

Sissejuhatus algebra struktuuridesse

1. praktikumi ülesanded

Algebralised struktuurid. Vektorruumid.

1. Tõestada, et $\mathbb{R}$ mõõde üle $\mathbb{Q}$ ei ole lõplik ega isegi mitte loenduv.
2. Olgu V lõpmatumõõtmeline vektorruum ja $f : V \rightarrow W$ lineaarkujutus. Tõestada, et kas $\ker f$ või $\operatorname{Im} f$ on lõpmatumõõtmeline.
3. Olgu $W = \{f : [0, 2023] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$. Leida faktorruum $\mathbb{R}^{[0, 2023]} / W$ (üle $\mathbb{R}$), st leida mõni tuttav vektorruum, mis on sellega isomorfne.
4. Leida faktorrühmad $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 / \langle (2, 2) \rangle$ ja $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$).
5. Leida kõik homomorfismid rühmast $(\mathbb{Z}_9, +)$ rühma $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$.
(Rühma $U(\mathbb{Z}_{18})$ kirjelduse jaoks võib kasutada Arvuteooria konspekti seksiooni 4.2 tulemusi.)
6. Olgu $n \geq 2$. Tõestada, et ükski (aditiivsete) rühmade homomorfism $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ei saa olla injektiivne.
7. Olgu V_1 ja V_2 (mitte tingimata lõplikumõõtmelise) vektorruumi V kaks alamruumi, kusjuures $V_1 \not\subseteq V_2$ ja $V_2 \not\subseteq V_1$. Tõestada, et

$$\dim(V_1 + V_2) \geq \dim(V_1 \cap V_2) + 2.$$
8. Olgu G rühm ning $f(x) = x^6$ ja $\varphi(x) = x^{10}$ selle *injektiivsed* endomorfismid. Tõestada, et G on kommutatiivne.
- 9*. Olgu G lõplik rühm ja f selle automorfism, kusjuures $f(x) = x^{-1}$ rohkem kui $\frac{3}{4}|G|$ elemendi korral. Tõestada, et G on Abeli rühm.
- 10**. Tõestada või lükata ümber: iga vektorruumi V üle K (nii lõpliku- kui lõpmatumõõtmelise) mistahes endomorfism $f : V \rightarrow V$ on avaldatav kujul

$$\sum_{i=1}^{n_f} k_{f,i} f_{f,i},$$
 kus $k_{f,i} \in K$ ja $f_{f,i}$ on mingid V endomorfismid, mis rahuldavad tingimust $f_{f,i} \circ f_{f,i} = f_{f,i}$.