

# Sissejuhatus algebra struktuuridesse

## 3. praktikumi ülesanded

### Abeli rühmad.

Lõplikult moodustatud Abeli rühmade põhiteoreem (LMARPT): Mati Kilbi õpiku “Algebra I” (2005) teoreem 11.6.5.

1. Tõestada, et iga ülimalt järku 5 rühm on Abeli rühm.
2. Leida isomorfismi täpsuseni kõik lihtsad Abeli rühmad.
3. Tõestada, et igas Abeli rühmas, mille järk on 2023, leidub element, mille järk on 119.
4. Leida rühma  $(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{20}, +)$  elementide suurim võimalik järk ja üks konkreetne seda järku element.
5. Leida rühma  $(\mathbb{Z}_{24}, +)$  kõigi elementide järgud ja lahutada see rühm oma  $p$ -komponentide (sisemiseks) otsesummaks.
6. Olgu  $P$  lõplik  $p$ -rühm,  $A$  tema normaaljagaja ja  $|A| = p$ . Tõestada, et
$$A \subseteq Z(P) = \{z \in P \mid zg = gz \ \forall g \in P\}.$$
7. Tõestada, et igas Abeli rühmas  $A$  leidub jaguv alamrühm  $B$  nii, et  $A/B$  ainus jaguv alamrühm on  $\{0\}$ .
8. Olgu  $A$  lõplik Abeli rühm ja  $|A| = |\text{End}(A)|$ . Leida  $A$  (isomorfismi täpsuseni).
- 9\*. Tõestada, et kui  $G$  on rühm, mille järk on  $p^k$ , siis leidub kommutatiivne normaaljagaja  $H \trianglelefteq G$  nii, et 
$$\sum_{i=1}^{\log_p |H|} i \geq k.$$
- 10\*\*. Olgu  $p$  ja  $q$  algarvud. Tõestada, et isomorfismi täpsuseni on kas üks või kaks erinevat rühma, mille järk on  $pq$ .