = 0, \quad \text{kui } j < i - 3 \text{ või } j > i - 1, \tag{4}$$

mis järeldub kandjat arvestades asjaolust, et kuup-B-splainid on kaks korda pidevalt diferentseeruvad tervel reaalteljel.

Kasutame lähislahendi u_n esituses neid B-splaine, siis

$$u_n(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_i(x)$$

ning u_n teadmiseks on tarvilik ja piisav määrata kordajad c_i . Omadusi (4) arvestades saame

$$(Lu_n)(x_i) = \left(L \left(\sum_{j=-3}^{n-1} c_j B_j \right) \right) (x_i) = \sum_{j=-3}^{n-1} c_j (LB_j)(x_i) = \sum_{j=i-3}^{i-1} c_j (LB_j)(x_i).$$

Selles

$$(LB_j)(x_i) = p(x_i)B_j''(x_i) + q(x_i)B_j'(x_i) + r(x_i)B_j(x_i)$$

ning kollokatsioonitingimused ehk kollokatsioonivõrrandid saame kirjutada

$$c_{i-3}(LB_{i-3})(x_i) + c_{i-2}(LB_{i-2})(x_i) + c_{i-1}(LB_{i-1})(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Tähistame selles võrduses $A_i = (LB_{i-3})(x_i)$, $B_i = (LB_{i-2})(x_i)$, $C_i = (LB_{i-1})(x_i)$, siis kollokatsioonivõrrandid on

$$A_i c_{i-3} + B_i c_{i-2} + C_i c_{i-1} = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Kordajad A_i , B_i , C_i saab välja arvutada ja seda me hiljem (erijuhul) teemegi. Loodame, et kordaja B_i ei lähe segi B-splainiga, sest kontekstist on selge, et üks neist on arv, teine aga funktsioon. Esimene rajatingimus on kirjutatav u_n esitust arvestades kujul

$$\begin{aligned} & \alpha_1(c_{-3}B_{-3}(x_0) + c_{-2}B_{-2}(x_0) + c_{-1}B_{-1}(x_0)) + \\ & + \beta_1(c_{-3}B'_{-3}(x_0) + c_{-2}B'_{-2}(x_0) + c_{-1}B'_{-1}(x_0)) = \gamma_1 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} & c_{-3}(\alpha_1 B_{-3}(x_0) + \beta_1 B'_{-3}(x_0)) + c_{-2}(\alpha_1 B_{-2}(x_0) + \beta_1 B'_{-2}(x_0)) + \\ & + c_{-1}(\alpha_1 B_{-1}(x_0) + \beta_1 B'_{-1}(x_0)) = \gamma_1 \end{aligned}$$

või

$$c_{-3}B_{-1} + c_{-2}C_{-1} + c_{-1}D_{-1} = \gamma_1,$$

kus B_{-1} , C_{-1} , D_{-1} tähistavad vastavaid kordajaid.

Ülesanne 16. Kirjutada välja teine rajatingimus analoogiliselt esimese rajatingimusega, tähistada sobivalt tundmatute c_i kordajad teist rajatingimust väljendavas võrrandis.

Ühendades rajatingimused ja kollokatsioonivõrrandid, jõuame süsteemini

$$\begin{pmatrix} B_{-1} & C_{-1} & D_{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_0 & B_0 & C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Eelistatavam on kolmediagonaalse maatriksiga süsteem, seepärast avaldame esimesest rajatingimusest

$$c_{-3} = \frac{\gamma_1}{B_{-1}} - \frac{C_{-1}}{B_{-1}}c_{-2} - \frac{D_{-1}}{B_{-1}}c_{-1}$$

ning asendame selle esimeses kollokatsioonivõrrandis

$$A_0c_{-3} + B_0c_{-2} + C_0c_{-1} = f(x_0).$$

Selle tulemusena saame

$$c_{-2} \left(B_0 - A_0 \frac{C_{-1}}{B_{-1}} \right) + c_{-1} \left(C_0 - A_0 \frac{D_{-1}}{B_{-1}} \right) = f(x_0) - A_0 \frac{\gamma_1}{B_{-1}},$$

milles tähistame ümber vastavad kordajad ja võrrand on siis

$$c_{-2}\bar{B}_0 + c_{-1}\bar{C}_0 = \bar{f}_0.$$

Analoogiliselt toimime ka teise rajatingimusega ning jõuame kolmediagonaalse maatriksiga süsteemini

$$\begin{cases} \bar{B}_0c_{-2} + \bar{C}_0c_{-1} = \bar{f}_0, \\ A_ic_{i-3} + B_ic_{i-2} + C_ic_{i-1} = f_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \bar{A}_nc_{n-3} + \bar{B}_nc_{n-2} = \bar{f}_n \end{cases} \quad / \text{ siin } f_i = f(x_i) / \quad (5)$$

ehk

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_0 & \bar{C}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{A}_n & \bar{B}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \bar{f}_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

3. Lähislahendi olemasolu ja ühesus, koondumine

Eeldame, et ülesandel (1), (2) on olemas lahend $u \in C^4[a, b]$ ning on täidetud punktis 1 toodud lahendi ühesust tagavad tingimused. Vaatleme punktis 2 käsitletud kuupsplainidega kollokatsioonimeetodit. Olgu $\bar{u}_n \in S_{\Delta}^{3,1}$ interpolant, mis määratakse tingimustega $\bar{u}_n(x_i) = u(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, $\bar{u}'_n(a) = u'(a)$, $\bar{u}'_n(b) = u'(b)$. Oleme tõestanud, et $\|\bar{u}_n - u\|_{\infty} = O(h^4)$. Edaspidi vaatleme ühtlase võrgu juhtu,

kus $h_i = h$, $i = 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$. Näitame hiljem, et kollokatsioonimeetodil saadav $u_n \in S_{\Delta}^{3,1}$ on olemas ja ühene, kui h on piisavalt väike. Võime kasutada hinnangut

$$\|u_n - u\|_{\infty} \leq \|u_n - \bar{u}_n\|_{\infty} + \|\bar{u}_n - u\|_{\infty}$$

ning näitame edaspidi, et $\|u_n - \bar{u}_n\|_{\infty} = O(h^2)$. Siis muidugi $\|u_n - u\|_{\infty} = O(h^2)$. Splineide $u_n, \bar{u}_n \in S_{\Delta}^{3,1}$ esitamiseks kasutame arendisi

$$u_n(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_i(x), \quad \bar{u}_n(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} \bar{c}_i B_i(x),$$

millest esimest juba kasutasime ja, nagu varemgi, B_i on normaliseeritud kuup-B-splainid. Siis

$$\bar{u}_n(x) - u_n(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} (\bar{c}_i - c_i) B_i(x),$$

mille abil

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_n - u_n\|_{\infty} &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{i=-3}^{n-1} (\bar{c}_i - c_i) B_i(x) \right| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=-3}^{n-1} |\bar{c}_i - c_i| B_i(x) \leq \\ &\leq \max_{-3 \leq i \leq n-1} |\bar{c}_i - c_i| \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=-3}^{n-1} B_i(x) = \\ &= \max_{-3 \leq i \leq n-1} |\bar{c}_i - c_i|, \end{aligned}$$

sest B-splineide normaliseerituse tõttu $\sum_{i=-3}^{n-1} B_i(x) = 1$ iga $x \in [a, b]$ korral. Tähistame $\xi_i = \bar{c}_i - c_i$, $i = -3, \dots, n-1$. Siis

$$\bar{u}_n(x) - u_n(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} \xi_i B_i(x).$$

Saame

$$(L(\bar{u}_n - u_n))(x_i) = (L\bar{u}_n)(x_i) - (Lu_n)(x_i) =$$

/ kasutame kollokatsioonitingimusi $(Lu_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$,

seejärel asjaolu, et u on diferentsiaalvõrrandi lahend /

$$\begin{aligned} &= (L\bar{u}_n)(x_i) - f(x_i) = (L\bar{u}_n)(x_i) - (Lu)(x_i) = (L(\bar{u}_n - u))(x_i) = \\ &= p(x_i)(\bar{u}_n''(x_i) - u''(x_i)) + q(x_i)(\bar{u}_n'(x_i) - u'(x_i)) + \\ &\quad + r(x_i)(\bar{u}_n(x_i) - u(x_i)) = \delta_i, \end{aligned}$$

kus võtsime kasutusele tähise δ_i . Eespool nägime, et $\bar{u}_n(x_i) - u(x_i) = O(h^4)$ (tegelikult $\bar{u}_n(x_i) - u(x_i) = 0$), $\bar{u}_n'(x_i) - u'(x_i) = O(h^3)$, $\bar{u}_n''(x_i) - u''(x_i) = O(h^2)$, seepärast $\delta_i = O(h^2)$. Vaatame, milliseid rajatingimusi rahuldab spline $\bar{u}_n - u_n$. Teame, et $\alpha_1 u_n(a) + \beta_1 u_n'(a) = \gamma_1$ ning $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1$. Lisaks $\bar{u}_n(a) = u(a)$ interpolatsioonist ning $\bar{u}_n'(a) = u'(a)$ interpolandi rajatingimustest. Nüüd $\alpha_1 u_n(a) + \beta_1 u_n'(a) = \gamma_1$ ja $\alpha_1 \bar{u}_n(a) + \beta_1 \bar{u}_n'(a) = \gamma_1$ annavad, et $\alpha_1(\bar{u}_n - u_n)(a) + \beta_1(\bar{u}_n - u_n)'(a) = 0$. Sarnaselt näeme, et ka teises otspunktis b rahuldab $\bar{u}_n - u_n$ vastavat homogeenset rajatingimust. Kokkuvõttes näeme, et kordajad ξ_i määratakse süsteemist

$$\begin{cases} \alpha_1(\bar{u}_n - u_n)(a) + \beta_1(\bar{u}_n - u_n)'(a) = 0, \\ (L(\bar{u}_n - u_n))(x_i) = \delta_i, \quad i = 0, \dots, n, \\ \alpha_2(\bar{u}_n - u_n)(b) + \beta_2(\bar{u}_n - u_n)'(b) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Eespool nägime, et u_n määratakse süsteemist (3), süsteemis (6) on u_n asemel $\bar{u}_n - u_n$ ja võrrandite paremad pooled on teised. Süsteemi (6) alusel saame süsteemi (5) analoogi kordajate ξ_i määramiseks, see tuleb

$$\begin{cases} \bar{B}_0 \xi_{-2} + \bar{C}_0 \xi_{-1} = \delta_0, \\ A_i \xi_{i-3} + B_i \xi_{i-2} + C_i \xi_{i-1} = \delta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{A}_n \xi_{n-3} + \bar{B}_n \xi_{n-2} = \delta_n, \end{cases} \quad (7)$$

kus arvestasime seda, et süsteemis (3) olevate γ_1 ja γ_2 asemel tuleb süsteemis (7) arv 0. Muidugi saab süsteemi (7) lahendite ξ_i abil määrata ξ_{-3} ja ξ_{n-1} nagu eespool elimineerimise käigus c_{-3} ja c_{n-1} . Järgmine eesmärk on meil leida kordajad A_i, B_i, C_i . Meenutame, et normaliseeritud B-splineide väärtusi saab leida rekurrentse seose abil, see oli varasemates tähistustes

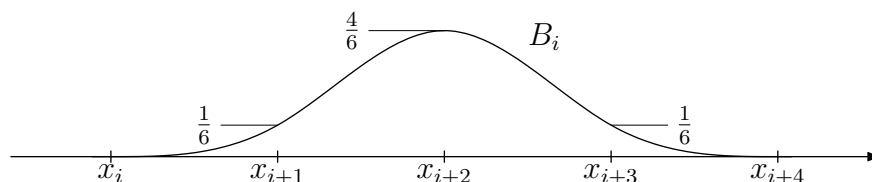
$$\bar{B}_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \bar{B}_{m-1}^{i+1}(x).$$

Ülesanne* 6. Tõestada, et ühtlase võrgu korral, kus $h_i = h$ iga i korral, leiavad normaliseeritud B-splineide $B_i = \bar{B}_3^i$ jaoks aset võrdused

$$B_i(x_{i+1}) = \frac{1}{6}, \quad B_i(x_{i+2}) = \frac{4}{6}, \quad B_i(x_{i+3}) = \frac{1}{6},$$

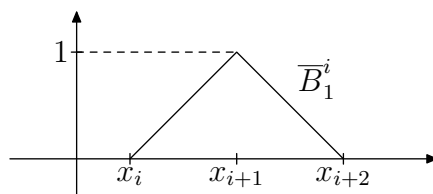
$$\begin{aligned} B'_i(x_{i+1}) &= \frac{1}{2h}, & B'_i(x_{i+2}) &= 0, & B'_i(x_{i+3}) &= -\frac{1}{2h}, \\ B''_i(x_{i+1}) &= \frac{1}{h^2}, & B''_i(x_{i+2}) &= -\frac{2}{h^2}, & B''_i(x_{i+3}) &= \frac{1}{h^2}, \end{aligned}$$

mida illustreerime ka joonisel



Soovitus: lähtepunktina kasutada võrduseid

$$\overline{B}_1^i(x_i) = 0, \quad \overline{B}_1^i(x_{i+1}) = 1, \quad \overline{B}_1^i(x_{i+2}) = 0.$$



Hoiatus: tuletiste väärtuste leidmisel võib mõnes kohas olla vajadus kasutada ühepoolseid piirväärtusi.

Meenutame veel, et algse rajaülesande lahendi ühesuse tagamiseks eeldasime, et $p(x) \geq p_c > 0$, $r(x) \leq r_c < 0$. Kasutades *-ülesandes 6 toodud B-splainide ja nende tuletiste väärtusi, saame leida $i = 0, \dots, n$ korral

$$\begin{aligned} A_i &= (LB_{i-3})(x_i) = p_i B''_{i-3}(x_i) + q_i B'_{i-3}(x_i) + r_i B_{i-3}(x_i) = \\ &= \frac{p_i}{h^2} - \frac{q_i}{2h} + \frac{r_i}{6} \end{aligned}$$

ning $A_i \geq 0$, kui h on küllalt väike,

$$B_i = (LB_{i-2})(x_i) = p_i B''_{i-2}(x_i) + q_i B'_{i-2}(x_i) + r_i B_{i-2}(x_i) = -\frac{2p_i}{h^2} + \frac{4r_i}{6}$$

ning $B_i < 0$ igasuguse h korral,

$$\begin{aligned} C_i &= (LB_{i-1})(x_i) = p_i B''_{i-1}(x_i) + q_i B'_{i-1}(x_i) + r_i B_{i-1}(x_i) = \\ &= \frac{p_i}{h^2} + \frac{q_i}{2h} + \frac{r_i}{6} \end{aligned}$$

ning $C_i \geq 0$, kui h on küllalt väike. Nendes kordajates kasutasime lühemaid tähistusi $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$. Kui on tegemist olukorraga, kus $A_i \geq 0$ ja $C_i \geq 0$, siis

$$\begin{aligned} |B_i| - |A_i| - |C_i| &= -B_i - A_i - C_i = \\ &= \frac{2p_i}{h^2} - \frac{4r_i}{6} - \frac{p_i}{h^2} + \frac{q_i}{2h} - \frac{r_i}{6} - \frac{p_i}{h^2} - \frac{q_i}{2h} - \frac{r_i}{6} = \\ &= -r_i \geq -r_c > 0, \end{aligned}$$

mis tähendab, et süsteemi (7) sisemises võrrandis indeksiga i on rahuldatud diagonaali ridade kaupa domineerimise võrratus, see leiab aset funktsioonide p ja r kohta tehtud eeldustel küllalt väikese h korral.

Ülesanne 17. Tõestada, et kui $A_i \leq 0$ ja $C_i \leq 0$, siis süsteemi (7) sisemises võrrandis indeksiga i on rahuldatud diagonaali ridade kaupa domineerimise võrratus.

Ülesanne 18. Näidata, et kui $A_i > 0$ ja $C_i < 0$, siis võib juhtuda, et süsteemi (7) sisemises võrrandis indeksiga i ei ole rahuldatud diagonaali ridade kaupa domineerimise võrratus. Näidata sama väite kehtivust juhul $A_i < 0$ ja $C_i > 0$.

Järgnevalt analüüsime võrrandeid, mis tekivad rajatingimuste tõttu.

Olgu algul rajatingimused $u(a) = \gamma_1$, $u(b) = \gamma_2$, mis tähendab, et $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$. Süsteemi (5) kordajate leidmisel tegime arvutused $\overline{B}_0 = B_0 - A_0 \frac{C_{-1}}{B_{-1}}$, $\overline{C}_0 = C_0 - A_0 \frac{D_{-1}}{B_{-1}}$. Siis otseselt rajatingimuste abil saame

$$B_{-1} = B_{-3}(x_0) = \frac{1}{6}, \quad C_{-1} = B_{-2}(x_0) = \frac{4}{6}, \quad D_{-1} = B_{-1}(x_0) = \frac{1}{6}.$$

Kollokatsioonivõrranditest leidsime juba eespool

$$A_0 = \frac{p_0}{h^2} - \frac{q_0}{2h} + \frac{r_0}{6}, \quad B_0 = -\frac{2p_0}{h^2} + \frac{4r_0}{6}, \quad C_0 = \frac{p_0}{h^2} + \frac{q_0}{2h} + \frac{r_0}{6}.$$

Neid väärtusi arvestades leiame

$$\overline{B}_0 = -\frac{2p_0}{h^2} + \frac{4r_0}{6} - 4 \left(\frac{p_0}{h^2} - \frac{q_0}{2h} + \frac{r_0}{6} \right) = -\frac{6p_0}{h^2} + \frac{2q_0}{h}.$$

Näeme, et kui h on väike, siis $\overline{B}_0 < 0$. Leiame veel

$$\overline{C}_0 = \frac{p_0}{h^2} + \frac{q_0}{2h} + \frac{r_0}{6} - \left(\frac{p_0}{h^2} - \frac{q_0}{2h} + \frac{r_0}{6} \right) = \frac{q_0}{h}.$$

Üldiselt on $\overline{C}_0$ märk määramata, see sõltub arvust q_0 . Väikese h korral, kui $\overline{B}_0 < 0$, siis

$$|\overline{B}_0| - |\overline{C}_0| = \frac{6p_0}{h^2} - \frac{2q_0}{h} - \frac{|q_0|}{h},$$

mis on küllalt väikese h korral positiivne. Analoogiliselt näeme, et süsteemi (7) viimases võrrandis on väikese h korral diagonaali domineerimise võrratus rahuldatud. Süsteemis (7) $\delta_i = O(h^2)$, $i = 0, \dots, n$, seepärast väikese h korral $\xi_i = O(h^2)$, $i = -2, \dots, n-2$. Eraldi tuleb vaadata ξ_{-3} ja ξ_{n-1} hinnanguid. Eespool saime võrduse

$$c_{-3} = \frac{\gamma_1}{B_{-1}} - \frac{C_{-1}}{B_{-1}}c_{-2} - \frac{D_{-1}}{B_{-1}}c_{-1}.$$

Kordajate ξ_i vahelkorras on rajatingimustes vabaliikme γ_1 asemel 0, seepärast

$$\xi_{-3} = -\frac{C_{-1}}{B_{-1}}\xi_{-2} - \frac{D_{-1}}{B_{-1}}\xi_{-1}.$$

Arvestades hiljuti leitud $B_{-1} = \frac{1}{6}$, $C_{-1} = \frac{4}{6}$, $D_{-1} = \frac{1}{6}$, saame

$$\xi_{-3} = -4\xi_{-2} - \xi_{-1}.$$

Sellest

$$|\xi_{-3}| \leq 5 \max\{|\xi_{-2}|, |\xi_{-1}|\} = O(h^2).$$

Niisiis oleme saanud, et $\xi_i = O(h^2)$, $i = -3, \dots, n-1$, seepärast $\|\bar{u}_n - u_n\|_\infty = O(h^2)$ ja $\|u_n - u\|_\infty = O(h^2)$.

Ülesanne 19. Näidata rajatingimustel 1) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 > 0$; 2) $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 < 0$ diagonaali domineerimise võrratuse rahuldatust süsteemi (7) esimeses võrrandis ja ξ_{-3} hinnangut, kui h on küllalt väike.

Sõnastame tehtu kokkuvõtvalt.

Teoreem. Olgu rajaülesandel (1),(2) lahend $u \in C^4[a, b]$ ning täidetud punktis 1 toodud eeldused, mis tagavad lahendi ühesuse. Olgu lõigul $[a, b]$ jaotus Δ ühtlane sammuga h . Siis küllalt väikese h korral on olemas parajasti üks tingimustega (3) nääratud splain $u_n \in S_{\Delta}^{3,1}$. Splaini u_n kordajad normaliseeritud B -splainide abil tehtud arendises määratakse kolmediagonaalsest süsteemist (5), mille maatriks on küllalt väikese h korral ridade kaupa domineeriva diagonaaliga. Leiab aset koondumus $u_n \rightarrow u$ ruumis $C[a, b]$ koonduvuskiirust iseloomustava hinnanguga $\|u_n - u\|_{C[a, b]} \leq \text{const} \cdot h^2$.

§12. Integraalvõrrandite lahendamine splineidega kollokatsioonimeetodil

Integraalvõrrandeid saab praktikas lahendada peaaegu eranditult ainult ligikaudselt. Üks põhilisi meetodeid selleks on kollokatsioonimeetod.

1. Splaine kasutava kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, s) u(s) ds + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

kus $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\mathcal{K}: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on antud, funktsioon $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on otsitav. Funktsiooni $\mathcal{K}$ nimetatakse tuumaks, f vabaliikmeks. Võrrand (1) on Fredholmi II liiki integraalvõrrand. Edaspidi eeldame, et võrrandil (1) on olemas ühene lahend $u \in C[a, b]$.

1.1 Lineaarsplineide kasutamine

Olgu valitud võrk $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, lähislahendiks otsime $u_n \in S_{\Delta_n}^{1,1}$. Teame, et $\dim S_{\Delta_n}^{1,1} = n + 1$, seepärast peaks u_n määramiseks olema $n + 1$ tingimust. Võtame $n + 1$ kollokatsioonitingimust

$$u_n(x_i) = \int_a^b \mathcal{K}(x_i, s) u_n(s) ds + f(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad (2)$$

s.t. nõuame, et u_n rahuldaks integraalvõrrandit võrgu punktides, mitte kõikjal terves lõigus $[a, b]$. Hiljem näeme, et sellest piisab. Kasutame tähistusi $S_i = u_n(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, teame eelnevast, et

$$u_n(x) = S_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + S_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = (\text{Lagrange'i valem})$$

$$= S_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + S_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

kus $h_i = x_i - x_{i-1}$. Kollokatsioonitingimused (2) on kirjutatavad

$$S_i = \int_a^b \mathcal{K}(x_i, s) u_n(s) ds + f(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad (3)$$

milles teisendame eraldi integraali. Selles saame

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{K}(x_i, s) u_n(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) u_n(s) ds = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) \left(S_{j-1} \frac{x_j - s}{h_j} + S_j \frac{s - x_{j-1}}{h_j} \right) ds = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) \frac{x_j - s}{h_j} ds \right) S_{j-1} + \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) \frac{s - x_{j-1}}{h_j} ds \right) S_j \right). \end{aligned}$$

Kui tähistame

$$a_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) \frac{x_j - s}{h_j} ds, \quad b_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) \frac{s - x_{j-1}}{h_j} ds$$

ja $f_i = f(x_i)$, siis on kollokatsioonitingimused (3) kirjutatavad

$$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} S_{j-1} + \sum_{j=1}^n b_{ij} S_j + f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (4)$$

mis on lineaarne süsteem kordajate $S_0, \dots, S_n$ määramiseks.

Ülesanne 20. Süsteem (4) maatrikskuju on $S = AS + g$, kus $S = (S_0, \dots, S_n)^T$, $g = (f_0, \dots, f_n)^T$. Kirjutada välja maatriks A arvude a_{ij} ja b_{ij} kaudu.

Kollokatsioonimeetodis tekivad loomulikud küsimused: kas süsteem (4) on (üheselt) lahenduv, kas $u_n \rightarrow u$, kui $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i \rightarrow 0$? Enne selle juurde asumist formaliseerime probleemi. Defineerime integraaloperaatori $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ võrdusega

$$(Ku)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, s) u(s) ds, \quad x \in [a, b],$$

milleks piisab näiteks funktsiooni $\mathcal{K}$ pidevusest. Võrrandi (1) võib siis kirjutada

$$u = Ku + f, \quad (5)$$

seejuures K on lineaarne ja pidev, s.t. $K \in \mathcal{L}(C[a, b], C[a, b])$. Defineerime operaatori $P_{\Delta_n}: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, mis igale funktsioonile $u \in C[a, b]$ seab vastavusse $P_{\Delta_n}u \in S_{\Delta_n}^{1,1}$ nii, et $(P_{\Delta_n}u)(x_i) = u(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, s.t. funktsioonile u seatakse vastavusse seda võrgu sõlmedes interpoleeriv linearspline. Seega

$$(P_{\Delta_n}u)(x) = u(x_{i-1})\frac{x_i - x}{h_i} + u(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

On selge, et $P_{\Delta_n}(P_{\Delta_n}u) = P_{\Delta_n}u$ ehk $P_{\Delta_n}^2 = P_{\Delta_n}$, mis tähendab, et P_{Δ_n} on projektor, seejuures lineaarne ja pidev. Näeme, et $P_{\Delta_n}u = 0$ parajasti siis, kui $u(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$: kui $u(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, siis $P_{\Delta_n}u$ avaldise põhjal $P_{\Delta_n}u = 0$; kui aga $P_{\Delta_n}u = 0$ ehk tegemist on kõikjal nulliga võrduva linearsplainiga, siis on ka splinei väärtused sõlmedes võrdsed nulliga ehk $u(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Kollokatsioonitingimused (2) võib kirjutada

$$u_n(x_i) - (Ku_n)(x_i) - f(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

mis on samaväärne sellega, et

$$P_{\Delta_n}(u_n - Ku_n - f) = 0$$

ehk võrdust $P_{\Delta_n}u_n = u_n$ arvestades

$$u_n = P_{\Delta_n}Ku_n + P_{\Delta_n}f. \quad (6)$$

1.2 Kuupsplineide kasutamine

Lisaks antud võrrandile (1) on valitud võrk $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, lähilahendina otsime kuupsplaine $u_n \in S_{\Delta_n}^{3,1}$. Nõuame kollokatsioonitingimuste (2) täidetust. Kuna $\dim S_{\Delta_n}^{3,1} = n + 3$, siis on veel vaja kahte tingimust, milleks võtame rajatingimused (IV):

$$\begin{aligned} u_n'''(x_1 - 0) &= u_n'''(x_1 + 0), \\ u_n'''(x_{n-1} - 0) &= u_n'''(x_{n-1} + 0). \end{aligned}$$

Olgu nüüd $P_{\Delta_n}: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ operaator, mis igale funktsioonile $u \in C[a, b]$ seab vastavusse $P_{\Delta_n}u \in S_{\Delta_n}^{3,1}$ nii, et oleks rahuldatud interpolatsioonitingimused võrgu sõlmedes ja $P_{\Delta_n}u$ rahuldaks rajatingimusi (IV). Teame, et sellega on interpoleeriv kuupspline üheselt määratud. Operaator P_{Δ_n} on siingi pidev lineaarne

projektor ruumis $C[a, b]$ ning $P_{\Delta_n} u = 0$ parajasti siis, kui $u(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Seepärast määratakse $u_n \in S_{\Delta_n}^{3,1}$ võrrandiga (6), kuigi linearsplainidega võrreldes on siin sisu teine, sest projektorid P_{Δ_n} on erinevad ja ka otsitavad lahendid on erinevad.

Alati on oluline splaini esituse valik. Kasutame siin splaini väärtusi $S_i = u_n(x_i)$ ja teisi momente $M_i = u_n''(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Varasemalt on teada splaini esitus nende kaudu:

$$u_n(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Sarnaselt linearsplainide juhuga kirjutame kollokatsioonitingimused (3) võrranditena

$$S_i = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathcal{K}(x_i, s) u_n(s) ds + f_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (7)$$

Siin igas integraalis tuleb kasutada u_n esitust osalõiguses $[x_{j-1}, x_j]$, mis sisaldab S_{j-1} , S_j , M_{j-1} , M_j . Lisaks paneme kirja kuupsplaini sisevõrrandid ja kaks (IV) tüüpi rajatingimust, mis on

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_1 - M_0}{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{h_2}, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{M_{n-1} - M_{n-2}}{h_{n-1}} = \frac{M_n - M_{n-1}}{h_n}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Süsteemis (7), (8) on $2n+2$ võrrandit ja $2n+2$ tundmatut $S_0, \dots, S_n$, $M_0, \dots, M_n$. Kui süsteem on lahendatud, saame igas osalõiguses kuupsplaini leida eespool toodud esituse abil.

Vaatleme antud integraalvõrrandi (1) ja seega fikseeritud lõigu $[a, b]$ korral võrkude jada Δ_n : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, kus $n \rightarrow \infty$ nii, et seejuures $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. Võrgu sisesõlmed $x_1, \dots, x_{n-1}$ sõltuvad arvust n ja protsessis $n \rightarrow \infty$ nad ei jää muutumatuks. Iga jaotuse Δ_n korral võime püstitada kollokatsiooniülesande, kus lähislahend on lineaar- või kuupsplain. Eeldame, et integraalvõrrandil (1) on ühene lahend u . Lähislahend u_n määratakse võrrandist (6), mis on samaväärne võrrandisüsteemiga. Võib küsida, kas (6) on

(üheselt) lahenduv? Kas $u_n \rightarrow u$, kui $n \rightarrow \infty$? Nendele küsimustele anname järgnevas vastuse ja arendame selleks suhteliselt üldist teooriat operaatorvõrrandite kohta.

2. Klassikaline projektsioonimeetodite koonduvusteoreem

Olgu E Banachi ruum, antud olgu $K \in \mathcal{L}(E, E)$, $f \in E$. Vaatleme II liiki operaatorvõrrandit

$$u = Ku + f, \quad (9)$$

kus $u \in E$ on otsitav. Eeldame veel, et on antud projektorite jada P_n , s.t. $P_n \in \mathcal{L}(E, E)$, $P_n^2 = P_n$, $n = 1, 2, \dots$. Moodustame lähisvõrrandid

$$u_n = P_n Ku_n + P_n f, \quad (10)$$

kus $u_n \in E$ on otsitav. Selliselt võrrandi (9) lahendamist nimetatakse projektsioonimeetodiks.

Teoreem (klassikaline projektsioonimeetodite koonduvusteoreem). *Eeldame, et K on kompaktne; võrdusest $u = Ku$ järeldub, et $u = 0$; $P_n \rightarrow I$ punktiviisi (s.t. $P_n u \rightarrow u$ iga $u \in E$ korral), kui $n \rightarrow \infty$. Siis*

- 1) võrrandil (9) on parajasti üks lahend $u^* \in E$;
- 2) leidub n_0 nii, et iga $n \geq n_0$ korral on võrrandil (10) parajasti üks lahend $u_n^* \in E$;
- 3) $u_n^* \rightarrow u^*$, kui $n \rightarrow \infty$;
- 4) leiduvad arvud $c_1, c_2 > 0$ nii, et

$$c_1 \|P_n u^* - u^*\| \leq \|u_n^* - u^*\| \leq c_2 \|P_n u^* - u^*\|.$$

Enne tõestuse esitamist meenutame mõnda teoreemi sõnastuses esinevat mõistet. Operaatorit $K: E \rightarrow E$ nimetatakse kompaktseks, kui iga tõkestatud hulga $X \subset E$ korral KX on suhteliselt kompaktne. See on samaväärne sellega, et $KB(0, 1)$ on suhteliselt kompaktne, siin $B(0, 1) = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$. Operaatori K kompaktsus on veel samaväärne sellega, et kui jada u_n on tõkestatud, siis Ku_n on kompaktne jada. Hulk X on suhteliselt kompaktne, kui igast hulga X elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada, s.t. kui $u_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, siis eksisteerivad $N' \subset \mathbb{N}$ ja $u \in E$ nii, et $u_n \rightarrow u$, $n \in N'$. Jada u_n , $n \in \mathbb{N}$, on kompaktne, kui iga $N' \subset \mathbb{N}$ korral eksisteerivad $N'' \subset N'$ ja $u \in E$ nii, et $u_n \rightarrow u$, $n \in N''$.

Teoreemi tõestus. 1) Selle osa väide järeldeb Fredholmi alternatiivist, mis on järgmine. Teist liiki võrrandis (9), kui K on kompaktne, leiab aset parajasti üks kahest teineteist välistavast võimalusest:

a) võrrandil $u = Ku$ on olemas mittetriviaalne lahend ($I - K$ ei ole injektiivne);

b) võrrandil (9) on iga $f \in E$ korral olemas lahend ($I - K$ on sürjektiivne).

Teoreemis tehtud eeldusel, et $I - K$ on injektiivne, võimalus a) välistatakse, seega leiab aset b). Lahendi ühesus tuleb $I - K$ injektiivsusest: kui $u = Ku + f$ ja $v = Kv + f$, siis $u - v = K(u - v)$, millest $u - v = 0$ ehk $u = v$.

2) Osas 1) nägime, et iga $f \in E$ korral on olemas parajasti üks $u \in E$ nii, et $u = Ku + f$ ehk $(I - K)u = f$. Seega on $I - K: E \rightarrow E$ bijektsioon. On olemas teoreem pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest: kui $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, E ja F on Banachi ruumid, eksisteerib A^{-1} (siis $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$) ja $\|A^{-1}\|\|B\| < 1$, siis eksisteerib $(A + B)^{-1}$ (muidugi $(A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$) ja

$$\|(A + B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|B\|}.$$

Rakendame seda siin järgmises olukorras. Olgu $A = I - K$, soovime saada, et $A + B = I - P_n K$, seega võtame $B = (I - P_n K) - A = (I - P_n K) - (I - K) = K - P_n K$. Näitame, et $\|K - P_n K\| \rightarrow 0$. Oletame vastuväiteliselt, et see ei kehti. Siis on olemas osajada indekseid hulgaga $N' \subset \mathbb{N}$ ja $\delta > 0$ nii, et $\|K - P_n K\| \geq \delta$, $n \in N'$. Operaatori normi mõiste kohaselt $\|K - P_n K\| = \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\|=1}} \|(K - P_n K)u\|$. Supreemumile saab minna kuitahes lähedale,

seega on olemas $u_n \in E$, $\|u_n\| = 1$, nii, et $\|K - P_n K\| \leq \|(K - P_n K)u_n\| + \frac{1}{n}$. Siis

$\|(K - P_n K)u_n\| \geq \|K - P_n K\| - \frac{1}{n} \geq \delta - \frac{1}{n} \geq \frac{\delta}{2}$, kui $n \in N'$, n suur. Jada u_n on tõkestatud, K on kompaktne, seega Ku_n on kompaktne ja seetõttu eksisteerivad $N'' \subset N'$ ja $u \in E$ nii, et $Ku_n \rightarrow u$, $n \in N''$. Hindame nüüd

$$\begin{aligned} \|(K - P_n K)u_n\| &= \|Ku_n - u - P_n Ku_n + P_n u + u - P_n u\| \leq \\ &\leq \|Ku_n - u\| + \|P_n(Ku_n - u)\| + \|P_n u - u\|. \end{aligned}$$

Siin näeme, et $\|P_n u - u\| \rightarrow 0$, $n \in \mathbb{N}$, eelduse tõttu. Lisaks $\|Ku_n - u\| \rightarrow 0$, kui $n \in N''$, $\|P_n(Ku_n - u)\| \leq \|P_n\|\|Ku_n - u\| \rightarrow 0$, kui $n \in N''$, sest $\|P_n\|$ on tõkestatud Banach–Steinhausi teoreemi põhjal (on koondumine $P_n u \rightarrow u$ iga $u \in E$ korral). Niisiis, $n \in N''$ korral $\|(K - P_n K)u_n\| \rightarrow 0$, mis on vastuolus sellega, et $\|(K - P_n K)u_n\| \geq \frac{\delta}{2}$, $n \in N'$ ja n on suur. Sellega on väide 2) tõestatud. Eespool toodud teoreem pööratavale lähedase operaatori pööratavusest andis ka hinnangu selle normile, mida nüüd kasutame. Nägime, et $\|K - P_n K\| \rightarrow 0$, s.t. on olemas

n_0 nii, et $n \geq n_0$ korral $\|(I - K)^{-1}\| \|K - P_n K\| \leq q < 1$ (mingi arvu q korral). Sellest saame hinnangu

$$\|(I - P_n K)^{-1}\| \leq \frac{\|(I - K)^{-1}\|}{1 - \|(I - K)^{-1}\| \|K - P_n K\|} \leq \frac{\|(I - K)^{-1}\|}{1 - q} = c_2,$$

kus võtsime kasutusele arvu $c_2 > 0$.

3) ja 4) Piisab tõestada 4), sest koondumisest $\|P_n u^* - u^*\| \rightarrow 0$ järeljub hinnangu 4) (selle parempoolse võrratuse) abil, et $\|u_n^* - u^*\| \rightarrow 0$ ehk $u_n^* \rightarrow u^*$. Tõestame kahepoolse võrratuse 4). Teisendades saame

$$\begin{aligned} (I - P_n K)(u_n^* - u^*) &= (I - P_n K)u_n^* - (I - P_n K)u^* = \\ &/ \text{ kasutame võrdust } (I - P_n K)u_n^* = P_n f, \text{ seejärel} \\ &\text{võrdust } (I - K)u^* = f \text{ ja } P_n f = P_n(I - K)u^* / \\ &= P_n(I - K)u^* - (I - P_n K)u^* = P_n u^* - u^*. \end{aligned}$$

Sellest tuleb $n \geq n_0$ korral

$$u_n^* - u^* = (I - P_n K)^{-1}(P_n u^* - u^*)$$

ja

$$\|u_n^* - u^*\| \leq \|(I - P_n K)^{-1}\| \|P_n u^* - u^*\| \leq c_2 \|P_n u^* - u^*\|.$$

Hinnangu 4) vasakpoolne võrratus saadakse järgmiselt. Eespool saadud võrdusest tuleb

$$\begin{aligned} \|P_n u^* - u^*\| &= \|(I - P_n K)(u_n^* - u^*)\| \leq \\ &\leq (1 + \|P_n\| \|K\|) \|u_n^* - u^*\| \leq \bar{c} \|u_n^* - u^*\| \\ &/ \text{ eespool nägime, et } \|P_n\| \text{ on tõkestatud} / \end{aligned}$$

ning tarvitseb korrutada saadud võrratus arvuga $c_1 = \frac{1}{\bar{c}} > 0$. Sellega on teoreem tõestatud.

Ülesanne 21. Tõestada, et koonduvusteoreemi eeldustel eksisteerib c_3 nii, et

$$\|u_n - P_n u^*\| \leq c_3 \|K(P_n u^* - u^*)\|.$$

3. Linearsplineidega kollokatsioonimeetodi koondumine

Antud on integraalvõrrand $u(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, s)u(s) ds + f(x)$, $x \in [a, b]$. Valime siin ruumi $E = C[a, b]$, norm selles on $\|u\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$. Defineerime integraaloperaatori

$$(Ku)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, s)u(s) ds.$$

Kui näiteks $\mathcal{K}$ on pidev, siis $K: E \rightarrow E$ on kompaktne. Eeldame, et $u(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, s)u(s) ds$, $u \in C[a, b]$, korral $u(x) \equiv 0$. Olgu $f \in C[a, b]$.

Olgu antud lõigu $[a, b]$ jaotuste jada $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, kus $x_1, \dots, x_{n-1}$ sõltuvad arvust n . Defineerime $u \in C[a, b]$ korral $P_n u \in S_{\Delta_n}^{1,1}$ nii, et $(P_n u)(x_i) = u(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Kollokatsioonimeetod viis võrrandini

$$u_n = P_n K u_n + P_n f.$$

Koonduvusteoreemi üks eeldusi oli, et $P_n \rightarrow I$ ehk $\|P_n u - u\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ iga $u \in C[a, b]$ korral, kui $n \rightarrow \infty$. Meil on linearsplainidega interpoleerimisest teada, et $u \in C[a, b]$ korral $\|P_n u - u\|_{C[a,b]} \leq \omega(u)$. Kui $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ protsessis $n \rightarrow \infty$, siis $\omega(u) \rightarrow 0$, seepärast eeldamegi, et $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. Kirjutame nüüd välja, mida klassikaline operaatorvõrrandite koonduvusteoreem annab. Saame

- 1) integraalvõrrandil on parajasti üks lahend $u^* \in C[a, b]$;
- 2) küllalt suure n korral on kollokatsioonivõrrandil parajasti üks lahend $u_n^* \in S_{\Delta_n}^{1,1}$;
- 3) $\|u_n^* - u^*\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$;
- 4) leiab aset kahepoolne veahinnang $\|u_n^* - u^*\|_\infty \sim \|P_n u^* - u^*\|_\infty$,

seejuures $\|P_n u^* - u^*\|_\infty = O(h^2)$, kui $u^* \in C^2[a, b]$, $\|P_n u^* - u^*\|_\infty = O(h)$, kui $u^* \in W^{\infty,1}(a, b)$, $\|P_n u^* - u^*\|_\infty \sim h\omega((u^*)')$, kui $u^* \in C^1[a, b]$, $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$.

Lahendi sileduse üle saab otsustada integraalvõrrandi andmete põhjal. Kui näiteks $f \in C^2[a, b]$ ja $\mathcal{K}$ on muutuja x järgi kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis $u^* \in C^2[a, b]$.

4. Projektorite koondumine kuupsplainide juhul

Nägame klassikalises koonduvusteoreemis, et projektorite kohta eeldatakse punktiivsi koondumist $P_n \rightarrow I$. Käsitleme selles punktis selle tingimuse täidetust eraldi. Vaatluse all on jaotuste jada $\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. Defineerime projektorid P_n , mis funktsioonile $u \in C[a, b]$ seadsid vastavusse $P_n u \in S_{\Delta_n}^{3,1}$ nii, et $(P_n u)(x_i) = u(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, ja $(P_n u)'''(x_1 - 0) = (P_n u)'''(x_1 + 0)$,

$(P_n u)'''(x_{n-1} - 0) = (P_n u)'''(x_{n-1} + 0)$. Soovime saada, et $\|P_n u - u\|_\infty \rightarrow 0$ iga $u \in C[a, b]$ korral. Kasutame selle näitamiseks Banach–Steinhausi teoreemi, mille formuleering on järgmine.

Olgu $A, A_n \in \mathcal{L}(E, F)$, E, F Banachi ruumid. Siis $A_n u \rightarrow Au$ iga $u \in E$ korral parajasti siis, kui

a) $\|A_n\| \leq \text{const}$;

b) $A_n u \rightarrow Au$ iga $u \in D$ korral, kus D on põhihulk ruumis E , s.t. $\overline{\text{span } D} = E$.

Põhihulgaks olemise asemel võib nõuda, et D on kõikjal tihe ruumis E , s.t. $\overline{D} = E$.

Kuupsplineide korral saame tingimuse b) täidetud nii, et võtame kõikjal tihe-
daks hulgaks $C^4[a, b]$. Meil on teada, et iga $u \in C^4[a, b]$ korral $P_n u \rightarrow u$. Hulga $C^4[a, b]$ kõikjal tihedus ruumis $C[a, b]$ järeldub kasvõi sellest, et $P[a, b] \subset C^4[a, b]$ ja polünoomide hulga tihedus ruumis $C[a, b]$ on hästi teada. Tingimuse a) täidetuseks oleks vaja tõestada interpolatsiooniprojektorite P_n ühtlast tõkestatust ehk normide jada $\|P_n\|_{C[a, b] \rightarrow C[a, b]}$ tõkestatust. Kasutame kuupsplaini esitust $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral

$$(P_n u)(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \\ + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(S_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i},$$

kus $h_i = x_i - x_{i-1}$, $S_{i-1} = (P_n u)(x_{i-1}) = u(x_{i-1})$, $S_i = (P_n u)(x_i) = u(x_i)$, $M_{i-1} = (P_n u)''(x_{i-1})$, $M_i = (P_n u)''(x_i)$. Parameetrid M_i määratakse süsteemist

$$\begin{cases} \left(2 + \frac{h_1}{h_2} \right) M_1 + \left(1 - \frac{h_1}{h_2} \right) M_2 = d_1, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \left(1 - \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) M_{n-2} + \left(2 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) M_{n-1} = d_{n-1}, \end{cases} \quad (11)$$

seejuures

$$d_i = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_1 + h_{i+1}}, \\ M_0 = \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) M_1 - \frac{h_1}{h_2} M_2, \quad M_n = \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) M_{n-1} - \frac{h_n}{h_{n-1}} M_{n-2}.$$

Süsteemis (11) diagonaal domineerib ridade kaupa vahega 1, seepärast $\max_{1 \leq i \leq n-1} |M_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |d_i|$. Olgu $h_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} h_i$. Varem oli $h_{\max} = h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Arve d_i saame hinnata

$$|d_i| \leq 6 \frac{4 \max_{0 \leq i \leq n} |S_i|}{2h_{\min}^2} \leq 12 \frac{\|u\|_{C[a,b]}}{h_{\min}^2},$$

seejärel $\max_{1 \leq i \leq n-1} |M_i| \leq 12 \frac{\|u\|_{C[a,b]}}{2h_{\min}^2}$. Teeme eelduse, et $\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq \text{const}$, sel juhul nimetatakse jaotuste jada regulaarseks. Regulaarse jaotuste jada korral saame hinnata

$$|M_0| \leq \text{const} \max\{|M_1|, |M_2|\}, |M_n| \leq \text{const} \max\{|M_{n-2}|, |M_{n-1}|\},$$

seega $\max_{0 \leq i \leq n} |M_i| \leq \text{const} \frac{\|u\|_{C[a,b]}}{h_{\min}^2}$. Kasutades nüüd $P_n u$ esitust osalõikudel, saame

$$\|P_n u\|_{C[a,b]} \leq 4 \max_{0 \leq i \leq n} \left(|M_i| \frac{h_i^2}{6} \right) + 2\|u\|_{C[a,b]} \leq \text{const} \|u\|_{C[a,b]}.$$

5. Kuupsplainidega kollokatsioonimeetodi koondumine

Selles punktis vaatame, kuidas klassikalisest projektsioonimeetodite koonduvusteoreemist saadakse kuupsplainidega kollokatsioonimeetodi koondumine. Kasutame punktis 1 toodud tähistusi ja alapunktis 1.2 esitatud meetodit. Valime esialgu ruumi $E = C[a, b]$. Eeldame, et jaotuste jada Δ_n on regulaarne. Eelmises punktis näitasime, et siis $P_n u \rightarrow u$ ruumis $C[a, b]$ iga $u \in C[a, b]$ korral. Klassikalisest projektsioonimeetodite koonduvusteoreemist saame järgmise tulemuse.

Teoreem. *Olgu integraalvõrrandis (1) tuum $\mathcal{K}$ selline, et vastav integraaloperaator $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ on kompaktne; $f \in C[a, b]$; $u = Ku$, $u \in C[a, b]$, leiab aset ainult siis, kui $u = 0$; lõigu $[a, b]$ jaotuste jada Δ_n on regulaarne. Siis võib väita järgmist:*

- 1) võrrandil (1) on parajasti üks lahend $u^* \in C[a, b]$;
- 2) leidub n_0 nii, et $n \geq n_0$ korral on süsteem (7), (8) üheselt lahenduv ja see määrab kollokatsioonimeetodil saadud lahendi $u_n^* \in S_{\Delta_n}^{3,1}$;
- 3) $u_n^* \rightarrow u^*$ ruumis $C[a, b]$;
- 4) leiab aset kahepoolne veahinnang $\|u_n^* - u^*\| \sim \|P_n u^* - u^*\|$.

Kui $u^* \in C^k[a, b]$, $k = 1, 2, 3, 4$, siis $\|P_n u^* - u^*\| = O(h^k)$ ja seega ka $\|u_n^* - u^*\| = O(h^k)$. Sõnastatud väidetes kõik normid on ruumis $C[a, b]$.

Valime järgnevalt $E = C^2[a, b]$. On vaja, et oleks $K: C^2[a, b] \rightarrow C^2[a, b]$. Piisab, kui tuum $\mathcal{K}$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, sel juhul on integraaloperaator K kompaktne. Eeldustes on veel vaja, et $u = Ku$, $u \in C^2[a, b]$, korral $u = 0$, see on isegi nõrgem eeldus, kui ruumi $C[a, b]$ juhul, sest $C^2[a, b] \subset C[a, b]$. Kollokatsioonimeetodis on vaja, et $\|P_n u - u\|_{C^2[a, b]} \rightarrow 0$, kui $u \in C^2[a, b]$. Meenutame, et $\|u\|_{C^2[a, b]} = \|u\|_{C[a, b]} + \|u'\|_{C[a, b]} + \|u''\|_{C[a, b]}$. Ka siin kasutame Banach–Steinhausi teoreemi. Teame, et $u \in C^4[a, b]$ korral $\|P_n u - u\|_\infty \rightarrow 0$, $\|(P_n u)' - u'\|_\infty \rightarrow 0$, $\|(P_n u)'' - u''\|_\infty \rightarrow 0$, seega $\|P_n u - u\|_{C^2[a, b]} \rightarrow 0$. Ruum $C^4[a, b]$ on kõikjal tihe ruumis $C^2[a, b]$.

Ülesanne 22. Tõestada, et $\overline{P[a, b]} = C^2[a, b]$. Soovitus: tugineda sellele, et $\overline{P[a, b]} = C[a, b]$.

Banach–Steinhausi teoreemi kasutamiseks peame veel näitama, et $\|P_n u\|_{C^2[a, b]} \leq \leq \text{const} \|u\|_{C^2[a, b]}$ iga $u \in C^2[a, b]$ korral. Kasutame punkti 4 eeskujul $P_n u$ esitust splinei teiste momentide M_i ja väärtuste $u(x_i)$ abil. Nägime, et $\max_{1 \leq i \leq n-1} |M_i| \leq \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |d_i|$. Seejuures $d_i = 6u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ ning, et $u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{u''(\xi_i)}{2}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, siis $\max_{1 \leq i \leq n-1} |M_i| \leq 3\|u''\|_{C[a, b]}$. Lisaks saame hinnata

$$|M_0| \leq \text{const} \max\{|M_1|, |M_2|\}, |M_n| \leq \text{const} \max\{|M_{n-2}|, |M_{n-1}|\}$$

ning $\max_{0 \leq i \leq n} |M_i| \leq \text{const} \|u''\|_{C[a, b]}$. Märgime, et siin piisab jaotuste jadas sellest, et $\frac{h_1}{h_2}$ ja $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ oleksid tõkestatud. Splinei $P_n u$ esitust osalõiguse $[x_{i-1}, x_i]$ kasutades saame

$$\|P_n u\|_{C[a, b]} \leq \text{const} h_i^2 \|u''\|_{C[a, b]} + 2\|u\|_{C[a, b]} \leq \text{const} \|u\|_{C^2[a, b]}.$$

Leiame

$$\begin{aligned} (P_n u)'(x) = & -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} - \\ & - \frac{1}{h_i} \left(u_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) + \frac{1}{h_i} \left(u_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Sellest

$$\begin{aligned} \|(P_n u)'\|_{C[a, b]} & \leq \max_{0 \leq i \leq n} |M_i| \left(\frac{1}{2} h_i + \frac{1}{2} h_i + \frac{1}{6} h_i + \frac{1}{6} h_i \right) + \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right| \leq \\ & / \text{ kasutame seda, et } \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = u'(\eta_i), \eta_i \in (x_{i-1}, x_i) / \\ & \leq \text{const} \|u''\|_{C[a, b]} \cdot \frac{4}{3} h_{\max} + \|u'\|_{C[a, b]} \leq \text{const} \|u\|_{C^2[a, b]}. \end{aligned}$$

Leiame veel $(P_n u)''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$, millest

$$\|(P_n u)''\|_{C[a,b]} \leq \max_{0 \leq i \leq n} |M_i| \leq \text{const} \|u''\|_{C[a,b]} \leq \text{const} \|u\|_{C^2[a,b]}.$$

Sellega oleme saanud, et $\frac{h_1}{h_2}$ ja $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ tõkestatuse korral

$$\|(P_n u)\|_{C^2[a,b]} \leq \text{const} \|u\|_{C^2[a,b]}, \quad u \in C^2[a, b].$$

Vaatame, mida annab klassikaline projektsioonimeetodite koonduvusteoreem. Lisaks eespool toodud väidetele lahendi olemasolu ja ühesuse kohta (praegusel juhul $u^* \in C^2[a, b]$) saame koondumise kahepoolse veahinnanguga

$$\|u_n^* - u^*\|_{C^2[a,b]} \sim \|P_n u^* - u^*\|_{C^2[a,b]}.$$

Kui $u^* \in C^4[a, b]$, siis $\|P_n u^* - u^*\|_{C^2[a,b]} = O(h^2)$, millest järeldeb $\|u_n^* - u^*\|_{C^2[a,b]} = O(h^2)$ ning seega $\|u_n^* - u^*\|_{C[a,b]} = O(h^2)$, $\|(u_n^*)' - (u^*)'\|_{C[a,b]} = O(h^2)$, $\|(u_n^*)'' - (u^*)''\|_{C[a,b]} = O(h^2)$. Hoiatus: üldisest teooriast rakendatuna ruumis $E = C^2[a, b]$ ei järeldeb, et kui $u^* \in C^4[a, b]$, siis $\|u_n^* - u^*\|_{C[a,b]} = O(h^4)$ (u_n^* ei ole interpoleeriv kuupsplain). Seejuures $u^* \in C^4[a, b]$ korral küll $\|P_n u^* - u^*\|_{C[a,b]} = O(h^4)$, sest $P_n u^*$ on interpoleeriv kuupsplain, ja $\|u_n^* - u^*\|_{C[a,b]} = O(h^4)$ järeldeb üldisest teooriast rakendatuna ruumis $E = C[a, b]$, kuigi seejuures tuleb teha mõneti rangemad eeldused: jaotuste jada on regulaarne ja $I - K$ on injektiivne ruumis $C[a, b]$.

Ülesanne 23. Urida kuupsplainidega kollokatsioonimeetodi koonduvust ruumis $C^1[a, b]$. Soovitus: kasutada splinei määramiseks esimesi momente $m_i = u_n'(x_i)$ ja väärtusi $S_i = u_n(x_i)$, siis ei ole vaja eeldada jaotuste jada regulaarsust.

§13. Ruutsplainidega histopoleerimine

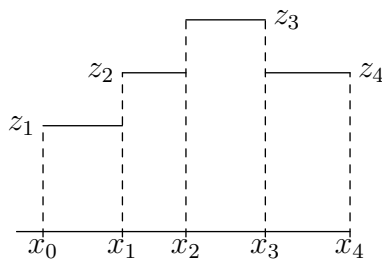
Histopoleerimisülesanne seisneb järgnevas. Antud on lõigu $[a, b]$ jaotus $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, arvud $z_1, \dots, z_n$, soovitakse leida funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = h_i z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

kus, nagu varemgi, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Võrdused (1) võib veel kirjutada

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

milles vasakud pooled on funktsiooni f keskmised väärtused osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$ ja need on niisiis histopoleerimisülesandes ette antud. Graafiliselt võib olukorda ette kujutada nii, et on antud histogramm,



võrdused (1) tähendavad, et funktsiooni f graafikualune pindala osalõikudel ühtiks histogrammi vastava tulba pindalaga. Võrdluseks meenutame, et interpoleerimisülesandes on antud funktsiooni väärtused võrgu sõlmedes ehk punktid (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, n$, ja interpolandi graafik peab neid punkte läbima. Märgime praktikat silmas pidades, et väga suur osa statistilisest informatsioonist on antud histogrammidena, mille aluseks on mingi reaalne sõltuvus ning seda võidakse soovida vähemalt ligikaudselt leida.

1. Histopoleerimisülesannete ja interpoleerimisülesannete vahekord

Olgu antud histopoleerimisandmestik $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja $z_1, \dots, z_n$. Histopolant $H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on selline, et

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} H(x) dx = z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Valime suvaliselt $f_0 \in \mathbb{R}$ ja moodustame $f_i = f_{i-1} + h_i z_i$, $i = 1, \dots, n$. Leiame interpolandi $I: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et $I(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Kui interpolant I on diferentseeruv, siis $H = I'$ on algselt antud histopoleerimisülesande lahend:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} H(x) dx &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} I'(x) dx = \frac{1}{h_i} I(x) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} = \\ &= \frac{1}{h_i} (I(x_i) - I(x_{i-1})) = \frac{1}{h_i} (f_i - f_{i-1}) = z_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Teistpidi, olgu antud interpolatsiooniandmestik, s.o. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $f_0, \dots, f_n$. Moodustame arvud $z_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$, $i = 1, \dots, n$. Leiame histopolandi

$H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et $\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} H(x) dx = z_i$, $i = 1, \dots, n$. Olgu $I(x) = f_0 + \int_{x_0}^x H(s) ds$.

Siis I on interpoleerimisülesande lahend:

$$\begin{aligned} I(x_0) &= f_0, \quad i \geq 1 \text{ korral } I(x_i) = f_0 + \int_{x_0}^{x_i} H(x) dx = \\ &= f_0 + \int_{x_0}^{x_1} H(x) dx + \dots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} H(x) dx = \\ &= f_0 + h_1 z_1 + \dots + h_i z_i = \\ &= f_0 + h_1 \frac{f_1 - f_0}{h_1} + \dots + h_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} = f_i. \end{aligned}$$

Nende kahe arutelu kokkuvõttes võib öelda, et histopoleerimis- ja interpoleerimisülesanded on vähemalt üldises plaanis vastastikku teineteisele taandatavad. Sellele vaatamata on enamasti otstarbekam lahendada otse seda ülesannet, mille jaoks on algandmestik antud, sest ühe ülesande andmestikult teisele ülemineku

nõuab täiendavaid arvutusi, samuti on vaja leida teise ülesande lahend kui uus funktsioon. Kui näiteks on vaja leida histopoleeriv ruutsplain, siis vastavas interpoleerimisülesandes leitakse interpolant $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ ning $S' \in S_{\Delta}^{2,1}$ on sobiv histopolant, kui rajatingimused on kooskõlas. Selline lähenemisviis on võimalik meie kursuses vaadeldud polünomiaalsete splainide korral, kus splainid on osalõikudel polünoomid. Kui aga käsitleda nn. ratsionaalsplaine, kus splainid on osalõikudel ratsionaalfunktsioonid (neid me ei vaatle selles kursuses), siis näiteks tuletised ja integraalid neist ei käitu sugugi sobivalt: kui arvutada näiteks tuletist või integraali ratsionaalfunktsioonist, mille lugejas ja nimetajas on ruutpolünoom, ei ole tulemus sugugi sobiva lihtsusega ratsionaalfunktsioon. Tuletis on küll ratsionaalfunktsioon, kus lugejas on kuuppolünoom ja nimetajas neljanda astme polünoom, kuid integraal kui algfunktsioon ei tarvitse olla ratsionaalfunktsioon.

Peatume veel lühidalt perioodilistel ülesannetel. Funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nimeatakse p -perioodiliseks (võime eeldada, et $p > 0$), kui $f(x+p) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Olgu antud funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ning $f(a) = f(b)$, olgu $p = b - a$. Siis võib funktsiooni f laiendada p -perioodiliseks funktsiooniks, defineerides $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) = f(x + kp)$, kus $k \in \mathbb{Z}$ on selline, et $x + kp \in [a, b]$. Kui räägime lõigul $[a, b]$ määratud perioodilisest interpolandist või histopolandist, siis peame silmas just seda laiendamist, mis on võimalik, kui funktsiooni väärtused punktides a ja b on võrdsed. Kui interpolant on perioodiline (ja diferentseeruv), siis on seda ka vastav histopolant, sest $f(x+p) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, annab, et $f'(x+p) = f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Kui histopolant on perioodiline, siis vastav interpolant ei pea olema perioodiline, sest eespool toodud tähistustes on interpolandi perioodilisuses nõue, et $f_0 = f_n$, mis tähendab, et $f_0 + h_1 z_1 + \dots + h_n z_n = f_0$ ehk $h_1 z_1 + \dots + h_n z_n = 0$ (või $\int_a^b H(x) dx = 0$), ja see tingimus ei tarvitse olla perioodilise histopolandi korral täidetud. Märgime, et suvalise algandmestiku korral (lõigu $[a, b]$ jaotus ja arvud z_i) on olemas mingisugune perioodiline histopolant (näeme, et selleks võib võtta ruutsplaini), interpolandi algandmestikul aga peab olema täidetud tingimus $f_0 = f_n$.

2. Ruutsplainidega histopoleerimisülesanne

Olgu antud lõigu $[a, b]$ jaotus $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Ruutsplain $S \in S_{\Delta}^{2,1}$ on igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ülimalt teise astme polünoom, mille esitamiseks on vaja kolme parameetrit. Nagu ikka splainide käsitlemisel, on oluline parameetrite valik ja splaini esitus nende kaudu. Märgime võrdluseks, et universaalne esitusvõimalus on B-splainide kui baasi kaudu, kuid spetsiifiliste ülesannete juures võib enamasti leida vähem tehnilisi probleeme tekitavaid viise. Praegu peame

silmas ruutsplainidega histopoleerimisülesannet, kus on antud $z_1, \dots, z_n$ ja nõutakse, et $S \in S_{\Delta}^{2,1}$ rahuldaks histopoleerimistingimusi (1), mille arv on n . Kuna $\dim S_{\Delta}^{2,1} = n + 2$, siis on vaja kahte lisatingimust, milleks võivad olla

$$(I) \quad S(a) = \alpha, \quad S(b) = \beta,$$

$$(II) \quad S'(a) = \alpha', \quad S'(b) = \beta',$$

$$(III) \quad S''(x_1 - 0) = S''(x_1 + 0), \quad S''(x_{n-1} - 0) = S''(x_{n-1} + 0),$$

$$(IV) \quad S(a) = S(b), \quad S'(a) = S'(b),$$

viimaseid neist nimetatakse perioodilisteks. Tähistame $S_i = S(x_i)$, $i = 0, \dots, n$,

$$\sigma_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx, \quad i = 1, \dots, n. \text{ Proovime esitada ruutsplaini } S \text{ osalõigul } [x_{i-1}, x_i]$$

parameetrite S_{i-1}, S_i ja σ_i kaudu. Otstarbekas on otsida ruutpolünoomi esitust $S(x) = a_i(x - x_{i-1})^2 + b_i(x_i - x)^2 + c_i$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, kus kordajad a_i, b_i ja c_i määratakse kolme tingimusega

$$S(x_{i-1}) = S_{i-1}, \quad S(x_i) = S_i, \quad \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = \sigma_i. \quad (2)$$

Tulemuseks saadakse

$$S(x) = \frac{S_{i-1} + 2S_i - 3\sigma_i}{h_i^2} (x - x_{i-1})^2 + \frac{2S_{i-1} + S_i - 3\sigma_i}{h_i^2} (x_i - x)^2 + 3\sigma_i - (S_{i-1} + S_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (3)$$

Ülesanne 24. Näidata, et esituse (3) korral on rahuldatud tingimused (2). Tuletada esitus (3), määrates tingimuste (2) abil kordajad a_i, b_i, c_i .

Esitus (3) tagab tingimuste (2) täidetuse tõttu, et $S \in C[a, b]$. Suvaliselt valitud S_i , $i = 0, \dots, n$, ja σ_i , $i = 1, \dots, n$, korral ei tarvitse S' olla pidev võrgu Δ sisesõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Ülesanne 25. Näidata, et tingimused $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$, $i = 1, \dots, n - 1$, annavad võrdused

$$\lambda_i S_{i-1} + 2S_i + \mu_i S_{i+1} = 3(\lambda_i \sigma_i + \mu_i \sigma_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (4)$$

$$\text{kus } \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}.$$

Võrduseid (4) nimetatakse ruutsplaini sisevõrranditeks esituse (3) puhul.

Olgu vaja leida $S \in S_{\Delta}^{2,1}$, mis rahuldab histopolatsioonitingimusi (1) ja rajatingimusi (I). Siis esituse (3) kasutamisel võtame $\sigma_i = z_i$, $i = 1, \dots, n$, ja splaini väärtused sõlmedes S_i määratakse süsteemist

$$\begin{cases} S_0 = \alpha, \\ \lambda_i S_{i-1} + 2S_i + \mu_i S_{i+1} = 3(\lambda_i z_i + \mu_i z_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1, \\ S_n = \beta. \end{cases}$$

Ülesanne 26. Esitada arve S_i määravad süsteemid rajatingimuste (II) ja (III) korral.

Ülesande lahendamise järel näeme, et kõigil juhtudel on arve S_i määrav süsteem kolmediagonaalne ning peadiagonaal domineerib ridade kaupa (rajatingimuste (III) korral tuleb küll võrrandeid veel teisendada).

Peatume veel perioodiliste tingimuste (IV) kasutamisel. Võrdus $S(a) = S(b)$ annab, et $S_0 = S_n$, millega jääb n tundmatut $S_1, \dots, S_n$. Lisaks $n-1$ sisevõrrandile paneme kirja võrduse $S'(a) = S'(b)$. See on esitatav

$$\lambda_n S_{n-1} + 2S_n + \mu_n S_1 = 3(\mu_n z_1 + \lambda_n z_n), \quad (5)$$

$$\text{kus } \mu_n = \frac{h_n}{h_n + h_1}, \lambda_n = \frac{h_1}{h_n + h_1}.$$

Ülesanne 27. Tuletada võrrand (5) võrdusest $S'(a) = S'(b)$, lähtudes esitusest (3).

Vastav süsteem tuleb

$$\begin{cases} 2S_1 + \mu_1 S_2 + \lambda_1 S_n = 3(\lambda_1 z_1 + \mu_1 z_2), \\ \lambda_i S_{i-1} + 2S_i + \mu_i S_{i+1} = 3(\lambda_i z_i + \mu_i z_{i+1}), & i = 2, \dots, n-1, \\ \mu_n S_1 + \lambda_n S_{n-1} + 2S_n = 3(\mu_n z_1 + \lambda_n z_n). \end{cases}$$

See ei ole enam kolmediagonaalne, kuid peadiagonaal domineerib ridade kaupa.

Perioodiliste rajatingimuste (IV) kasutamisel saadav histopoleeriv ruutsplain $S \in S_{\Delta}^{2,1}$ tuleb perioodiline. Nagu eespool selgitasime, tähendab see võrduse $S(a) = S(b)$ tõttu, et S on laiendatav määratuks tervel reaalsirgel, kuid $S'(a) = S'(b)$ tagab ka selle, et splaini S laiend on kõikjal pidevalt diferentseeruv. Kui moodustame vastava interpolatsiooniülesande, siis võrdus $f_0 = f_n$ ei tarvitse olla täidetud. Sellele vaatamata võime leida $\bar{S} \in S_{\Delta}^{3,1}$, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\bar{S}(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, ja rajatingimusi $\bar{S}'(a) = \bar{S}'(b)$, $\bar{S}''(a) = \bar{S}''(b)$. Splain $\bar{S}$ ei pea tulema perioodiline, kuid histopoleeriv $\bar{S}' = S'$ tuleb perioodiline, sest $S(a) = S(b)$, $S'(a) = S'(b)$.

Olgu antud lõigu $[a, b]$ jaotus Δ , nagu oleme siiani vaadelnud, ja funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Võtame

$$z_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx, \quad i = 1, \dots, n,$$

(seda eeldusel, et integraalid eksisteerivad). Võime leida histopoleeriva ruutsplaini

$S \in S_{\Delta}^{2,1}$, mille korral $\int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = h_i z_i$, $i = 1, \dots, n$, ning on rahuldatud kaks

rajatingimust. Loomulik on uurida $\|S - f\|_{\infty}$, $\|S' - f'\|_{\infty}$, $\|S'' - f''\|_{\infty}$ hinnanguid, kui f on mingitest funktsioonide klassidest. See on eraldi tehtav, kuid teine

võimalus on moodustada $g(x) = g_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds$, $x \in [a, b]$ ($g_0 \in \mathbb{R}$ on suvaline),

võtta interpolatsiooniandmestik $g_i = g_{i-1} + h_i z_i$, $i = 1, \dots, n$, ning leida vastavatel rajatingimustel interpoleeriv kuupsplain $\bar{S} \in S_{\Delta}^{3,1}$. Siis $\|S - f\|_{\infty} = \|\bar{S}' - g'\|_{\infty}$, $\|S' - f'\|_{\infty} = \|\bar{S}'' - g''\|_{\infty}$, $\|S'' - f''\|_{\infty} = \|\bar{S}''' - g'''\|_{\infty}$, mille jaoks olid meil eespool hinnangud teada sõltuvalt g kuulumisest mingisse funktsioonide klassi. Seejuures kui näiteks $f \in C^k[a, b]$, siis $g \in C^{k+1}[a, b]$, samuti $f \in W^{\infty,k}(a, b)$ korral $g \in W^{\infty,k+1}(a, b)$.