Maatriksi SV-dekompositsioon

1. Kui $A = (a_{i,j}) \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ ja $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in Mat_{n,1}(\mathbb{R})$ ja $y = (y_1, \ldots, y_m)^t \in Mat_{m,1}(\mathbb{R})$ on mistahes vektorid, siis

$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle x, A^t y\right\rangle.$$

2. Kui $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$, siis maatriksi A^tA omaväärtused on mittenegatiivsed reaalarvud.

3. Mistahes maatriks $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ on esitatav kujul

$$A = UDV^t \tag{1}$$

kus $U \in Mat_m(\mathbb{R})$ ja $V \in Mat_n(\mathbb{R})$ on ortogonaalsed maatriksid ja $D \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ on diagonaalmaatriks (s.t. kui $d_{ij} \neq 0$, siis $i = j$), mille diagonaalielemendid on järjestatud mittekasvavalt. Veelgi enam, need maatriksid saab valida nii, et $A = U_1D_1V_1^t$, kus U_1 koosneb maatriksi U r esimesest veeruvektorist, V_1 koosneb maatriksi V r esimesest veeruvektorist ja D_1 on D alammaatriks, mis asub esimeses r reas ja veerus.

Esitust kujul (1) nimetatatakse maatriksi *SV-dekompositsiooniks (*SVD=*singular value decomposition).*

4. Tähistame sümboliga $N(A)$ maatriksi A nn. nullruumi $\{x \in Mat_{n,1}(\mathbb{R}) \mid Ax = 0\}$, s.t. maatriksile A vastava lineaarkujutuse tuuma. Siis $N(A^tA) = N(A)$.

5. Olgu maatriksi $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ astak r. Siis r on ka maatriksi A^tA astak ja samuti nullist erinevate omaväärtuste arv.

Kuna D_1 on diagonaalmaatriks, siis

$$A = U_1D_1V_1^t = D_1U_1V_1^t = D_1(u_1 \ldots u_r)\begin{pmatrix} v_1^t \\ \cdots \\ v_r^t \end{pmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^t + \ldots + \sigma_r u_r v_r^t. \tag{2}$$

Seega maatriksi A võib esitada r maatriksi summana. Seda asjaolu saab ära kasutada näiteks piltide pakkimisel. Pilti võib kujutada ette täisarvuliste elementidega maatriksina, mille iga element tähistab vastava punkti värvi. Avaldisest (2) on näha, et iga järgnev liidetav annab tänu omaväärtuste $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ järjestatusele maatriksisse A järjest väiksema "panuse". Seega võib pilti (maatriksit A) lähendada ühe teise maatriksiga, kuhu võtame ainult mingid $k \leq r$ esimest liidetavat. Kuna juba piisavalt väikeste k-de korral osutub originaalpilt lähendist silmaga eristamatuks, siis polegi mõtet säilitada tervet maatriksit A, vaid piisab, kui säilitada vektorid $u_1, \ldots, u_k$ ja $v_1, \ldots, v_k$ ning arvud $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$.