

Sissejuhatus algebra struktuuridesse

5. praktikumi ülesanded

Poolrühmad.

Poolrühm S on *vasakult taandamisega*, kui $\forall s, u, v \in S (su = sv \Rightarrow u = v)$.

Poolrühm S on *paremalt taandamisega*, kui $\forall s, u, v \in S (us = vs \Rightarrow u = v)$.

1. Defineerime hulgal $\mathbb{Z}_n \setminus \{\overline{n-1}\}$ tehte $*$ võrdusega $\overline{m} * \overline{n} = \overline{m} + \overline{n} + \overline{m} \cdot \overline{n}$. Kas saadud struktuur on poolrühm? Rühm? Miks?
2. Tõestada, et vasakpoolse ühikelemendi (st iga s korral $1 \cdot s = s$) ja vasakpoolsete pöördelementidega (st iga s jaoks leidub t , nii, et $ts = 1$) poolrühm on rühm.
3. Tõestada, et *lõplik* poolrühm on nii vasakult kui paremalt taandamisega parajasti siis, kui see on rühm. Kas sama väide kehtib ka lõpmatute poolrühmade korral? Miks?
4. Olgu $I \neq \emptyset$ ja $J \neq \emptyset$ poolrühma S (kahepoolsed) ideaalid. Tõestada, et $I \cup J$ ja $I \cap J$ on samuti S mittetühjad ideaalid ning et järgmised Reesi faktorpoolrühmad on isomorfsed:

$$(I \cup J)/J \cong I/(I \cap J).$$

5. Poolrühm S on antud oma Cayley tabeliga

S	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	6	6
2	1	1	1	1	1	6	6
3	1	1	1	1	1	6	6
4	1	1	1	2	1	6	6
5	5	5	5	5	5	7	7
6	1	1	1	1	1	6	6
7	5	5	5	5	5	7	7

Kirjutada elementhaaval üles poolrühma S kõik $\mathcal{D}$ -klassid ja nende jaotus $\mathcal{L}$ - ja $\mathcal{R}$ -klassideks (nn “munaresti” diagramm).

6. Tõestada, et kui $\lambda \subseteq \mathcal{L}$ on poolrühma S vasakpoolne ja $\rho \subseteq \mathcal{R}$ parempoolne kongruents, siis $\lambda \circ \rho = \rho \circ \lambda$.

7. Tõestada Lallement'i lemma: Kui S on regulaarne poolrühm, ρ selle kongruents ja $[a]_\rho$ faktorpoolrühma S/ρ idempotent, siis leidub $e \in E(S)$ nii, et $[e]_\rho = [a]_\rho$, st iga idempotentne kõrvalklass on idempotendi kõrvalklass.

8. Tõestada, et kui inversses poolrühmas kõik elemendid kommuteeruvad oma inverssete elementidega (st $xx' = x'x$), siis see poolrühm on rühmade ühend.

- 9*. Tõestada, et lõpliku lihtsa poolrühma mistahes alampoolrühm on lihtne.

10*. Olgu S täiesti lihtne poolrühm ja $|S| = pq$, kus p ja q on algarvud. Tõestada, et S on kas riskülikpoolrühm, paremrühm või vasakrühm (paremrühm on sarnane rühmaga, aga temas peab leiduma vaid vasakpoolne ühikelement ja kõik parempoolsed pöördelemendid viimase suhtes; vasakrühmas vastupidi; ühikelement ega pöördelement ei pea olema ühesed).