

Sissejuhatus algebra struktuuridesse

6. praktikumi ülesanded

Polügoonid.

1. Tõestada, et $N = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min)$ on monoid ja $\mathbb{N}_N$ on polügoon üle N , kui defineerida N toime hulgal $\mathbb{N}$ järgmiselt:

$$\begin{cases} 1 \cdot m = 1 \\ n \cdot m = \prod_{i \leq m} p_i \end{cases}, \quad \text{kui } n = \prod_{i=1}^k p_i \text{ on } n \text{ lahutus algteguriteks ja } p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k.$$

2. Olgu antud monoid $\mathbb{N}_0 = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ ja vaatleme teda polügoonina $\mathbb{N}_{0\mathbb{N}_0}$ üle iseenda. Leida kõik $\mathbb{N}_{0\mathbb{N}_0}$ alampolügoonid.

3. Olgu $T := \mathcal{T}_{\{1,2,3\}}$ hulga $\{1, 2, 3\}$ kõigi teisenduste monoid (teisenduste korrutamine on paremalt vasakule), $f \in T$, $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 3$. Leida ${}_T T$ vähim alampolügoon, mis sisaldab teisendust f .

4. Leida kõik polügooni N_N endomorfismid, kui $N = (\mathbb{N}, \max)$.

5. Lahutada ülesandes 1. esinev polügoon $\mathbb{N}_N$ oma lahutumatute alampolügoonide lõikumatuks ühendiks.

6. Tõestada, et kõik polügoonid üle üheelemendilise monoidi $M = \{1\}$ on vabad.

7. Tuua näide projektiivsest polügoonist, mis ei ole vaba. Põhjendada vastust.

8. Olgu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kõigi naturaalarvude teisenduste monoid (korrutamise järjekord paremalt vasakule). Leida kõik projektiivsed vasakpoolsed $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ -polügoonid.

9*. Olgu M m -elemendiline *vasakpoolse* nullkorrutamisega poolrühm (st $xy = x$), M^1 monoid, mis on saadud sellele välise ühikelemendi lisamisel, ja A n -elemendiline hulk. Mitu erinevat *parempoolse* M -polügooni struktuuri on võimalik hulgal A defineerida?

10*. Vaatleme monoidi $(\mathbb{N}, \cdot)$ polügoonina $\mathbb{N}_{\mathbb{N}}$ üle iseenda. Leida kõik $\mathbb{N}_{\mathbb{N}}$ alam- ja faktor-polügoonid.