

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Juhuslikud protsessid (MTMS.02.003)

Praktikumiülesanded

Kalev Pärna, Meelis Käärik

Tartu, 2019

1 Markovi ahelad (diskreetse ajaga)

Ülesanne 1.1. Kolm valget ja kolm musta palli on jagatud kahte urni nii, et kummaski urnis on 3 palli. Me ütleme, et süsteem on olekus k , $k = 0, 1, 2, 3$, kui esimeses urnis on k valget palli. Igal sammul võtame kummastki urnist suvalise palli ja paneme esimesest urnist võetud palli teise ja teisest urnist võetud palli esimesse. Olgu X_n sellise süsteemi olek n -ndal sammul. Selgita, miks $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ on Markovi ahel ja leia tema üleminekumaatriks.

Ülesanne 1.2. Olgu antud kolme olekuga $(0, 1, 2)$ Markovi ahel $X_0, X_1, \dots$ üleminekumaatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

ja algjaotusega $p_0^0 = \mathbf{P}\{X_0 = 0\} = 0,3$, $p_1^0 = \mathbf{P}\{X_0 = 1\} = 0,4$ ja $p_2^0 = \mathbf{P}\{X_0 = 2\} = 0,3$. Leia

- $\mathbf{P}\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$;
- $\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0\}$;
- $\mathbf{P}\{X_2 = 1, X_3 = 1 | X_1 = 0\}$;
- $\mathbf{P}\{X_2 = 1, X_3 = 2 | X_0 = 0\}$.

Ülesanne 1.3. Tõestada, et Markovi ahela definitsioonis toodud tingimuse võib sõnastada järgnevalt: *fikseeritud oleviku korral tulevik ei sõltu minevikust*, kontrollides tõenäosuste korrutamise lauset sõltumatute sündmuste jaoks: näidata, et suvaliste $t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \dots < t_{k+m}$ korral kehtib

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{X_{t_{k+1}} = x_{k+1}, \dots, X_{t_{k+n}} = x_{k+n}, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{k-1}} = x_{k-1} | X_{t_k} = x_k\} = \\ &\mathbf{P}\{X_{t_{k+1}} = x_{k+1}, \dots, X_{t_{k+n}} = x_{k+n} | X_{t_k} = x_k\} \\ &\cdot \mathbf{P}\{X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{k-1}} = x_{k-1} | X_{t_k} = x_k\}. \end{aligned}$$

Ülesanne 1.4. Juhuslikud suurused $Y_1, Y_2, \dots$ on sõltumatud ja sama jaotusega, nende tõenäosusfunktsioon on toodud järgmises tabelis:

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}\{Y = k\}$	0,1	0,3	0,2	0,4

Olgu $X_0 = 0$ ja $X_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$. Leia Markovi ahela $\{X_n\}$ üleminekumaatriks.

Ülesanne 1.5. Vaatleme tootmisprotsessi, kus iga valminud toode liigitatakse kas heas korras või defektiga tooteks. Oletame lisaks, et tõenäosusega α järgneb heas korras tootele heas korras toode ja tõenäosusega β järgneb defektiga tootele defektiga toode. Kirjelda antud protsessi Markovi ahelana ja leia selle üleminekumaatriks. Kui esimene toode oli heas korras, milline on tõenäosus, et viies toode on esimene defektiga toode?

Ülesanne 1.6. Osake liigub kolme oleku vahel $(0, 1, 2)$ Markovi ahela kohaselt, mille üleminekumaatriks on

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tähistagu X_n osakese asukohta n sammu järel. Leia $\mathbf{P}\{X_n = 0 | X_0 = 0\}$, kus $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ülesanne 1.7. Vaatleme laoseisu mudelit, kus nõudlus toodete järele igas perioodis saab olla kas 0, 1 või 2, kusjuures

$$\mathbf{P}\{Y_n = 0\} = 0,4, \quad \mathbf{P}\{Y_n = 1\} = 0,3, \quad \mathbf{P}\{Y_n = 2\} = 0,3$$

ning lao kriitiline alampiir $s = 0$ ning ülempiir $S = 3$. Olgu X_n laoseis perioodi n lõpuks, leia Markovi ahela $\{X_n\}$ üleminekumaatriks.

Ülesanne 1.8. Urnis on 3 punast ja 3 rohelist palli. Vaatleme järgmist protsessi: igal sammul võetakse urnist suvalised 2 palli, kui üks pallidest on punane ja teine roheline, siis pannakse nende asemel urni 2 sinist palli, vastasel korral pannakse võetud pallid urni tagasi. Protsessi korraldatakse kuni urnis on ainult sinised pallid. Tähistagu X_n punaste pallide arvu urnis peale n -ndat sammu ja algolek on seega $X_0 = 3$. Tegemist on lihtsa keemilise reaktsiooni mudeliga, kus rohelised ja punased aatomid tekitavad ühinedes sinise molekuli. Leia Markovi ahelale $\{X_n\}$ vastav üleminekumaatriks.

Ülesanne 1.9. Visatakse kolme ausat münti. Olgu X_1 saadud "kirjade" arv. Seejärel võetakse need mündid, mille tulemus oli "kiri" ja visatakse neid uuesti. Olgu X_2 niimoodi saadud "kullide" arv (st need, mis saadi esimesel viskel + need, mis saadi teisel viskel). Seejärel võetakse kõik need mündid, mille tulemus oli "kull" ja visatakse neid uuesti ning X_3 on laual olevate "kirjade" arv. Protsess jätkub sama loogikaga (loeme kokku "kirjad", viskame kõik "kirjad" uuesti, loeme kokku "kullid", viskame "kullid" uuesti, jne), kusjuures $X_0 = 3$. Leia Markovi ahela $\{X_n\}$ üleminekumaatriks.

Ülesanne 1.10. Markovi ahela, mille seisundid on $\{0, 1, 2, 3\}$, ülemineku-maatriks on

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

- Määrata selle ahela ebaolulised seisundid.
- Jagada olulised seisundid kaasnevate seisundite klassideks.
- Määrata selle ahela iga kaasnevate seisundite klassi korduvad seisundid, mööduvad seisundid, neelavad seisundid. Põhjendada!

Ülesanne 1.11. Oletame, et see, kas täna sajab, sõltub sellest, milline oli ilm kolmel eelneval päeval (sadas/ei sadanud). Kuidas saab vaadelda va süsteemi muuta Markovi ahelaks? Mitu olekut läheb vaja?

Ülesanne 1.12. Vaatleme protsessi $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$, mis võtab väärtusi 0, 1 ja 2. Oletame, et

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} = \begin{cases} p'_{ij}, & \text{kui } n \text{ on paaris,} \\ p''_{ij}, & \text{kui } n \text{ on paaritu,} \end{cases}$$

kus $\sum_{j=0}^2 p'_{ij} = \sum_{j=0}^2 p''_{ij} = 1, i = 0, 1, 2$. Kas $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ on Markovi ahel? Kui ei, siis kuidas me saaksime ta muuta Markovi ahelaks?

Ülesanne 1.13. Leida sümmeetrilise juhusliku ekslemise ($p = 1 - p = \frac{1}{2}$), kus 0 ja $N = 4$ on neelavad seisundid, üleminekumaatriks 2 ja 3 sammu jooksul (seega $P(2)$ ja $P(3)$).

Ülesanne 1.14. Näidata, et peegeldusega ekslemise korral lõigu $[0, N]$ täisarvulistel punktidel ($p_{01} = 1, p_{N,N-1} = 1$) on kõik seisundid olulised ja kaasnevad.

Ülesanne 1.15. Olgu meil kaks "ebaausat" münti, esimesel kulli tulemise tõenäosus 0,7 ja teisel 0,6. Konstrueerime järgmise süsteemi: valime kõigepealt suvalise müntidest (tõenäosusega $\frac{1}{2}$) ja viskame seda. Kui tulemuseks on kull, siis viskame järgmisel katsel esimest münti, kui kiri, siis teist münti. Milline on tõenäosus, et kolmandal katsel peale avakatset viskame esimest münti?

Ülesanne 1.16. Vaatleme kahe seisundiga Markovi ahelat, mille ülemineku-maatriks on

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Tõestada matemaatilist induktsiooni kasutades, et

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

Ülesanne 1.17. Üleminekumaatriksit nimetame *topelt-stohhastiliseks*, kui lisaks ridade summadele on ka veergude summad võrdsed ühega: iga j korral $\sum_i p_{ij} = 1$. Vaatleme ühte sellist Markovi ahelat ja eeldame lisaks, et ta on taandumatu ja aperioidiline ning võimalikud seisundid on $0, 1, \dots, M$. Näita, et sellisel juhul piirtõenäosused p_j^* avalduvad $p_j^* = \frac{1}{M+1}$, $j = 0, 1, \dots, M$.

Ülesanne 1.18. Olgu Y_n n täringuviske tulemusel saadud punktide summa. Leia $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Y_n \text{ jagub arvuga } 13\}$.

Vihje: defineeri sobiv Markovi ahel ja kasuta eelmise ülesande tulemust.

Ülesanne 1.19. Suurfirmas on tööl N töötajat ja firma on tegev kolmes erinevas valdkonnas. Firma töötajad liiguvad valdkondade vahel (teineteisest sõltumatult) Markovi ahela järgi, mille üleminekumaatriks avaldub:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Millised on töötajate osakaalud tegevusvaldkondades?

Ülesanne 1.20. Vaatleme 2 hasartmängijat A ja B, sh olgu mängija A võidu tõenäosus 0,49. Olgu iga mängu panus 1 rahaühik ja alustagu mõlemad mängijad 50 rahaühikuga. Milline on tõenäosus, et mängija A laostub? Milline on see tõenäosus juhul, kui mängija B alustab 25 rahaühikuga? Milline on see tõenäosus juhul, kui mõlemad mängijad alustavad 500 rahaühikuga?

Ülesanne 1.21. Vaatleme loengus toodud näidet maletajatest (näide 1.5.4). Näidata, et

$$p_1^* - p = \varepsilon \frac{p - q}{1 - 2\varepsilon},$$

kus p on võidu tõenäosus mängija A korral. Analüüsida, millal on võrduse parem pool suurem nullist, millal väiksem nullist (ε võib olla nii suurem kui väiksem nullist).

Ülesanne 1.22. Vaatleme kahe seisundiga (0 ja 1) Markovi ahelat $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ja olgu teada, et $p_{01} = \alpha$ ja $p_{10} = \beta$. Kirjuta välja selle ahela üleminekumaatriks P ja leia piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Piirväärtuse leidmisel vaata eraldi juhte $\alpha = 0, 0 < \alpha < 1, \alpha = 1$ (sama β korral).

2 Poissoni protsessid

Ülesanne 2.1. Teatud tüüpi raadiote tööiga on eksponentjaotusega juhuslik suurus keskväärtusega 10 aastat. Üliõpilane ostab veerand hinnaga raadio, mis on 8 aastat vana ja töötab. Kui suur on tõenäosus, et see raadio töötab veel vähemalt 12 aastat?

Ülesanne 2.2. Vaatleme sõltumatuid juhuslikke suurusi $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$ ja $X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda_3)$. Leia järgmised tõenäosused:

- (a) $\mathbf{P}\{X_1 < X_2\}$;
- (b) $\mathbf{P}\{\min(X_2, X_3) > x\}$;
- (c) $\mathbf{P}\{X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)\}$;
- (d) $\mathbf{P}\{X_1 < X_2 < X_3\}$.

Ülesanne 2.3. Näidata (üldjuhu jaoks), et Poissoni protsessi definitsioonist 2.2.3 järeldub

$$\mathbf{P}\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ülesanne 2.4. Säutsud vaadeldavas Twitteri uudisvoogu saabuvad Poissoni protsessi kohaselt, keskmiselt 3 säutsu tunnis.

- a) Leia tõenäosus, et kella 8:00 ja 12:00 vahel ei saabunud ühtegi säutsu.
- b) Mis jaotusega on aeg esimese säutsu saabumiseni?

Ülesanne 2.5. Külastajad saabuvad kaubanduskeskusse Poissoni protsessi kohaselt intentsiivsusega $\lambda = 2$. Olgu $N(t)$ ajahetkeks t saabunud külastajate arv. Leia järgmised tõenäosused:

- a) $\mathbf{P}\{N(1) = 2\}$;
- b) $\mathbf{P}\{N(1) \leq 2\}$;
- c) $\mathbf{P}\{N(1) = 2, N(3) = 6\}$;
- d) $\mathbf{P}\{N(1) = 2 | N(3) = 6\}$;
- e) $\mathbf{P}\{N(3) = 6 | N(1) = 2\}$;
- f) $\mathbf{P}\{N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1\}$.

Ülesanne 2.6. Olgu $\{N(t), t \geq 0\}$ Poissoni protsess parameetriga $\lambda = 2$. Leia järgmised keskväärtused:

- a) $E[N(2)]$;
- b) $E[\{N(1)\}^2]$;
- c) $E[N(1)N(2)]$.

Ülesanne 2.7. Maja asub tee ääres, kus autod liiguvad Poissoni protsessi kohaselt tihedusega 1 auto 2 minuti kohta.

- (a) Milline on tõenäosus, et 10 minuti jooksul möödub majast täpselt 5 autot?
- (b) Milline on tõenäosus, et 10 minuti jooksul möödub majast täpselt 5 autot, kui on teada, et esimese 5 minuti jooksul möödus majast 1 auto?
- (c) Milline on tõenäosus, et kõigis kolmes ajavahemikus $10^{00} - 10^{02}$, $10^{02} - 10^{04}$, $10^{04} - 10^{06}$ möödus majast vähemalt 1 auto.
- (d) Kas Poissoni protsess sobib kirjeldama tiheda liiklusega teed? Põhjenda.

Ülesanne 2.8. Tõestada, et kahe sõltumatu Poissoni jaotusega juhusliku suuruse summa on samuti Poissoni jaotusega, kusjuures parameetrid liituvad.

Vihje: Newtoni binoomvalem $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Ülesanne 2.9. Olgu S_n n -nda sündmuse toimumise hetk Poissoni protsessis intensiivsusega λ . Näita, et

$$f_{S_n}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Vihje: võta valemist (2.5) tuletis t järgi.

Ülesanne 2.10. Olgu meil antud Poissoni protsess intensiivsusega λ . Vaatleme selle protsessi järgnevaid võimalikke muudatusi:

- (a) Kustutame iga teise sündmuse toimumise hetke.
- (b) Lisame sündmuste toimumised hetkedel $t = 1, 2, 3, \dots$
- (c) Lisame sündmuste toimumised hetkedel $2t$, kui sündmused toimusid hetkedel t .
- (d) Lisame sündmuste toimumishetked sõltumatust Poissoni protsessist intentsiivsusega μ .
- (e) Kustutame kõik toimumishetked, mis on eelmisele toimumishetkele lähemal kui 1 ajaühik.
- (f) Iga üksiku toimumishetke korral kustutame ta tõenäosusega p , sõltumata teistest toimumishetkedest.

Millised nii saadud protsessidest on Poissoni protsessid? Põhjenda.

Ülesanne 2.11. Vaatleme kolme sissekäiguga pubi. Külastajad saavad esimesest uksest sagedusega 1 inimene minutis, teisest uksest sagedusega 1 inimene 2 minutis ja kolmandast uksest sagedusega 1 inimene 3 minutis (seejuures külastajate saabumine ühest uksest ei sõltu külaliste saabumisest teistest udest). Kasutades Poissoni protsessi mudelit, leia järgmiste sündmuste tõenäosused:

- (a) Esimese 6 minuti jooksul peale avamist ei saabu esimesest uksest ühtegi külastajat.
- (b) Esimese 6 minuti jooksul ei saabu üldse ühtegi külastajat.
- (c) Esimese 6 minuti jooksul saabub 5 külastajat, neist (täpselt) 2 esimesest uksest.
- (d) Esimese 6 minuti jooksul saabub igast uksest vähemalt 2 külastajat.
- (e) Teine külastaja saabub teisest uksest.

Ülesanne 2.12. Vaatleme sama pubi, mis eelmises ülesandes, aga eeldame lisaks, et esimene uks viib eraldi baari. Baarman on selle baari külastajaid pikalt jälgides tähele pannud, et 60% tellib õlut, 25% mahla ja 15% veini.

- (a) Kui pika aja pärast peale baari avamist on tõenäosus, et baarman on vähemalt korra õlut serveerinud, vähemalt 0,8 (teenindusaega mitte arvestada)?
- (b) Milline on tõenäosus, et kolm esimest külastajat tellivad kõik eri tüüpi jooki (suvalises järjekorras)?
- (c) Milline on ligikaudne tõenäosus, et esimese 2 minuti jooksul tellitakse rohkem veini kui mahla?

Ülesanne 2.13. Külastajad saavad teenindusasutusse Poissoni protsessi kohaselt sagedusega λ klienti tunnis. Olgu $N(t)$ ajahetkeks t saabunud klientide arv ja tähistagu $S_1, S_2, \dots$ klientide saabumisaegu. Leia tinglik keskväärts $E(S_5 | N(t) = 3)$.

Ülesanne 2.14. Telleril kulub klientide teenindamisele eksponentsiaalne aeg keskväärtsusega kolm minutit. Teie sisenedes panka teenindatakse seal parajasti kahte klienti ja teie lähete kolmanda kassa juurde. Kui tõenäoline on, et teie saate varem teenindatud kui enne teid pangas olnud kliendid?

Ülesanne 2.15. Lillekiosk on avatud 10 – 18. Kioskisse saavad kliendid mittehomoogeense Poissoni protsessi kohaselt, mille intensiivsus on $\lambda(t) = 3 + 4t + 0.5t^2$, $t \in [0, 8]$. Müüjal on kokku lepitud, et ta helistab lattu kell 13⁰⁰, kõne pikkus on 15 minutit.

- (a) Kui suur on tõenäosus, et selle aja jooksul ei tule ühtegi ostjat?
- (b) Oletades, et helistamise ajal saabunud kliendid jäävad ootama, leida tõenäosus, et kõne lõppedes on ootamas kaks inimest (enne järjekorda ei olnud).

Ülesanne 2.16. Immigrandid saavad piirkonda A Poissoni protsessi kohaselt sagedusega 10 immigranti aastas, kusjuures Soome immigrantide osakaal on $\frac{1}{12}$. Leia tõenäosus, et kolme aasta jooksul ei saabu piirkonda A ühtegi Soome immigranti.

Ülesanne 2.17. Oletame, et perekonnad migreeruvad piirkonda B Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega $\lambda = 2$ aastas. Olgu inimeste arv igas perekonnas sõltumatu ja võtku väärtusi 1, 2, 3, 4 vastavalt tõenäosustega $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Leia sellesse piirkonda 5 aasta jooksul migreeruvate inimeste arvu keskväärtsus ja dispersioon.

Ülesanne 2.18. Vihmasaju ajal sadas igale ruutdetsimeetrile keskmiselt 8 piiska. Milline on tõenäosus, et trepile ununenud tikutoosile, mille mõõtmed on 4x5cm,

- (a) ei langenud ühtki piiska;
- (b) langes mitte üle 3 piisa?

Vihje: võta protsessi argumendiks t pindala.

Ülesanne 2.19. Väikese vihmajärgu ajal sadas igas sekundis igale ruutdetsimeetrile keskmiselt 1 piisk. Milline on tõenäosus, et pooleks minutiks trepile ununenud tikutoosile, mille mõõtmed on 4x5cm,

- (a) ei langenud ühtki piiska;
- (b) langes mitte üle 3 piisa?

Vihje: võta protsessi argumendiks t aja ja pindala korrutis.

Ülesanne 2.20. Teatud tüüpi bakterid on vees jaotunud Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega $\lambda = 0,6$ organismi mm^3 kohta. Mõõteseadeldis loendab baktereid 10 mm^3 vees. Leia tõenäosus, et selles veekoguses on rohkem kui 2 bakterit.

Ülesanne 2.21. Külatajad saavad teenindusasutusse Poissoni protsessi kohaselt, mille intensiivsus ei ole teada. Oletame, et viimase 3 tunni jooksul on saabunud 12 külatajat. Olgu N_i külatajate arv, kes saabusid i -ndal tunnil, $i = 1, 2, 3$. Leia tõenäosus, et $N_1 = 3$, $N_2 = 4$ ja $N_3 = 5$.

Ülesanne 2.22. Parandustöökoja andmete põhjal on taskulambi parandamisele kuluv aeg eksponentjaotusega juhuslik suurus, keskväärtsusega pool tundi. Milline on tõenäosus, et

- (a) parandamine võtab aega kauem kui pool tundi?
- (b) kui parandamine on juba 12 tundi kestnud, siis ta kestab veel vähemalt pool tundi?

3 Tekke ja kao protsessid

Ülesanne 3.1. Kirjuta välja Kolmogorovi ettesuunatud võrrandid

- (a) lineaarse puhta tekke protsessi jaoks;
- (b) tekke ja kao protsessi jaoks, mille korral kao intensiivsus on 1 ja tekke

intensiivsus on $\begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{2}{n}, & n \geq 1 \end{cases}$, kus n on populatsiooni suurus.

Ülesanne 3.2. Näidata, et lineaarse puhta kao protsessi korral, kus iga indiviidi suremise/lahkumise intensiivsus on ν (seega koguintensiivsus populatsiooni suuruse i korral on $i\nu$), kehtib

$$P_{ij}(t) = C_i^j (e^{-\nu t})^j (1 - e^{-\nu t})^{i-j}.$$

Milline on populatsiooni väljasuremise tõenäosus aja t jooksul, st. $P_{i0}(t)$?

Ülesanne 3.3. Näidata, et lineaarse puhta tekke protsessi (Yule'i protsessi) korral (st. igal indiviidil on järglase andmise intensiivsus μ , koguintensiivsus populatsiooni suuruse i korral $i\mu$), kehtib

$$P_{ij}(t) = C_{j-1}^{i-1} (e^{-\mu t})^i (1 - e^{-\mu t})^{j-i}$$

Vihje: lähtu Kolmogorovi ettesuunatud võrranditest puhta tekke protsessi jaoks.

Ülesanne 3.4. Vaatleme populatsiooni, milles on algolekus 3 indiviidi ja iga indiviid annab keskmiselt 1 järglase nädalas (sõltumata teistest).

- (a) Milline on tõenäosus, et 2 nädala pärast on populatsioonis täpselt 10 indiviidi.
- (b) Kui pika aja peab ootama, et tõenäosus, et selle aja jooksul ühtegi uut indiviidi ei teki, oleks väiksem kui 0.01?
- (c) Milline on tõenäosus, et 3 nädala pärast on populatsiooni suurus 10, kui on teada, et 1 nädala pärast on suurus endiselt 3 ja 2 nädala pärast 5.

Ülesanne 3.5. Kümme tudengit lõpetavad ülikooli ja lähevad tööturumarketisse tööd otsima. Oletame, et sobivad tööpakkumised (mille pakkumise saanu alati vastu võtab) tulevad igale tudengitele (sõltumatult teistest) keskmise sagedusega 3 pakkumist aastas.

- (a) Milline on tõenäosus, et 2 aasta pärast on kõik tudengid saanud töö?
- (b) Milline on tõenäosus, et viimane tudeng saab töö kolmandal aastal?
- (c) Kui kaua peab ootama, et tõenäosus, et kõik tudengid on saanud tööle, oleks suurem kui $\frac{1}{2}$.

4 Teenindussüsteemid

Ülesanne 4.1. Vaatleme järjekorrasüsteemi M/M/1 tasakaaluseisundit. Olgu sisendvoo intensiivsus μ , väljundvoo intensiivsus ν , kusjuures $\rho := \frac{\mu}{\nu} < 1$, ja olgu X süsteemis viibijate arv. Näita, et

- (a) tõenäosus, et süsteemis on k isikut avaldub: $p_k = \rho^k p_0$, $k \geq 1$;
- (b) $p_0 = 1 - \rho$;
- (c) $EX = \frac{\rho}{1-\rho}$.

Ülesanne 4.2. Vaatleme järjekorrasüsteemi M/M/1, kus saabumiste intensiivsus on 5 isikut tunnis ja keskmine teenindusaeg on 10 minutit. Oletame, et süsteem on töötanud juba pikka aega (on tasakaalus). Leia

- (a) keskmine järjekorra pikkus;
- (b) tõenäosus, et järjekorda pole;
- (c) tõenäosus, et järjekorras on rohkem kui 10 inimest.

Ülesanne 4.3. Kingaparanduses (üks kingsepp) on ruumi maksimaalselt kahele kliendile. Potentsiaalsed kliendid saavad Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega kolm inimest tunnis. Teenindusajad on sõltumatud eksponentjaotusega juhuslikud suurused keskväärtusega 15 minutit.

Tahame teada

- a) mitu klienti on keskmiselt töökojas?
- b) mitu protsenti potentsiaalsetest klientidest läheb kaduma (kolmas ei mahu)?
- c) mitu korda kasvab teenindatud klientide arv kui kingsepp hakkab kaks korda kiiremini tööle?

Ülesanne 4.4. Potentsiaalsed kliendid saavad ühe postiga täisteenusega tanklasse Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega 20 autot tunnis. Kliendid jäävad ootama ainult sel juhul kui tankla ees on mitte üle kahe auto, kaasa arvatud parajasti teenindatav auto. Ühe auto teenindamiseks kuluv aeg on eksponentjaotusega juhuslik suurus, mille keskväärtus on viis minutit. Tahame teada

- (a) mitu protsenti ajast kulub tankla ainsal töötajal autode teenindamiseks?
- (b) mitu autot viibib selles tanklas keskmiselt?
- (c) kui palju saab töötaja rohkem vaba aega, kui ta töötab kiiremini, kulutades ühe kliendi teenindamisele keskmiselt kolm minutit?

Ülesanne 4.5. Taksod saavad taksopaatuse Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega 1 takso minuti kohta. Sõitsoovijate Poissoni voog selles peatuses on aga intensiivsusega 2 klienti minutis. Taksod jäävad ootama olenevata sellest, mitu taksot on peatuses juba ees. Kliendid aga taksode puudumisel ootama ei jää ning lahkuvad.

Meid huvitab

- a) mitu taksot on selles peatuses keskmiselt?
- b) mitu protsenti saabuvatest klientidest leiab takso ootamas?
- c) kuidas see protsent muutub, kui taksode saabumise intensiivsus kasvab 1.5 korda?

Ülesanne 4.6. Poe ees on nelja parkimiskohaga parkla. Poekülastajad saavad parklasse sagedusega 6 autot tunnis. Kui parklas on vabu kohti, siis külastaja pargib suvalisele vabale kohale, kui vabu kohti pole, siis sõidab minema. Külastajate poesviibimise aeg on eksponentjaotusega, keskmiselt poolt tundi ja ei sõltu teistest poekülastajatest.

- (a) Näidata, et süsteemi tasakaaluseisundis on parklas hetkel viibivate autode arv N kirjeldatav jaotusega

$$\mathbf{P}\{N = k\} = \frac{8}{131} \frac{3^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

- (b) Kui suure osa ajast on parkla täis?

Ülesanne 4.7. Vaatleme ühe teenindajaga järjekorrasüsteemi, kus uue klienti saabumise aeg ja teenindusaeg on eksponentjaotusega, sama parameetriga λ . Olgu süsteemi ooteruumi suurus n , st. süsteemi ei mahu üle $n + 1$ isiku. Leia süsteemis viibijate arvu jaotus süsteemi tasakaaluolekus (nn. süsteemi tasakaalujaotus).

Ülesanne 4.8. Vaatleme ühe teenindajaga järjekorrasüsteemi, kus uue klienti saabumise aeg ja teenindusaeg on eksponentjaotusega, parameetritega μ ja ν vastavalt, kusjuures tõenäosus, et saabunud klient jääb järjekorda ootama, on α^k , kus $0 < \alpha < 1$ ja n on süsteemis juba viibivate isikute arv (järjekord + teenindatav).

- (a) Näita, et süsteemi tasakaalujaotuse tõenäosusfunktsioon p_k on võrdeline funktsiooniga $\rho^k \alpha^{\frac{k(k-1)}{2}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, kus $\rho = \frac{\mu}{\nu}$.

(b) Milliste ρ väärtuste korral tasakaalujaotus leidub?

Ülesanne 4.9. Jänesepargi metsas on aeg järgmise jänese poja sünnini eksponentjaotusega keskvaartusega $6(k + 1)$ aastat, kus k on populatsiooni suurus. Aeg järgmise jänese saakloomaks langemiseni on eksponentjaotusega keskvaartusega $3k$ aastat ning järgmise jänese muul põhjusel surmani on aeg eksponentjaotusega keskvaartusega $4k$ aastat.

- a) Leia 2 probleemi, miks selline mudel reaalsusega hästi ei sobi.
- b) Muuda ülesannet nii, et vähemalt 1 probleem kaoks.
- c) Leida muudetud ülesande jaoks tõenäosus, et tasakaaluolekusse jõudnud süsteemis ei ole ühtegi jänest.

5 Taastuvad protsessid. Browni liikumine

Ülesanne 5.1. Olgu $\{N(t), t \geq 0\}$ taastuv protsess. Millised toodud väidetest vastavad tõele?

- (a) $N(t) < n$ parajasti siis, kui $S_n > t$;
- (b) $N(t) \leq n$ parajasti siis, kui $S_n \geq t$;
- (c) $N(t) > n$ parajasti, siis kui $S_n < t$.

Ülesanne 5.2. Uuringud on näidanud, et reisijad saavad ühe raudteeliiniga raudteejaama taastuva protsessi kohaselt, kusjuures keskmine aeg saabumiste vahel on μ minutit. Rongifirma maksab raudteejaamale nc rahaühikut minutis, kus n on ootavate reisijate arv. Rong väljub raudteejaamast siis, kui juba N reisijat on ootamas, ja rongide iga väljumisega protsess "taastub".

- (a) Milline on keskmine summa minutis, mis raudteejaamale makstakse?
- (b) Oletame, et rongide iga väljasõidu eest kasseerib raudteejaam rongifirmalt 6 rahaühikut. Olgu lisaks teada $c = 2$ ja $\mu = 1$, milline peaks olema N , et rongifirma poolt raudteejaamale makstav summa oleks protsessi pikaajalise töö korral minimaalne?

Ülesanne 5.3. Vaatleme ühe teenindajaga teenindussüsteemi, kuhu kliendid saavad Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega μ . Kui teenindaja on vaba, asub ta kohe saabuvat klienti teenindama, vastasel korral jääb saabuv klient järjekorda ootama. Teenindusajad on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused keskväärtusega $\frac{1}{\nu}$, kus $\nu > \mu$. Kui suure osa ajast on teenindaja hõivatud?

Ülesanne 5.4. Olgu $\{X(t), t \geq 0\}$ standardne Browni liikumine ja $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$. Tähistame $T_a := \inf\{t : X(t) = a\}$, kus $a \in \mathbb{R}$. Leia

- (a) $E[X(t_1) + X(t_2)]$;
- (b) $D[X(t_1) + X(t_2)]$;
- (c) $E[X(t_2)|X(t_1) = a, X(t_3) = b]$;
- (d) $D[X(t_2)|X(t_1) = a, X(t_3) = b]$;
- (e) $E[X(t_1) \cdot X(t_2) \cdot X(t_3)]$;
- (f) $\mathbf{P}\{T_1 < T_{-1} < T_2\}$.

Ülesanne 5.5. Olgu $\{X(t), t \geq 0\}$ Browni liikumine, mille korral $EX(t) = 0$ ja $DX(t) = 9t$ (mittestandardne Browni liikumine!). Olgu teada, et $X(2) = 3$ ja $X(5) = 4$.

- (a) Leia tõenäosus, et toodud tingimustel $X(7) > 7$.
- (b) Leia tinglik keskväärtus $E[X(1)|X(2) = 3, X(5) = 4]$.