

Sissejuhatus algebra struktuuridesse

4. praktikumi ülesanded

Ringid ja moodulid.

1. Tõestada, et lõpliku kommutatiivse ühikuga ringi R iga nullist erinev element on kas pööratav või nullitegur.
2. Leida faktoring $\mathbb{Z}[i]/\langle i - 2023 \rangle$, kus $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ on Gaussi täisarvude ring.
3. Tõestada, et kui I on kommutatiivse ühikuga ringi R ideaal, siis I on maksimaalne (kõigi pärisideaalide seas) parajasti siis, kui R/I on korpus.
4. Tõestada Braueri lemma: Olgu R mittetriviaalne ühikuga ring ja M selle minimaalne vasakpoolne ideaal. Siis kas $M^2 = \{0\}$ või $M = Re$, kus $e^2 = e$ ja eRe on jagamisega ring.
5. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$. Leida kõigi (ühikuta) ringide homomorfismide $\mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n$ koguarv.

Moodul $M \neq \{0\}$ üle ringi R on *lihtne*, kui tema ainsad alammodulid on $\{0\}$ ja M .

6. Tõestada, et moodul M on lihtne parajasti siis, kui iga nullist erinev homomorfism $M \rightarrow N$ suvalisse teise moodulisse N on injektiivne.
7. Öeldakse, et lühike täpne jada $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ *tegurdub*, kui leidub selline homomorfism $h : C \rightarrow B$, et $gh = 1_C$. Tõestada, et iga lühike täpne jada, kus C on vaba moodul, tegurdub.
8. Tõestada, et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ üle $\mathbb{Z}$ on injektiivne, aga ei ole projektiivne.
- 9*. Olgu R kommutatiivne ring ja $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ vastava polünoomide ringi mingi nullitegur. Tõestada, et leidub $a \in R$ nii, et $a_n a = a_{n-1} a = \dots = a_1 a = a_0 a = 0$.

- 10**. Olgu R ring, millel on paaritu arv pööratavaid elemente. Tõestada, et see arv on kujul $\prod_{i=1}^s (2^{k_i} - 1)$.