

Sissejuhatus algebra struktuuridesse 2. praktikumi ülesanded

Rühmateooria.

Cauchy teoreem: Kui $p \in \mathbb{P}$, G on lõplik rühm ja $p \mid |G|$, siis rühmas G leidub järku p element.

1. Tõestada, et $f : U(\mathbb{Z}_{132}) \rightarrow U(\mathbb{Z}_{132})$, $f(g) = g^5$, on homomorfism ja leida selle tuum (isomorfismi täpsuseni).
2. Leida kõik homomorfismid $f : (S_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, kui $n \geq 5$. Tõestuseta võib kasutada fakti, et A_n on ainus S_n mittetriviaalne normaaljagaja ($n \geq 5$).
3. Tõestada, et kui lõpliku rühma G kõik elemendid peale ühikelemendi on sama järku, siis see järk on algarv. Kas ka $|G|$ peab olema algarv?
4. Olgu G rühm ja H tema normaaljagaja, kusjuures kõik nii H kui G/H elemendid on lõplikku järku. Tõestada, et kõik G elemendid on lõplikku järku.
5. Olgu G rühm, $H, K, N \leq G$, $N \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq H$ ja H/K Abeli rühm. Tõestada, et HN/KN on samuti Abeli rühm.
6. Olgu G rühm, millel on lõpmatu tsükliline faktorrühm. Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral on rühmal G järku n faktorrühm.
7. Olgu G lõplik rühm, $N_1 \trianglelefteq G$ ja $N_2 \trianglelefteq G$, $N_1 \cap N_2 = \{1\}$, $G = N_1 \cdot N_2$ ja $|G| = |N_1| \cdot |N_2|$. Tõestada, et $G \cong N_1 \times N_2$.
8. Olgu G ja H mittekommutatiivsed lihtsad rühmad. Tõestada, et rühmal $G \times H$ on täpselt neli normaaljagajat.
- 9*. Olgu $p > q$ algarvud, kusjuures $q \mid p - 1$. Tõestada, et mistahes järku pq mittekommutatiivsed rühmad on isomorfsed.
- 10°. Olgu p algarv.
 - * Tõestada, et leidub *ülimalt* 5 rühma, mille järk on p^3 .
 - ** Tõestada, et leidub *täpselt* 5 rühma, mille järk on p^3 .