

Yplanid

2021/22 vewadsemester

Tissejohatus

Mõlematane mõningaid tulemusi funktsioonide läihendamisest polünoomidega.

Oige antud reasarvud $x_i, i=0, \dots, n$, kus $x_i \neq x_j$, mitte $i \neq j$, ning $f_i, i=0, \dots, n$. Töös on olemas parajasti üks ülimalt n astme polünoom $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$, kus c_0, \dots, c_n on realsarvud, mitte, et $P_n(x_i) = f_i, i=0, \dots, n$. Selle nn. interpoleeriva polünoomi saab leida näiteks

Lagrange'i või Newtoni valemi abil, kumbki näals $O(n^2)$ aritmeetilist teljet, mille all peetakse silmas selkõige korrektumisi ja jäganisi. Antud funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korral, kui $x_i \in [a, b], i=0, \dots, n$, on seejuures olemas parajasti üks interpoleeriva polünoom $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ mitte, et $P_n(x_i) = f(x_i), i=0, \dots, n$.

Loomelik on näiteks pideva funktsiooni f korral viida, kuidas käitub $\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - f(x)| = \|P_n - f\|_{C[a, b]}$, mitte $n \rightarrow \infty$? Sel juhul muidugi $x_i = x_n$ ehk iga n korral on oma interpolaatsioonisõlmede komplekt. Äldisemal

jubul, kui f ei tarvitse olla pidav, vaid muudat $\sup_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - f(x)|$ käitumist.

Weierstrass'i teoreem väidab, et igat pidavat funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ saab ühtlase normis vahetas hääli läheneda polünoomidega, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas polünoom P nii, et $\|P - f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Tähistades $P_n = \{P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$

— vähigi ülmalt n astme polünoomide hulg, siis antud $f \in C[a, b]$ ja antud n korral on olemas parajasti üks polünoom $\bar{P}_n \in P_n$ nii, et

$$\|\bar{P}_n - f\|_{C[a, b]} = \min_{P \in P_n} \|P - f\|_{C[a, b]},$$

sedas polünoomi \bar{P}_n nimetatakse perimaks ühtlase lähenuse polünoomides funktsioonile f .

Weierstrass'i teoreemile tuginedes vält väite,

et $\|\bar{P}_n - f\|_{C[a, b]} \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. Lisaks leiald

on antud Tschebõšovi alternans, mille kohaselt

on olemas punktid $\xi_i \in [a, b]$, $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n+1}$

nii, et $\bar{P}_n(\xi_i) - f(\xi_i) = (-1)^i \delta \|\bar{P}_n - f\|_{C[a, b]}$, kus

$\delta = 1$ vki $\delta = -1$. Tõdest aga järeltulb, et on

olemas punktid x_i , $i=0, \dots, n$, nii, et $\xi_i < x_i < \xi_{i+1}$

ja $\bar{P}_n(x_i) = f(x_i)$, mistõttu perimad ühtlase

lähenuse polünoomid on ühtlasi funktsiooni f interpoleerivad polünoomid mingites

lõigu $[a, b]$ punktides. Näärile määritist, et parimaid ühtlase lähenduse polinoome si saa kaugeltki mitte lihtsalt leida kui näiteks interpolatsiooni polinoome Lagrange'i või Newtoni valentil.

Äärmiselt heidutav polinoomidega ühtlase lähendamisel on järgmine Faberi teoreem: igasuguse sõlmede süsteemi $x_{ni} \in [a, b]$, $n = 0, 1, \dots, i = 0, \dots, n$, korral on sellemas funktsioon $f \in C[a, b]$ nii, et sõlmedega x_{ni} interpolatsiooni polinoomide jada P_n (siis $P_n \in P_n$ ja $P_n(x_{ni}) = f(x_{ni}), n = 0, 1, \dots, i = 0, \dots, n$) korral $\|P_n - f\|_{C[a, b]} \rightarrow \infty$, kui $n \rightarrow \infty$. Näiteks lõigus $[-1, 1]$ punktide $x_{00} = 0, x_{ni} = -1 + i \frac{2}{n}, n \geq 1, i = 0, \dots, n$, (mida tavaliselt nimetatakse ühtlaars võrgus) korral sõltib funktsioon $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$. Ühtlase võrgu korral ei paranda olukorda funktsiooni f suurem siledus (pidavate teletiste selleosal):

funktsioonil $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [-1, 1]$, (sedas nimetatakse C. Runge näiteks) on sellemas kõik tuletised, mida meagi $\|P_n - f\|_{C[a, b]} \rightarrow \infty$, kui $n \rightarrow \infty$. Selline polinoomidega interpolatsiooniprotsessi praktilistest rakenedustest

sobinatu käitumine oli tugevasti motiveeriv asjade plainide teooriaarendamiseks.

Esimedes spetsiaalselt plainide pühen-datud töös loetakse ühte I. J. Thoenbergi 1946. aastal avaldatud artiklit. Plainid kui matemaatilised objektid esinesid muidugi juba varem ja neid näeme esimese näites. Plainide teooria intensiivsem areng algas 1960. aastate alguses. Esaldi väärilis märimist J. C. Holladay artikkel aastast 1957, mis oli lähtekohaks plainide vaidlusoontsooni arengus.

Järgnevas materjali esities peame silmas luomelikuu võimalust, et hulgjal ei ole varasemat kokkupuudet plainide teooriaga. Idyll aga eeldame, et tuttavad on mitmed põhimõisted ja tulenedud matemaatilisest analüüsist, lineaarselgebast, erivetusmeetodi-test ning mõningal märal funktsionaalanalüüsist.

§1. Splaini mõiste

Aleestame enim kasutatavatest splainidest. Olgu antud võik Δ : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Definitsioon. Funktsiooni $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse n astme spline'i defektiga k , kui

$$1) S \in P^m[x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n,$$

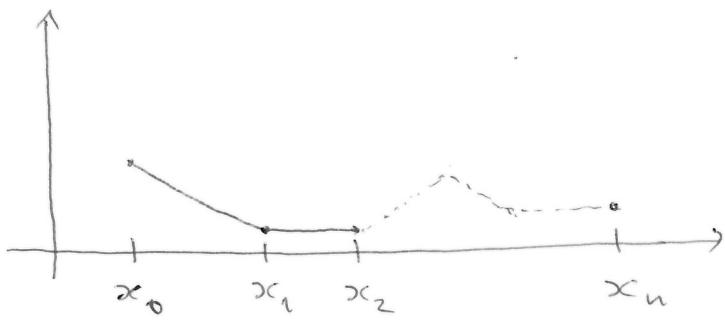
$$2) S \in C^{m-k}[a, b].$$

Kui $P^m[x_{i-1}, x_i]$ on võõrki ülimalt n astme polünoomide hulk ning need polünoome vahelduvuse määratuna lõigus $[x_{i-1}, x_i]$. Siiski $C^k[a, b]$ koosneb funktsioonide $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, milleks on $f^{(k)} \in C^0[a, b]$, sejannes $C^0[a, b] = C[a, b]$.

Punkte x_0, \dots, x_n nimetatakse spline'i võlmedeks, punkte x_1, \dots, x_{n-1} spline'i sisevõlmedeks.

Definitsioonis koodud funktsioonide hulka tähistatakse $S^{m,k}$, $S_\Delta^{m,k}$ või $S_\Delta^{m,k}[a, b]$.

Näide 1. Olgu $m=1$, $k=1$, siis $S \in S^{1,1}$. Siit $S \in P^1[x_{i-1}, x_i]$, mis tõsi on polünoom ja tema graafik on lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ on singulaarne. Need singulaarsed punktid tingimuse $S \in C[a, b]$ tõttu olema ühendatud nii, et S graafikul tervikuna ei ole katkeuspunkte ega graafik on pidev murdja.

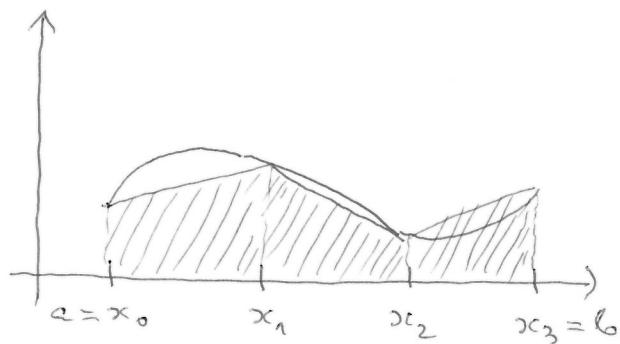


Sellist splaiini nimetatakse lineaarsplaine.

Ta erineb (mõningal määral ilmetatult) määratud integraali arvutamisel trapezivalemiga, kus integraali täpse väärtuse asemel kasutatakse integraali lineaarsplainist ehe

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b S(x) dx + R(f).$$

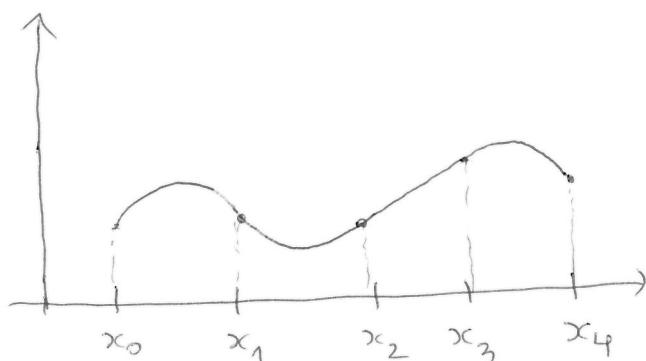
Teda saab piltlikult näha näiteks järgmisel joonisel, kus kõverjoon on funktsiooni f graafide.



Taolisi pidenvaid murdjooni erineb tihiti andmete graafilisel esitamisel, mida kasutati aamu enne splainide teooriaarendamist.

Näide 2. Olgu $m=2, k=1$, siis $S \in S^{3,1}$. Telles näites $S \in P^2[x_{i-1}, x_i]$, mis tähendab, et õgas osalõigus on splaini S graafik singulaarne või multparabol.

Tingimus $S \in C^1[a,b]$ tähendab, et graafiku osad on siseosõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} ühendatud nii, et splaini S tuletus oleks pidev, mis ei luba S graafiku punktaja hüpelist muutumist. Nõimalik pilt on toodud järgmisel joonisel.



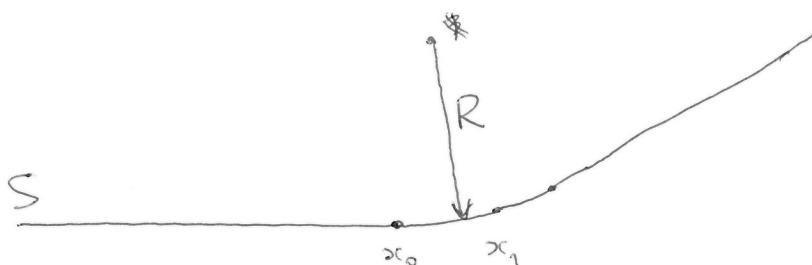
Telles näites toodud splaine nimetatakse multsplainideks.

Näide 3. Olgu $m=3, k=2$, siis $S \in S^{3,1}$ ning vaadeldavaid splaine nimetatakse kuupsplainideks, seit tingimus $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$ tähendab, et splainil S võib olla osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ kuni 3. astme polinoom. Nõue $S \in C^2[a,b]$ tähendab, et splainil S peab olema lõigus $[a,b]$ pidev teist järmu tuletus. Kui võtta elastne varras ja kinnitada see mingis suurus punutides nege nähe allpool oleval joonisel, siis see varras on kuup-splaini vajoline.



Taotise joonestamisvahendi nimet spain ongi sel-
med üldnimi funktsioonide klassile.

Raudteed, samuti maanteed ei saa shitsada
täist ringjana, paratamatult erinevalt muuid.
Jõuwis mõjub liinivalle rehale massiga mõõud
 $F = \frac{mv^2}{R}$, kus v on liikumiskiirus ja R kõverus-
radius, näiteks ringjoont mõõda liikumisel
on R ringjoone raadius. Täist vahlatu on
singelt teosalt kurvi alustades minna edasi
mõõda ringjoone kaart, sest siis tervil hetketi-
selt jõud, mis viiskab näiteks ringjooni ja istmelt
vastu vajuni välgeina. Jõuvera teosa õige
ligikaudne suju on spain $S \in S^{3,1}$. Piisume
seda põhjendada, pidades silmas ka järgnevat
joonist.



Joonise S kõverus α ja kõverusradius R on
seotud võndusega

$$\alpha = \frac{S''(x)}{(1 + (S'(x))^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}, \quad R = R(x), \quad \alpha = \alpha(x).$$

Avestame seda, et $x \in [x_0, x_1]$ korral $S''(x) \approx \frac{1}{R}$.

Yobiv on olnud, kus $S''(x)$ eluk $\frac{1}{R}$, mis on

võrdeline jäuga F , kasvab līneselt, s.t.

$S''(x) = c(x-x_0)$, $c = \text{const}$, seejuures $S''(x_0)=0$. Tüs on $S \in P^3[x_0, x_1]$. Nüüdse jätkates muundatakse kõverust \Rightarrow (ehk vähendatakse kõverusastmeid R) sejusalt kurvi keskpunkt, parast seda vähendatakse sujuvalt \Rightarrow vääruseni 0, kus jätkub mõne teoska.

Näide 4. Olgu m suvaline, $k=0$. Tüs on i vormil $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$ ja $S \in C^m[a, b]$. Näitame, et siis $S \in P^m[a, b]$. Tundimuse $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$ tõttu $S^{(m)}(x) = d_i$, ~~$x \in [x_{i-1}, x_i]$~~ . Et $S^{(m)}$ on pidev, siis arvud d_i peavad olema kõik omavahel võndsed ehk $S^{(m)}(x) = c_0$, $x \in [a, b]$. Tüs $S^{(m-1)}(x) = c_0 x + c_1$, $x \in [a, b]$, seejärel $S^{(m-2)}(x) = c_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$, $x \in [a, b]$, ja jätkates jätkame selleni, et S on ülmalt m astme polünoom.

Näide 4 nõuab juba definitsioonist tulenevat asjaolu, et kõik polünoomid on ühtlast ka splainid.

Kui defektist ei nägita, siis vaimusti seldatakse, et see on 1. Lisaks juba vadel- sulud līnesar-, mut- ja kuupsplainidele on mõningase tähtsusega kvartsplained $S^{4,1}$ ja kvint-splained $S^{5,1}$, enamasti mille alivahendina kasutatilistes vürsimustes.

Iga polünoomi $P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$, $x \in [a, b]$, võib vaadelda mitfundtsioniliseks $P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$, $x \in \mathbb{R}$, samuti vastupidi: polünoomi $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

võib veadelda kui funktsiooni $P: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Splaini $S \in S_{\Delta}^{m, k} [a, b]$ korral $S(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$,
 $x \in [x_0, x_1]$, ning sõnase määrate $S(x) = c_0 + c_1 x + \dots +$
 $+ c_m x^m$, $x \in (-\infty, x_1]$. Analoogiliselt, $S(x) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 x +$
 $+ \dots + \bar{c}_m x^m$, $x \in [x_{n-1}, x_n]$, võimaldab veadelda
 $S(x) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 x + \dots + \bar{c}_m x^m$, $x \in [x_{n-1}, \infty)$, seega
 $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Järu on fiksseeritud võne $\Delta: x_0 < x_1 <$
 $< \dots < x_n$, siis mõnikord viijatigi $S \in S_{\Delta, \mathbb{R}}^{m, k}$
tähendab, et $S \in P^m(-\infty, x_0]$, $S \in P^m[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$,
 $S \in P^m[x_n, \infty)$, $S \in C^{m-k}(-\infty, \infty)$. Niimane tingimus
tähendab seejuures, et $S^{(m-k)}$ on pidev, kuid si
tarvitse olla tökestated.

§ 2. Splineide nimetus

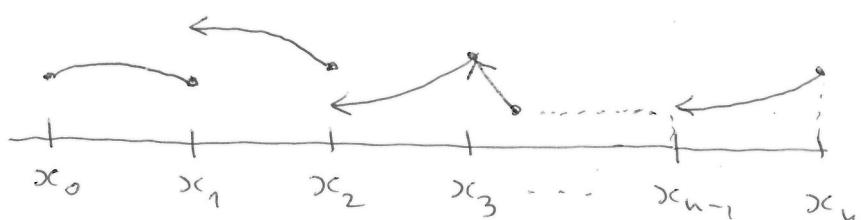
Olgu antud $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, loeme selle fiksneintervus, antud m, k loeme samuti fiksneintervus. Vaatleme bulka $S_{\Delta}^{m,k}$. See on vektorruum, rest vahetult näab kontrollide, et

$$1) S_1, S_2 \in S_{\Delta}^{m,k} \Rightarrow S_1 + S_2 \in S_{\Delta}^{m,k},$$

$$2) \lambda \in \mathbb{R}, S \in S_{\Delta}^{m,k} \Rightarrow \lambda S \in S_{\Delta}^{m,k},$$

sejannes $S_{\Delta}^{m,k} \subset C[a,b]$. Mängime, et nii on oleneva vahemisi eeldused, et $k \leq m$, mis on mõnest loomulik eeldus. Teame esmängivs, leida vektorruumi $S_{\Delta}^{m,k}$ dimension.

Vaatleme bulka $P_{\Delta}^m = \{ P: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, P \in P^{m}_{[x_0, x_1]}, P \in P^{m}_{(x_{i-1}, x_i]}, i = 2, \dots, n \}$, mille ühte tüüpilist esindajat võib näha järgneval joonisel.



Jgas vahemikus (x_{i-1}, x_i) on $P \in P_{\Delta}^m$ ülmalt m astme polinoom, seejuures tõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} si seata mingisuguseid pidevuse nõudeid. Tõlmedes $x_i, i = 0, \dots, n$, tulub funktsioonile P määratevad väärtused ja koonlepped loeme näiteks, et P on vaskalt pidev,

Samuti paremalt piidev punktis x_0 , mõnikord loetuse ka taoline P_{Δ}^m splainide klassi osas, kasutades tähisest $S_{\Delta}^{m,m+1}$, s.t. defekt on $m+1$. Tuleks P_{Δ}^m on vektorruum, seejuures $S_{\Delta}^{m,k} \subset P_{\Delta}^m$. Lõsame siisgi P_{Δ}^m dimensiooni.

Järg $i=1, \dots, n$ korral on $P(x_{i-1}, x_i)$ dimensioon $m+1$, sest nüüdju on ülmalt m astme polünoomi määramiseks valem konda jaid. Jõukku annab see, et $\dim P_{\Delta}^m = (m+1)n$. Jäti $S \in S_{\Delta}^{m,k}$, siis funktsioonid $S, S', \dots, S^{(m-k)}$ on piidevad sisesõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} , mis annab $(m-k+1)(n-1)$ tingimust lisaks muudmisele ruumi P_{Δ}^m . Nünd $(m+1)n - (m-k+1)(n-1) = (m+1) + k(n-1)$, seepärast $\dim S_{\Delta}^{m,k} = m+1+k(n-1)$. Yplainidele või ga tūppilisemal erijahul $k=1$ saame $\dim S_{\Delta}^{m,1} = m+n$. Samuti tulub üldjuhust juba teadaolev $\dim S_{\Delta}^{m,0} = \dim P^m = m+1$.

Ollesanne 1. Leida $\dim S_{\Delta}^{m,k}, \mathbb{R}$.

Mängime, et ülaltoodud $\dim S_{\Delta}^{m,k}$ leidmine ei ole esitatud kõigi detailidega. Terviklike tööstuse eestus viivis meid põhitsemast matrice kõrvale, seepärast anname siin võimaluse seda üsesitsvalt teha.

Lemma. Olgu X vektorruum ja $\dim X = n$.

Jäti lineaarsed funktsionaalid $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, p$, on lineaarselt võltumatud, siis

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \right) = n-p.$$

Salgitusel lõsame, et $\ker \varphi_i = \{x \in X \mid \varphi_i(x) = 0\}$.

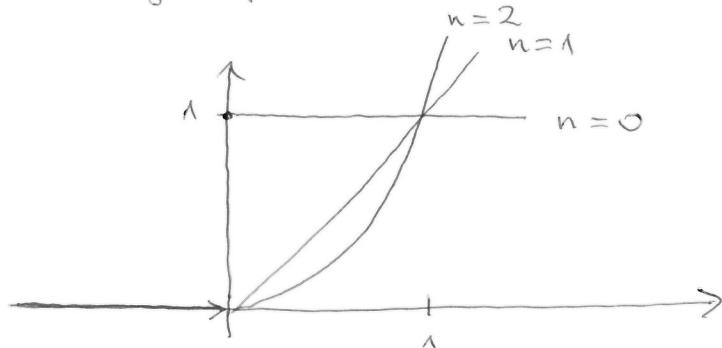
Meesanne *1. Tõestada lemma ja näidata selle abil, et $\dim S_{\Delta}^{m,k} = m+1+k(n-1)$.

Lemma kasutamisel tuleb võtta $X = P_{\Delta}^m$, leida sobivad funktsioonid ja näidata nende lineaarsust vältumastest.

Järgnevas leiamme muutus $S_{\Delta}^{m,k}$ läästi. Definime

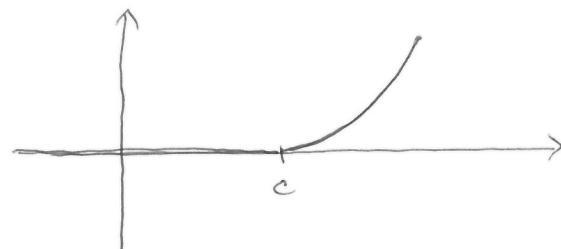
$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & \text{kui } x \geq 0, \\ 0, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Nende graafideid on eritatakse joonisel



Taolisi funktsioone nimetatakse lõigatud astme-funktsioonideks. Nende abil moodustame

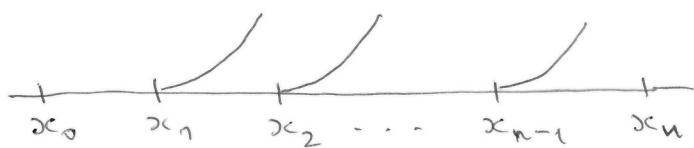
$$(x-c)_+^n = \begin{cases} (x-c)^n, & \text{kui } x \geq c, \\ 0, & \text{kui } x < c, \end{cases}$$



mida nimetatakse samuti lõigatud astme-funktsioonideks.

Theorem. Funktsioonid x^α , $\alpha = 0, 1, \dots, m$,
 $(x - x_i)^\alpha_+$, $i = 1, \dots, n-1$ (vastavad Δ resolvmadele),
 $\alpha = m-k+1, \dots, m$, moodustavad baasi muulis $S_\Delta^{m,k}$.

Lisame, et osa neist funktsioonidest on tavalised astmefunktsioonid, lõigatud astmefunktsioonid aga pärinevad järgmise joonise kohal:



Toetus. Meenutame, et vki X on vektorruum ja $\dim X = n$, siis baas muulis X on lineaarselt isõltemata elementide komplekt $e_1, \dots, e_n \in X$.

Jämsvõärne tingimus on, et igu $x \in X$ esitub üheselt elementide $e_1, \dots, e_n \in X$ kaedu kujul

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

Alestituseks ootame, kas teoreemis toodud funktsioonid moodustavad muuli $S_\Delta^{m,k}$. Polünoomid x^α , $\alpha = 0, \dots, m$, muidugi sinnas moodustavad. Vaatleme funktsioone $(x - x_i)^\alpha_+$, $\alpha = m-k+1, \dots, m$.

Punktist x_i vasakul ja paremal on tegemist polünoomiga, seega tingimus, et funktsioon oleks osaloendes ühimalt n astme polünoom, on täidetud. Tuleks veel veenduda funktsiooni küllaldane olo korda pidevalt diferentseeruvusega ja sedagi siult muulis x_i .

Oletame

$$((x - x_i)_+^\alpha)' = \alpha (x - x_i)_+^{\alpha-1},$$

$$((x - x_i)_+^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)(x - x_i)_+^{\alpha-2},$$

...

$$((x - x_i)_+^\alpha)^{(m-k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(m-k-1))(x - x_i)_+^{\alpha-(m-k)},$$

seejuures minimaalne α väärtus on $m-k+1$,

seega $\alpha-(m-k) \geq 0$, $m-k+1-(m-k)=1$, mis tähendab,

~~oleks täheldatav~~ et diferentseerimisel saadud

hõigatud astmefunktiooni aste on alati vähe-
malt 1 ja on tasapidu selle pidevus.

Teisisõnu, kas töodud elementide eba on
võrdne diuaantiooniga, saab vahese nii:
astmefunktioone x^α on $m+1$, hõigatud astme-
funktioone $(x - x_i)_+^\alpha$ on ühe x_i kohta
 $m - (m-k+1) + 1 = k$, nüüd on $n-1$, seega kokku
on töodud funktsioone $m+1+k(n-1)$.

Näitame eritatud funktsioonide lineaar-
set võltumatust. Oletame, et

$$\sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha 0} x^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha=m-k+1}^m c_{\alpha i} (x - x_i)_+^\alpha = 0, \quad x \in [x_0, x_n].$$

Olgu $x_0 \leq x < x_1$. Siis $(x - x_i)_+^\alpha = 0$ igas $i = 1, \dots, n-1$
ja ka $\alpha = m-k+1, \dots, m$ korral. Nõndus $\sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha 0} x^\alpha = 0$
annaoleks siis, et $c_{\alpha 0} = 0$ igas $\alpha = 0, \dots, m$ korral.

Seejärel $x_1 < x < x_2$ korral $\sum_{\alpha=m-k+1}^m c_{\alpha 1} (x - x_1)_+^\alpha = 0$,

misest $c_{\alpha 1} = 0$, $\alpha = m-k+1, \dots, m$. Analoogiliselt

jätkates näeme, et funktsioonide lineaarses kombinatsioonis on väik kordajad vändsed nulliga ja sellega on teoreem tõestatud.

Järeltusena näeme, et ega saa $S_{\Delta}^{m,k}$ eritulud üheselt

$$S(x) = \sum_{\alpha=0}^m c_{\alpha_0} x^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha=m-k+1}^m c_{\alpha i} (x-x_i)_+^\alpha, x \in [x_0, x_n].$$

Märkus. Arvutustiivult ei ole töodud looses stabilne. Jdui kõrvuti eespool töoduna veel

$$\tilde{S}(x) = \sum_{\alpha=0}^m \tilde{c}_{\alpha_0} x^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha=m-k+1}^m \tilde{c}_{\alpha i} (x-x_i)_+^\alpha,$$

sis arvude $|c_{\alpha i} - \tilde{c}_{\alpha i}|$ väärus (arvutuste mõttes) ei taga seda, et $|\tilde{S}(x) - S(x)|$ oleks väike ja see avaldub eriti siis, kui mingid naaber-võlmed xj ja xj+1 asuvad lähestikku. See-pärast ei ole töodud looses sobiv praktilistes arvutustes. Samal ajal on selle kasutamine efektiivne mitmete teoreetiliste probleemide lahendamisel.

Ülesanne 2. Leida astufunktsioonidest ja hõigustud astufunktsioonidest koosnev looses muundis $S_{\Delta, R}^{m,k}$.

Looritis: osaleda muundis $S_{\Delta, R}^{m,k}$ muundis $S_{\Delta'}^{m,k}$, kus $\Delta' : a < x_0 < \dots < x_n < b$ ja $\Delta : x_0 < \dots < x_n$.

Alldistane siiani vaadeldud sünkroonide muundis mõistet. Nagu varasemgi, olgu $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, lisaks olgu antud m

ja x_1, \dots, x_{n-1} . Defineerime

$$S_{\Delta}^{m, k_1, \dots, k_{n-1}} = \{ S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid S \in P^m[x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n,$$

$S, S', \dots, S^{(m-k_i)}$ on piidevad punktis $x_i, i=1, \dots, n-1$

Naravemaga võimelus on siiu tões sisevõlunes oma siheduss nõuded eku tägale misesõlmele vastab oma defekt.

Ülesanne 3. Leida dim $S_{\Delta}^{m, k_1, \dots, k_{n-1}}$

sama tüüpilises nagu ednevates numides.

§3. B-splainid

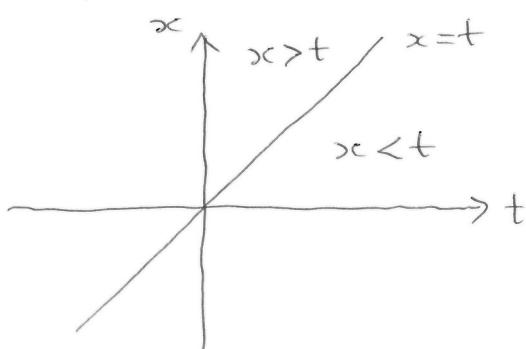
Esitame siin B-splainide teooria juhul, mis defekt on 1. tõldisem juhit, eriti selline, mis igas riigisõlmes on võlmele omase defekt, mõnoks vändaste võlmedega splainide käitteenist, mis teeb esitise tehniliseks tundlikuks ja kasutuslikeks.

On üldiselt antsepteenitud väide, et B-splainide kasutamine on tööstuslik standard. See tähendab seda, et nende asendil millegi muu kasutamiseks peab olema väga vähene põhjus. Ila seetõttu pöörame B-splainidele erist tähelepanu.

Olgu antud võrk $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ja täisarv $m \geq 0$. Iksutame funktsiooni

$$\varphi_m(x, t) = (x-t)_+^m = \begin{cases} (x-t)^m, & \text{kui } x \geq t, \\ 0, & \text{kui } x < t. \end{cases}$$

Funktsioon φ_m on määritud kõigil tasandil \mathbb{R}^2 ja järgneval joonisel, mis kujutab tema määramispõimonda, on ta siigest $x=t$ üldpool määrituna kahel mõtaja poolt, siigest $x=t$ allpool määrituna nullfunktsioon.



Laiendamme nõenu Δ kõspunktiidega

$$\Delta': x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+m}.$$

Definitsioone funktsioonid

$$B_m^i(x) = (-1)^{n+1} f_m(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$i = -m, \dots, n-1.$$

Sinu näituseks organisaandi ja järgi m+1 järmise differentiaalide, elemendite, et funktsiooni & differentiaalide definitsiooneks rekurreentselt saanikaspa siinavate sõlmede jääks ($x_i \neq x_j$, $i, j = -m, \dots, n-1$):

$$f(x_i), \quad 0. \text{ järmne differentiaal},$$

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, \quad 1. \text{ järmne differentiaal},$$

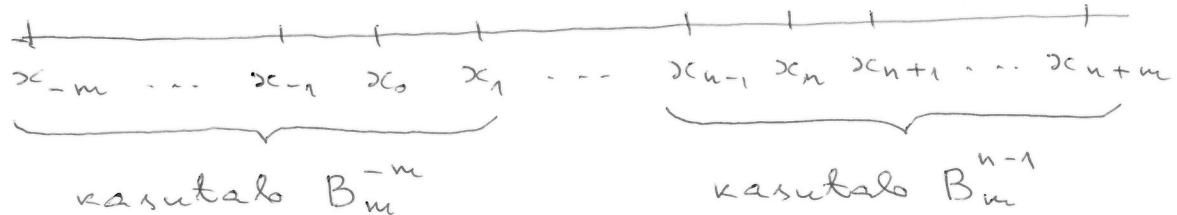
...

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_i, \dots, x_{i+k-1}) - f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k})}{x_i - x_{i+k}},$$

k . järmne differentiaal.

Lisame, et vui näiteks $f \in C^n[x_0, x_n]$, siis on alams $\xi \in (x_0, x_n)$ nii, et $f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

Järgnevalt joonisel on näha, millised võimed siinvald B_m^i definitsioonil:



Funktsioone B_m^i nimetatakse B-splainideks. Neid esimeses osas mängivad on näidatud, et saadud funktsioonid on muutust $S_{\Delta', \mathbb{R}}^{m,1}$.

Diferentsiaalid on erites

$$f(x_i, \dots, x_k) = \sum_{j=i}^k \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)},$$

kus $\omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_k)$. Yelle põhjal

$$B_m^i(x) = (-1)^{m+1} \sum_{j=i}^{i+m+1} \frac{(x-x_j)_+^m}{\omega'(x_j)}, \quad (1)$$

kus $\omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_{i+m+1})$. Funktsioonid B_m^i on lõigatud astmefunktsioonide lineaarse kombinatsioon, separast (tuginedes ülesandele 2)

$B_m^i \in S_{\Delta', \mathbb{R}}^{m,1}$ või $B_m^i \in S_{\Delta'}^{m,1}[x_{-m}, x_{n+m}]$. Ühtlasi võib selleks, et $B_m^i \in S_{\Delta'}^{m,1}$, kui peame siamas funktsioonide B_m^i alendel lõigule $[x_0, x_n]$.

Jahsi alendamises vajadust ei ole, kui edaspidi arvestame tõka, et B_m^i on määratud vältel realarvude bulgas \mathbb{R} .

Märgime, et $(x-t)_+^m = (x-t)_+^m + (-1)^{m+1} (t-x)_+^m$ ning $m+1$ jätku diferentsiaalne valemide x_1, \dots, x_{i+m+1} järgi polünoomist $(x-t)_+^m$ vändub nulliga, separast võile vänduse (1) kirjutada ka

$$B_m^i(x) = \sum_{j=i}^{i+m+1} \frac{(x_j-x)_+^m}{\omega'(x_j)}. \quad (1')$$

Ülesanne 4. Tõestada vändus

$$(x-t)_+^m = (x-t)_+^m + (-1)^{m+1} (t-x)_+^m.$$

Lause 1. Jõeltilis võndus

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^{i+1}(x), x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tõestus. Alustame ühe tehnilise vahendiga, mida hõljam kasutame.

Istameks olukorras, kus $f(t) = f_1(t)f_2(t)$. Väidame, et selle

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_n). \quad (3)$$

Tõestame selle induktsiooniga. Tõu $n=0$, siis $f(x_0) = f_1(x_0)f_2(x_0)$ ning väide kehtib. Induktioonisammuna näitame üleminneku n hõlmalt $n+1$ vähuse. Saame

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x_0, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} =$$

/ kasutame diferentsiablike osadusi ja induktiooniseeldust /

$$= \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_{n-1}) - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1}}^n f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_n) \right) =$$

pimedale hõlm x_{n-1}

$$= \sum_{j=0}^{n-2} f_1(x_0, \dots, x_j) \frac{f_2(x_j, \dots, x_{n-1}) - f_2(x_j, \dots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} + \\ + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} (f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) f_2(x_{n-1}) - f_1(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n) f_2(x_n)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^{n-2} f_1(x_0, \dots, x_j) f_2(x_j, \dots, x_n) + \\
 &+ \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \left(f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) (f_2(x_{n-1}) - f_2(x_n)) + \right. \\
 &\quad \left. + f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) f_2(x_n) - f_1(x_0, \dots, x_{n-2}, x_n) f_2(x_n) \right),
 \end{aligned}$$

Kas summanärgi seade lõigenduv hüpoteesi
on vale

$$f_1(x_0, \dots, x_{n-1}) f_2(x_{n-1}, x_n) + f_1(x_0, \dots, x_n) f_2(x_n),$$

Millega on (3) vahetlus tõestatud. Nõndust (3) nimetatakse Leibnizi valemiks (differentiaalsete jaoes).

Lisatulemusena märgime, et kuna n konda piidavalit differentseeruvate funktsioonide vahel

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (x_0, x_n),$$

ja kui $x_0, \dots, x_n \rightarrow x$, siis $\xi \rightarrow x$, ning piirväärtusena saame vähese

$$(f_1(x) f_2(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_1^{(i)}(x) f_2^{(n-i)}(x),$$

mida tuleks samuti Leibnizi valemina (teletiste jaoes). See on tegelikult korrektne differentseerimise valem.

Loosuse 1 tõestuse jätkuna esitame

$$\Psi_m(x, t) = (x-t)_+^m = (x-t)_+^{m-1} (x-t) = \Psi_{m-1}(x, t) \Psi(x, t),$$

Kas kasutaksime tähistust $\Psi(x, t) = x-t$. Funktioonist Ψ differentiaalsete t jaagi asituvad teletistens

$$\frac{d}{dt} \Psi(x, t) = -1, \quad \frac{d^2}{dt^2} \Psi(x, t) = 0, \dots,$$

sõega valeme (3) põhjal

$$B_m^i(x) = (-1)^{m+1} \left(\Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) \Psi(x; x_{i+m}, x_{i+m+1}) + \right. \\ \left. + \Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}) \Psi(x; x_{i+m+1}) \right).$$

Selles

$$\Psi(x; x_{i+m}, x_{i+m+1}) = -1,$$

$$\Psi(x; x_{i+m+1}) = x - x_{i+m+1},$$

$$\Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}) =$$

$$= \frac{\Psi_{m-1}(x; x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}) - \Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m})}{x_{i+m+1} - x_i}.$$

Nüüd

$$B_m^i(x) = (-1)^m \Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) +$$

$$+ \frac{x - x_{i+m+1}}{x_{i+m+1} - x_i} (-1)^{m+1} \Psi_{m-1}(x; x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}) +$$

$$+ \frac{x - x_{i+m+1}}{x_{i+m+1} - x_i} (-1)^m \Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) =$$

$$= (-1)^m \left(1 + \frac{x - x_{i+m+1}}{x_{i+m+1} - x_i} \right) \Psi_{m-1}(x; x_i, \dots, x_{i+m}) +$$

$$+ (-1)^m \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} \Psi_{m-1}(x; x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}),$$

mis annabki vorduse (2).

Lause 2. Juhul $m \geq 1$

$$\begin{cases} B_m^i(x) > 0, \text{ kui } x \in (x_i, x_{i+m+1}), \\ B_m^i(x) = 0, \text{ kui } x \notin (x_i, x_{i+m+1}), \end{cases}$$

ming

$$\begin{cases} B_0^i(x) > 0, \text{ kui } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ B_0^i(x) = 0, \text{ kui } x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Tõestus. Esitame tõestuse osade kaupa.

1) Vaatleme juhtu, kus $x < x_i$. Siis $(x - x_j)_+^m = 0$, sest $x < x_j$, kui $j = i, \dots, i+m+1$. Nõnduse (1) põhjal $B_m^i(x) = 0$ oleolemata m väärustest.

2) Olgu $x \geq x_{i+m+1}$. Siis $B_m^i(x)$ defineerivad võnduses $\Psi_m(x; x_i, \dots, x_{i+m+1})$ eruvätabuse funktsiooni $\Psi_m(x, t) = (x-t)^m$ ehit muutuja t järgi m astme polinoomi väärusti kasutades. Iduid $m+1$ järmee differentiaalne esitus

$$\Psi_m(x; x_i, \dots, x_{i+m+1}) = \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (x-t)^m = 0,$$

mistöttu $B_m^i(x) = 0$ õige m komal.

3) Juhil $x \in [x_i, x_{i+1})$, siis

$$B_0^i(x) = (-1) \Psi_0(x; x_i, x_{i+1}) =$$

$$= - \frac{\Psi_0(x; x_i) - \Psi_0(x; x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} > 0,$$

sest $\Psi_0(x; x_i) = 1$ ja $\Psi_0(x; x_{i+1}) = 0$. Telleks on tõestatud kõik väited B_0^i vääruste kolka.

4) Oige $m \geq 1$ ja $x \in (x_i, x_{i+m+1})$. Kasutame induktiooni ja vändust (2). Vänduses (2)

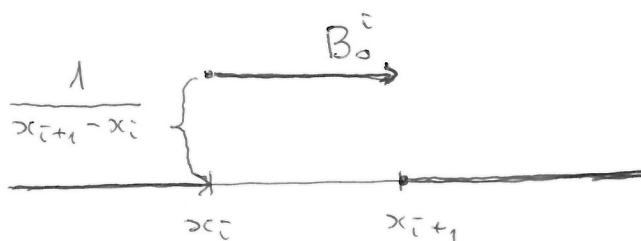
$$\frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} > 0.$$

Induktiooni alustades, kui võtta $m=1$, siis $x \in (x_i, x_{i+2})$ ja vähemalt üks väärustest $B_0^i(x)$, $B_0^{i+1}(x)$ on rauget pötiivne, millega järeltulub (2) abil, et $B_1^i(x) > 0$. Järgmisel sammadel $m \geq 2$ ja vähemalt üks väärustest $B_{m-1}^i(x)$, $B_m^{i+1}(x)$ on $x \in (x_i, x_{i+m+1})$ korral rauget pötiivne, seepärest $B_m^i(x) > 0$.

5) Jdu $i \geq 1$, siis B_m^i on pöder ja $B_m^i(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i^- \\ x < x_i}} B_m^i(x) = 0$. Sellega on kõik lause 2 välted töestatud.

Avaliustame lähenemalt B-splainide erijuhete vältuvalt m väärustest.

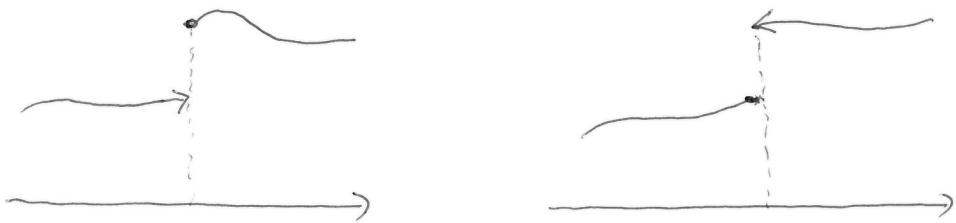
Jdu $m=0$, siis B_0^i graafik on esitatud järgmisel joonisel.



§1 algul toodud splaini definitsiooni tuleb siin muuditseerida. Idmuluvus $S \in S_D^{0,1}$ tähendab, et $S \in P^0[x_i, x_{i+1}]$ ja selleks on vaja, et $S \in C^{-1}[a, b]$, seejuures defineeritakse

$C^{-1}\{a, b\} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid$ funktsioonil f on üldmalt lõplik arv erinevaid liiki katkenduspunkte\}.

Esimet liiki katkenduspunkti mõistame siin nii, et funktsioon on pidev kas paremal näivatast, sejannes eksisteerivad mõlemad ühepoolsed lõplikud piirväärtused, mida need ei ole võndsed. Tüüpilised näited on järgmistes joonistel.

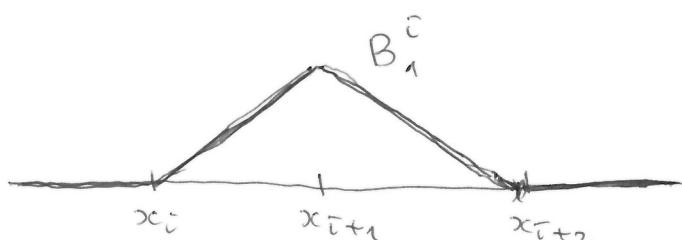


Meile praegu sõltulise käsitlusena võib definitsioona ka $m \geq 1$ korral

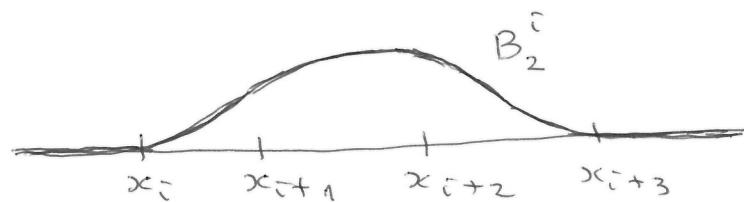
$$S_{\Delta}^{m, m+1} = \left\{ S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid S \in P_{\Delta}^m(x_{i-1}, x_i), i=1, \dots, n, S \in C^{-1}\{a, b\} \right\},$$

mis sisuliselt ühtlõi eespool mäeldedud hulgaga P_{Δ}^m , mis on funktsiooni väärtused mõlemades üheselt määratud.

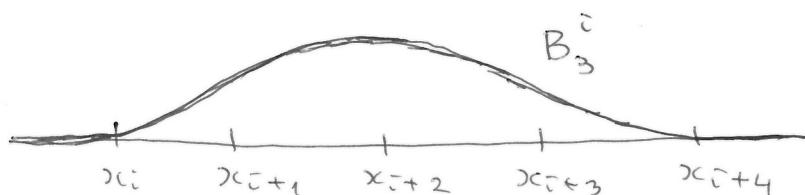
Juri $m=1$, siis B-spline on pidev, tema graafik on mitmetatud järgmisel joonisel.



Jahui $m=2$, siis B-splaini tulekis on pidev, tema graafik on järgmisel joonisel.



Jahui $m=3$, siis B-splainid on juba pidev teine tulekis ja graafikut näeme järgmisel joonisel.



Märkus. Definieerimise B-splainid, kaardades funktsiooni q_m differentsiabteid teise argumendi järgi. Teine võimalus B-splaine definieerida on rekurreentsse seose (2) abil, lähtudes suhteliselt lihtsalt vürjeldatavatest splainidest B_0^i ja mõnes sarnasaval järgist võrgema astme splainideni. Tänuole, et võrdluses (2) on $x \in [x_i, x_{i+m+1}]$ korral $B_m^i(x)$ numer kombinatsioon kahest madalamast splaini väärustest.

Funktsiooni f kandjaks nimdatakse hulka $\{x \mid f(x) \neq 0\}$, see on sellise hulga münd, mis funktsioon erineb nullist. Täandatat tähistatakse supp f . Lause 2 põhjal on supp $B_{ik} = [x_i, x_{i+m+1}]$.

Lause 3. B -splainid on minimaalse kandjaga splainid hulka $S_{\Delta, IR}^{m,1}$ mühivate nullist erinevate splainide hulgad.

Enne tööstast nägimaa, et $0 \in S_{\Delta, IR}^{m,1}$ ning supp $0 = \emptyset$.

Töötus. Vaatleme siiskorda, mis $S \in S_{\Delta, IR}^{m,1}$, $S \neq 0$ ja supp $S \subset [x_i, x_{i+m+1}]$. Paneme tähele, et si on võimalik järgmisel joonisel näidataid oluvord,



rest igas osalõigus on spline polünoom ja nullist erineval polünoomil on ülmalt lõplik sro nullkohti. Formalselt, mis ~~on~~

$$\xi = \min \{x \mid x \in \text{supp } S\}, \text{ mis si on võimalik, et}$$

$x_j < \xi < x_{j+1}$, sama oluvord on ka juhul

$$\xi = \max \{x \mid x \in \text{supp } S\}. \text{ Seejuures peab kandja algema ja lõppema rõlimes. Oletame näiteks}$$

varustusitulisekt, et supp $S \subset [x_i, x_{i+m}]$. Nõime lugeda, et spline S rõhmedeks on x_i, \dots, x_{i+m} .

Eritameks saame siis kaaneks valem

$$S(x) = \sum_{\alpha=0}^m c_\alpha x^\alpha + \sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)_+^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jahsi $x < x_i$, siis $S(x) = 0$ eku $\sum_{\alpha=0}^m c_\alpha x^\alpha = 0$, millega

$c_\alpha = 0, \alpha = 0, \dots, m$. Seeaga

$$S(x) = \sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)_+^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jahsi $x > x_{i+m}$, siis $x \notin \text{supp } S$, seepärast

$$\sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)_+^m = 0.$$

Jõrvatise määruseks on jahime tähelepanu vallale, et minu ei saa ole järeltõde, et $c_{mj} = 0$, $j = i, \dots, i+m$, rest me veel ei tea, kas funktsioonid $x \mapsto (x - x_j)_+^m$, $j = i, \dots, i+m$, on lineaarselt sõltumatu.

Noodeldavate x väärustele vastav $S'(x) = 0, \dots,$

$$S^{(m)}(x) = 0, \quad \text{seega}$$

$$\sum_{j=i}^{i+m} c_{mj} (x - x_j)_+^{m-k} = 0, \quad k = 0, \dots, m,$$

mis on homogenne mittleem kondagatud c_{mj} määramiseks. Tuleminekku determinaant on

$$\left| \begin{array}{cccccc} (x - x_i)_+^m & \dots & (x - x_{i+m})_+^m \\ (x - x_i)_+^{m-1} & \dots & (x - x_{i+m})_+^{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x - x_i & \dots & x - x_{i+m} \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right| \neq 0,$$

sest tegemist on Vandermonde'i determinandiga. Nii siis, $c_{mj}=0$, $j=i, \dots, i+m$. Igund märks $S=0$, mis on vastavas selleusega, ja sellega on Lause 3 tõestatud.

Theorem. Igaind B_m^i , $i=-m, \dots, n-1$, moodustavad läski muutus $S_\Delta^{m,1}[x_0, x_n]$, kus $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Enne algsest tõestuse juurde arvamist märgime, et B-splainid B_m^i on määritud kõikjal resalteljal \mathbb{R} ning nad shendtavasse lõigule $[x_0, x_n]$. Teoreemi väide on vahiliste shendite kohta.

Tõetus. On arussadaav, et algsest hulgast \mathbb{R} defineeritud B-splainide shendid lõigule $[x_0, x_n]$, mida tähistame otsa B_m^i , moodustavad hulka $S_\Delta^{m,1}$. Nende arv on $m+n$, mis on ühtlasi õige arv õigelt $S_\Delta^{m,1}$, seepärast näitame ~~olema~~ nende limesarset sõltumatust lõigul $[x_0, x_n]$.

Tõetuseks käigepesalt, et B_m^i , $i=-m, \dots, n-1$, on limesarset sõltumatuks hulgak \mathbb{R} . Olgu

$$\sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_m^i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

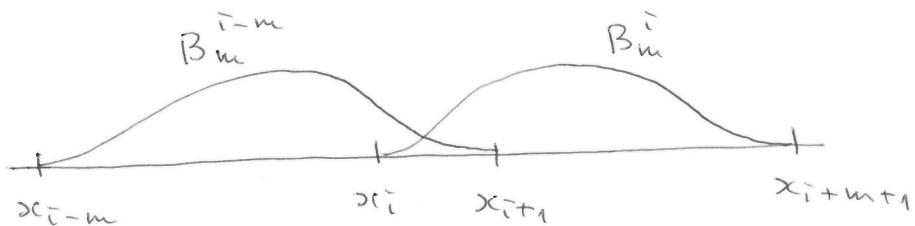
Nõtame $x \in (x_{-m}, x_{-m+1})$, siis $c_{-m} B_m^{-m}(x) = 0$.

Et $B_m^{-m}(x) > 0$, mis $c_{-m} = 0$. Seejärel nõtame $x \in (x_{-m+1}, x_{-m+2})$ ning saame, et $c_{-m+1} = 0$. Analoogiliselt jätkates näeme, et $c_i = 0$, $i = -m, \dots, n-1$.

Näitame järgnevas, et B_m^i on lineaarselt vältmatud kõigil $[x_0, x_n]$. Olgu

$$\sum_{j=-m}^{n-1} c_j B_m^j(x) = 0, \quad x \in [x_0, x_n].$$

Valine $x \in (x_i, x_{i+1})$, kus i on üks näitustest $0, \dots, n-1$, loeme ta fikseeritava. Arvestades sellest, et B_m^i kuundjate ulatust (vt. joonist),

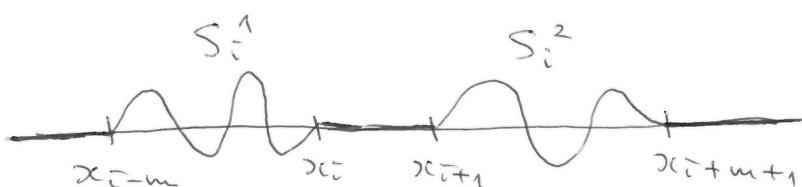


näeme, et välistud x korral $B_m^j(x) = 0$, kui $j < i-m$ või $j > i$. Seejuures

$$\sum_{j=i-m}^i c_j B_m^j(x) = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}).$$

Lasutame tähisust $S_i^1(x) = \sum_{j=i-m}^i c_j B_m^j(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Teame, et $S_i^1(x) = 0$, kui $x < x_{i-m}$ või $x > x_{i+m+1}$, samuti $x \in (x_i, x_{i+1})$ korral. Seejuures S_i^1 võib olla nullist erinev intervallides $[x_{i-m}, x_i]$ ja $[x_{i+1}, x_{i+m+1}]$.



Definime

$$S_i^1(x) = \begin{cases} S_i^1(x), & x \in [x_{i-m}, x_i], \\ 0 & \text{mu\bar{j}al.} \end{cases}$$

Analoogtäiselt määramme S_i^2 ehe $S_i^2 = S_i - S_i^{-1}$ vki
 $S_i^{-1} + S_i^2 = S_i$. Seejuures $S_i^{-1}, S_i^2 \in S_{\Delta}^{m,1}$, kui
 $\text{supp } S_i^{-1} \subset [x_{i-m}, x_i]$, $\text{supp } S_i^2 \subset [x_{i+1}, x_{i+m+1}]$, mis
on Lause 3 põhjal vähemalt vaid viis, kui
 $S_i^{-1} = 0, S_i^2 = 0$ ehe $S_i(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Nõndus

$$S_i(x) = \sum_{j=i-m}^i c_j B_m^j(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

annab münd, et $c_j = 0, j = i-m, \dots, i$. Sellise
struktuuri saab läbi viia ka $i = 0, \dots, n-1$
võimal. Juri $i = 0$, siis saame $c_{-m} = 0, \dots, c_0 = 0$;
või $i = 1$, siis $c_{-m+1} = 0, \dots, c_1 = 0$; lõpuks, kui
 $i = n-1$, siis $c_{-m+n-1} = 0, \dots, c_{n-1} = 0$. Jõukuvättel,
 $c_{-m} \neq 0, \dots, c_{n-1} = 0$, mis lõpetab teoreemi tõestuse.

Järeldus. Igas splain $S \in S_{\Delta}^{m,1}$ on üheselt
esitatav

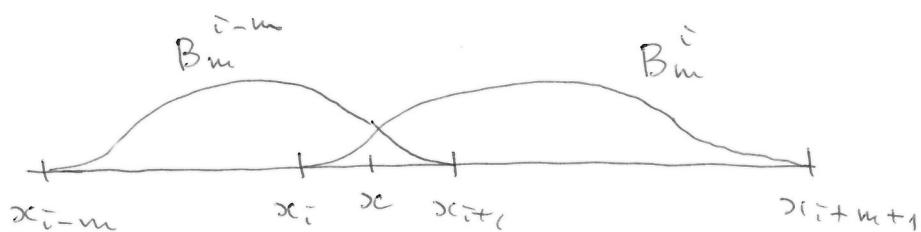
$$S(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} c_i B_m^i(x), x \in [x_0, x_n].$$

Märkus. B-splainide $B_m^i, i = -m, \dots, n-1$,
definieritakse laiendatuna vorme Δ lisa-ol-
medega $x_{-m}, \dots, x_{-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$. On selge, et
need B-splainid, mis kantavad liasolme,
võib olla valemist (erinevalt vorigu Δ
laiendid suunavad siineras B-splainid).

Splainide B_m^i alandid lõigule $[x_0, x_n]$ völ-
tuvalt samuti vorigu Δ laiendatustiing B-splai-
nidest kas ei ole üheselt määritud vör-

guga Δ . See põhjust tulels teoreemile järgnevest järeldust mõista nii, et kui võrge Δ laiend on välja valitud ja fiksitud, siis on B-splainid kui kaas reumis $S_{\Delta, R}^{m,1}$ ja splaini eritus selle kaade üheselt määristatud.

B-splainideks on kasutamisel ilmneb üks soodne asjolu. Praktikas kasutatakavatel splainidel on üle aste suur, ega miti $m=1, 2, 3$. Fixeeritud x korral on numbris $\sum_{i=-m}^{n+1} c_i B_m^i(x)$ ülimalt $m+1$ nullist erinevat liidetavat, mida illustreerib juba esineval joonis:



Jah $x \in [x_i, x_{i+1}]$, siis ainult $m+1$ B-splaini väärtust $B_m^{i-m}(x), \dots, B_m^i(x)$ saavad alla nullist erinevad. Seejuures sõlnede arve määrav n vältib alla suur, praktikas üsge tihedates.

Ülesanne 5. Töötada, et minimaalse vändaga splainid ühtivad vondaja täpuseeni B-splainidega.

Formaliseeri tähendab selle ülesande väide, et kui $S \subseteq S_{\Delta, R}^{m,1}$ ja mpp $S \subseteq [x_i, x_{i+m+1}]$, siis $S(x) = c B_m^i(x), x \in \mathbb{R}$, kus $c = \text{const}$. Soovitlus:

ülesande lehendamisel vannade eritust B-splai-
nidest laasid vaidu.

Lisene, et on mõeldav sõnastada ülesande
väide, et kui $S \in S_{\Delta', \text{IR}}^{m,1}$ ja $\text{supp } S \subset [x_i, x_{i+m+1}]$,
mis $S(x) = c B_m^i(x)$, $x \in \text{IR}$, $c = \text{const.}$ Siel puhul
tuleb Δ' laiendada võrgus Δ'' : $x_{-2m} < \dots < x_{-m} <$
 $< \dots < x_0 < \dots < x_n < \dots < x_{n+2m}$ ja vältta B-splai-
nidest laes, mis kasutab võru Δ'' , ning
laiendada S selle järgi.

§ 4. Normaliseeritud B-splainid

Jahu vektormuuri läsimelementide korraltade mingite nullist erinevate arvudega, siis saabavasse juur läss. Nendele mõi sellist vähet B-splainide korral.

Defineerimine

$$\bar{B}_m^i(x) = (x_{i+m+1} - x_i) B_m^i(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

s.t. espool toodud B-splainid korraltakse kaandja pikkusega. Yplaine \bar{B}_m^i nimetatakse normaliseeritud B-splainideks. Espool toodud võndusest

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i} B_{m-1}^{i+1}(x)$$

saadavuse peale korraltist arvuge $x_{i+m+1} - x_i$ võndus

$$\bar{B}_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \bar{B}_{m-1}^{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Täoreem. Juhitakse

$$\sum_{i=-m}^{n-1} \bar{B}_m^i(x) = 1, \quad x \in [x_0, x_n], \quad \text{kui } m \geq 1,$$

ning

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{B}_0^i(x) = 1, \quad x \in [x_0, x_n].$$

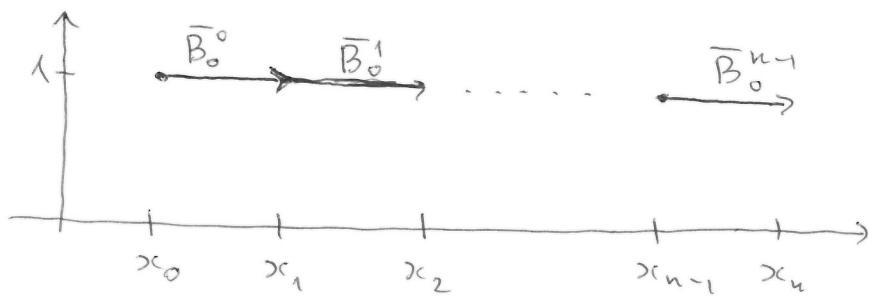
Tõstes. Espool nägime, et

$$B_0^i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, & \text{kui } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Yällest näeme, et

$$\bar{B}_0^i(x) = \begin{cases} 1, & \text{vii } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Nüüd on selge teoreemis toodud väite kehti-
vus $m=0$ korral ning seda illustreerib järgnev
joonis.



Toostame induktiooniga vähenduse $m \geq 1$ korral.

Eeldame, et on toestatud vähendus $\sum_{i=-m}^{n-1} \bar{B}_{m-1}^i(x) = 1$,
 $x \in (x_0, x_n)$. Siis $x \in (x_0, x_n)$ korral vähenduse (1)
 alil

$$\sum_{i=-m}^{n-1} \bar{B}_{m-1}^i(x) = \sum_{i=-m}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) +$$

$$+ \sum_{i=-m}^{n-1} \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \bar{B}_{m-1}^{i+1}(x) =$$

/ paremas poolas erimeses summas $\bar{B}_{m-1}^{-m}(x) = 0$,

sest supp $\bar{B}_{m-1}^{-m} = \{x_{-m}, x_0\}$, teises summas $\bar{B}_{m-1}^n(x) = 0$,

sest supp $\bar{B}_{m-1}^n = \{x_n, x_{n+m}\}$ /

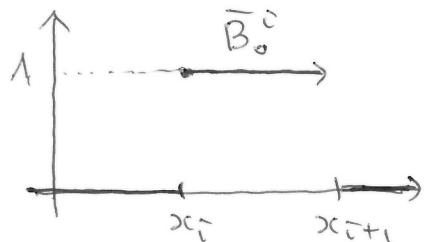
$$= \sum_{i=-(m-1)}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \sum_{i=-m}^{n-2} \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \bar{B}_{m-1}^{i+1}(x) =$$

/teises summas teeme indeksi i nihke $i+1 = j$,
 siis $i = -m \Leftrightarrow j = -(m-1)$, $i = n-2 \Leftrightarrow j = n-1$, oga jätkame
 vana indeksi tähisega /

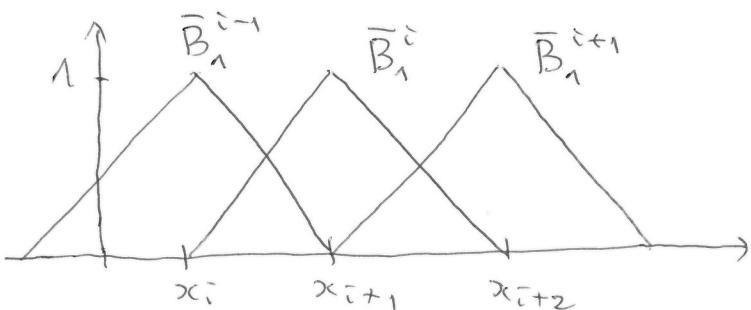
$$= \sum_{i=-m-1}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) + \sum_{i=-m-1}^{n-1} \frac{x_{i+m} - x}{x_{i+m} - x_i} \bar{B}_{m-1}^i(x) = \\ = \sum_{i=-m-1}^{n-1} \bar{B}_{m-1}^i(x) = 1.$$

Punktidesse x_0 ja x_n lähedane vänduse pidevuse järgi (võttes piirväärtuse), sed $m \geq 1$ korral on splainid \bar{B}_m^i pidevad. Sellega on teoreem töestatud.

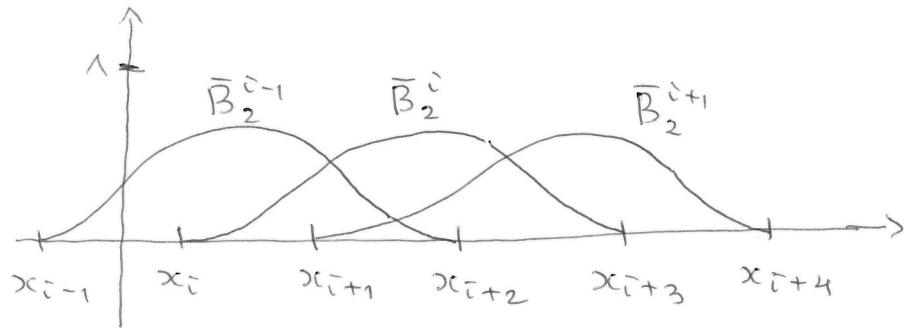
Järgeldamine veel erijekte. Siinlult julgutame esposel joonist $m=0$ korral:



Juhul $m=1$ on normaliseeritud B-splainid kujustatud järgmisel joonisel:



Juhul $m=2$ on splainide \bar{B}_2^i graafitud joonisel



Sõnu splaini \bar{B}_2^i väärustus punktis $x \in (x_i, x_{i+3})$ on $\bar{B}_2^i(x) < 1$, seost ka mingi teine B-splaini sarnas punktis x positiivse väärustusega.

B-splaine võib määrata ka mitmete normeeritud osuuide elementidega ning siis võib need korrataks selliste arvudega, et nende normid oleksid võndsed arvuga 1.

Talliseid B-splaine võib nimetada normeeritud. Näiteks muusis $L_1(-\infty, \infty)$ on B-splained \bar{B}_0^i normeeritud, seost nende norm on $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_0^i(x) dx = 1$.

Aleksander 6. Näidata B-splainede vahelisi rekurrentsset seost kasutades, et $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_1^i(x) dx = \frac{1}{2}$

ja $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}_2^i(x) dx = \frac{1}{3}$ (need on B-splainede \bar{B}_1^i ja \bar{B}_2^i normid muusis $L_1(-\infty, \infty)$).

Tehniline soovitus: kasutada tähisust $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, \dots, n$, viijatiste lähenemiseks.

Aleksander 6 väidetuse on kooskõlas järgmine tulenevus.

Lause. Tehtlik $\int_{-\infty}^{\infty} B_m(x) dx = \frac{1}{m+1}$.

Toestus. Kasutame nii Taylori valemit jätklikumega integraalkl kujul

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-s)^{k-1} f(s) ds. \quad (1)$$

Meesanne 7. Toestada esituled valem. y_{00} -vitus: lähtudes Newton-Labnizi valemist $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds$ kasutada ositi integreerimist, võttes algul $v = f(s)$, $dv = ds$, $s = x - v$ ning edaspidi induktiooni järgu l järgi.

Jahut $a \leq x \leq b$, siis saab jätklikuna kirjutada kujul

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_a^b (x-s)^{k-1} f(s) ds, \quad (2)$$

siest $a \leq s \leq x$ korral $(x-s)_+^{k-1} = (x-s)^{k-1}$, muid $x < s \leq b$ korral $(x-s)_+^{k-1} = 0$. Liiane Taylori valemis mõlemas pooles diferentsiulte munitsja x järgi võlmedega $x_i, \dots, x_{i+m+1} \in [a, b]$. Siis kasutul seame, kasutades diferentsiulte esitust tuletise vahdu,

$$f(x_i, \dots, x_{i+m+1}) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \quad \xi \in (x_i, x_{i+m+1}).$$

Jahut võtta $\ell = m+1$, siis Taylori valemis polynomidest astmeni m tuleneval diferentsiultel

mullid (nende polünoomide m+1 järmelikud tuletised on nullid). Integreerit alla teksa jäälviiget (2) silmas pidades vastav differentsiaalne ω järgi, milles eritamal funktsiooni väärustuse kaudu. Sellega saame võrduse

$$\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} = \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{s=\xi}^{x_j+m+1} \frac{(x_j-s)^m}{\omega''(x_j)} f(s) ds \right\}.$$

Jahui nüüd vältame $f(x) = x^{m+1}$, siis $f^{(m+1)}(x) = (m+1)!$

ning võrdust (1'), § 3, silmas pidades jäname võrduseni

$$1 = (m+1) \int_{x_i}^{x_i+m+1} B_m(s) ds,$$

millega selme lause töestanud.

§ 5. Mõnesadu funktsioonide mõistest ja mõisted abituumestest

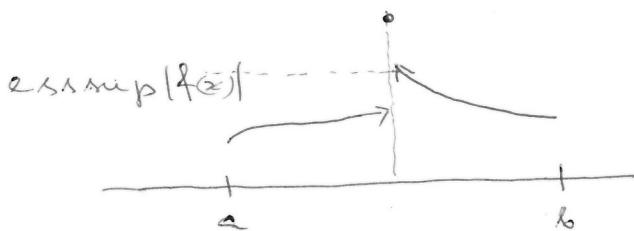
Eelaspidõ vaatluse funktsioonide lähenemist pidevusega, sejannes esldame lähenemataste funktsioonide mõistemist viidatesse funktsioonide mõistesse. See on üldine selleperast, et taha vihdas lähenemise vahendusena mis õigustasad koondnevuskirnest.

Löögus pidevate funktsioonide ruum on $C[a,b] = \{f | f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ on pidev}\}$. Ruumi norm on $\|f\|_{C[a,b]} = \|f\|_c = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Löögus pidevalt diferentieerivate funktsioonide ruum on $C^{(k)}[a,b] = \{f | f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, f^{(k)} \text{ on pidev}\}$, sejannes $k \geq 1$. Täpsustasaks lisame, et näotavse funktsioonil $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tuleltise $f^{(k)}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ olenevole (teatavaltsi saab tuleltise mõistest näidida funktsiooni juhul, mis on defineeritud lähisest lugas), vajunes on seljas looplund pinnvaated $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{(k)}(x)$ ja $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f^{(k)}(x)$. Norm ruumis $C^{(k)}[a,b]$ defineeritakse $\|f\|_{C^{(k)}[a,b]} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{C[a,b]}$ või ekvivalentseks $\max_{0 \leq i \leq k} \|f^{(i)}\|_{C[a,b]}$, vajunes minimaalsete mõistetavate $f^{(i)} = f$.

Integreerimise astme funktsioonide suur
on $L_p(a,b) = \{f | f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ on mõõtuv, } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$,
 $1 \leq p < \infty$, misjuures muuksi $L_p(a,b)$ elementid on
 ekvivalentsete funktsioonide klassid, s.t. $f = g$
 paražasti nis, kui $f(x) = g(x)$ peageks kõikjal
 intervallilis $[a,b]$ ehk $\mu(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Norm
 selles muus on $\|f\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Tõvestatud (mõõtuvate) funktsioonide muu
 definitsioon $L_\infty(a,b) = \{f | f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ on mõõtuv,}$
 $\text{essup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| < \infty\}$, mis funktsiooni $|f|$ oheLINE
 tõve on $\text{essup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \inf \{c > 0 | |f(x)| \leq c \text{ peageks}$
 kõikide $x \in [a,b]$ väärtuste korral}. Siin
 $\|f\|_{L_\infty(a,b)} = \text{essup}_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Illustreerime
 funktsiooni oheist tõvet joonisega



samuti näitega, kus $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$,
 $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 1$, $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$, milles
 $\text{essup} |f(x)| = 1$, mittegi f on tavahise funk-
 tsioonina tõvestatud. Seepärast oleks
 täpsem nimetada seda oheist tõvestatud
 funktsioonide muus, mis ei ole aga enti

tähtis, kest ka see muu koosneb nagu eespool $L_p(a,b)$, $1 \leq p < \infty$, ekvivalentsete funktsioonide klassidest ja selle klassis on sõnas tökestatud liige.

Tänu pidevate funktsioonide ruum $C^{-1}[a,b] = \{ f | f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ funktsioon } f \text{ on ülmalt lõplik }\}$ on esimene liivi katkeuspunkti, mis asub vahemikus (a,b) . Tavaliselt piisab sellisest katkeuspunktist, kus $C^{-1}[a,b]$ waadeldavse alamünumina muutis $L_\infty(a,b)$, milles ei ole funktsiooni vääratused katkeuspunktides olulised. Juri aga $C^{-1}[a,b]$ elemente waadeldavse funktsioonide, mis lepitakse valem, et funktsioonid on katkeuspunktides näiteks paremalt pidevad.

Ruumel L_p , $1 \leq p \leq \infty$, võib vaadelda ka tökestamata pinnakondade valem ja eespool juba siines mäl $L_1(-\infty, \infty)$.

Olgu $p, q \in [1, \infty]$ sellised, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (mis $p=1$ korral $q=\infty$ ja $p=\infty$ korral $q=1$). Juri $f \in L_p(a,b)$ ja $g \in L_q(a,b)$, mis kehtib Hölderi vormatus

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}.$$

Juhul $p=q=2$ on see Cauchy-Bunjakovski-Schwarz'i vormatus.

Yobolev ruumid on $W^{p,l}(a,b) = \{f | f \in L_p(a,b), f^{(l-1)} \text{ on absoluutsest pidev, } f^{(l)} \in L_p(a,b)\}$, mis

$1 \leq p \leq \infty, l \in \mathbb{N}$. Siin peetakse silmas funktsiooni f läbilist tulistiit ehk puuväärust $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Terviklikeks huvides toome ka funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absoluutse pidevuse mõiste: õga $\varepsilon > 0$ korral eksisteerib $\delta > 0$ nii, et kui $x_i, x_j \in [a, b]$, $(x_i, x_j) \cap (x_j, x_k) = \emptyset$, mida $i \neq j$, siis $\sum_{i=1}^n |x_i - x_j| < \delta$ korral $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_j)| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Mängime, et $n=1$ korral tähendab see rohkem tundud ühtlase pidevuse mõistet, aga absoluutses pidevuses on nõue väikide naturaalarvude n korral. Illustratsioonis toome veel joonise intervallide (x_i, x_j) paiknemise kohta:

$$a \quad x_1 \quad () \quad () \quad x_2 \quad () \quad \dots \quad x_n \quad () \quad x_{n+1} \quad b$$

Absoluutsest pidev funktsioon on ühtlassest pidev, ühtlassest pidev funktsioon on pidev ning $a, b \in \mathbb{R}$ korral on lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon ka ühtlassest pidev.

Jahsi f on absoluutsest pidev, siis peab see väikjal on silmas (tavalises mõttes) f' . Yoboleksi muutis toodud näidest, et $f^{(l-1)}$ on absoluutsest pidev, järeltulub peage väikjal $f^{(l)}$ silmasolli, mida tingimus on, et $f^{(l)} \in L_p$.

Tette võimelus sobivalt muu defineerida on $W^{p,l}(a,b) = \{f \in L_p(a,b) \mid f', f'', \dots, f^{(l)} \in L_p(a,b)\}$, mis tuleb mõistetavuse distributioonide mõttes. Need tulebised esindavad iga $f \in L_p(a,b)$ normi, mõne on f tuleviku vuolumise muumi $L_p(a,b)$.

Norm muu W $W^{p,l}(a,b)$ defineeritavuse

$$\|f\|_{W^{p,l}(a,b)} = \left(\sum_{i=0}^l \|f^{(i)}\|_{L_p(a,b)}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=0}^l \int_a^b |f^{(i)}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

tarvaliselt

$$\|f\|_{W^{\infty,l}(a,b)} = \max_{0 \leq i \leq l} \|f^{(i)}\|_{L_\infty(a,b)}.$$

Olegu sündud võne $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Defineerime

$$C^k C^l_{\Delta}[a,b] = \{f \mid f \in C^k[a,b], f \in C^l[x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n\},$$

see on mõistlik, kui $k > l$. Neel olegu

$$C^k W^{p,l}_{\Delta}[a,b] = \{f \mid f \in C^k[a,b], f \in W^{p,l}(x_{i-1}, x_i), i=1, \dots, n\}.$$

Teoreem (pidavate funktsioonide keskkontroll-teoreem). Järit $f \in C[a,b]$ ja $\alpha, \beta > 0$, siis on sõnas $\xi \in [a,b]$ nii, et

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\xi).$$

Toetus. Olegu $\varphi(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) - (\alpha + \beta) f(x)$, $x \in [a,b]$. Siis $\varphi \in C[a,b]$. Saame

$$\varphi(a) = \beta(f(b) - f(a)),$$

$$\varphi(b) = \alpha(f(b) - f(a)).$$

Juri $f(a) = f(b)$, siis võib võtta $\xi = a$ või $\xi = b$.
 Juri aga $f(a) \neq f(b)$, siis $\varphi(a) \varphi(b) < 0$ (φ väärtsused on vahendmargilised), seepärast eksisteerib $\xi \in (a, b)$ nii, et $\varphi(\xi) = 0$.

Theoreem (vahendmargilise integraalide jaoks). Juri $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruv ja $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral vki $g(x) \leq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral (g saab vähem määri lõigus $[a, b]$), siis on sellemas $\xi \in [a, b]$ nii, et

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Toetus. Oletame väiteks, et $g(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Siis $\int_a^b g(x) dx > 0$. Pidev funktsioon f on töövestatud, seepärast on sellemas eruvud mõju M nii, et $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \leq f(x) \leq M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Seepärast on $g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$ ja integraalides

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Juri $\int_a^b g(x) dx = 0$, siis viimase kahepoolse vähenduse põhjal $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$ ja teoreemis toodud vordus saabki iga $\xi \in [a, b]$ korral. Juri aga $\int_a^b g(x) dx > 0$, siis saame

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon f saab vähem kõik väärtsused minimaum ja maximaumi vahel eba on sellemas $\xi \in [a, b]$ nii, et

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx},$$

mis annab üks soovitud väite.

Juhu on saadud võrra Δ : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
ja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siis defineerime

$$\omega_i(f) = \sup_{x' , x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|,$$

see on funktsiooni f võnkumise intervallis $[x_{i-1}, x_i]$. Olgu veel $\omega(f) = \max_{1 \leq i \leq n} \omega_i(f)$. Funktsiooni $f \in C[a, b]$ korral $\omega(f) \rightarrow 0$, kui
 $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ (mis näitab, et vonda
jada või peret). Sel juhul muuduge $n \rightarrow \infty$
ja $x_i = x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n-1$.

§ 6. Linearsplainidega interpoleerimine

Olgu antud nõuk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja veel vastavad arvud f_0, \dots, f_n . Olgu vaja leida $S \in S_{\Delta}^{1,1}$ nii, et $S(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$, sellist funktsiooni S nimetatakse interpoleerivaks lineaarsplainiks.

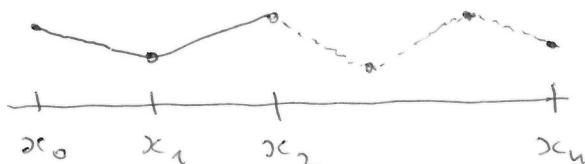
Tallise splaini saab leida lokaalselt, igas koigis $[x_i, x_{i+1}]$ osatöiges eraldi. Leitakse $S \in P^1[x_{i-1}, x_i]$ nii, et $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$ ja $S(x_i) = f_i$. Selles nõub kasutada Lagrange'i interpolatsioonivalemist

$$S(x) = f_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + f_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

vt. Newtoni interpolatsioonivalemist

$$S(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}),$$

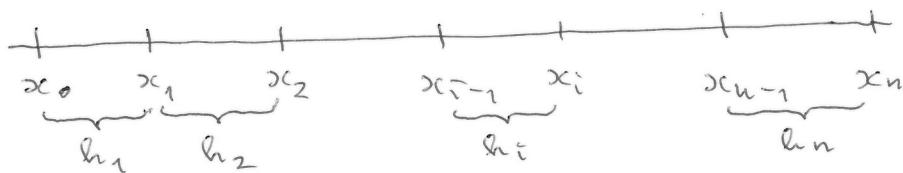
kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Graafiliselt võib lineaarsplainidega interpoleerimist näha väga tihedateks esitamisel, vt. näiteks joonist



Siin punktide $(x_i, f_i), i = 0, \dots, n$, hulgas nende punktid ühendatakse singlööruudega, mis on esimese astme polünoomide graafideks esatöödel. Irlangema astme polünoomidega interpoleerimist peab olema siis ka selleks, et

sedas si osata ja polegi vaja, sest see vähendab kolvasti.

Tähistame $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, \dots, n$, need on jäotuses Δ osalõimude pikkused.



Interpoleeriva lineaarsplain saab $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral esitada

$$S(x) = \frac{x_i - x}{h_i} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} f_i = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} (x - x_{i-1}).$$

Täatleme olukorda, mis lõsab vähendule Δ on antud funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siis saab leida $f_i = f(x_i)$, $i=0, \dots, n$. Olgu S need saadud määrd interpolateeriv lineaarsplain. Tähistame tähistust $R(x) = S(x) - f(x)$ (mõnikord võetakse $R(x) = f(x) - S(x)$, siis $f(x) = S(x) + R(x)$).

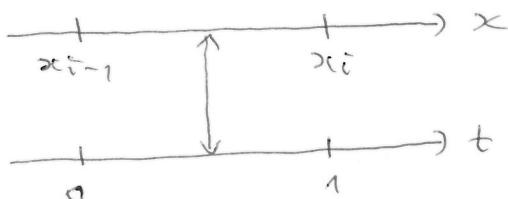
Tähistame veel $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Järgmises teoreemis (ja ka hiljem) $\|f\|_\infty$ tähendab funktsiooni f normi nimis $L^\infty(a, b)$, mis piidava funktsiooni f korral ühtlasi normiga nimis $C[a, b]$.

Theorem. Interpoleeriva lineaarspline
nõral vahitaval hinnangud

$f \in$	$\ R\ _\infty \leq$	$\ R'\ _\infty \leq$
$C[a,b]$	$\omega(f)$	—
$W^{\infty,1}[a,b]$	$\frac{h}{2} \ f'\ _\infty$	—
$CC_{\Delta}^1[a,b]$	$\frac{h}{4} \omega(f')$	$\omega(f')$
$CW_{\Delta}^{\infty,2}[a,b]$	$\frac{h^2}{8} \ f''\ _\infty$	$\frac{h}{2} \ f''\ _\infty$

Tabeli viimases reas toodud hinnangud on
dulited muusis $C^2[a,b] \subset CW_{\Delta}^{\infty,2}[a,b]$.

Toetus. Paneme täheld, et hinnangud
piisab töötada suvalt sel vahitud osa lõigus
 $[x_{i-1}, x_i]$. Läsetame muutujavahetust $x = x_{i-1} + th_i$,
kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$, kus $t \in [0,1]$.



Leiame veel $x_i - x = x_i - (x_{i-1} + th_i) = (1-t)h_i$ ning
Lagrange'i valemi põhjal $x \in [x_{i-1}, x_i]$ nõral
 $S(x) = (1-t)f_{i-1} + th_i$.

Juhul $f \in C[a,b]$ saame keskkärtustseeruumi
vahitades

$$S(x) - f(x) = (1-t)f_{i-1} + tf_i - f(x) = f(\xi) - f(x), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_i].$$

Teoste

$$|R(x)| = |S(x) - f(x)| = |f(\xi) - f(x)| \leq \omega_i(f) \leq \omega(f).$$

Otsustatud $f \in C^2 W_{\Delta}^{\infty, 2} [a, b]$, mis tuleb $f \in W^{\infty, 2} [x_{i-1}, x_i]$.

Jäsonutame Taylori valemist jäälviivusega integraalsel vahil. Seele alal

$$f_{i-1} = f(x_{i-1}) = f(x) + f'(x)(x_{i-1} - x) + \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)f''(s)ds,$$

$$f_i = f(x_i) = f(x) + f'(x)(x_i - x) + \int_x^{x_i} (x_i - s)f''(s)ds.$$

Neustest vähendust esimese jaotuse tegurite $1-t$, teise tegurite t ja liidame tulenused, mušimines veel osendamise $x_{i-1} - x = -th_i$ ja $x_i - x = (1-t)h_i$, tulenuseks saame Lagrange'i valemist abil

$$S(x) - f(x) = (1-t) \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1} - s)f''(s)ds + t \int_x^{x_i} (x_i - s)f''(s)ds.$$

Teoste

$$|R(x)| \leq (1-t) \int_{x_{i-1}}^x (s - x_{i-1}) |f''(s)| ds + t \int_x^{x_i} (x_i - s) |f''(s)| ds \leq$$

/ mõlemas integraalis hindame $|f''(s)| \leq \|f''\|_{\infty}$

$$\leq \left((1-t) \left. \frac{(s - x_{i-1})^2}{2} \right|_{s=x_{i-1}}^{s=x} + t \left. \left(-\frac{(x_i - s)^2}{2} \right) \right|_{s=x}^{s=x_i} \right) \|f''\|_{\infty} =$$

$$= \left((1-t) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + t \frac{(x_i - x)^2}{2} \right) \|f''\|_{\infty} =$$

$$= \frac{(1-t)t^2 + t(1-t)^2}{2} h_i^2 \|f''\|_{\infty} = \frac{1}{2} t(1-t) h_i^2 \|f''\|_{\infty} \leq \frac{h_i^2}{8} \|f''\|_{\infty},$$

kus viimases hinnangus kasutamine veda, et $t \in [0,1]$ korral $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.

Mõninga, et kui $f \in C^2[a,b]$, siis saab kasutada interpolatsioonivalenti jäälükme esitust

$$|R(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2!} \right| (x-x_{i-1})(x_i-x),$$

mislest tuleks vahel näitud hinnang.

Mõesanne 8. Töötada teoreemis toodud ülejäänud hinnangu.

Lisame, et $f \in C^2[a,b]$ korral, kui $h \rightarrow 0$, mis $\omega(f) \rightarrow 0$ funktsiooni f ühtlase pidevuse tõttu.

Linearsplaiinidega andnute või funktsioonide lähendamise puuduseks on see, et splain ei ole sile, tema graafikul esinevad murdelpunktid. See puudus on mõtteselt madal lähendamisjätk $O(h^2)$, mida siis saab parandada lähendatava funktsiooni suuremat vähedust (nõrgemat jäonce differentseeruvust) eeldades. Jahu näiteks $f''(x) = \text{const}$ (võib $f(x) = x^2$), siis muutub $C^2[a,b]$ järgnevalt $\|R\|_\infty$ hinnang realiseerimis täpselt. Meie lähemaks esmäärjus on osadelda nõrgema astme splaiinidega (selviõige muusiplaiinide) interpolatsioonist. Sellega ületane mõlemad mainitud puudused: lähendav splain on ise sile ja vähemalt nõledamat funktsioonide lähendamisjäre on väiksem.

§ 7. Hermite'i kuupsplainid

Oige antud närv $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja vastavad sõved $f_i, f'_i, i=0, \dots, n$. Teamee esmärgiks leida $S \in S_{\Delta}^{3,2}[a,b]$ nii, et $S(x_i) = f_i, S'(x_i) = f'_i, i = 0, \dots, n$. Üldisest splainide muuli dimensiooni vahemist $\dim S_{\Delta}^{m,k} = m+1+k(n-1)$ saame münd $\dim S_{\Delta}^{3,2} = 3+1+2(n-1) = 2n+2$, samasalju on ka interpolatsioonitingimusi. Täksi nõudeid saabda väidatud spline nimetatuse Hermite'i kuup-splainedeks, mis seostub sellega, et üldisemas Hermite'i interpolatsioonis ühes andes esinevad interpolatsioonitingimedesse ka tuleviste kohale eku interpolatsioonisõlmed on kordsed.

Mele esmane esmäär on näidata, mida Hermite'i kuupspaine leida. Need saab leida lokaalselt (nagu interpolatsioonil lineaarsplained) igas osalõigus eraldi. Põisab leida $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$, mis saabdab nelja interpolatsioonitingimust

$$S(x_{i-1}) = f_{i-1}, S(x_i) = f_i, S'(x_{i-1}) = f'_{i-1}, S'(x_i) = f'_i. \quad (1)$$

Interpolatsioonitingimuste täidetust või güs vältmedes tegel ka selle, et $S \in C^1[a, b]$, mis vastab tingimusega $S \in S_{\Delta}^{3,2}$. Õhus näitatakse on väidetud spline S hulge $P^3[x_{i-1}, x_i]$ elementideks $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral mõju $S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ vält, veelgi sõltuvamalt, $S(x) = c_0 + c_1(x-x_{i-1}) + c_2(x-x_{i-1})^2 + c_3(x-x_{i-1})^3$

ja lahendada lineaarne vähendimisteer nelje tunndmatuga c_0, \dots, c_3 ja nelje vähendige, mis tulenev interpolatsioonitüngimustest (1).

Ollesanne 9. Moodustada tüngimustest (1) vähendimisteem vahendeate c_0, \dots, c_3 määramiseks ja näidata, et see on ühesel lahendus (sellega saame, et interpolatsioonitüngimustest (1) muuplaan esisteerib ja on ühesel määritatud ügavuste $f_i, f'_i, i=0, \dots, n$, korral).

Toimine Hermite'i muuplaani leidmisel järgmisielt. Nagu varaselt, teeme muutujavahetuse $x = x_{i-1} + th_i$ eba $t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, h_i = x_i - x_{i-1}$.

Olgu

$$S(x) = \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i,$$

kus

$$\varphi_0(t) = (1-t)^2(1+2t),$$

$$\varphi_1(t) = t^2(3-2t),$$

$$\varphi_2(t) = t(1-t)^2,$$

$$\varphi_3(t) = -t^2(1-t).$$

Et $\varphi_0, \dots, \varphi_3$ on muupolinoomid, siis $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$.

Jäätö kontrollide interpolatsioonitüngimiste (1) täidetust. Näeme, et $\varphi_0(0)=1, \varphi_1(0)=0, \varphi_2(0)=0, \varphi_3(0)=0$, seepärast $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$, kust vähendusele $x = x_{i-1}$ vastab $t = 0$. Lätsav, $\varphi_0(1)=0, \varphi_1(1)=1, \varphi_2(1)=0, \varphi_3(1)=0$, seepärast $S(x_i) = f_i$, kust $x = x_i$ tähendab, et $t = 1$.

Tuletiste jäures arvestame, et $\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{dx}$ ja $dx = h_i dt$, millega $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h_i}$, seepätest $S'(x) = \frac{1}{h_i} \frac{dS}{dt}(t)$.

Sis

$$S'(x) = \frac{1}{h_i} (\varphi_0'(t)f_{i-1} + \varphi_1'(t)f_i + \varphi_2'(t)h_i f_{i-1}' + \varphi_3'(t)h_i f_i').$$

Nähetult arvutades saab leida, et

$$\varphi_0'(t) = 6t(t-1),$$

$$\varphi_1'(t) = 6t(1-t),$$

$$\varphi_2'(t) = (1-t)(1-3t),$$

$$\varphi_3'(t) = t(3t-2).$$

Sis, $\varphi_0'(0)=0$, $\varphi_1'(0)=0$, $\varphi_2'(0)=1$, $\varphi_3'(0)=0$ ning keparast $S'(x_{i-1})=f_{i-1}'$. Need leidame, et $\varphi_0'(1)=0$, $\varphi_1'(1)=0$, $\varphi_2'(1)=0$, $\varphi_3'(1)=1$ ning seega $S'(x_i)=f_i'$.

Nähteleme järgnevas olukorras, mis on antud funktsiooni $f \in C^1[a, b]$ ning $f_i = f(x_i)$, $f_i' = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Theorem. Interpooleeriva Hermite'i kuup-splaini $S \in S_A^{3,2}$ korral vaheline jaotus $R(x) = S(x) - f(x)$ hinnangud

$f \in$	$\ R\ _\infty \leq$	$\ R''\ _\infty \leq$	$\ R'''\ _\infty \leq$	$\ R''''\ _\infty \leq$
$C^1[a, b]$	$\frac{3}{8} h w(f')$	$\frac{3}{2} w(f')$	—	—
$W_A^{3,2}[a, b]$	$\frac{1}{16} h^2 \ f''\ _\infty$	$0.24750 h \ f''\ _\infty$	—	—
$C^2[a, b]$	$\frac{1}{32} h^2 w(f'')$	$0.12375 h w(f'')$	$\frac{4}{3} w(f'')$	—
$C^4 W_A^{3,4}[a, b]$	$\frac{1}{384} h^4 \ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{216} h^3 \ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{1}{12} h^2 \ f^{IV}\ _\infty$	$\frac{1}{2} h \ f^{IV}\ _\infty$

Näimiseks näas töodud hinnangud on tähtaedav mõõtmeid mõni $C^4[a, b] \subset C^4 W_A^{3,4}[a, b]$.

Toestus. Toostame hinnangud $\|R\|_\infty$ jaoks muutide $C^1[a, b]$ ja $C^1W_2^\infty[a, b]$ juhul.

1) Olgu $f \in C^1[a, b]$. Arvestame, et $R(x_{i-1}) = R(x_i) = 0$, seepäriast näine vätta $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Siis

$$S(x) - f(x) = \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i - f(x) = \\ = \varphi_0(t)(f(x) + f'(\xi)(x_{i-1} - x)) + \varphi_1(t)(f(x) + f'(\eta)(x_i - x)) +$$

$$\left/ \min \xi \in (x_{i-1}, x), \eta \in (x, x_i) \right/$$

$$+ \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i - f(x) =$$

$$\left/ f(x) vondaja tuleb \varphi_0(t) + \varphi_1(t) - 1 = 1 - 3t^2 + 2t^3 + \right.$$

$$+ 3t^2 - 2t^3 - 1 = 0; \text{ järgnevas arvame seda, et}$$

$$x_{i-1} - x = -th_i, x_i - x = (1-t)h_i \right/$$

$$= -t\varphi_0(t)h_i f'(\xi) + (1-t)\varphi_1(t)h_i f'(\eta) + \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i =$$

$$\left/ \min -t\varphi_0(t) \leq 0, (1-t)\varphi_1(t) \geq 0, \varphi_2(t) \geq 0, \varphi_3(t) \leq 0, \text{ arvame keskvaatuseonemi pidevate funktsioonide jaoks} \right/$$

$$= ((1-t)\varphi_1(t) + \varphi_2(t))h_i f'(\bar{\eta}) + (-t\varphi_0(t) + \varphi_3(t))h_i f'(\bar{\xi}) =$$

$$\left/ \min \bar{\eta} \in [x_{i-1}, \eta], \bar{\xi} \in [\xi, x_i] \right/$$

$$(1-t)\varphi_1(t) + \varphi_2(t) = (1-t)t^2(3-2t) + t(1-t)^2 =$$

$$= t(1-t)(1 + 2t - 2t^2) = t(1-t)(1 + 2t(1-t)),$$

$$\begin{aligned}
 -t\varphi_0(t) + \varphi_3(t) &= -t(1-t)^2(1+2t) - t^2(1-t) = \\
 &= -t(1-t)(1+2t-2t^2) = -t(1-t)(1+2t(1-t)) \quad / \\
 &= t(1-t)(1+2t(1-t)) h_i(f'(\bar{\eta}) - f'(\bar{\xi})).
 \end{aligned}$$

Joskus tarkempi arjaskelu, d funktioon $t \mapsto t(1-t)(1+2t(1-t))$ sekoitetaan lähimpänä $[0,1]$ maksimeen pisteessä $t = \frac{1}{2}$ (sest $t \mapsto t(1-t)$ maksimeeraa on pisteessä $t = \frac{1}{2}$ ja se on joko espool vartainen). Tällöin saame

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) h_i w_i(f') \leq \frac{3}{8} h_i w_i(f').$$

2) Oletuksena $f \in C^1 W_A^{\infty, 4}[a, b]$. Tässä siinä pitää meidätta $x \in (x_{i-1}, x_i)$ kovalt lähinnä jääkätkimme

$$R(x) = \varphi_0(t)f_{i-1} + \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)h_i f'_{i-1} + \varphi_3(t)h_i f'_i - f(x).$$

Anecdote $f_{i-1}, f_i, f'_{i-1}, f'_i$ Taylorin valmiin abil

pisteessä x jääkätkimme integroivalla muodolla.

~~Nähdessä~~ teorialla lähimmässä $x_{i-1} - x$ ja $x_i - x$,

missä esimerkiksi viittamme väistävällä $-th_i$ ja $(1-t)h_i$. Saame

$$f_{i-1} = f(x_{i-1}) = f(x) + f'(x)(-th_i) + \frac{f''(x)}{2!} (-th_i)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (-th_i)^3 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1}-s)^3 f^{IV}(s) ds,$$

$$f_i = f(x_i) = f(x) + f'(x)(1-t)h_i + \frac{f''(x)}{2!} ((1-t)h_i)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} ((1-t)h_i)^3 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \int_x^{x_i} (x_i-s)^3 f^{IV}(s) ds,$$

$$f'_{i-1} = f'(x_{i-1}) = f'(x) + f''(x)(-th_i) + \frac{f'''(x)}{2!} (-th_i)^2 + \\ + \frac{1}{2!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1}-s)^2 f''(s) ds,$$

$$f'_i = f'(x_i) = f'(x) + f''(x)(1-t)h_i + \frac{f'''(x)}{2!} ((1-t)h_i)^2 + \\ + \frac{1}{2!} \int_x^{x_i} (x_i-s)^2 f''(s) ds.$$

Aselma need $R(x)$ vääldisse. Enaldi mäksab välja arvutade funktsiooni f väärustuse $f(x)$ ja tuleliste väärustute vändajad. Näeme, et $f(x)$ vändajad on $\varphi_0(t) + \varphi_1(t) - 1 = 0$, mis järeab esimeses seepool. Analoogiliselt tulub vahetada arvutamisega, et $f'(x), f''(x)$ ja $f'''(x)$ vändajad on vändsed nulltige, keda me siin üksikasjalikult välja ei kirjuta. Niisiis saab

$$R(x) = (1-t)^2 (1+2t) \frac{1}{3!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1}-s)^3 f''(s) ds + \\ + t^2 (3-2t) \frac{1}{3!} \int_x^{x_i} (x_i-s)^3 f''(s) ds + \\ + t(1-t)^2 h_i \frac{1}{2!} \int_x^{x_{i-1}} (x_{i-1}-s)^2 f''(s) ds - \\ - t^2 (1-t) h_i \frac{1}{2!} \int_x^{x_i} (x_i-s)^2 f''(s) ds.$$

Teeme integraalides muutujavahetuse $s = x_{i-1} + \tau h_i$,
 $ds = h_i d\tau$, $x_{i-1} - s = -\tau h_i$, $x_i - s = (1-\tau) h_i$,
integraali rajades vändusele $s = x_{i-1}$ vastab $\tau = 0$,

Wöndus $s = x_i$ suuslo $\tau = 1$ ja $s = x$ tähendab $\tau = t$.

Ylele tulenesena

$$\begin{aligned}
 R(x) &= (1-t)^2(1+2t) \frac{1}{3!} h_i^3 \int_t^1 (-\tau h_i)^3 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
 &\quad + t^2(3-2t) \frac{1}{3!} h_i \int_t^1 ((1-\tau)h_i)^3 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
 &\quad + t(1-t)^2 \frac{1}{2!} h_i^2 \int_t^1 (-\tau h_i)^2 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
 &\quad + (-t^2(1-t)) \frac{1}{2!} h_i^2 \int_t^1 ((1-\tau)h_i)^2 f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau = \\
 &= \frac{h_i^4}{3!} (1-t)^2 \int_0^t ((1+2t)\tau^3 - 3t\tau^2) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau + \\
 &\quad + \frac{h_i^4}{3!} t^2 \int_t^1 ((3-2t)(1-\tau)^3 - 3(1-t)(1-\tau)^2) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_i) d\tau.
 \end{aligned}$$

Muutme lähemalt integreeritavused funktsioone.

Seame $(1+2t)\tau^3 - 3t\tau^2 = \tau^2((1+2t)\tau - 3t)$, milles tegur $(1+2t)\tau - 3t$ on τ suhtes lineaarne funktsioon (ei ole astme polünoom). Integreevminnislõigus $[0, t]$ on $\tau = 0$ korral $-3t \leq 0$, $\tau = t$ korral $(1+2t)t - 3t = 2t^2 - 2t = 2t(t-1) \leq 0$, mis tähendab mittepositiivsust, kui $\tau \in [0, t]$.

Teeses integrandsis $(3-2t)(1-\tau)^3 - 3(1-t)(1-\tau)^2 = (1-\tau)^2((3-2t)(1-\tau) - 3(1-t))$ on samuti teine tegur τ suhtes lineaarne funktsioon. Integreerimislõigus on parametridel $\tau = t$ korral

$(3-2t)(1-t) - 3(1-t) = (1-t)(-2t) \leq 0$, $\forall t \in [0, 1]$ ja $3(1-t)^2 \geq 0$,
 jõuks see on väistav funktioon mittepositiivne,
 kui $t \in [t, 1]$. Integralide hindamisel võtame
 arvesse, et $|f^{(4)}(x_{i-1} + \tau h_i)| \leq \|f^{(4)}\|_\infty$. Siis saame

$$|R(x)| \leq \left(\frac{h_i^4}{3!} (1-t)^2 \int_0^t (3 + \tau^2 - (1+2t)\tau^3) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{h_i^4}{3!} t^2 \int_t^1 (3(1-t)(1-\tau)^2 - (3-2t)(1-\tau)^3) d\tau \right) \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Lemmale eraldi integraalid

$$\int_0^t (3 + \tau^2 - (1+2t)\tau^3) d\tau = \left(t\tau^3 - \frac{1+2t}{4}\tau^4 \right)_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= t^4 - \frac{1+2t}{4} t^4 = \frac{t^4(3-2t)}{4},$$

$$\int_t^1 (3(1-t)(1-\tau)^2 - (3-2t)(1-\tau)^3) d\tau =$$

$$= \left((1-t)(1-\tau)^3 + \frac{(3-2t)(1-\tau)^4}{4} \right)_{\tau=t}^{\tau=1} =$$

$$= (1-t)^4 - \frac{3-2t}{4}(1-t)^4 = (1-t)^4 \frac{1+2t}{4}.$$

Nüüd saame

$$|R(x)| \leq \frac{h_i^4}{4!} t^2 (1-t)^2 \left(t^2(3-2t) + (1-t)^2(1+2t) \right) \|f^{(4)}\|_\infty \leq \\ \leq \frac{h_i^4}{384} \|f^{(4)}\|_\infty,$$

$$\text{sest } t^2(1-t)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{järgi} \quad t^2(3-2t) + (1-t)^2(1+2t) = \varphi_1(t) + \varphi_0(t) = 1.$$

Ollesanne 10. Tõestada $\|R\|_\infty$ hinnaangud nimides $W^{\infty,2}(a,b)$ ja $C^2[a,b]$.

Märkus. Jui $f \in C^4[a,b]$, miss $x \in [x_{i-1}, x_i]$ valem $R(x) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-x_{i-1})^2 (x-x_i)^2$, $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$, ja sellast saab kohre $\|R\|_\infty$ hinnangu näitte, ilma et peaks tõreni tööstuses toodud mihaliselt konaplitseeritud tehnikat kasutama. Isessi on sellisel kontsaina rõhmedega interpolatsiooniliselt jääkliikme aritus saamine, mida kasutades polünoomidega interpolatsioonist käsitlevates algversustes ei usaldada. Materjali terviklikeuse huvides rõhutame järgmine ollesande.

Ollesanne*2. Lagedes teadaolevaks ühekontsaina rõhmede puhul polünoomidega interpolatsioonise esituse, tuletada märkuses toodud jääkliikme aritus ka hekkontsaina rõhmede jahtul.

§8. Interpoleerivate kuupplaneide konstrueerimine

Eeldame, et on antud vörk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, sõlmedele vastavad arvud f_0, \dots, f_n , sooritavsele leidu kuupplaneile $S \in S_{\Delta}^{3,1}$ mida $S(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$. Meenutame, et saine üldise valem: $\dim S_{\Delta}^{m,1} = m+n$, kuupplaneide juhul $m=3$, seega $\dim S_{\Delta}^{3,1} = n+3$. Interpolatsioonitingimust on $n+1$, seepärast on planeedi määramiseks vaja lisatingimusi. Enimantavad on järgnevad toodavad, mida nimetatakse rajatingimusteks, sest need seatakse rajapunktidel vöröt rajapunktidele lähedates punktides:

$$(I) \quad S'(a) = \alpha', \quad S'(b) = \beta' \quad (\alpha' \text{ ja } \beta' \text{ on antud}),$$

$$(II) \quad S''(a) = \alpha'', \quad S''(b) = \beta'',$$

$$(III) \quad S(x_{-1}) = \alpha, \quad S(x_{n+1}) = \beta, \quad \text{kus } x_{-1} \neq x_{n+1} \text{ on lisa-} \\ \text{punktid}, \quad x_{-1} \neq x_i \neq x_{n+1} \neq x_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$(IV) \quad S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0), \quad S'''(x_{n-1} - 0) = S'''(x_{n-1} + 0), \quad \text{seguunel}$$

$$\text{üldiselt } f(x_1 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} f(x) \quad \text{ja} \quad f(x_1 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x > x_1}} f(x),$$

$$(V) \quad S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b), \quad \text{mida nimetatakse perioodi-} \\ \text{litsiks tingimusteks ning neid on võiv kons-} \\ \text{truktida mitte, mis } f_0 = f_n, \text{ mis tagab ühtlasi} \\ \text{selle, et } S(a) = S(b).$$

Tingimused (I) - (IV) võib kantada segaerandina, ühes lõigus $\{a, b\}$ otspunktis ühte tüüpsti tingimus, teises otspunktis teist tüüpsti tingimus. Margime siiaju tööstruktuuri, et kui kantada näiteks

lisatingimustena $S(a) = \alpha'$, $S''(a) = \alpha''$, siis saadame selviõige soovutustikult hals ülesanna.

Juhupssplaini $S \in S_A^{3,1}$ võib ehitada näiteks vastavate B-splainide kui basi kaedue, interpoleerimisel saadame siis eriti kesklaevale koosivordajate määramiseses lineaarne tüsteem, mis on üheselt lahenduv ja interpoleerimisülesandel on demas ühene lahend (selle väite tõestust näeme hiljem). B-splainid kui basas on väga üldine töövahend ning erijuhitudel võib sageli leida üldistest vahenditest paremaid. Taatame siin juhupssplaine ehitamist momentide kaedru, mis olleselt näitab on looduskäeline meetod.

1. Interpoleriva juhupssplaine konstrueerimine teiste momentide abil.

Tahistame $S_i = S(x_i)$, $M_i = S''(x_i)$, $i=0, \dots, n$. Meenutame, et $S \in S_A^{3,1}$ sisaldab endas tõlgimust $S \in C^2[a, b]$, seepärast eksisteerivad $S''(x_i)$. Arve M_i nimetatause splaine teisteks momentideks.

Juri on teada $S_{i-1}, S_i, M_{i-1}, M_i$, saame moodustada funktsiooni

$$S(x) = M_{i-1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} +$$

$$+ \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (1)$$

misde vahende määratuna $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral.

On selge, et võndusega (1) defineeritud $S \in P^3[x_{i-1}, x_i]$.

Näitame, et sellise funktsiooni S korral

$$S(x_{i-1}) = S_{i-1}, S(x_i) = S_i, S''(x_{i-1}) = M_{i-1}, S''(x_i) = M_i. \quad (2)$$

Ajutades näeme, et

$$\begin{aligned} S(x_{i-1}) &= M_{i-1} \frac{h_i^3}{6h_i} + M_i \cdot 0 + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \frac{h_i}{h_i} + \\ &+ \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \cdot 0 = S_{i-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x_i) &= M_{i-1} \cdot 0 + M_i \frac{h_i^3}{6h_i} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \cdot 0 + \\ &+ \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{h_i}{h_i} = S_i. \end{aligned}$$

Esiitusest (1) leidame

$$\begin{aligned} S'(x) &= - M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \\ &+ \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{1}{h_i}, \end{aligned} \quad (3)$$

millega saame

$$S''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (4)$$

ja (4) põhjal $S''(x_{i-1}) = M_{i-1}$, $S''(x_i) = M_i$. Mängime, et

võndus (4) on riidisest Lagrange'i interpolat-

määritluse, sest S'' on osaliseks $[x_{i-1}, x_i]$ erimese astme polynom ja M_{i-1}, M_i on selle väärustused

riidised.

On loomelik viiside, mida ei saa leida.

Teame, et S on osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ kuupoliinoom, seega väiteks $S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ ning tingimused (2) määraad lineaarse mõisteemi vondajad c_0, c_1, c_2, c_3 .

Väesanne 11. Tulebada erites (1), laiendades neljä tundmatu ja neljä vähendatud lineaarse mõisteemi, mis tekib erites $S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ vondajate määramisel tingimuste (2) abil.

Jahsi $S_i, M_i, i=0, \dots, n$, on teada, saab (1) abil üheselt määra funktsiooni $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Seejuures $S \in P^3[x_{i-1}, x_i], i=1, \dots, n$. Lisav näene, et $S(x_i - 0) = S_i$, $S(x_i + 0) = S_i$, $i=1, \dots, n-1$, samuti $S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), i=1, \dots, n-1$.

Jahsi $S_i, M_i, i=0, \dots, n$, valide suvaliselt, mida ei tarvitse S' (on määratud osalõimudeel) olla pidev ja S ei tarvitse olla splain muumis $S_\Delta^{3,1}$. Ruumi $S_\Delta^{3,1}$ kuulumiseks on seejuures tarvilik ja piisav, et $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), i=1, \dots, n-1$ (tuletise S' pidavus sisestümmedes). Nöttes vonduses (3) $x = x_{i-1}$, saame

$$S'(x_{i-1} + 0) = -M_{i-1} \frac{h_i}{2} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6}\right) \left(-\frac{1}{h_i}\right) + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \frac{1}{h_i}$$

ja indeksi nihkega (mõulitult näaberintervallist)

$$S'(x_i + 0) = -M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right) + \left(S_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_{i+1}^2}{6}\right) \frac{1}{h_{i+1}}.$$

Jahu võtame vänduses (3) $x = x_i$, saame

$$S'(x_i=0) = M_i \frac{h_i}{2} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{1}{h_i}.$$

Tuletise S' pidevuse tingimused tulened

$$M_i \frac{h_i}{2} + \left(S_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \left(-\frac{1}{h_i} \right) + \left(S_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{1}{h_i} =$$

$$= -M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \left(S_i - \frac{M_i h_{i+1}^2}{6} \right) \left(-\frac{1}{h_{i+1}} \right) + \left(S_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_{i+1}^2}{6} \right) \frac{1}{h_{i+1}}$$

elue

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} \right) M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i},$$

mis peale korrektust tegutsega $\frac{6}{h_i + h_{i+1}}$ on

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2 M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}}, \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

Nõrandaid (5) nimetatakse kuupplaneerivõndusteks (kui vaja, siis täpsustatakse, et erituse (1) korral) ja nad on kuupplaneerde teooria ülied olulisemad nõandid. Tõastame seadus tulemuse eraldi.

Lause. Tavaliste arvude $S_i, M_i, i=0, \dots, n$, korral muulik vändusega (1) määritud funktsioon S muuli $S_A^{3,1}[x_0, x_n]$ parajasti on, kui veltived vändused (5).

Tähistades

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, d_i = 6 \frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}},$$

seab sisevõrandid kirjutada

$$\mu_i M_{i-1} + 2 M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i=1, \dots, n-1,$$

seejuures $\mu_i + \lambda_i = 1$. Märgime, et

$$\frac{\frac{S_{i+1} - S_i}{h_{i+1}} - \frac{S_i - S_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}} = \frac{S(x_i, x_{i+1}) - S(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}} =$$

$$= S(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{S''(\xi_i)}{2}, \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), d_i = 3 S''(\xi_i).$$

Jahut on vaja leida interpooleerival kuupsplaini, kuid vältame $S_i = S(x_i) = f_i, i=0, \dots, n$, sellega on arvud S_i teada. Et leida $M_i, i=0, \dots, n$, vältame sisevõrandite (need on $n-1$) $d_i = 6 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$

ja lisatause kass lisaingimust, millega saadame $n+1$ võrandit koosnev lineaarne mitteametlikku tundmatu M_0, \dots, M_n määramiseks.

1.1. Jätkame rajatüpmisi (II). Täis saadame mitteametlikku

$$\begin{cases} M_0 = \alpha'', \\ \mu_i M_{i-1} + 2 M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i=1, \dots, n-1, \\ M_n = \beta''. \end{cases}$$

Järingutane mitteametlikku veel meetrikskojal

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \alpha'' \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta'' \end{array} \right).$$

Selles mõisteemis on M_0 ja M_n teed, need võib asendada vastavalt vörnanditega indeksitege 1 ja $n-1$, mille tulemusena saadakse

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 \alpha'', \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \lambda_{n-1} \beta''. \end{array} \right.$$

Mootrikskujul on see mõisteem

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} d_1 - \mu_1 \alpha'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} \beta'' \end{array} \right).$$

Mõenutame, et mootriks

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonaal (peadiagonaal) domineerib riidade kaupa,

$$\text{vai } |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Punktis 1.1 saadud näitusemäl mäetruksi diagonaal domineerib riidade kaupa, kst $\mu_i + \lambda_i = 1 < 2$.

1.2. Täasutame rajatüngimuse (I), mis on
 $S'(x_0) = \alpha'$, $S'(x_n) = \beta'$. Esipool leidsime $S'(x_0) = S(x_0+0) =$

$$= -M_0 \frac{h_1}{2} + \left(S_0 - \frac{M_0 h_1^2}{6}\right) \left(-\frac{1}{h_1}\right) + \left(S_1 - \frac{M_1 h_1^2}{6}\right) \frac{1}{h_1} =$$

$$= -\frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{S_1 - S_0}{h_1},$$

Nõndus $S'(x_0) = \alpha'$ on mida

$$-\frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{S_1 - S_0}{h_1} = \alpha'$$

ehk peale teguriga $-\frac{6}{h_1}$ korutemist

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{S_1 - S_0}{h_1} - \alpha' \right) = d_0,$$

kus nätsime kasutusele tähise d_0 . Analoogiliselt saame

$$S'(x_{n-0}) = M_n \frac{h_n}{2} + \left(S_{n-1} - \frac{M_{n-1} h_n^2}{6}\right) \left(-\frac{1}{h_n}\right) + \left(S_n - \frac{M_n h_n^2}{6}\right) \frac{1}{h_n} =$$

$$= \frac{h_n}{3} M_n + \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n} = \beta'$$

ehk

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left(\beta' - \frac{S_n - S_{n-1}}{h_n} \right) = d_n.$$

Lisades need kaks rajatüngimustest saadud võrrandit viivõrranditale, püsimme rüsteemini

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i=1, \dots, n-1, \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n, \end{cases}$$

mis matrikskujuul on

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & M_1 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & M_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} & M_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & M_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{array} \right).$$

Jäta siin mõistetav matriksi diagonaal domineerib riidade kaupa.

1.3. Vaatame režettingimuste (\bar{IV}) kasutamist.

Nägime, et erituse (1) kasutamine suudab vähenduse (4)

$$S''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Seestleme

$$S'''(x) = -\frac{M_{i-1}}{h_i} + \frac{M_i}{h_i} = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Juhul $i=1$ saab sellest

$$S'''(x_1 - 0) = \frac{M_1 - M_0}{h_1},$$

$i=2$ korral

$$S'''(x_1 + 0) = \frac{M_2 - M_1}{h_2}.$$

Täis vändus $S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0)$ on

$$\frac{M_1 - M_0}{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{h_2}.$$

Avaldame sellega

$$M_0 = \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 - \frac{h_1}{h_2} M_2,$$

mille avendamise eesmäes tulevõimendis

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} M_0 + 2 M_1 + \frac{h_2}{h_1 + h_2} M_2 = d_1.$$

Talle tuleneva

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} \left(\left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 - \frac{h_1}{h_2} M_2 \right) + 2 M_1 + \frac{h_2}{h_1 + h_2} M_2 = d_1.$$

Teatud võimendis on M_1 vondaja $2 + \frac{h_1}{h_2}$ ja

M_2 vondaja

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1^2}{h_2(h_1 + h_2)} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2(h_1 + h_2)} = \frac{h_2 - h_1}{h_2} = 1 - \frac{h_1}{h_2}$$

ning võimendis jäab

$$\left(2 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) M_2 = d_1.$$

Analoogilised arvutused teeme ka tingimuse

$S'''(x_{n-1} - 0) = S'''(x_{n-1} + 0)$ korral ning koos teisendamisel

muutumata jäinud sisevõimenditega same sistemi

$$\begin{cases} \left(2 + \frac{h_1}{h_2}\right) M_1 + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) M_2 = d_1, \\ \lambda_i M_{i-1} + 2 M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i = 2, \dots, n-2, \\ \left(1 - \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) M_{n-2} + \left(2 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) M_{n-1} = d_{n-1}. \end{cases}$$

Talle süsteemi matriksit diagonaal domineerib riidade vaupe, sest näiteks

$$\left| 2 + \frac{h_1}{h_2} \right| - \left| 1 - \frac{h_1}{h_2} \right| \geq 2 + \frac{h_1}{h_2} - \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) = 1.$$

Märkus. Juhjäätta määteeni algsest tulustusest võrrand

$$\frac{M_1 - M_0}{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{h_2}$$

ehk

$$-\frac{1}{h_1} M_0 + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) M_1 - \frac{1}{h_2} M_2 = 0,$$

siss saadud määteeni matriksis ei ole diagonali domineerimist, sest diagonaalil on M_0 kordaja.

Punktides 1.1-1.3 saadud süsteemide matriigid on valmed diagonalsed, mis tähendab seda, et nullist erinevad elemendid on siinult peadiagonaalt ja sellest all- ja ülapool olevatel naaberdiagonaalidel.

1.4. Vaatame tingimust (III), st. $S(x_{-1}) = \alpha, S(x_{n+1}) = \beta$.

Näitame, et need saab taandada tingimustele (IV).

Olgu chialgu $x_{-1} < x_0 < x_1 & x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$, millega tekib võime

$$\Delta': x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1}.$$

