

Sissejuhatus algebra struktuuridesse

7. praktikumi ülesanded

Lõplikud korpused.

1. Leida kõik ülimalt kolmanda astme taandumatud polünoomid $f(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$.
2. Leida ringi $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 1)$ korrutustabel. Kas see ring on korpus?
3. Tõestada, et faktoring $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 3)$ on korpus $\mathbb{F}_{25}$. Leida mingi $\mathbb{F}_{25}$ primitiivne element ja selle elemendi astmete esitused polünoomide kujul (nagu tabelis loengukonspekti leheküljel 116).
4. Leida järgmise avaldise väärtus korpuses $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 3)$:

$$([x^4 + 3x^2 + 2x + 1] + [x - 1]^{2023} + [x^3 + x + 1]) \cdot ([x^{23} - x] + [x^3 + 2x + 3]) .$$
5. Leida kõik korpuse $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$ primitiivsed elemendid.
6. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja K lõplik korpus. Leida $\sum_{x \in K} x^n$.
7. Olgu K lõplik korpus, $k \in K$ ja $n \in \mathbb{N}$. Leida, mitu erinevat juurt on polünoomil $x^n - k$.
8. Olgu K lõplik korpus ja $f \in K[x]$. Tõestada, et kui $f'(x) = 0$, siis f ei ole taandumatu.
- 9*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida kõik (mitte tingimata ühikuga või kommutatiivsed, aga assotsiatiivsed) ringid R , mis sisaldavad vähemalt ühte mittenilpotentset elementi ja kus mistahes nullist erinevate r ja s korral kehtib $r^n = s^n$.
- 10**. Olgu K lõplik korpus, $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_n, k \in K$. Millised järgmistest võrranditest on lahenduvad:

$$\sum_{i=1}^n k_i (x_i)^2 = k?$$