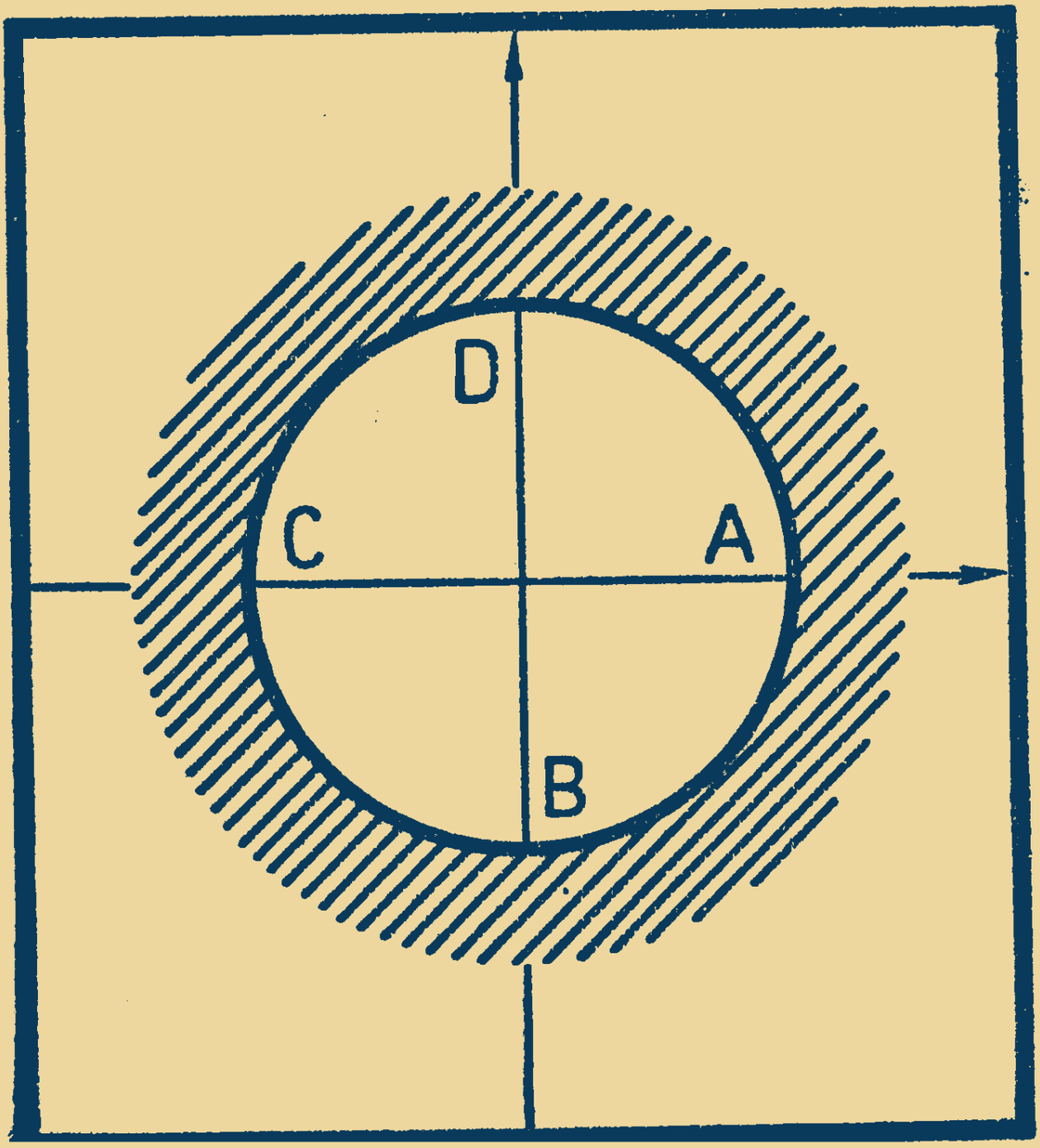
E. Jürimäe

KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE TEOORIA LÜHIKURSUS



E. Jürimäe

KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE TEOORIA LÜHIKURSUS

TALLINN «VALGUS» 1983

517.2
J96
UDK 517

Retsenseerinud TPI matemaatika kateeder ja füüsika-matemaatikakandidaat M. Liigant

Kaane kujundanud K. Tormis

Raamatus esitatakse põhilised faktid kompleksarvude, kompleksmuutuja funktsioonide ja Laplace'i teisenduse kohta. On vaadeldud üheste analüütiliste ehk regulaarsete funktsioonide rakendusi, kasutades konformset kujutamist ja resiidide teooriat. Raamatu kaks viimast jaotist käsitlevad operaatorarvutust — Laplace'i teisendust ja tema rakendusi diferentsiaal- ja integraalvõrrandite lahendamisel ning integraalide arvutamisel.

Raamat on mõeldud õpikuna matemaatika, rakendusmatemaatika, füüsika ja elektro-automaatika erialade üliõpilastele.

22.16

J $\frac{1702050000—248}{M902(16)—83}$ TL21—4—83

EESSÕNA

Käesolevas raamatus on esitatud lühidalt põhilised faktid diferentseeruvate kompleksmuutuja funktsioonide kohta ning vaadeldud nende mõningaid rakendusi. Raamat on mõeldud eeskätt õpikuna matemaatika, füüsika ja elektro-automaatika eriala üliõpilastele, kuid võib huvi pakkuda ka neile, kel tuleb tegelda kompleksmuutuja teooria ja operaatorarvutuse rakendustega.

Paljudes matemaatikavaldkondades on tarvis väljuda reaalarvude hulgast ja vaadelda vastavaid küsimusi kompleksarvude hulgal. Alles siis ilmnevad mitmedki faktid ja omadused täiel kujul. Nii on see hästituntud algebra põhiteoreemiga, mida on vaadeldud ka käesolevas raamatus. See kehtib ka analüütiliste (astmeridade summana esitavate) funktsioonide kohta, sest ka nende omadused ei avane reaalarvude hulgal täielikult.

Käesolev esitus toetub regulaarse (vaadeldava punkti mingis ümbruses ühese ja diferentseeruva) funktsiooni mõistele. Sellest mõistest lähtudes näidatakse, et regulaarne funktsioon on esitatav teatava integraali kujul oma rajaväärtuste kaudu (Cauchy valem), millest omakorda ilmneb, et mõisted «regulaarne funktsioon» ja «analüütiline ühene funktsioon» ühtivad.

Analüütilist jätkamist kasutades määratletakse ka mitmene analüütiline funktsioon, kuid rakendustes vaadeldakse valdavalt üheseid funktsioone.

Käesolev materjal (jaotised 1 kuni 8) katab põhilises osas ülikooli matemaatika ja rakendusmatemaatika eriala üliõpilastele ettenähtud programmi. Teiste erialade üliõpilastel, kes samuti õpivad kompleksmuutuja funktsioonide teooriat, tuleb esitatud materjalist teha oma programmile vastav valik. Materjal on püütud esitada selliselt, et käesolevat raamatut saaksid kasutada õpikuna ka pedagoogilise instituudi matemaatika-füüsika eriala ja ülikooli füüsika eriala üliõpilased ja polütehnilise instituudi elektro-automaatika eriala tudengid. Eeskätt viimaste vajadusi silmas pidades on käsitletud

üsna põhjalikult Laplace'i teisendust ja selle rakendusi ning esitatud Fourier' teisenduse kõige olulisemad omadused. Jaotises 9 on käsitletud analüütiliste funktsioonide väljateoorias rakendamise põhimomente. Konkreetse näitena on vaadeldud lennuki tiiva profiili uurimise klassikalisi tulemusi, mis demonstreerivad üsna ilmekalt kompleksmuutuja funktsioonide teooria mõistete kasutamise viljakust väljateooria ülesannete lahendamisel.

Lisas on esitatud kolm tabelit: elementaarfunktsioonide konformsed kujutused, Laplace'i teisenduse põhiomadused ja Laplace'i teisenduse valemid. Viimases tabelis on valemeid mõnevõrra rohkem kui raamatus tõestatud ja kasutatud. Seda on tehtud eeskätt nende huvides, kes tegelevad operaatorarvutuse rakendustega.

Raamatus on hulgaliselt ülesandeid, mille lahendamine peaks aitama paremini omandada teoreetilist materjali.

Raamatu lõpus on käsitletud küsimuste alase õppekirjanduse soovitusnimestik. Raamatutes [5], [11] ja [13] leidub hulgaliselt täiendavaid näiteid ja juhiseid operaatorarvutuse rakenduste kohta. Kõige täielikum Laplace'i teisenduse valemitekogu on raamatus [7].

1. KOMPLEKSARVUD

1.1. KOMPLEKSARVUD JA TEHTED NENDEGA

Kompleksarvudeks nimetatakse reaalarvude järjestatud paare

$$z=(x, y),$$

millega teataval kindlal viisil defineeritakse aritmeetilised tehted ning võrdus. Olgu antud kaks kompleksarvu $z_1=(x_1, y_1)$ ja $z_2=(x_2, y_2)$. Nende võrdus, summa ja korrutis defineeritakse järgmiselt:

1) $z_1=z_2$, kui $x_1=x_2$ ja $y_1=y_2$;

2) $z_1+z_2=(x_1+x_2, y_1+y_2)$;

3) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$.

Esitatud definitsioonidest lähtudes saab näidata, et iga $z=(x, y)$ puhul kehtib võrdus

$$z=(x, y)=(x, 0)+(0, 1)(y, 0). \tag{1}$$

Sellest avaldisest paneme tähele, et eriline osa on kompleksarvul $i=(0, 1)$ ning kõigil neil kompleksarvudel, millele vastavas paaris teine arv on null. Kui defineerida veel kahe kompleksarvu vahe kui summa pöördoperatsioon ning jagatis kui korrutise pöördoperatsioon, siis osutub, et kõigi nende tehete suhtes käitub paar $(x, 0)$ nagu reaalarv x. Seetõttu võime nad omavahel samastada, s. t. $x=(x, 0)$. Sel viisil saame, et *kompleksarvude hulk sisaldab reaalarvude hulga*, kusjuures $0=(0, 0)$.

Kõike seda arvestades võime võrduse (1) kirjutada kujul

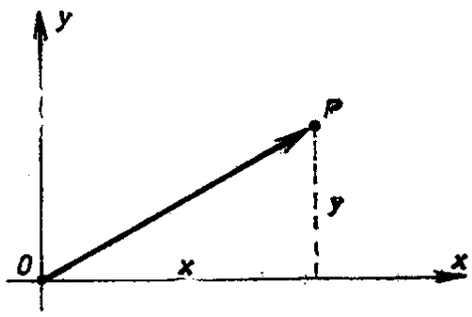
$$z=(x, y)=x+iy.$$

Seda võrdust nimetatakse **kompleksarvu algebraliseks kujuks.**

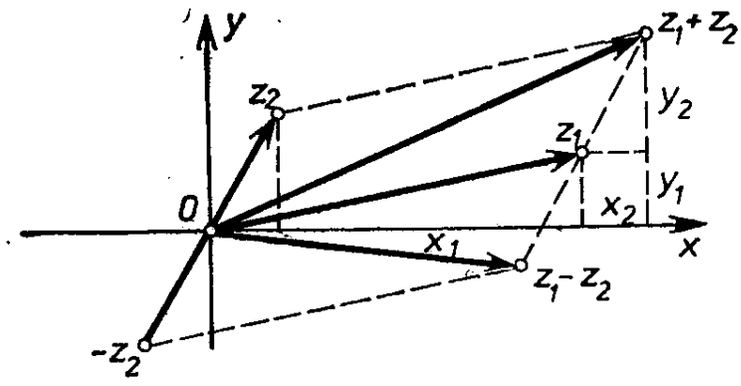
Reaalarve

$$x=\mathrm{Re}\, z=\mathrm{Re}(x, y) \quad \text{ja} \quad y=\mathrm{Im}\, z=\mathrm{Im}(x, y)$$

nimetatakse vastavalt kompleksarvu z **reaal- ja imaginaarosaks.** Kui $\mathrm{Im}z\neq 0$, siis nimetatakse arvu z **imaginaararvuks** ning kui lisaks sellele $\mathrm{Re}z=0$, siis **puhtimaginaararvuks.**



Joon. 1



Joon. 2

Et ka tasandi iga punkt P (ehk siis tema kohavektor $\overrightarrow{OP}$) (joon. 1) on määratud järjestatud reaalarvupaariga (oma koordinaatidega), siis saame korraldada üksühese vastavuse kompleksarvude ja tasandi punktide vahel. Teisiti öeldes: me võime kõik kompleksarvud kujutada koordinaattasandil. Niisugust tasandit nimetatakse **komplekstasandiks**. Seejuures nimetatakse x-telge **reaalteljeks** ning y-telge **imaginaarteljeks**.

Samastades kompleksarvu $z=(x, y)$ kohavektoriga $\overrightarrow{OP}=(x, y)$, saame kompleksarvude liitmist ja lahutamist geomeetriliselt interpreteerida kui neile vastavate vektorite liitmist ja lahutamist (joon. 2).

Ülesanded

1. Tõestada, et a) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (*summa kommutatiivsus*);
   b) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (*summa assotsiatiivsus*);
   c) $z_1z_2=z_2z_1$ (*korrutise kommutatiivsus*);
   d) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (*korrutise assotsiatiivsus*);
   e) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ (*distributiivsus*).
2. Näidata, et $i^2=(0, 1)\ (0, 1)=(-1, 0)$, s. t. $i^2=-1$.
3. Näidata, et vahe z_1-z_2 on üheselt määratud mistahes kompleksarvude z_1 ja z_2 puhul.
4. Leida $\dfrac{z_1}{z_2}$. Veenduda, et selline jagatis on üheselt määratud iga $z_2\neq 0$ korral.
5. Näidata, et $\dfrac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}$.
6. Tõestada, et kahe kompleksarvu korrutis on null parajasti siis, kui vähemalt üks tegureist on võrdne nulliga.

7. Tõestada, et $(1+z)^2=1+2z+z^2$.

8. Leida graafiliselt z_1+z_2 ja z_1-z_2, kui

   a) $z_1=2+i$, $z_2=1+2i$;

   b) $z_1=-3+i$, $z_2=1+4i$;

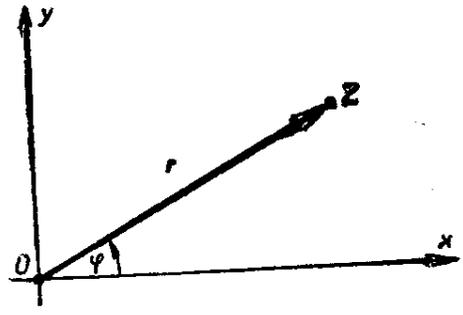
   c) $z_1=3i$, $z_2=-2-i$;

   d) $z_1=-2+2i$, $z_2=-3i$.

1.2. KOMPLEKSARVU MOODUL JA ARGUMENT

Et tasandi punkti (x, y) saab määrata ka polaarkoordinaatides; kusjuures

$$x=r\cos\varphi \quad \text{ja} \quad y=r\sin\varphi, \tag{1}$$



Joon. 3

siis kompleksarvu z määrab ka reaalarvupaar (r, φ), milles esimest arvu nimetatakse kompleksarvu z **mooduliks** ning teist **argumendiks**. Neid tähistatakse vastavalt $|z|$ ja $\operatorname{Arg} z$. Vahetult geomeetrilisest pildist on selge, et kompleksarvu moodul on üheselt määratud, kuid argument mitte. Kui φ on kompleksarvu argumendiks, siis on ka seda iga arv $\varphi+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Kompleksarvu z sellist argumendi väärtust φ, mis rahuldab võrratusi

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi,$$

nimetatakse **argumendi peaväärtuseks** ning tähistatakse sümboliga $\arg z$. Puhtgeomeetrilistest kaalutlustest on selge, et argument on määratud iga kompleksarvu $z\neq0$ puhul. Kompleksarvul $z=0$ aga pole argumenti. Arv $z=0$ on määratud sellega, et tema moodul võrdub nulliga.

Võrdustest (1) saame, et

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$

millest omakorda järeldub seos

$$\arg z=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{r}, & \text{kui } y\geqslant0,\\ -\arccos\dfrac{x}{r}, & \text{kui } y<0.\end{cases}$$

Asendades kompleksarvu algebralises kujus suurused x ja y valemite (1) põhjal, saame, et

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Seda avaldist nimetatakse **kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks.**

Matemaatilise analüüsi kursuses tõestatakse nn. ***Euleri valem***

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

mille abil saame võrdusest (2) **kompleksarvu** z **eksponentkuju**

$$z=re^{i\varphi}.$$

Mitmesugustes arvutustes on kasulik rakendada just kompleksarvu eksponentkuju tema kompaktsuse tõttu.

Vaatleme kompleksarvude korrutamist trigonomeetrilisel kujul. Olgu $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ ja $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Sel juhul saame, et

$$z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

s. t.

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Täieliku induktsiooni meetodi abil võiksime üldistada saadud valemi mistahes lõpliku arvu tegurite juhule. Kui seejärel võtaksime kõik tegurid võrdseina, saaksime nn. ***Moivre'i valemi***

$$z^n=r^ne^{in\varphi},$$

kus n on naturaalarv.

Analoogiliselt korrutamisega saaksime, et

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Pöördume tagasi kompleksarvude summa ja vahe juurde. Puhtgeomeetriliste kaalutluste (kolmnurga külgede vahekorra) põhjal saame, et

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

Edaspidiseks on aga eriti oluline märkida, et *suurus* $|z_1-z_2|$ *on võrdne komplekstasandi punktide* z_1 *ja* z_2 *vahelise kaugusega* (vt. joon. 2).

Ülesanded

1. Näidata, et $\frac{1}{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$.

2. Kirjutada järgmised kompleksarvud trigonomeetrilisel ja eksponentkujul:

a) $3i$, b) $-i$, c) 2, d) -2, e) $1+i$, f) $-1-i$, g) $\sqrt{3}-i$, h) $1-i\sqrt{3}$, i) $3+5i$, j) $-3+5i$, k) $2-5i$, l) $-2-5i$.

3. Leida $\arg z$, kui

a) $z=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$, b) $z=\frac{i}{-2-2i}$, c) $z=(\sqrt{3}-i)^6$, d) $z=z_1z_2$, e) $z=z_1^n$, f) $z=\frac{z_1}{z_2}$.

4. Olgu z_0 mingi kompleksarv ning R positiivne reaalarv. Näidata, et kui z asub punkti $-z_0$ ümbritseval ringjoonel, mille raadius on R, siis ta rahuldab võrrandeid

a) $|z+z_0|=R$,
b) $z=-z_0+Re^{i\varphi}$.

5. Millised punktihulgad on komplekstasandil määratud järgmiste seostega:

a) $|z-i|<3$, b) $|z+2i|\geqslant 2$, c) $|z-3-4i|=5$, d) $|z+2|+|z-2|=5$, e) $|z-i|=|z+2|$, f) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$, g) $\arg(z+i)=-\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{\pi}{3}<\arg(z-i)<\frac{3\pi}{4}$.

1.3. KAASKOMPLEKSARVUD

Kompleksarvu $z=(x, y)$ **kaaskompleksarvuks** ehk **kaaskompleksiks** nimetame arvu $\bar{z}=(x, -y)$. Sellest definitsioonist järeldub, et kompleksarvu $\bar{z}$ kaaskompleksiks on z, s. t. $\overline{(\bar{z})}=z$. Samuti märkame, et (vt. joon. 4)

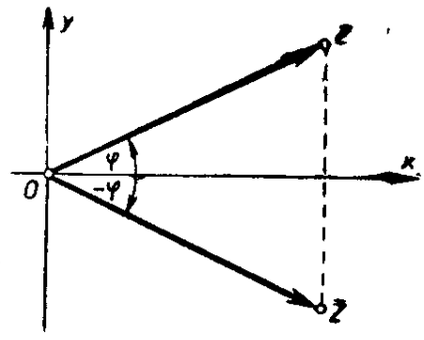
$\arg \bar{z} = -\arg z$

ning

$|\bar{z}| = |z|$.

Seega

$\bar{z} = (\overline{re^{i\varphi}}) = re^{-i\varphi}$.



Joon. 4

Vahetul kontrollimisel võime veenduda, et

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \tag{1}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

Osutub, et korrutis $z\bar{z}$ on alati reaalne. Tõepoolest,

$z\bar{z} = (x, y)(x, -y) = x^2 + y^2 = |z|^2$,

s. t.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Seda arvestades saame kergesti anda eeskirja kompleksarvude jagamiseks algebralisel kujul:

jagatise $\frac{z_1}{z_2}$ *algebralise kuju leidmiseks tuleb selle murru lugejat ja nimetajat korrutada nimetaja kaaskompleksiga.*

Tõepoolest, kui $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$, siis

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Ülesanded

1. Näidata, et

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{ja} \quad \operatorname{Im} z = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

2. Kirjutada komplekskujul võrrandid

   a) $x^2+2x+y^2-y=1$,

   b) $x^2-y^2=1$.

   Vastus: a) $z\bar{z}+\left(1+\frac{i}{2}\right)z+\left(1-\frac{i}{2}\right)\bar{z}=1$,

   b) $z^2+\bar{z}^2=2$.

3. Tõestada võrdused (1).

4. Näidata, et ringjoone $|z-z_0|=R$ punktid rahuldavad võrrandit $z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}+z_0\bar{z}_0=R^2$.

5. Millisel juhul on võrrand

   $$az\bar{z}+\bar{A}z+A\bar{z}+b=0,$$

   kus a ja b on reaalarvud ning A — kompleksarv, ringjoone võrrandiks?

   Vastus: $|A|^2-ab>0$, $a\neq 0$.

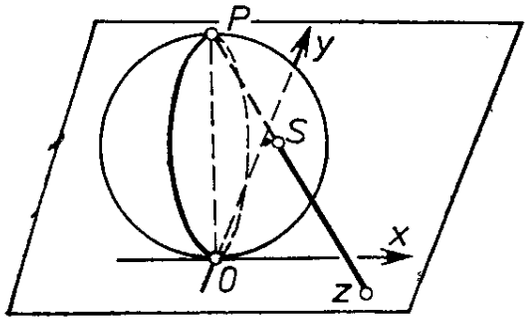
6. Milline on sirge võrrand komplekskujul?

   Vastus: $\bar{A}z+A\bar{z}+b=0$.

1.4. STEREOGRAAFILINE PROJEKTSIOON

Eelnevas veendusime, et kompleksarvude hulga ja tasandi punktide vahel saab korraldada üks-ühest vastavust. Näitame, et ka sfääri punktid ja kompleksarvud võib seada üks-ühesesse vastavusse. Selleks asetame komplekstasandile mingi sfääri, mis toetub komplekstasandile nullpunktis (vt. joon. 5). Kui nüüd paneme sirge läbi komplekstasandi punkti z ja diameetri otspunkti P, siis see sirge lõikab sfääri mingis punktis ζ. Sel viisil saamegi üks-ühese vastavuse komplekstasandi ja antud sfääri punktide vahel. Niisugust vastavust nimetatakse **stereograafiliseks projektsiooniks** ning vaadeldavat kerapinda — **kompleksarvude sfääriks.**

Kui $|z|\to\infty$, siis ζ läheneb punktile P. Siinjuures on täiesti ükskõik, millises suunas z kaugeneb nullpunktist. Sellest lähtudes



Joon. 5

võtame kasutusele uue «kompleksarvu» $z=\infty$, mida nimetame **lõpmatuseks** ehk **lõpmatuspunktiks** ning mis vastab sfääri punktile P. Paneme tähele, et kompleksarvude sfääril on lõpmatuspunkt (punkt P) ühene. Kui vaadelda kompleksarvude kujutamist tasandil, võib tekkida mulje, et on lõpmata palju lõpmatuspunkte.* Edaspidi aga osutub lõpmatuspunkti ühesuse nõue üsnagi oluliseks.

Komplekstasandit, millele on lisatud lõpmatuspunkt, nimetatakse **kinniseks** ehk **täielikuks tasandiks.**

Täielikul tasandil võime defineerida ka seosed

$$\frac{a}{0}=\infty \quad \text{ja} \quad \frac{a}{\infty}=0 \quad (a\neq 0,\ a\neq\infty).$$

1.5. PIIRKONNAD

Komplekstasandi punkti z_0 **ümbruseks** (täpsemalt ε-ümbruseks) nimetatakse nende punktide z hulka, mis rahuldavad võrratust

$$|z-z_0|<\varepsilon.$$

Punkti ümbruseks on seega ring keskpunktiga selles punktis. **Lõpmatuspunkti ümbruseks** nimetatakse hulka

$$|z|>\varepsilon.$$

Piirkonnaks nimetatakse punktihulka D, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

a) koos punktiga z kuulub hulka D ka selle punkti mingi ümbrus (*lahtisuse omadus*);

b) iga kahte punkti z_1 ja z_2 hulgast D on võimalik ühendada pideva joonega, mis täielikult kuulub hulka D (*sidususe omadus*).

Edaspidi määrame piirkondi mitmesuguste võrratustega, näiteks, $|z|<1$, $\operatorname{Re} z>0$, $2<|z-1|<3$ jne. Seejuures ütleme lihtsalt: «ring $|z|<1$», «pooltasand $\operatorname{Re} z>0$», «piirkond $2<|z-1|<3$» jne.

Kui koos punktiga kuulub vaadeldavasse hulka ka selle punkti mingi ümbrus, siis nimetatakse seda punkti selle hulga **sisepunktiks.** Hulka, mis koosneb vaid sisepunktidest, nimetatakse **lahtiseks.** Piirkond on seega lahtine hulk.

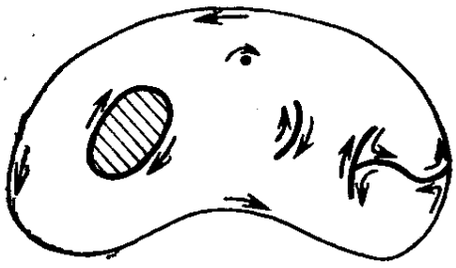
Hulga **rajapunktiks** nimetatakse punkte, mille iga ümbrus sisaldab nii vaadeldavasse hulka kuuluvaid kui ka mittekuuluvaid punkte. Rajapunktide hulka nimetatakse **rajaks.** Piirkonda koos oma rajaga nimetatakse **kinniseks piirkonnaks.**

Piirkonna raja sidusate osade arv määrab piirkonna **sidususe järgu.** Nii nimetame piirkonda $|z-1|<1$ **ühelisidusaks** ning piirkonda $1<|z-i|<2$ (rõngas) **kahelisidusaks.** Joonisel 6 on esitatud neljalisidus piirkond.

Kui piirkonna raja koosneb enam kui ühest sidusast osast, siis nimetatakse piirkonda **mitmelisidusaks.**

---

* Reaalarvude puhul vaadeldaksegi kaht lõpmatust, $+\infty$ ja $-\infty$.



Joon. 6

Piirkonna raja korral määratakse kindel läbimise suund. *Raja positiivseks suunaks loetakse see, mida mööda liikudes vaadeldav piirkond jääb vasakule.* On oluline ka rajapunktide kordsus. Öeldakse, et punkt A on ***n*-kordseks rajapunktiks**, kui raja täielikul läbimisel punkt A läbitakse n korda.

Piirkonda nimetatakse lõpmatuks, kui vähemalt tema raja sisaldab lõpmatuspunkti. Vastasel korral kõneleme **tõkestatud piirkonnast**.

Ülesanded

1. Kirjeldada geomeetriliselt järgmisi piirkondi:

   a) $-\pi<\arg z<\pi,\ |z|<2;$

   b) $1<|z-2\mathrm{i}|<2,\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4};$

   c) $|2z+3|>4;$

   d) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{2};$

   e) $|z+4|>|z|;$

   f) $\mathrm{Im}(z-1)^2>0;$

   g) $\left|\frac{z+1}{z-2}\right|>2.$

2. FUNKTSIOON JA TEMA TULETIS

2.1. FUNKTSIOONI MÕISTE

Vaatleme mingit kompleksarvude hulka D. Kui z tähistab suvalist arvu hulgast D, siis öeldakse, et z on kompleksarvuliste väärtustega muutuv suurus ehk **kompleksmuutuja**. Iga kompleksarvu $z\in D$ nimetatakse seejuures selle **kompleksmuutuja väärtuseks.**

Kui kompleksmuutuja z igale väärtusele $z\in D$ on vastavusse seatud mingi kindel kompleksarv w, siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud ***kompleksmuutuja funktsioon***

$$w=f(z).$$

Muutuja z väärtusi nimetatakse **originaalideks**. Kompleksarvu $f(z)$ nimetatakse **funktsiooni väärtuseks** ehk **kujutiseks**. Viimased moodustavad hulga, mida nimetatakse funktsiooni väärtuste ehk **kujutiste hulgaks**.

Kui igale originaalile vastab ainult üks kujutis, siis nimetatakse funktsiooni **üheseks**, vastupidisel korral — **mitmeseks**. Kui iga kujutis on vastav vaid ühele originaalile, siis nimetatakse funktsiooni **üheleheliseks**, vastasel korral — **mitmeleheliseks**. Seega esitab ühene ja üheleheline funktsioon üks-ühest vastavust.

Lepime kokku kasutatavas sümboolikas ja terminoloogias. Termineid «funktsioon» ja «kujutus» kasutame sünonüümidena. Neid tähistame sümbolitega f, g, F jne. Kõrvuti nendega kasutame samas tähenduses sümboleid $w=f(z)$, $w=g(z)$, $w=F(z)$ jne. Viimastes tuleb suurusi w ja z vaadelda kui muutujaid, mitte aga kui konkreetseid kompleksarve. Sümboleid $f(z)$ ja $g(z)$ kasutame punkti z kujutise tähenduses, või siis teatava avaldise lühemaks märkimiseks, näiteks $f(z)=z^4-2z+5$. Me ütleme, et see avaldis «määrab funktsiooni» või siis «esitab funktsiooni». Nii näiteks ütleme: «Olgu funktsioon määratud avaldisega z^2+1.» ja «Avaldis $\sum z^k$ esitab diferentseeruvat funktsiooni ringis $|z|<1$.»

Kui meil on üks-ühene vastavus kahe hulga D ja D_1 vahel, siis on meil määratud kaks funktsiooni, $w=f(z)$ ja $z=g(w)$, kus $z=g[f(z)]$ ning $w=f[g(w)]$. Neid funktsioone nimetatakse teineteise suhtes **pöördfunktsioonideks**. Niisiis on igal funktsioonil, mis teostab üks-ühese kujutuse, pöördfunktsioon.

Kui hulgaks D on naturaalarvude hulk, siis nimetatakse funktsiooni **jadaks**, mida tähistatakse (z_n).

Kui hulgaks D on mingi reaalarvude hulk T, siis saame nn. **reaalse argumendiga kompleksmuutuja funktsiooni**

$$z=f(t)=x(t)+iy(t),\ t\in T.$$

Selline funktsioon ei paku oluliselt uut võrreldes analüüsis vaadeldud funktsioonidega, sest $z=f(t)$ avaldub siin kahe reaalmuutuja funktsiooni lineaarkombinatsioonina, mistõttu funktsiooni $z=f(t)$ omadused on täielikult sarnased funktsioonide $x=x(t)$ ja $y=y(t)$ omadega.

Omaduste poolest hoopis erinevamad funktsioonid saame sel juhul, kui nii originaalide kui ka kujutiste hulkadeks on teatavad piirkonnad. Edaspidi vaatlemegi funktsioone, mille originaalide hulgaks on piirkond. Viimast nimetatakse antud funktsiooni **määramispiirkonnaks** ehk **originaalide piirkonnaks**. Kujutiste hulka nimetatakse **kujutispiirkonnaks** ehk **funktsiooni muutumispiirkonnaks**.

Kui reaalmuutuja funktsiooni korral kasutame piltlikkuse saavutamiseks funktsiooni graafikut (seal on see kahedimensioonilise ruumi objekt), siis kompleksmuutuja funktsiooni korral pole see mõeldav. Selle graafik oleks neljadimensioonilise ruumi objekt. Geomeetrilise pildi saamiseks kasutame kahte tasandit: ühele (z-tasand) kanname originaalid, teisele (w-tasand) kujutised. Seda sil-

mas pidades ütlemegi, et funktsioon kujutab z-tasandi mingi piirkonna piirkonnaks w-tasandil.

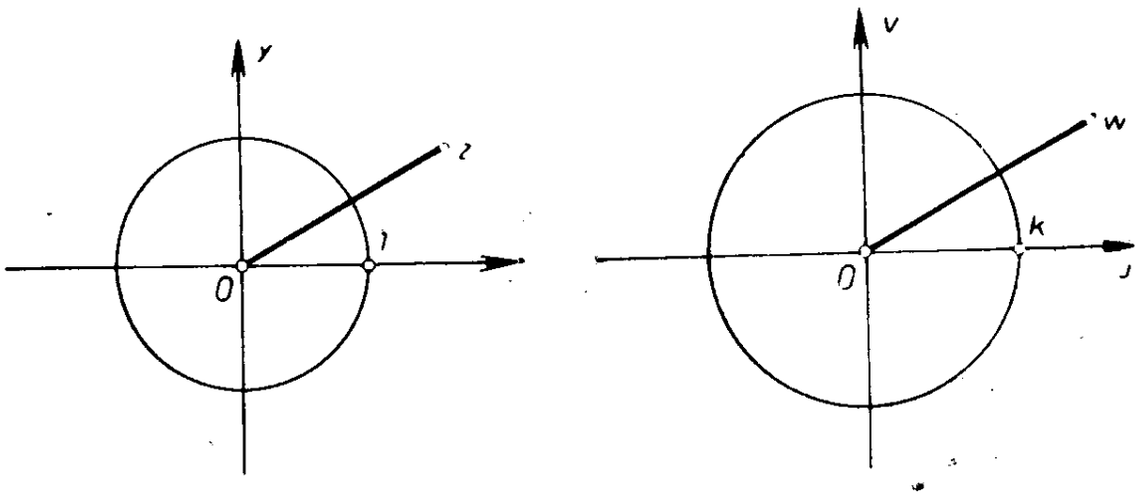
Näide 1. Vaatleme funktsiooni

$$w=kz,$$

kus k on positiivne reaalarv. Olgu $z=re^{i\varphi}$ ja $w=\varrho e^{i\theta}$. Seosest $w=kz$ saame, et

$$\varrho=kr \quad \text{ja} \quad \Theta=\varphi+2n\pi.$$

Nendest võrdustest näeme, et punktide z ja w polaarnurgad on võrdsed, kuid kujutise polaarkaugus on suurem (kui $k>1$) või väiksem (kui $k<1$) originaali omast (vt. joon. 7). Teisiti öeldes: toimub k-kordne mastaabi muutus.



Joon. 7

Näide 2. Olgu

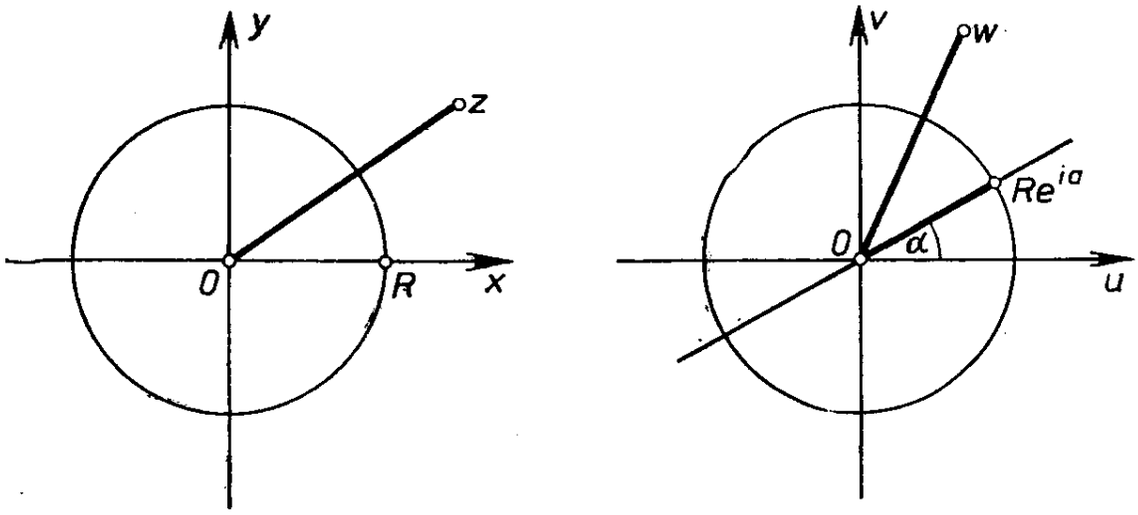
$w=e^{i\alpha}z$, kus α on mingi reaalarv.

Siit saame seosed:

$$\varrho=r \quad \text{ning} \quad \Theta=\varphi+\alpha+2n\pi.$$

Nendest seostest näeme, et vaadeldava kujutuse korral pöördub iga ring $|z|\leqslant R$ nurga α võrra (vt. joon. 8).

Erijuhul, kui $\alpha=\frac{\pi}{2}$, s. t. $w=iz$, saame tasandi pöörde täisnurga võrra, kui aga $\alpha=\pi$, s. t. $w=-z$, siis saame tasandi pöörde sirgnurga võrra.



Joon. 8

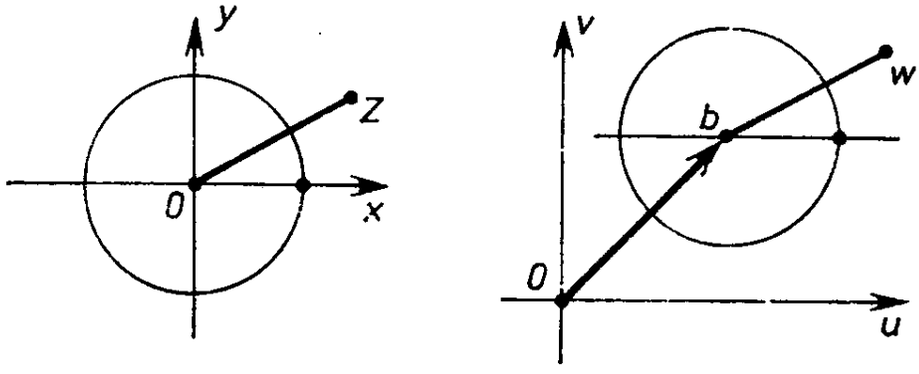
N ä i d e 3. Vaatleme funktsiooni

$w=z+b.$

Olgu $w=u+iv$, $z=x+iy$ ning $b=\beta_1+i\beta_2$. Selle funktsiooni korral

$u=x+\beta_1$ ning $v=y+\beta_2$,

s. t. toimub tasandi lüke vektori b võrra (vt. joon. 9). Nii näiteks kujutub ring $|z|<r$ ringiks $|w-b|<r$.



Joon. 9

N ä i d e 4. Vaatleme **lineaarfunktsiooni**

$w=az+b.$

Olgu $a=ke^{i\alpha}$ ja $b=\beta_1+i\beta_2$. Tähistades

$z_1=kz$, $z_2=e^{i\alpha}z_1$ ja $w=z_2+b$,

saame, et antud funktsiooniga teostatav kujutus on vaadeldav kolme eespool käsitletud kujutuse järjestikuse rakendamisena. Kui $a\neq 1$, saame funktsiooni.

$w=az+b$

esitada kujul

$w-\beta=a(z-\beta)$,

kus $\beta=\frac{b}{1-a}$. Saadud seosest järeldub, et $a\neq 1$ korral leidub niisugune punkt β, mille suhtes lineaarfunktsioon teostab tasandi pöörde nurga $\arg a$ võrra ning $|a|$ kordse mastaabi muutuse. Erijuhul, kui $b=0$, toimub see nullpunkti suhtes.

Näide 5. Vaatleme funktsiooni

$w=z^2$.

Olgu jällegi $z=re^{i\varphi}$ ja $w=\varrho e^{i\Theta}$. Siin saame seosed:

$\varrho=r^2$ ja $\Theta=2\varphi+2n\pi$.

Nendest selgub, et z-tasandi punktid, mille moodulid on võrdsed ning argumendid erinevad arvu π või selle täisarvkordsete võrra, kujutuvad w-tasandile üheks ja samaks punktiks. Siit järeldub, et piirkond $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ kujutub piirkonnaks $-\pi<\arg w<\pi$, s. t. kogu w-tasandiks, välja arvatud reaaltelje negatiivne osa.

Kui meil on määratud mingi funktsioon $w=f(z)$ hulgal D, siis see tähendab, et igale piirkonda D kuuluvale kompleksarvule z on vastavusse seatud mingi kompleksarv w. Et aga $z=x+iy$ ja $w=u+iv$ on määratud oma reaal- ja imaginaarosadega, siis vastavus $w=f(z)$ määrab meile kaks kahe muutuja funktsiooni

$u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$.

Seega

$w=u+iv=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$.

Funktsioone u ja v nimetatakse kompleksmuutuja funktsiooni $w=f(z)$ **reaal-** ja **imaginaarosaks.**

Näide 6. Kui $w=z^2$, siis

$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy$,

s. t.

$u(x, y)=x^2-y^2$ ja $v(x, y)=2xy$.

Ülesanded

1. Leida funktsiooni

$$w=f(z)=\frac{y}{x}+\mathrm{i}\,\frac{1}{1-x}$$

määramispiirkond.

2. Leida sirgete $y=\alpha$ $(\alpha>0)$ ja poolsirgete $x=\beta$ $(y>0)$ kujutised funktsiooniga $w=z^2$.
3. Milliseid jooni esitavad võrrandid $(t\in\mathbf{R})$:
   a) $z=t(1+\mathrm{i})$,
   b) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$,
   c) $z=t+\frac{\mathrm{i}}{t}$,
   d) $z=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}$,
   e) $z=\alpha e^{\mathrm{i}t}+\beta e^{-\mathrm{i}t}$, ($\alpha$ ja β reaalarvud).
4. Leida järgmiste funktsioonide reaal- ja imaginaarosad:
   a) $w=\frac{1}{z}$,
   b) $w=z+2\bar{z}$,
   c) $w=z^3$,
   d) $w=\frac{1}{z^2}$,
   e) $w=\frac{z-1}{z}$,
   f) $w=\frac{1}{z-\mathrm{i}}$.

2.2. PIIRVÄÄRTUS

Vaatleme kompleksarvuliste väärtustega järjestatud suurusi. Nende all mõistame niisuguseid muutuvaid suurusi w, mille korral vähemalt osa w väärtuste w_1, w_2 puhul on määratud, kumb väärtustest teisele järgneb. Siinjuures nõuame, et see järjestus oleks: 1) *transitiivne*, s. t. kui w_2 järgneb väärtusele w_1, w_3 aga väärtusele w_2, siis järgneb w_3 ka väärtusele w_1; 2) *suunatud*, s. t. iga kahe väärtuse w_1 ja w_2 puhul leidub w_3, mis järgneb kummalegi väärtusele w_1, w_2. Viimast arvestades kõneleme ka, et suurus w muutub *suunatud protsessis.*

Matemaatilise analüüsi kursuses tutvusime reaalarvuliste väärtustega suuruse piirväärtuse mõistega. Seame endale ülesandeks taandada kompleksarvuliste väärtustega järjestatud suuruse piirväärtustega seotud mõisted ja nendekohased teoreemid analoogilistele mõistetele ja teoreemidele reaalarvuliste suuruste korral. Aluse selleks annavad kompleksarvu definitsioon ning kauguse

mõiste komplekstasandil. Nende põhjal saame allpool vaadeldava seose (1), mis võimaldabki meil lahendada oma ülesande.

Järjestatud suuruste näidetena mainiksime järgmisi:

$w=z_n$ $(n\to\infty)$, $w=z(t)$ $(t\to 0)$ ja $w=f(z)$ $(z\to a)$,

millega tuleb meil sageli kohtuda järgnevates osades. Et need kompleksarvuliste väärtustega suurused on tõepoolest järjestatud suurused, jätame tõestada lugejale. Märgime vaid, et selleks on vaja selgitada, mida tähendab igal üksikul juhul järgnevus, ning kontrollida transitiivsust ja suunatust.

Me nimetame kompleksset muutuvat suurust w **lõpmata väikeseks** ehk **hääbuvaks** vaadeldavas protsessis, kui selles protsessis on reaalarvuliste väärtustega suurus $|w|$ lõpmata väike, s. t.

$$\lim|w|=0.$$

*Kompleksarvu $A=a+ib$ nimetame muutuva suuruse $w=u+iv$ **piirväärtuseks** vaadeldavas suunatud protsessis, kui selles protsessis vahe $w-A$ on lõpmata väike.* Seda, et A on suuruse w piirväärtuseks, märgime järgmiselt:

$$\lim w=A.$$

Teoreem. *Muutuva suuruse $w=u+iv$ piirväärtuseks on konstant $A=a+ib$ parajasti siis, kui vaadeldavas protsessis* $\lim u=a$ *ning*

$$\lim v=b.$$

Tõestus. Teoreemi väide järeldub vahetult võrratustest

$$\left.\begin{matrix}|u-a|\\|v-b|\end{matrix}\right\}\leqslant|w-A|\leqslant|u-a|+|v-b|, \qquad (1)$$

kui peame silmas äsjatoodud piirväärtuse definitsiooni ning vastavat definitsiooni reaalarvuliste muutuvate suuruste korral. Võrratusteahela (1) parem pool esitab teoreemi tingimuste piisavuse ning vasak pool — tarvilikkuse.

Rakendustes on sageli otstarbekas kasutada piirväärtuse definitsiooni mõnevõrra teisel, kuid ülaltooduga samaväärsel kujul.

Konstanti A nimetatakse muutuva suuruse w piirväärtuseks, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub vaadeldavas protsessis niisugune koht, millest alates kehtib võrratus

$$|w-A|<\varepsilon.$$

Vaatleme nüüd jada (z_n) piirväärtust ning rakendame selle puhul äsjaesitatud üldist piirväärtuse definitsiooni. Jada puhul iseloomustab protsessi jada indeksi kasvamine. Koha määrab siin indeks, s. t. mingi naturaalarv. Seega:

arv A on jada (z_n) piirväärtuseks, kui vastavalt igale arvule

$\varepsilon>0$ leidub selline naturaalarv $N(\varepsilon)$, nii et iga $n>N(\varepsilon)$ puhul

$$|z_n - A| < \varepsilon.$$

Jada, millel on piirväärtus, nimetatakse **koonduvaks**. Ülaltoodud teoreemi abil saame kompleksliikmetega jadadele üle kanda Cauchy kriteeriumi, mida tunneme reaalarvuliste jadade puhul.

Cauchy kriteerium. *Jada (z_n) on koonduv parajasti siis, kui vastavalt igale arvule $\varepsilon>0$ leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$, nii et iga $n>N(\varepsilon)$ ning iga naturaalarvu p korral kehtib võrratus*

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon.$$

Teise konkreetse rakendusena vaatleme funktsiooni $w=f(z)$ piirväärtust punktis a, s. t. funktsiooni f piirväärtust protsessis $z \to a$, mida märgime sümboliga

$$\lim_{z \to a} f(z).$$

Siinjuures eeldame, et funktsioon f on määratud punkti a mingis ümbruses (välja arvatud võib-olla punktis a endas). Selles protsessis on koht määratud punkti z kaugusega punktist a. Piirväärtuse definitsiooni rakendamisel saame:

kompleksarv A on funktsiooni $w=f(z)$ piirväärtuseks punktis a, kui vastavalt igale arvule $\varepsilon>0$ leidub selline $\delta(\varepsilon)>0$, nii et iga võrratusi

$$0 < |z - a| < \delta(\varepsilon)$$

rahuldava z puhul kehtib võrratus

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Näide 1. Tõestada, et $\lim\limits_{z \to i} |z| = 1$.

Äsjaesitatud definitsiooni põhjal tuleb meil näidata, et iga $\varepsilon>0$ puhul leidub niisugune $\delta(\varepsilon)>0$, et $|z-i|<\delta(\varepsilon)$ korral kehtib võrratus $||z|-1|<\varepsilon$.
Et aga (vt. jaotis 1.2)

$$||z| - 1| = ||z| - |i|| \leqslant |z - i|,$$

siis võib võtta $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$.

Näide 2. Näitame, et ei eksisteeri $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$.

Selle näitamiseks läheneme punktile 0 kahte erinevat teed pidi ning veendume, et sel korral saame erinevad piirväärtused, mis ütlebki, et vaadeldaval funktsioonil pole piirväärtust punktis 0.

1) Olgu $z=x+iy$. Läheneme nullile piki reaaltelge, s. t. $y=0$. Sel juhul $z=\bar{z}=x$ ning seega $\lim\dfrac{\bar{z}}{z}=1$.

2) Kui aga läheneme nullile piki imaginaartelge, s. t. $x=0$, siis $z=iy$ ning $\bar{z}=-iy$, mistõttu $\lim \frac{\bar{z}}{z}=-1$.

Ülesanded

1. Näidata, et punkt A ($|A|\neq 0$ ning $\arg A\neq\pi$) on muutuva suuruse w piirväärtuseks parajasti siis, kui $\lim |w|=|A|$ ja $\lim \arg w=\arg A$.

2. Tõestada, et

   a) $\lim\limits_{z\to z_0} c=c$,

   b) $\lim\limits_{z\to z_0} (az+b)=az_0+b$,

   c) $\lim\limits_{z\to z_0} (z^2+c)=z_0^2+c$,

   d) $\lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} z=\operatorname{Re} z_0$,

   e) $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z}=\bar{z}_0$,

   f) $\lim\limits_{z\to 1-i} [x+i(2x+y)]=1+i$.

3. Tõestatud teoreemi abil näidata, et kompleksete muutuvate suuruste piirväärtuste korral kehtivad aritmeetiliste tehete puhul samasugused teoreemid nagu reaalarvuliste suuruste puhul.
4. Näidata, et iga suurus, millel on piirväärtus, on tõkestatud.
5. Näidata, et ka kompleksarvuliste jadade puhul kehtib Bolzano — Weierstrassi teoreem.

2.3. FUNKTSIOONI PIDEVUS

Edasises ainekäsituses on eriti tähtis funktsiooni pidevuse mõiste.

Funktsiooni $w=f(z)$ *nimetatakse* ***pidevaks*** *punktis* $z_0\in D$, *kui* *

1) *eksisteerib* $f(z_0)$,

2) *eksisteerib* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$,

3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Sellest definitsioonist lähtudes saame, et *funktsioon* $w=f(z)$ *on pidev punktis* z_0 *parajasti siis, kui vastavalt igale arvule* $\varepsilon>0$ *leidub selline arv* $\delta(\varepsilon)>0$, *et* $|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$ *puhul*

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

Piirväärtuse omadustest järeldub vahetult, et *pidevate funktsioonide summa, vahe, korrutis ja jagatis on pidevad funktsioonid* (viimase puhul ei tohi jagaja väärtus vaadeldavas punktis võrduda nulliga).

Vaatleme mingit originaali väärtust z ning temale lähedased ori-

* Funktsiooni väärtust ja piirväärtust vaatleme lõplikena.

ginaali väärtused kirjutame kujul $z+\Delta z$. Suurust Δz nimetatakse **originaali muuduks**. Et funktsioon $w=f(z)$ oleks pidev punktis z, peab

$$\lim_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z)=f(z)$$

ehk teisiti

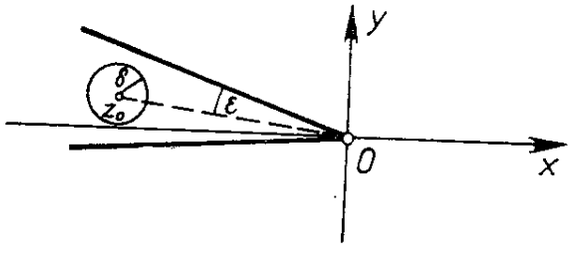
$$\lim_{\Delta z\to 0} [f(z+\Delta z)-f(z)]=0.$$

Vahet $f(z+\Delta z)-f(z)$ nimetatakse **funktsiooni f muuduks** punktis z. Meie tõestasime sellega, et funktsioon f on pidev punktis z parajasti siis, kui selles punktis lõpmata väikesele originaali muudule vastab lõpmata väike funktsiooni muut.

Kui funktsioon f on pidev piirkonna D igas punktis, siis nimetatakse seda funktsiooni pidevaks piirkonnaks D.

N ä i d e. Näitame, et $\arg z$ on pidev igas punktis z, mis ei asu reaaltelje negatiivsel osal.

Et $z=0$ ja $z=\infty$ puhul pole $\arg z$ määratud, siis neid z väärtusi me ei vaatle. Olgu z_0 punkt, mis ei asu reaaltelje negatiivsel osal. Võtame mingi arvu $\varepsilon>0$. Tähistame sümboliga δ sellise ringi raadiuse, mille keskpunkt asub punktis z_0. Asugu see ring sektoris $\arg z_0-\varepsilon<\varphi<\arg z_0+\varepsilon$ ning ärgu ta sisaldagu reaaltelje negatiivse osa punkte (vt. joon. 10). Sel juhul järeldub võrratusest $|z-z_0|<\delta$ võrratus $|\arg z-\arg z_0|<\varepsilon$. Et z_0 ja ε olid suvalised, siis olemegi tõestanud oma väite.



Joon. 10

Selle tõestuse juures on oluline tähele panna, et vastavalt arvule $\varepsilon>0$ konstrueeritud arv δ sõltus punkti z_0 valikust. Kui aga sellist sõltuvust ei esine, siis saame nn. ühtlase pidevuse.

Funktsiooni f nimetatakse ***ühtlaselt pidevaks*** *piirkonnas D, kui vastavalt arvule $\varepsilon>0$ leidub selline $\delta(\varepsilon)>0$, nii et piirkonna D iga kahe punkti z_1 ja z_2 puhul kehtib võrratus*

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon,$$

kui $|z_1-z_2|<\delta(\varepsilon)$.

Ülesanded

1. Näidata, et funktsioon $w=f(z)=u+iv$ on pidev punktis $z_0=x_0+iy_0$ parajasti siis, kui funktsioonid $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$ on pidevad punktis (x_0, y_0).
2. Sõnastada pidevate funktsioonide kohta käivad Cantori ja Weierstrassi teoreemid kompleksmuutuja korral. Tõestada need analoogid.
3. Tõestada, et pidevate funktsioonide kompositsioon on pidev funktsioon.
4. Näidata, et funktsioonid $w=z+i$, $w=\frac{1}{z}$ ja $w=z^2$ on pidevad punktis $z=i$.

2.4. DIFERENTSEERUVAD FUNKTSIOONID

Vaatleme mingis piirkonnas D defineeritud funktsiooni $w=f(z)$. Tähistame:

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z).$$

Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$, *siis nimetatakse funktsiooni* f ***diferentseeruvaks*** *punktiks* z. *Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni* f ***tuletiseks*** *punktis* z *ning tähistatakse sümboliga* $f'(z)$.

Näide 1. Olgu $w=z^2$. Sel juhul

$$\Delta w=(z+\Delta z)^2-z^2=z^2+2z\Delta z+\Delta z^2-z^2=2z\Delta z+\Delta z^2$$

ning siit

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+\Delta z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z.$$

Seega

$$(z^2)'=2z.$$

Näide 2. Olgu $w=|z|^2=z\bar{z}$. Siin

$$\Delta w=(z+\Delta z)\,(\overline{z+\Delta z})-z\bar{z}=(z+\Delta z)\,(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\bar{z}=$$

$$=z\bar{z}+z\overline{\Delta z}+\bar{z}\Delta z+\Delta z\overline{\Delta z}-z\bar{z}=z\overline{\Delta z}+\bar{z}\Delta z+\Delta z\overline{\Delta z},$$

millest

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=z\,\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}+\overline{\Delta z}.$$

Saadud summa piirväärtus aga ei eksisteeri (v. a. juhul, kui $z=0$), sest vastavalt jaotise 2.2 näitele 2 ei eksisteeri esimese liidetava

piirväärtus. Seega pole vaadeldav funktsioon diferentseeruv üheski punktis peale punkti $z=0$.

Selle näite põhjal veendusime, et ka üsna lihtsad kompleksmuutuja funktsioonid ei pruugi olla diferentseeruvad. Kui vaadelda sama funktsiooni $y=|x|^2=x^2$ reaalmuutuja korral, siis on see diferentseeruv igas punktis. Sellest järeldub, et kompleksmuutuja korral on diferentseeruvuse nõue hoopiski rangem kui reaalmuutuja puhul, kuigi formaalselt on diferentseeruvus defineeritud mõlemal juhul ühtmoodi. Selle tõsiasja sisulise tähendusega tutvume mõnevõrra hiljem, kui vaatleme kõrgemat järku tuletisi.

Olgu funktsioon $w=f(z)$ diferentseeruv punktis z. Vastavalt piirväärtuse ja diferentseeruvuse definitsioonile on suurus

$$\eta=\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z)$$

diferentseeruva funktsiooni puhul lõpmata väike protsessis $\Delta z\to 0$. Viimasest võrdusest saame, et

$$\Delta w=f'(z)\Delta z+\eta\Delta z. \qquad (1)$$

Selle võrduse paremal poolel on esimene liidetav teisega võrreldes madalamat järku lõpmata väike* (kui $f'(z)\neq 0$). Nagu reaalmuutuja funktsioonide puhul, nii nimetatakse ka siin suurust $f'(z)\Delta z$ funktsiooni muudu peaosaks. See suurus sõltub lineaarselt originaali muudust Δz ning teda nimetatakse **funktsiooni diferentsiaaliks** ja tähistatakse

$$dw=f'(z)\Delta z.$$

Kui võtta $w=z$, siis $w'=1$ ning $dw=dz=\Delta z$. Seega võime kirjutada

$$dw=f'(z)dz,$$

millest

$$f'(z)=\frac{dw}{dz}.$$

Seosest (1) järeldub, et diferentseeruva funktsiooni korral vastab lõpmata väikesele originaali muudule lõpmata väike funktsiooni muut. Seega on iga diferentseeruv funktsioon ka pidev.

Et formaalselt on funktsiooni diferentseeruvus defineeritud samuti kui reaalmuutuja funktsiooni korral, siis on diferentseerimise reeglid kompleksmuutuja funktsioonide puhul samasugused kui need, mida tunneme matemaatilise analüüsi kursusest. Vaatleme siinkohal vaid liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit.

---

* Lõpmata väikesi suurusi võrreldakse kompleksmuutuja puhul täpselt samuti kui reaalmuutuja korral.

Olgu antud funktsioonid $w=f(\zeta)$ ja $\zeta=g(z)$, kus z ja ζ kuuluvad vastavalt piirkondadesse D ja D_1 ($D_1 \subset D$), s. t. esimese funktsiooni määramispiirkond sisaldab teise funktsiooni kujutispiirkonna. Eeldame, et funktsioon f on diferentseeruv punktis z, mistõttu seose (1) põhjal

$$\Delta\zeta=g'(z)\Delta z+\alpha\Delta z, \tag{2}$$

kus $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$. Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis $\zeta=g(z)$. Sel juhul

$$\Delta w=f'(\zeta)\Delta\zeta+\beta\Delta\zeta, \tag{3}$$

kus $\lim\limits_{\Delta\zeta\to 0}\beta=0$. Et aga $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta\zeta=0$, siis ka $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\beta=0$.

Seoste (2) ja (3) põhjal saame, et

$$\Delta w=f'(\zeta)\,[g'(z)\Delta z+\alpha\Delta z]+\beta[g'(z)\Delta z+\alpha\Delta z]=$$

$$=f'(\zeta)g'(z)\Delta z+[\alpha f'(\zeta)+\beta g'(z)+\alpha\beta]\Delta z=$$

$$=f'(\zeta)g'(z)\Delta z+\gamma\Delta z,$$

kus $\gamma=\alpha f'(\zeta)+\beta g'(z)+\alpha\beta$. Et $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\gamma=0$, siis saamegi siit matemaatilise analüüsi kursusest tuntud valemi

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{dw}{dz}=f'(\zeta)g'(z)=\frac{dw}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz}.$$

Lõpetuseks defineerime kaks olulist mõistet. *Funktsiooni, mis on piirkonna D igas punktis ühene ja diferentseeruv, nimetatakse* ***regulaarseks piirkonnaks*** *D. Funktsiooni f nimetatakse* ***regulaarseks punktis*** *z, kui sellel punktil leidub ümbrus, kus f on regulaarne.*

Kui vaatleme diferentseeruvuse ja regulaarsuse nõudeid piirkonna puhul, siis üheste funktsioonide korral need ühtivad. Punktis regulaarsuse nõue on aga rangem kui punktis diferentseeruvuse nõue. Nii on näites 2 vaadeldud funktsioon diferentseeruv punktis $z=0$, kuid ei ole seal regulaarne.

Ülesanded

1. Leida tuletised funktsioonidest

a) $w=(2z+\mathrm{i})^4$,

b) $w=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z}$,

c) $w=3z^2-4z+\mathrm{i}$,

d) $w=\dfrac{2x}{z^{-1}}$.

Vastus: a) $w'=8(2z+\mathrm{i})^3$, b) $w'=\frac{\mathrm{i}}{z^2}$,

c) $w'=6z-4$, d) $w'=-\frac{2\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2}$.

2. Näidata, et funktsioonid $w=\operatorname{Re} z$, $w=\operatorname{Im} z$, $w=\bar{z}$ pole diferentseeruvad.

3. Leida funktsiooni $w=(2+\mathrm{i})z^2$ diferentsiaal punktides $z=2-\mathrm{i}$, $z=\frac{1}{2}$ ja $z=-\mathrm{i}$.

Vastus: $10\Delta z$, $(2+\mathrm{i})\Delta z$ ja $2(1-2\mathrm{i})\Delta z$.

2.5. CAUCHY—RIEMANNI VÕRRANDID

Eelmises jaotises nägime, et ka suhteliselt lihtsad pidevad kompleksmuutuja funktsioonid võivad mitte osutuda diferentseeruvaiks. Seepärast tuleks leida tingimused, mille järgi saaks otsustada funktsiooni diferentseeruvuse üle. Lahendamegi selle probleemi.

Olgu meil funktsioon

$$w=f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y).$$

Eeldame, et see funktsioon on diferentseeruv punktis z, s. t. eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Siinjuures on oluline tähele panna, et piirväärtuse definitsiooni kohaselt ei sõltu see piirväärtus sellest, millisel viisil Δz läheneb nullile. Teisiti öeldes, kui teame, et piirväärtus $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ eksisteerib, siis piisab tema leidmiseks, kui vaatleme vaid teatavat kindlat suuruse Δz nullile lähenemise viisi (näiteks piki mingit sirget).

Lähenegu $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$ nullile selliselt, et $\Delta y=0$, s. t. punkt $z+\Delta z$ ligineb punktile z paralleelselt reaalteljega. Sel juhul $\Delta z=\Delta x$ ning

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)+\mathrm{i}(v+\Delta v)-(u+\mathrm{i}v)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kui aga Δz läheneb nullile nii, et $\Delta x=0$, siis saame

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta y}-i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Eelduse kohaselt oli funktsioon diferentseeruv. Seetõttu peavad kahel erineval lähenemisel saadud tulemused olema võrdsed, s. t.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Seega funktsiooni diferentseeruvuse korral:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Saadud võrrandeid nimetatakse ***Cauchy — Riemanni võrranditeks.***

Näitame, et Cauchy — Riemanni võrrandite täidetus on ka funktsiooni diferentseeruvuse piisavaks tingimuseks — eeldusel, et kahe muutuja funktsioonid u ja v on diferentseeruvad. Viimane asjaolu tähendab seda, et

$$\begin{aligned}\Delta u&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\eta_1|\Delta z|,\\ \Delta v&=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\eta_2|\Delta z|,\end{aligned}\qquad(1)$$

kus $|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ning η_1, η_2 lähenevad nullile, kui $\Delta z\to 0$. Seoste (1) ja Cauchy — Riemanni võrrandite abil saame, et

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\eta_1+i\eta_2)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+(\eta_1+i\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\eta_1+i\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Saadud tulemuste põhjal

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|=|\eta_1+i\eta_2|\to 0,\text{ kui }\Delta z\to 0.$$

Seega, funktsioon $w=f(z)$ on diferentseeruv ning

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

N ä i d e. Näitame, et funktsioon $w=\frac{1}{z}$ on diferentseeruv igas nullist erinevas punktis.

Et

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2},$$

siis tuleb meil veenduda, et funktsioonid

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{ja} \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

rahuldavad Cauchy — Riemanni võrrandeid. Arvutades saame, et

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

kui $x^2+y^2=|z|^2\neq 0$.

Siit näemegi, et Cauchy — Riemanni võrrandid on täidetud, s. t. funktsioon $w=\frac{1}{z}$ on diferentseeruv.

Ülesanded

1. Arvestades, et $x=r\cos\varphi$ ja $y=r\sin\varphi$, näidata, et polaarkoordinaatides avalduvad Cauchy — Riemanni võrrandid kujul

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

2. Eelmise ülesande tulemust kasutades tõestada, et funktsioon $w=z^n$ (n täisarv) on diferentseeruv.
3. Veenduda, et järgmiste avaldistega määratud funktsioonid pole diferentseeruvad:

a) $z-\bar{z}$,
b) $2x+xy^2\mathrm{i}$,
c) $e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$,
d) $x^2\sin y-\mathrm{i}y\cos x$.

4. Millistes punktides on järgmistel funktsioonidel tuletis:

a) $w=\frac{1}{z+1}$, b) $w=x^2+iy^2$, c) $w=z\,\mathrm{Im}\,z$?

Leida tuletised neis punktides, kus nad eksisteerivad.

5. Kui $w=u+iv=x^3-i(y-1)^3$, siis $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2$. Miks on $3x^2$ selle funktsiooni tuletiseks ainult punktis $z=i$?

2.6. HARMOONILISED FUNKTSIOONID

Eeldades, et funktsioonidel u ja v eksisteerivad pidevad teist järku osatuletised, saame Cauchy — Riemanni võrrandeid diferentseerides, et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Sellest järeldub, et funktsioon u rahuldab nn. ***Laplace'i võrrandit***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Funktsiooni, mis rahuldab mingis piirkonnas Laplace'i võrrandit, nimetatakse selles piirkonnas **harmooniliseks funktsiooniks.** Me tõestasime, et teatud eeldustel (teist järku osatuletiste olemasolu korral)* on diferentseeruva kompleksmuutuja funktsiooni reaalosa harmooniline funktsioon. Analoogiliselt saab näidata sedasama ka imaginaarosa kohta.

Funktsioone u ja v, mis rahuldavad peale Laplace'i võrrandi veel Cauchy — Riemanni võrrandeid, nimetatakse **kaasharmoonilisteks.** Osutub, et igale harmoonilisele funktsioonile saab leida kaasharmoonilise. Selle fakti tõestusel me käesolevas raamatus ei peatu, vaid piirdume näidetega.

Näide 1. Leida kaasharmooniline funktsioonile $u=x^2-y^2$. Et v oleks kaasharmooniline, peab ta täitma tingimusi (Cauchy — Riemanni võrrandeid)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x.$$

Esimesest seosest saame, et

$$v=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\varphi(y)=\int 2y\,dx+\varphi(y)=2xy+\varphi(y).$$

---

* Hiljem näeme, et tehtud eeldus on alati täidetud.

Teise seose põhjal

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+\varphi'(y)=2x,$$

s. t. $\varphi'(y)=0$. Seega $\varphi(y)=\text{const}$ ning siit

$v=2xy+C$.

Näide 2. Leida diferentseeruv kompleksmuutuja funktsioon $w=f(z)=u+iv$, kui $v=e^x \sin y$.

Leiame

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x \sin y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x \cos y.$$

Vastavalt Cauchy — Riemanni võrrandeile saame, et

$$u=\int e^x \cos y\,dx+\varphi(y)=e^x \cos y+\varphi(y),$$

millest

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x \sin y+\varphi'(y)=-e^x \sin y.$$

Siit tuleneb, et $\varphi'(y)=0$, s. t. $\varphi(y)=\text{const}$. Seega

$$f(z)=u+iv=e^x \cos y+C+ie^x \sin y=e^x(\cos y+i \sin y)+C.$$

Ülesanded

1. Funktsiooni $w=z^n=(x+iy)^n$ reaal- ja imaginaarosi nimetatakse n-astme **harmoonilisteks polünoomideks**. Leida kõik harmoonilised polünoomid kuni 4. astmeni.
2. Leida diferentseeruv funktsioon $w=f(z)=u+iv$, kui

a) $u=x^2-y^2+2x$,

b) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

c) $v=2xy+3x$,

d) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$,

e) $v=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$,

f) $v=\arctan\dfrac{y}{x}$, $x>0$.

Vastus:

a) $w=z^2+2z+Ci$,

d) $w=\dfrac{1}{z}+2iz+Ci$,

b) $w=\frac{1}{z}+Ci$,

c) $w=z^2+3iz+C$,

e) $w=\frac{1}{z+1}+C$,

f) $w=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+$

$+i\arctan\frac{y}{x}+C$.

3. Tõestada, et piirkonnas D diferentseeruv ja reaalarvuliste väärtustega funktsioon on selles piirkonnas konstantne.
4. Olgu $f'(z)=0$ piirkonnas D. Näidata, et $f(z)=\text{const}$.

2.7. TULETISE GEOMEETRILINE TÄHENDUS

Uurime diferentseeruva funktsiooniga teostatava kujutuse geomeetrilisi omadusi. Selle uurimise aluseks võtame jaotises 2.1 vaadeldud näited 1 ja 2, mille põhjal võime väita, et funktsioon

$$w=az$$

teostab kujutuse, mille kujutisvektor w on originaaliga z võrreldes pööratud nurga $\alpha=\arg a$ võrra ning tema pikkus on muutunud $|a|$ kordselt.

Sellest järeldub, et kujutuse

$$w-w_0=a(z-z_0)$$

korral kujutub punktist z_0 punkti z suunduv vektor punktist w_0 punkti w suunduvaks vektoriks; kujutisvektor on originaaliga võrreldes pöördunud nurga $\alpha=\arg a$ võrra ning tema pikkus on muutunud $|a|$ kordselt.

Olgu funktsioon $w=f(z)$ diferentseeruv. Vaatleme punkte, milles $f'(z)\neq 0$. Sel juhul

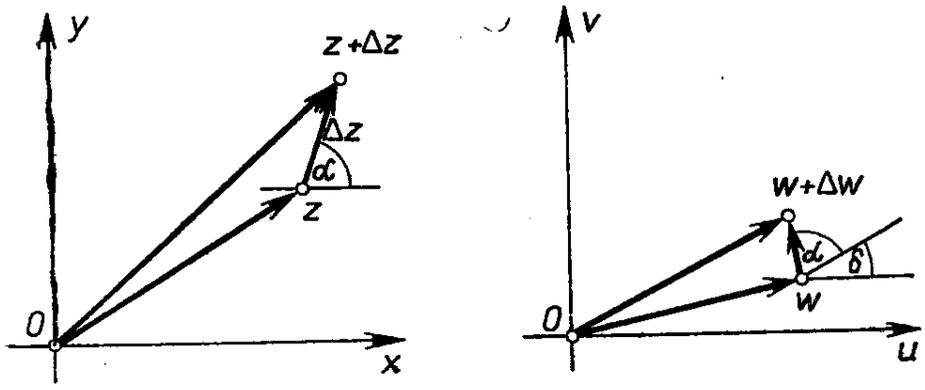
$$\Delta w=f'(z)\Delta z+\beta,$$

kus β on esimese liidetavaga võrreldes kõrgemat järku lõpmata väike suurus. Küllalt väikese Δz puhul kehtib seega ligikaudne võrdus

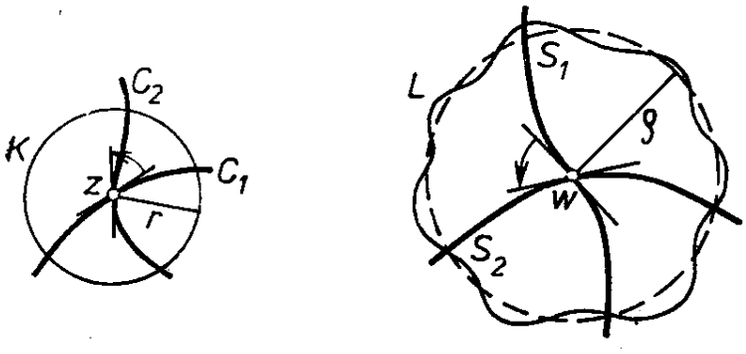
$$\Delta w=f'(z)\Delta z. \qquad (1)$$

Seosest (1) näeme, et vektor Δw on võrreldes vektoriga Δz pöördunud nurga $\arg f'(z)$ võrra ning tema pikkus on muutunud Δz pikkusega võrreldes suuruse $|f'(z)|$ kordselt. Et see kehtib igasuguse küllalt väikese Δz ja temale vastava Δw korral, siis saame sellest järeldada järgmise fakti:

kujutamisel diferentseeruva funktsiooniga f toimub neis punktides, kus $f'(z)\neq 0$, tasandi pööre nurga $\delta=\arg f'(z)$ võrra ning mastaabi muutus $|f'(z)|$ kordselt (vt. joon. 11).



Joon. 11



Joon. 12

Et kõigi vektorite Δz kujutised on pööratud oma originaalide suhtes ühe ja sama nurga δ võrra, siis on punkti z läbiva kahe joone C_1 ja C_2 vaheline nurk võrdne (nii suuruse kui ka suuna poolest) vastavate kujutisjoonte S_1 ja S_2 vahelise nurgaga (vt. joon. 12). Selles väljendub nn. **nurkade säilivuse omadus.**

Teiselt poolt, nagu nägime, muutub vektori Δz pikkus igas suunas ühte viisi, s. t. lõpmata väikese raadiusega ringjoon K (keskpunktiga punktis z) kujutub jooneks L, mille punktide kaugused mingist ringjoonest (keskpunktiga punktis w) on suurusega ϱ võrreldes kõrgemat järku lõpmata väikesed. Selles väljendub nn. **lõpmata väikeste ringjoonte invariantsuse omadus.**

Kujutust, millel on kaks eespool mainitud omadust, nimetatakse **konformseks kujutuseks**. Niisiis, iga diferentseeruv kompleksmuutuja funktsioon teostab konformse k u j u t a m i s e (s. t. säilitab nurgad nii suuruse kui ka suuna poolest ning muudab mastaapi igas suunas ühte viisi) kõigis punktides, kus tuletis on nullist erinev.

Meie nägime eelnevas, et kui originaaliks on lõpmata väike ring pindalaga πr^2, siis on kujutiseks piirkond, mis on ligilähedaselt ring pindalaga $|f'(z)|^2\pi r^2$, s. t. pindala muutub $|f'(z)|^2$ kordselt. Seda tulemust teame matemaatilise analüüsi kursusest, milles näidati, et muutujate vahetuse $u=u(x, y)$; $v=v(x, y)$, s. t. kujutuse $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ puhul muutub pindala jakobiaani

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

kordselt. Ent Cauchy — Riemanni võrrandeid arvestades saame, et jakobiaan võrdub avaldisega

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

See on funktsiooni tuletise mooduli teine geomeetriline tähendus.

Kui $f'(z) \neq 0$, on teisendus $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ regulaarne, mistõttu eksisteerib pöördteisendus * $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$. Seda tulemust kompleksmuutuja funktsiooni seisukohalt tõlgendades saame, et nende punktide ümbruses, kus $f'(z) = 0$, eksisteerib funktsioonil $w = f(z)$ ühene pöördfunktsioon

$$z = g(w) = x(u, v) + iy(u, v).$$

Ülesanded

1. Leida tasandi pööre ja mastaabi muutus kujutamisel funktsiooniga $w = z^2$ punktides:

   a) $z = 1$, c) $z = -\frac{1}{4}$, e) $z = \sqrt{3} - i$,

   b) $z = \frac{1}{2}$; d) $z = 1 + i$, f) $z = -2i$.

   Vastus:

   a) 0 ja 2, c) π ja $\frac{1}{2}$, e) $-\frac{\pi}{6}$ ja 4,

   b) 0 ja 1, d) $\frac{\pi}{4}$ ja $2\sqrt{2}$, f) $-\frac{\pi}{2}$ ja 4.

2. Sama funktsiooni $w = z^3$ puhul.

   Vastus:

   a) 0 ja 3, c) 0 ja $\frac{3}{16}$; e) $-\frac{\pi}{3}$ ja 12,

   b) 0 ja $\frac{3}{4}$, d) $\frac{\pi}{2}$ ja 6, f) $-\pi$ ja 12.

---

* **Kangro, G.** Matemaatiline analüüs II, Tln., 1968, lk. 281.

3. Milline z-tasandi osa surutakse kokku ja milline venitatakse välja järgmiste funktsioonidega kujutamisel:

a) $w=z^2$,

b) $w=\frac{1}{z}$,

c) $w=z^2+2z$,

d) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

V a s t u s: Kokku surutakse

a) $|z|<\frac{1}{2}$,

b) $|z|>1$,

c) $|z+1|<\frac{1}{2}$;

d) $x=\operatorname{Re} z<0$.

Välja venitatakse:

a) $|z|>\frac{1}{2}$;

b) $0<|z|<1$,

c) $|z+1|>\frac{1}{2}$,

d) $\operatorname{Re} z>0$.

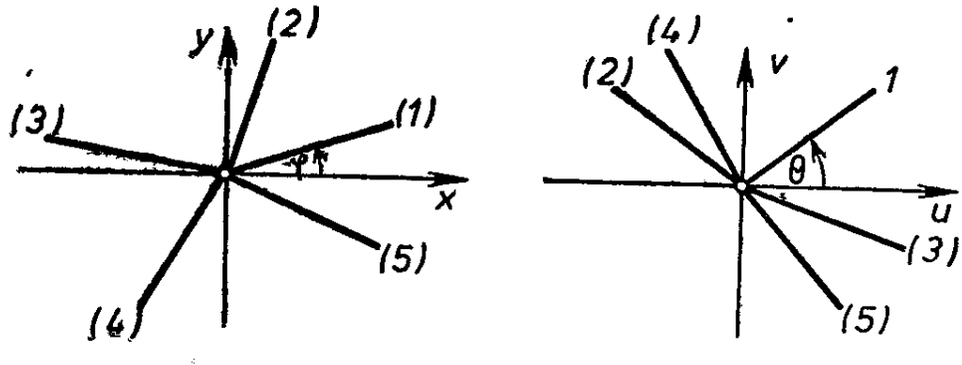
3. ELEMENTAARFUNKTSIOONID

3.1. ASTMEFUNKTSIOON

Eelpool selgitasime, mida mõistame astmena z^n, kus n on positiivne täisarv. Järgnevas tutvume **astmefunktsiooni** $w=z^n$ mõne lihtsama omadusega. Selle funktsiooni diferentseeruvust saab kõige lihtsamini kontrollida Moivre'i valemi või Cauchy—Riemanni võrrandite (polaarkoordinaatides) abil, või siis vahetult tuletise definitsioonist lähtudes, kasutades täieliku induktsiooni meetodit.

Asudes uurima astmefunktsiooni omadusi, vaatleme lihtsuse mõttes kõigepealt ruutfunktsiooni.

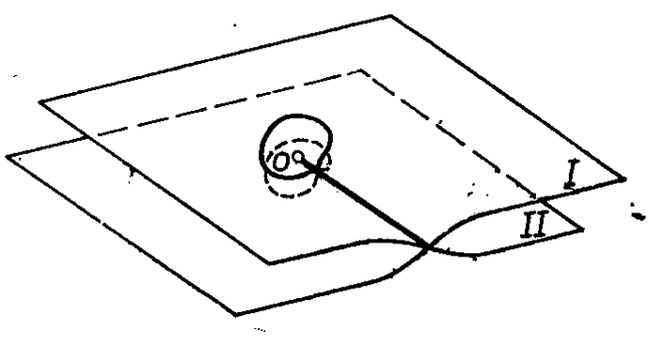
a) Funktsioon $w=z^2$. Eelnevas nägime (vt. näide 5 jaotises 2.1), et funktsioon pole üheleheline, s. t. igale kujutisele ei vasta ainult üks originaal. Sellise vastavuse lähemaks selgitamiseks võtame nullpunktist lähtuva kiire ning pöörame teda vastupidiselt kellaosuti



Joon. 13

liikumise suunale (vt. joon. 13). Kiirele z-tasandil vastab kiir w-tasandil (vt. näide 5 jaotises 2.1), kusjuures polaarnurk w-tasandil kasvab poole kiiremini vastavast polaarnurgast z-tasandil. Pööratava kiire kujutis katab kogu w-tasandi juba siis, kui z-tasandi kiir katab vaid ülemise pooltasandi. Kui nüüd läbime oma z-tasandi kiirega ka alumise pooltasandi, katab kujutiskiir w-tasandi teistkordselt.

Et saada üks-ühest vastavust kujutiste ja originaalide vahel, selleks võtame kujutistasandeid kaks. Seejuures olgu z-tasandi ülemisele poolele vastavad kujutised w-tasandi esimesel eksemplaril ning alumisele poolele vastavad kujutised teisel. Ühendame need tasandid nii, et kujutiskiir saaks liikuda pidevalt, kui pööratav kiir teeb originaalide tasandil täispöörde. Selleks lõikame mõlemad tasandid läbi piki reaaltelje positiivset osa, ühendame esimese tasandi lõike ülemise serva teise tasandi lõike alumise servaga ning vastupidi (vt. joon. 14). Niisugust kahelehelist pinda nimetatakse ruutfunktsiooni väärtuste ***Riemanni pinnaks***. Selle pinna konstruktsiooni kohaselt võime öelda, et funktsioon $w=z^2$ kujutab kogu z-tasandi pidevalt ja üks-üheselt oma väärtuste Riemanni pinnaks. Saadud pind on kaheleheline, sest ta koosneb kahest komplekstasandi eksemplarist (lehest). Nendel kahel lehel on ühisteks punktideks 0 ja ∞.



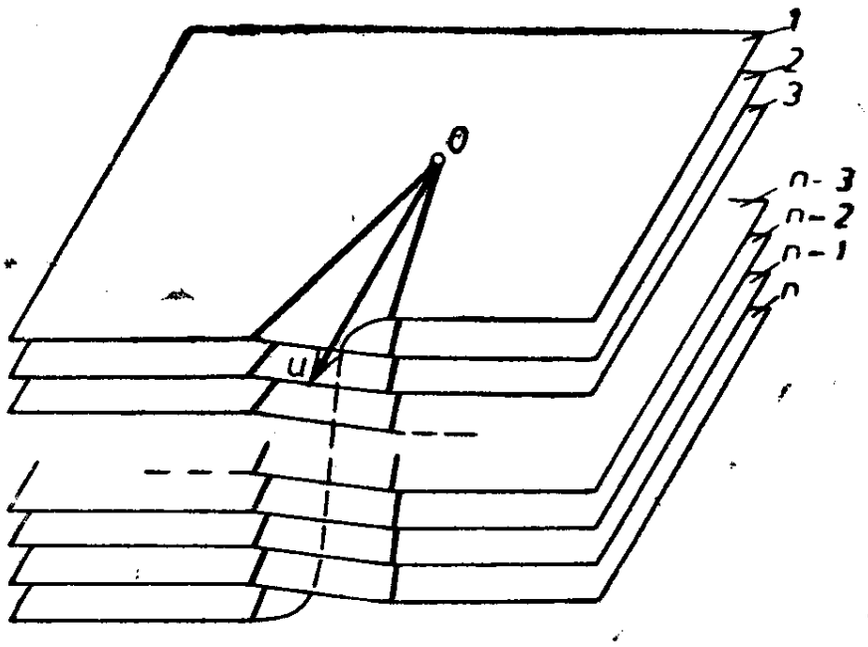
Joon. 14

Kui läbime nullpunkti ümbritseva ringjoone $|z|=r$ ühel korral, siis läbib sellele vastav punkt Riemanni pinnal nullpunkti ümbritseva ringjoone $|w|=r^2$ kahel korral. Sama märkame ka siis, kui vaatleme nullpunkti asemel lõpmatuspunkti. See annab põhjuse nimetada neid punkte vaadeldava Riemanni pinna **teist järku hargnemispunktideks**. Need on punktid, kus on seotud vaadeldava pinna üksikud lehed.

b) Funktsioon $w=z^n$. Kui tähistame $z=re^{i\varphi}$ ja $w=\varrho e^{i\Theta}$, siis saame

$$\varrho=r^n \quad \text{ja} \quad \Theta=n\varphi+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \ldots\ .$$

Näeme, et nullpunktist lähtuva kiire kujutiseks selle funktsiooni puhul on jällegi nullpunktist lähtuv kiir, kuid selline kiir, mille polaarnurk on originaali omast n korda suurem. Toimides nii nagu ruutfunktsiooni puhul, saame üks-ühese vastavuse z-tasandi ja w-tasandi n eksemplari vahel. Kui ühendame need n eksemplari, nagu näidatud joonisel 15, saame pideva vastavuse. Saadud pinda nime-



Joon. 15

tatakse funktsiooni $w=z^n$ väärtuste Riemanni pinnaks. See on n-leheline pind, mille hargnemispunktideks on jällegi $w=0$ ja $w=\infty$. Et ringjoone $|z|=r$ ühekordsele läbimisele vastab n-kordne ringjoone $|w|=r^n$ läbimine, siis nimetatakse punkte $w=0$ ja $w=\infty$ ***n*-järku hargnemispunktideks.**

Ülesanded

1. Leida ruudu $0<\mathrm{Re}\, z<1$, $0<\mathrm{Im}\, z<1$ kujutis, selle pindala ning rajajoone pikkus kujutamisel funktsiooniga $w=z^2$.

   V a s t u s:

   $$S=\frac{8}{3},\quad l=2\ln(1+\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2}).$$

2. Leida jooned, kus funktsioon $w=z^2$ teostab võrdse mastaabi muutuse, ning jooned, kus ta teostab ühe ja samasuguse tasandi pöörde.

   V a s t u s: a) $|z|=\text{const}$, b) $\arg z=\text{const}$.

3. On antud funktsioon $w=z^2$:

   a) leida joonte $x=y$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ kujutised ja selgitada, millised neist joontest kujutuvad üks-üheselt;

   b) leida joonte $u=C$ ja $v=C$ $(w=u+iv)$ originaalid.

   V a s t u s: a) $u=0$ $(v\geqslant 0)$, $|w|=R^2$, $\arg z=2\alpha$. Ainult viimane kujutub üks-üheselt.

   b) $x^2-y^2=C$ (kui $C=0$, siis sirgete paar); $xy=\frac{C}{2}$ (kui $C=0$, siis sirgete paar).

4. Leida funktsioon, mis kujutab piirkonna $|\arg(z+3)|<\frac{\pi}{6}$ ülemiseks pooltasandiks.

   V a s t u s: $w=\mathrm{i}(z+3)^3$.

5. Konstrueerida funktsiooni $w=(z-\mathrm{i})^2$ väärtuste Riemanni pind.

3.2. JUURFUNKTSIOON

Nimetame ***n*-astme juureks** kompleksarvust z kompleksarvu $w=\sqrt[n]{z}$, mille puhul

$$w^n=z. \tag{1}$$

Kui tähistame $z=re^{i\varphi}$ ja $w=\varrho e^{i\Theta}$, saame võrdusest (1), et

$$\varrho^n=r \quad \text{ja} \quad n\Theta=\arg z+2k\pi=\varphi+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \ldots;$$

millest

$$\varrho=\sqrt[n]{r} \quad \text{ja} \quad \Theta=\frac{\arg z+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2k\pi}{n}; \quad k=0, \pm 1, \ldots, \tag{2}$$

Võrdustest (2) selgub, et saame n oluliselt erinevat Θ väärtust, mis vastavad k väärtustele 0, 1, ..., $n-1$. Tähistame need vastavalt $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1}$. Kui aga $k=n$, siis saame

$$\Theta_n=\frac{\varphi}{n}+2\pi=\Theta_0+2\pi.$$

Selline polaarnurk koos polaarkaugusega $\sqrt[n]{r}$ määrab w-tasandil sama punkti, mille määrab Θ_0. Seega on juurel $\sqrt[n]{z}$ erinevaid väärtusi n.

Juurfunktsioon $w=\sqrt[n]{z}$ on seega mitmene funktsioon.

Nii rakenduslikust kui ka teoreetilisest seisukohast on aga oluline, et funktsioon oleks ühene. Üheks viisiks, kuidas saame muuta mitmese funktsiooni üheseks, on see, et vaatleme originaali muutumise piirkonnana mitte komplekstasandit, vaid teatud mitmelehelist Riemanni pinda. Eelmises jaotises saime niisuguse pinna, mille puhul astmefunktsioon $w=z^n$ seab üks-ühesesse vastavusse z-tasandi ja vaadeldava Riemanni pinna punktid. Et juurfunktsioon $w=\sqrt[n]{z}$ on astmefunktsiooni pöördfunktsiooniks, siis seab ta tõepoolest astmefunktsiooni $z=w^n$ väärtuste Riemanni pinna igale punktile vastavusse parajasti komplekstasandi ühe punkti ning see vastavus on üks-ühene. Seda pinda nimetatakse ***juurfunktsiooni Riemanni pinnaks***. Niisiis on astmefunktsiooni väärtuste Riemanni pind selle funktsiooni pöördfunktsiooni — juurfunktsiooni Riemanni pinnaks.

Mitmesuguste rakenduste seisukohalt on aga oluline, et saaksime niisuguse ühese funktsiooni, kus ka originaalid muutuvad tavalisel komplekstasandil. Teisiti öeldes otsime niisuguseid piirkondi z-tasandil, kus saame seda mitmest funktsiooni vaadelda ühesena.

Valemite (2) põhjal

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}},$$

millest selgub, et juurfunktsiooni mitmesus tuleneb kompleksarvu z argumendi $\operatorname{Arg} z$ mitmesusest. Viimase eri väärtustele vastavad juurfunktsiooni erinevad väärtused. Et saavutada ühesust, lõikame z-tasandi läbi piki reaaltelje negatiivset osa, nagu tegime $\operatorname{Arg} z$ puhul. Sel juhul ei ole võimalik liikumine ümber nullpunkti ning $\operatorname{Arg} z$ võib muutuda ühes järgmistest vahemikest $(-\pi, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ jne. Nii saame n erinevat ühest funktsiooni

$$w=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

mida nimetatakse **juurfunktsiooni ühesteks harudeks**. Esimest neist ($k=0$) nimetatakse **juurfunktsiooni peaharuks** (analoogiliselt argumendi peaharuga).

Punkte, millel leidub niisugune ümbrus, milles ümber vaadeldava punkti liikudes jõuame mitmese funktsiooni ühe haru juurest teise juurde, nimetatakse selle ***funktsiooni hargnemispunktideks.***

Funktsioonil $w=\sqrt[n]{z}$ on need 0 ja ∞.

Ülesanded

1. Leida mitmese funktsiooni $w=\sqrt[4]{z-1}$ see haru, mille puhul $w(2)=-1$.
2. Arvutada funktsiooni $w=\sqrt[6]{z-i}$ kõikide harude väärtused punktides

$z_1=64+i$, $z_2=-1+i$, $z_3=1$.

3.3. EKSPONENTFUNKTSIOON

Arvestades matemaatilise analüüsi kursusest teadaolevat ***Euleri valemit***

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

ja reaalarvude korral kehtivaid eksponentfunktsiooni omadusi, on loomulik defineerida

$$e^z = e^x e^{iy}, \qquad (1)$$

sest $z = x + iy$.

Võrdusest (1) saame, et

$|e^z| = e^x$ ning $\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Sellest tuleneb, et $e^{z_1} = e^{z_2}$, kui $\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2 = 2k\pi$, $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, s. t. funktsiooni $w = e^z$ periood on $2\pi i$.

Funktsiooni

$$w = e^z$$

nimetatakse **eksponentfunktsiooniks.** Eelnevast järeldub, et see funktsioon pole üheleheline. Niisiis on ka eksponentfunktsiooni puhul vaja konstrueerida tema väärtuste Riemanni pind. Enne selle juurde asumist aga näitame, et eksponentfunktsioon on diferentseeruv. Selleks leiame võrdustest

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

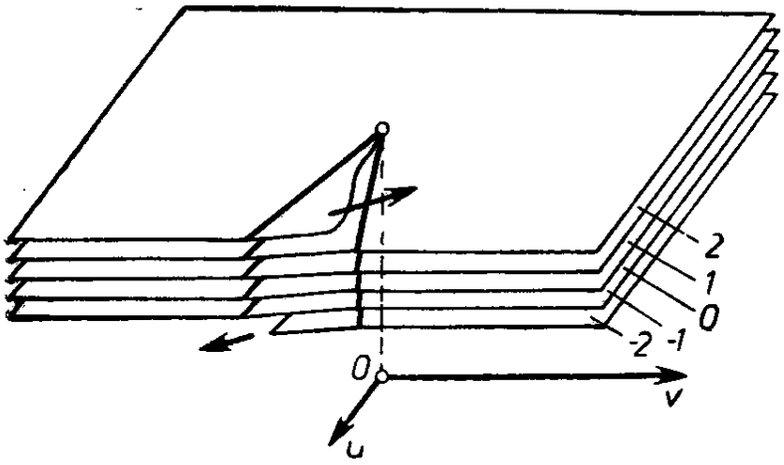
et

$$u = e^x \cos y \quad \text{ja} \quad v = e^x \sin y.$$

Vahetu kontroll näitab, et Cauchy—Riemanni võrrandid on rahuldatud iga x ja y korral, s. t. eksponentfunktsioon on kõikjal diferentseeruv.

Konstrueerime nüüd eksponentfunktsiooni väärtuste Riemanni pinna. Selleks paneme tähele, et x-telg kujutub u-telje positiivseks osaks. Tõepoolest, x-telje punktide puhul $y = 0$, s. t. $\arg w = 0$, ning $-\infty < x < \infty$, s. t. $0 < |w| = e^x < \infty$. Iga x-teljega paralleelse sirge kujutiseks on w-tasandi nullpunktist lähtuv kiir, mille polaarnurk võrdub selle sirge kaugusega x-teljest. Kui nihutame z-tasandil x-teljega paralleelset sirget ülespoole, pöördub selle kujutiseks olev kiir vastupidi kellaosuti liikumisele. Kujutiskiir katab kogu w-tasandi; kui sirge z-tasandil katab riba laiusega 2π. Kui sirge katab järgmise riba laiusega 2π, siis katab kujutiskiir uuesti kogu w-tasandi jne. jne. Kui me aga liiguksime sirgega z-tasandil allapoole, liiguks kujutiskiir ainult kellaosuti liikumise suunas, kuid muus osas analoogiliselt eelnevaga. Sellest arutelust järeldub, et eksponentfunktsiooni väärtuste Riemanni pind peab olema lõpmatuleheline. Need lehed peavad olema ühendatud nii, et x-teljega paralleelse sirge pidevale liikumisele vastaks kujutiskiire pidev liikumine mööda vastavat Riemanni pinda. Selle saavutamiseks võtame lõpmata palju w-tasandi eksemplare, lõikame need läbi piki reaaltelje positiivset osa. Iga eksemplari lõike alumise serva ühendame järgmise eksemplari lõike ülemise servaga ning ülemise serva eelmise eksemplari alumise servaga (vt. joon. 16).

Kui kujutleda seda Riemanni pinda R asetsevana mingi w-tasandi kohal, siis asub w-tasandi iga punkti kohal lõpmata palju



Joon. 16

pinna R punkte. Erandeiks on vaid $w=0$ ja $w=\infty$, mille kohal on vaid üks pinna R punkt.

Kui läbida z-tasandil sirge $x=a$, siis pinnal R vastab sellele liikumine ümber punkti $w=0$ (lõpmata palju kordi), kusjuures liigutakse pinna R ühelt lehelt teisele. Seda liikumist võime aga vaadelda ka liikumisena ümber punkti $w=\infty$. Seetõttu nimetatakse punkte $w=0$ ja $w=\infty$ vaadeldava pinna R **lõpmata järku hargnemispunktideks.**

Vaadeldes funktsiooniga $w=e^z$ teostatavat kujutust konformsuse seisukohalt, näeme, et see funktsioon teostab igas punktis konformse kujutuse, sest $(e^z)'=e^z\neq 0$ iga z puhul. Selle kujutuse puhul, nagu nägime, kujutub riba $0<\operatorname{Im} z<\pi$ ülemiseks pooltasandiks ning riba $0<\operatorname{Im} z<2\pi$ kogu tasandiks väljalõikega piki reaaltelje positiivset osa.

Ülesanded

1. Näidata, et $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.
2. Milleks kujutuvad funktsiooniga $w=e^z$
   a) jooned $x=C$, $y=C$;
   b) sirged $y=kx+b$;
   c) riba $\alpha<y<\beta$ $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$;
   d) sirgete $y=x$ ja $y=x+2\pi$ vahel asuv riba;
   e) poolriba $x<0$, $0<y<\alpha<2\pi$;
   f) poolriba $x>0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$;
   g) ristkülik $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$ $(\delta-\gamma\leqslant 2\pi)$?

   Vastus: a) $\varrho=\text{const}$, $\Theta=\text{const}$;
   b) spiraal $\varrho=e^{\frac{\Theta-b}{k}}$, kui $k\neq 0$; kiir $\Theta=b$, kui $k=0$;
   c) nurk $\alpha<\Theta<\beta$ (kui $\alpha=0$ ja $\beta=2\pi$, siis kogu tasand, lõikega piki reaaltelje positiivset osa);
   d) kogu tasand, lõikega mööda spiraali $\varrho=e^{\Theta}$;
   e) sektor $\varrho<1$, $0<\Theta<\alpha$ (kui $\alpha=2\pi$, siis ühikring, lõikega piki punkte 0 ja 1 ühendavat raadiust);

f) piirkond $\varrho>1$, $0<\Theta<\alpha$ (kui $\alpha=2\pi$, siis ühikringi väline piirkond, lõikega piki reaaltelje positiivset osa punktist 1 kuni $+\infty$);

g) piirkond $e^{\alpha}<\varrho<e^{\beta}$, $\gamma<\Theta<\delta$ (kui $\delta-\gamma=2\pi$, siis rõngas ümber nullpunkti lõikega piki kiirt $\Theta=\gamma$).

3. Kujutada ülemisele pooltasandile sirgete $y=x$ ja $y=x+h$ vaheline piirkond.

Vastus: $w=e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$.

4. Milleks kujutab funktsioon $w=e^z$ riba $0<\operatorname{Im} z<\pi$, lõikega piki punkte 0 ja $\frac{\pi}{2}i$ ühendavat sirglõiku?

Vastus: Ülemine pooltasand, millest on välja jäetud ühikringjoone esimese veerandi osa.

3.4. LOGARITMFUNKTSIOON

Kompleksarvu z **logaritmiks** $\operatorname{Ln} z$ nimetatakse kompleksarvu w, mille puhul $z=e^w$. Olgu $z=re^{i\varphi}$ ning $w=u+iv$. Sel juhul

$$re^{i\varphi}=e^u e^{iv},$$

s. t. $e^u=r$ ning $v=\varphi+2k\pi$. Sellest saame, et

$$w=\operatorname{Ln} z=u+iv=\ln r+i(\varphi+2k\pi), \tag{1}$$

ehk teisiti

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\ k=0,\ \pm1,\ \ldots\ . \tag{2}$$

Seega näeme, et kompleksarvude hulgal on logaritmil lõpmata palju väärtusi. Teiselt poolt: seosest (2) ilmneb, et *kompleksarvude puhul eksisteerib logaritm igasugusest arvust z, välja arvatud vaid* 0 *ja* ∞.

Funktsiooni $w=\operatorname{Ln} z$ nimetatakse **logaritmfunktsiooniks**. Viimane on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon, kusjuures kehtivad seosed

$$e^{\operatorname{Ln} z}=z \quad \text{ning} \quad \operatorname{Ln} e^z=z+2k\pi i.$$

Et logaritmfunktsioon on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon, siis kujutab ta viimase väärtuste Riemanni pinna (vt. joon. 16) üksüheselt komplekstasandile. Seda Riemanni pinda nimetatakse samuti **logaritmfunktsiooni Riemanni pinnaks**. Punktid $z=0$ ja $z=\infty$ on tema hargnemispunktideks. Neid nimetatakse **logaritmilisteks hargnemispunktideks**.

Osutub, et logaritmfunktsioonil on oma Riemanni pinna igas punktis (välja arvatud $z=0$ ja $z=\infty$) tuletis. Seda võib kergesti

kontrollida Cauchy—Riemanni võrrandite (polaarkoordinaatides) abil, kui arvestada seost (1).

Et logaritmfunktsioon (vaadelduna komplekstasandil) on lõpmata mitmene, siis huvitab meid tema regulaarsete (s. t. üheste ja diferentseeruvate) harude eraldamine. Nende harude analüütilised avaldised saame seosest (2), kui asetame sellesse kordaja k erinevaid väärtusi. Haru, mille saame $k=0$ korral, nimetatakse **logaritmi peaharuks** ning tähistatakse

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z. \tag{3}$$

Logaritmfunktsiooni analüütilisest avaldisest (2) selgub, et tema harusid võib eraldada nendes piirkondades, kus on eraldatavad $\operatorname{Arg} z$ üksikud väärtused. See on aga võimalik z-tasandil, millest on välja lõigatud reaaltelje negatiivne osa. Kui vaatleme logaritmi harude eraldamist tema Riemanni pinnal, siis tuleb lõigata Riemanni pinna lehed läbi piki reaaltelje negatiivset osa. Seega on lehed üksteisest eraldatud, sest ei saa liikuda ühelt lehelt teisele ilma lõiget ületamata. Peaharule vastab sel juhul Riemanni pinna see osa, mis asub lehe 0 ülemisel poolel ning lehe (—1) alumisel poolel (vt. joon. 16). Need kaks osa moodustavad tasandi, millest on välja lõigatud vaid reaaltelje negatiivne osa. Seega võime öelda, et funktsioon (3) kujutab z-tasandi, millest on välja lõigatud reaaltelje negatiivne osa, ribaks $-\pi<\operatorname{Im} w<\pi$, sealhulgas ülemise pooltasandi ribaks $0<\operatorname{Im} w<\pi$. Selline kujutus on konformne iga z puhul, sest $(\ln z)'=\frac{1}{z}\neq 0$.

Ülesanded

1. Arvutada logaritm ja tema peaväärtus järgmistest avaldistest:

   a) $(1+\mathrm{i})^6$,

   b) $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^4$,

   c) $(-1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})$,

   d) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{(3+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}$.

   Vastus: Peaväärtused: a) $3\ln 2-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$; b) $4\ln 2+\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}$,

   c) $\frac{3}{2}\ln 2-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}$; d) $\frac{1}{2}\ln 2-\ln 12-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}$.

2. Milleks kujutab funktsioon $w=\ln z$

   a) jooned $|z|=R$;

   b) jooned $\arg z=\varphi$;

   c) nurga $0<\arg z<\alpha\leqslant\pi$;

   d) sektori $|z|<1$, $0<\arg z<\alpha\leqslant\pi$;

   e) rõnga $r_1<|z|<r_2$, lõikega piki lõiku $[-r_1;\ -r_2]$?

Vastus: a) $u=c$; b) $v=c$, c) riba $0<v<\alpha$; d) poolriba $u<0$, $0<v<\alpha$; e) ristkülik $\ln r_1<u<\ln r_2$, $-\pi<v<\pi$.

3. Konstrueerida funktsiooni $w=\operatorname{Ln} z(z-1)$ Riemanni pind.

3.5. ÜLDINE ASTMEFUNKTSIOON

Üldiseks astmefunktsiooniks nimetatakse funktsiooni

$$w=z^a=e^{a\ \operatorname{Ln} z}, \tag{1}$$

kus $a=\alpha+i\beta$. Kui arvestame logaritmi avaldist, saame seosest (1), et

$$z^a=e^{(\alpha+i\beta)\ \operatorname{Ln} z}=e^{\alpha\ \ln r-\beta(\varphi+2k\pi)}e^{i[\alpha(\varphi+2k\pi)]+\beta\ \ln r}, \tag{2}$$

kus $r=|z|$, $\varphi=\arg z$ ja $k=0, \pm1, \ldots$.

Seosest (2) selgub, et $\beta\neq0$ puhul on $w=z^a$ lõpmata mitmene funktsioon. Kui aga $\beta=0$, siis

$$w=z^a=z^\alpha=e^{\alpha\ \ln r}e^{i\alpha(\varphi+2k\pi)}. \tag{3}$$

Võrdusest (3) selgub, et

$$|w|=r^\alpha \quad \text{ning} \quad (\operatorname{Arg} w)_k=\alpha(\varphi+2k\pi)+2p\pi, \qquad k, p=0, \pm1, \ldots.$$

Saadud tulemusest näeme, et ainult täisarvulise a korral on funktsioon $w=z^a$ ühene, sest ainult sel juhul saame kõigi täisarvude k ja p puhul ühe ja sama kompleksarvu argumendiga $\alpha\varphi=a\varphi$.

Ratsionaalarvulise $a=\frac{n}{m}$ puhul saame n oluliselt erinevat argumendi väärtust:

$$\Theta_0=a\varphi,\ \Theta_1=a\varphi+\frac{m}{n}2\pi,\ \ldots,\ \Theta_{n-1}=a\varphi+\frac{m}{n}(n-1)2\pi.$$

Kui a on irratsionaalarv, saame iga k puhul oluliselt erineva argumendi väärtuse, sest siis kehtib iga täisarvu n puhul järgmine seos:

$$a(\varphi+2k_1\pi)-a(\varphi+2k_2\pi)\neq2n\pi.$$

Üldise astmefunktsiooni definitsiooni põhjal saame, et selle funktsiooni üheseid harusid võib eraldada samas piirkonnas kui logaritmfunktsiooni puhulgi. Niisiis, $w=z^a$ on regulaarne komplekstasandil, millest on välja lõigatud reaaltelje negatiivne osa.

Kui üldise astmefunktsiooni avaldises võtame logaritmi peaharu, siis saame ühese funktsiooni, mida nimetatakse **üldise astmefunktsiooni peaharuks**:

$$w=z^a=e^{a\ \ln z}. \tag{4}$$

Sellest saame liitfunktsiooni diferentseerimise reegli kohaselt

$$\frac{dw}{dz}=\frac{d}{dz}z^a=\frac{d}{dz}e^{a\ln z}\frac{a}{z}=az^{a-1}.$$

Siit näeme, et vaadeldav funktsioon teostab konformse kujutuse oma regulaarsuse piirkonna igas punktis (punktid $z=0$ ja $z=\infty$ kuuluvad väljalõikele). Millist laadi on see konformne kujutus? Selle määramiseks kasutame seost (4), mille kohaselt (olgu konkreetsuse mõttes $a>0$)

$w=e^{z_2}$, kus $z_2=az_1$ ning $z_1=\ln z$.

Vaatleme, milline piirkond kujutub w-tasandi ülemiseks pooleks. Eksponentfunktsiooni omaduste tõttu on selleks z_2-taasndi riba $0<\operatorname{Im} z^2<\pi$. Viimase originaaliks z_1-tasandil on riba $0<\operatorname{Im} z_1<\frac{\pi}{a}$. Selle riba originaaliks z-tasandil on aga nurk $0<\arg z<\frac{\pi}{a}$. Seega saimegi piirkonna, mis kujutub funktsiooniga $w=z^a$ $(a>0)$ ülemiseks pooltasandiks.

Ülesanded

1. Kujutada ülemiseks pooltasandiks järgmised piirkonnad:

a) $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}<\arg z<0$; c) $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$.

Vastus: a) $w=z^3$; b) $w=-z^3$; c) $w=iz^4$.

3.6. LINEAARFUNKTSIOON

Juba jaotise 2.1 näidetes 1—4 uurisime lineaarse funktsiooniga

$$w=az+b \qquad (1)$$

teostatava kujutuse iseloomu. Teeme siinkohal veel mõned märkmed selles suunas. On loomulik eeldada, et $a\neq 0$, s. t. $w'=a\neq 0$. Sellest järeldub, et lineaarfunktsioon teostab kõikjal konformse kujutamise.

Märgime veel, et lineaarfunktsioon kujutab iga ringjoone jälle ringjooneks. Tõepoolest, kui meil on ringjoon

$$|z-z_0|=r,$$

siis seose (1) põhjal saame, et kujutispunktid rahuldavad võrrandit

$$\left|\frac{w-b}{a}-z_0\right|=r,$$

ehk siit

$$|w - w_0| = |a|r,$$

kus $w_0 = az_0 + b$. Sellest arutelust järeldub, et ringjoone keskpunkt kujutub kujutisringjoone keskpunktiks ning raadius muutub teguri $|a|$ kordselt.

Näitame veel, et iga sirge kujutub sirgeks, kusjuures lähtesirge suhtes sümmeetrilised punktid kujutuvad kujutissirge suhtes sümmeetrilisteks punktideks. Olgu meil mingi sirge suhtes kaks sümmeetrilist punkti z_1 ja z_2. Sel juhul on see sirge määratud võrrandiga

$$|z - z_1| = |z - z_2|. \qquad (2)$$

Asendades selles võrrandis z seose (1) põhjal, saame võrduse

$$\left|\frac{w-b}{a} - z_1\right| = \left|\frac{w-b}{a} - z_2\right|,$$

millest

$$|w - w_1| = |w - w_2|, \qquad (3)$$

kus $w_1 = az_1 + b$ ja $w_2 = az_2 + b$. Võrrandist (3) järeldub, et sirge (2) kujutub sirgeks, kusjuures punktide z_1 ja z_2 kujutispunktid w_1 ja w_2 on sümmeetrilised sirge (3) suhtes.

Mõnevõrra hiljem näitame, et ka ringjoone suhtes sümmeetrilised punktid kujutuvad kujutisringjoone suhtes sümmeetrilisteks punktideks. See järeldub murdlineaarse funktsiooni vastavast omadusest.

3.7. FUNKTSIOON $w = \frac{1}{z}$

Vaatleme funktsiooni $w = \frac{1}{z}$, mis on määratud iga nullpunktist erineva z puhul. Ent laiendatud komplekstasandit vaadeldes võime öelda, et funktsioon $w = \frac{1}{z}$ on määratud igas punktis $\left(\text{sel juhul } \frac{1}{0} = \infty\right)$. Et $w' = -\frac{1}{z^2} \neq 0$, siis teostab vaadeldav funktsioon igas punktis konformse kujutuse. Vaatleme, millist laadi on see kujutus. On selge, et siin iga sirge ei kujutu sirgeks. Tõepoolest, iga sirge läbib lõpmatuspunkti. Lõpmatuspunktiks aga kujutub nullpunkt. Seega võib sirgeks kujutuda ainult niisugune joon, mis läbib nullpunkti.

Osutub aga, et vaadeldav funktsioon kujutab iga ringjoone ja sirge jälle ringjooneks või sirgeks, kusjuures sirge võib kujutuda

ringjooneks ning vastupidi. Selle tõestuseks lähtume sirgete ja ringjoonte ühisest võrrandist (vt. jaotise 1.3 ülesanded 5 ja 6)

$$az\bar{z}+\bar{A}z+A\bar{z}+b=0, \tag{1}$$

kus A on kompleksarv, a ja b — reaalarvud, ning on täidetud võratus

$$|A|^2-ab>0. \tag{2}$$

Antud funktsiooni korral $z=\frac{1}{w}$, mistõttu võrrandist (1) saame, et

$$bw\bar{w}+\bar{A}\bar{w}+Aw+a=0.$$

Ka see on ringjoone või sirge võrrand, sest tingimus (2) on täidetud.

Arvestades, et ringjoonte ja sirgete ühisest hulgast läbivad lõpmatuspunkti ainult viimased, saame, et sirgeteks kujutuvad funktsiooniga $w=\frac{1}{z}$ kõik need ja ainult need sirged ning ringjooned, mis läbivad nullpunkti.

Kui uurida funktsiooniga $w=\frac{1}{z}$ teostatavat kujutust lähemalt, siis märkame, et ühikringi jätab see kujutus paigale. Paigale jäävad ka punktid $z=1$ ja $z=-1$. Viimaseid nimetatakse selle funktsiooni **püsipunktideks**. Ühikringi iga sisepunkt kujutub välispunktiks ning vastupidi, kusjuures

$$\arg w=-\arg z.$$

Ülesanded

1. Milleks kujutab funktsioon $w=\frac{1}{z}$

   a) ringjooned $x^2+y^2=ax$;
   b) ringjooned $x^2+y^2=bx$;
   c) sirged $y=x+b$;
   d) sirged $y=mx$;
   e) punkti $z_0\neq 0$ läbivad sirged;
   f) parabooli $y=x^2$?

Vastus: a) $u=\frac{1}{a}$, b) sirged $v=-\frac{1}{b}$, c) ringjooned $b(u^2+v^2)+u+v=0$, d) sirged $v=-mu$, e) punkte $w_0=\frac{1}{z_0}$ ja $w=0$ läbivad ringjooned, f) $u^2=\frac{-v^3}{v+1}$.

3.8. MURDLINEAARNE FUNKTSIOON

Vaatleme **murdlineaarset funktsiooni**

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

millel on kompleksmuutuja funktsioonide teoorias küllaltki oluline koht. See seletub ühelt poolt tema huvitavate geomeetriliste omadustega, teiselt poolt aga praktiliste rakenduste rohkusega. Osutub nimelt, et selle funktsiooniga saab esitada paljusid väga olulisi konformseid kujutusi. Eelnevas juba märkisime, et üheks oluliseks piirkonnaks, millele kujutatakse teisi piirkondi, on ühikring. Edasises näeme, et kõik ühikringi konformsed kujutused iseendale on esitatavad murdlineaarse funktsiooniga.

Kui funktsiooni (1) avaldises teostada jagamine, siis saame, et

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}. \tag{2}$$

Tulemusest ilmneb, et on mõtet vaadelda vaid niisuguseid murdlineaarseid funktsioone, mille puhul $bc-ad\neq 0$. Samuti saame võrdusest (2), et funktsiooni (1) võib vaadelda kompositsioonina funktsioonidest

$$z_1=cz+d,$$

$$z_2=\frac{1}{z_1},$$

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}z_2.$$

Arvestades kahe eelmise paragrahvi tulemusi, võime öelda, et *murdlineaarne funktsioon teostab igas punktis konformse kujutuse, mille suhtes ringjoonte ja sirgete ühine hulk on invariantne, s. t. iga sirge ja ringjoon kujutub jälle kas ringjooneks või sirgeks.* Et ainult punkt $z_1=0$, s. t. $z=-\frac{d}{c}$, kujutub lõpmatuspunktiks, siis sirgeteks kujutuvad vaid niisugused sirged ja ringjooned, mis läbivad punkti $z=-\frac{d}{c}$. Viimast nimetatakse **murdlineaarse funktsiooni (1) pooluseks.**

Märgime ka, et iga sirge kujutis peab läbima punkti $w=\frac{a}{c}$, sest see on lõpmatuspunkti kujutiseks, nagu kergesti järeldub seosest (2).

Et ka murdlineaarse funktsiooni pöördfunktsioon on murdlineaarne, siis võib iga sirge ja ringjoon olla vaid sirge või ringjoone kujutiseks.

Murdlineaarse funktsiooni avaldist vaadeldes märkame, et selles on kolm sõltumatut kordajat (neljandaga võime murru lugeja ja nimetaja jagada). Nende kolme kordaja, s. t. murdlineaarse funktsiooni määramiseks on vaja ette anda kolme punkti kujutised. Niisiis määravad murdlineaarse funktsiooni seosed:

$$w_1=\frac{az_1+b}{cz_1+d},\quad w_2=\frac{az_2+b}{cz_2+d},\quad w_3=\frac{az_3+b}{cz_3+d}. \tag{3}$$

Seostest (1) ja (3) järeldub, et

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{4}$$

Selle võrduse vasakul ja paremal pool seisvaid avaldisi nimetatakse **nelja punkti liitsuhteks**. Seos (4) ütleb, et *nelja punkti liitsuhe on murdlineaarse kujutuse invariant.* Et seda kontrollida, tuleb võrduste (1) ja (3) põhjal asendada võrduse (4) vasakul poolel w, w_1, w_2 ja w_3. Peale lihtsustamist saaksimegi võrduse (4) parema poole.

Seose (4) põhjal on hea leida sellist murdlineaarset funktsiooni, mis fikseeritud kolm punkti kujutab etteantud kolmeks punktiks. Kui mõni vaadeldavatest punktidest on ∞, siis asendame seda punkti sisaldava liikme arvuga 1.

N ä i d e 1. Leida murdlineaarne funktsioon, mis punktid 2, 1 ja ∞ kujutab vastavalt punktideks ∞, i ja 0.

Asendades antud arvud võrdusse (4), saame

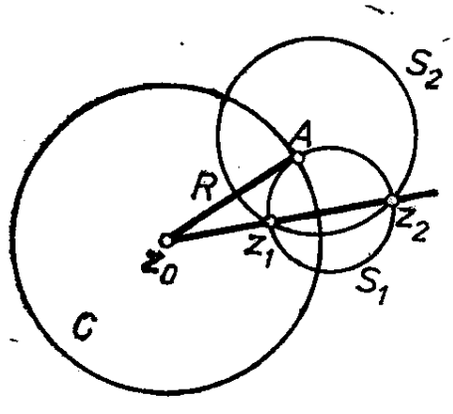
$$\frac{1}{w-\mathrm{i}}:\frac{1}{0-\mathrm{i}}=\frac{z-2}{z-1}:\frac{1}{1},$$

millest

$$\frac{-\mathrm{i}}{w-\mathrm{i}}=\frac{z-2}{z-1}.$$

ehk

$$w=\frac{\mathrm{i}}{z-2}.$$



Joon. 17

Näitame, et *murdlineaarne funktsioon kujutab ringjoone (või sirge) suhtes sümmeetrilised punktid kujutisringjoone suhtes sümmeetrilisteks punktideks.*

Meenutame, et punkte z_1 ja z_2 nimetatakse ringjoone $|z-z_0|=R$ suhtes sümmeetrilisteks, kui nad asuvad mingil keskpunktist lähtuval kiirel ning $|z_1-z_0|\,|z_2-z_0|=R^2$ (vt. joon. 17). Ülalmainitud murdlineaarse funktsiooni omadus järeldub kergesti järgmisest teoreemist.

Teoreem. *Punktid on ringjoone suhtes sümmeetrilised parajasti siis, kui nad asuvad selle ringjoonega ortogonaalsete ringjoonte kimbu tippudes.*

Tarvilikkus. Olgu punktid z_1 ja z_2 sümmeetrilised ringjoone C suhtes (vt. joon. 17), s. t.

$$|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0| = R^2 = |A - z_0|^2. \tag{5}$$

Elementaargeomeetriast tuntud teoreemi (ringjoone puutuja ja lõikaja lõikude kohta) põhjal saame, et lõik Az_0 on ringjoone S_1 puutujaks, s. t. ringjooned C ja S_1 on omavahel risti.

Piisavus. Olgu ringjooned S_1 ja S_2 risti ringjoonega C. Ringjoonte S_1 ja S_2 lõikepunktidega z_1 ja z_2 määratud sirge (kimbu telg) on risti ringjoonega C ning läbib seega ringjoone C keskpunkti z_0. Ülalmärgitud elementaargeomeetria teoreemi kohaselt saame nüüd, et on rahuldatud seos (5). Seega on punktid z_1 ja z_2 sümmeetrilised ringjoone C suhtes.

Ülesanded

1. Tõestada võrdus (4).
2. Näidata, et iga murdlineaarse funktsiooniga teostatav kujutus on igas punktis konformne.
3. Tõestada, et ringjoone suhtes sümmeetriliste punktide definitsioon on üldistuseks sümmeetriale sirge suhtes, kui sirget vaadelda lõpmatult suure raadiusega ringjoonena.
4. Leida murdlineaarne funktsioon, mis kujutab punktid 1, ∞, i
   a) vastavalt punktideks i, 1, 1+i;
   b) vastavalt punktideks ∞, i, 1;
   c) vastavalt punktideks 0, ∞, 1.

   Vastus: a) $w = \dfrac{(1+\mathrm{i})z+1+3\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})z+3+\mathrm{i}}$, b) $w = \dfrac{\mathrm{i}z+2+\mathrm{i}}{z+1}$,

   c) $w = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}(z+1)$.
5. Leida ülemise pooltasandi kujutus iseendaks, kui
   a) $w(0)=1$, $w(1)=2$ ja $w(2)=\infty$;
   b) $w(0)=1$, $w(\mathrm{i})=2\mathrm{i}$.

   Vastus: a) $w = \dfrac{2}{2-z}$, b) $w = -2\dfrac{2z+1}{z-2}$.
6. Milleks kujutab funktsioon $w = \dfrac{z}{z-1}$ nurga $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$?

Vastus: alumine pooltasand, millest on välja lõigatud ring $\left|w-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Milleks kujutab funktsioon $w=-i\frac{z-1}{z+1}$ ühikringi ülemise poole?

Vastus: komplekstasandi esimene veerand.

8. Leida funktsioonid, mis kujutavad järgmised piirkonnad ülemiseks pooltasandiks:

a) $|z|<1$, $|z-i|<1$;

b) $|z|>2$, $|z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$;

c) $\operatorname{Im} z>1$, $|z|<2$;

d) $|z|<2$, $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$;

e) $|z|>2$, $0<\operatorname{Arg} z<\frac{3}{2}\pi$;

f) kogu tasand, millest on välja lõigatud punkte $1+i$ ja $2+2i$ ühendav lõik;

g) $|z|<2$, $|z-1|>1$;

h) $|z|>2$, $|z-3|>1$.

Vastus: a) $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}$; b) $w=\left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$;

c) $w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$; d) $w=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$;

e) $w=\left(\frac{\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{4}}\right)^2$; f) $w=\left(\frac{z-1-i}{2+2i-z}\right)^{1/2}$;

g) $w=e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}$; h) $w=e^{2/3\pi i\frac{z-4}{z-2}}$.

Nõnda nimetatakse funktsiooni

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Seda funktsiooni kasutas *N. J. Žukovski* (1847—1921) oma aerodünaamikaalastes uurimustes. Oma töödega pani ta aluse lennuki tiiva ehituse teoreetilisele uurimisele. Põgusalt tutvume sellega jaotises 9.

Kui diferentseerida Žukovski funktsiooni, siis selgub, et see teostab kõikides punktides konformse kujutamise (välja arvatud punktid $z=\pm 1$). Funktsiooniga (1) määratud kujutus pole aga üks-ühene, sest seos

$$z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}$$

on rahuldatud kahel juhul: $z_1=z_2$ ning $z_1=\frac{1}{z_2}$. Seega kujutuvad punktid z ja $\frac{1}{z}$ üheks ja samaks punktiks, s. t. meil on tegemist kahelehelise funktsiooniga. Et määrata piirkonda D, kus Žukovski funktsioon teostab üks-ühese kujutuse, peame valima piirkonna, mille mistahes kaks punkti ei rahulda seost $z_1z_2=1$. Sellisteks piirkondadeks on $|z|<1$ ja $|z|>1$.

Selgitame, milleks kujutab Žukovski funktsioon ühikringi $|z|<1$. Samaks piirkonnaks kujutub siis ka piirkond $|z|>1$, sest nende kahe piirkonna punktide vahel määrab seos $z_1z_2=1$ üks-ühese vastavuse. Ringi $|z|<1$ kujutispiirkonna määramiseks vaatleme raadiuste $\arg z=\varphi$ $(0<r<1)$ ning ringjoonte $|z|=r$ $(r<1)$ kujutisi. Olgu $z=re^{i\varphi}$ ning $w=u+iv$, siis seosest (1) saame, et

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{2}$$

Nende seoste põhjal võime öelda, et ringjoone $|z|=r$ kujutiseks on ellips pooltelgedega

$$a_r=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) \quad \text{ja} \quad b_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right).$$

Selle ellipsi fookused asuvad punktides $z=\pm 1$. Kui $r\to 0$, siis $a_r\to\infty$ ning $b_r\to\infty$. Kui $r\to 1$, siis $a_r\to 1$ ning $b_r\to 0$. Seega on ühikringjoone $|z|=1$ kujutiseks kahekordne lõik $[-1, 1]$ (nii ühikringjoone ülemine kui ka alumine pool kujutuvad lõiguks $[-1, 1]$).

Kui läbime ringjoone $|z|=r$ positiivses suunas, siis läbitakse vastav ellips negatiivses suunas. Tõepoolest, et $r-\frac{1}{r}<0$, siis

$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puhul $v<0$. Sellest järeldub, et ühikringi ülemine pool kujutub alumiseks pooltasandiks ning alumine pool ülemiseks. Seega võime öelda, et piirkond $|z|<1$ kujutub kogu tasandiks, millest on välja lõigatud lõik $[-1, 1]$.

Kui vaatleme raadiuse $\arg z=\varphi$ kujutist, siis saame seoste (2) põhjal (elimineerides suuruse r), et selle määrab võrrand

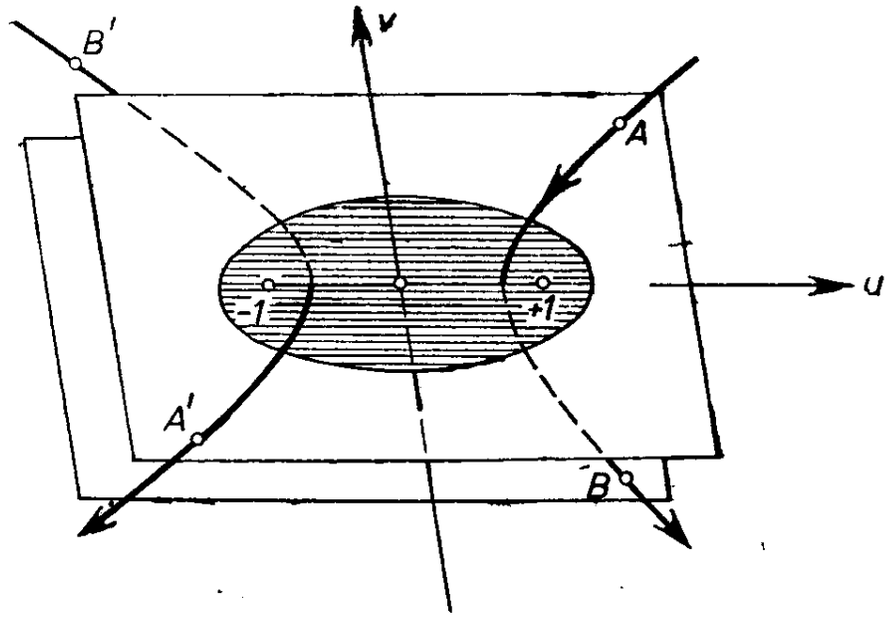
$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

Saadud võrrand esitab hüperbooli, kusjuures ka selle hüperbooli fookused asuvad punktides $z=\pm 1$. Osutub aga, et raadius ei kujutu mitte kogu hüperbooliks, vaid ainult selle teatavaks osaks. Tõepoolest, kui $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, siis saame seoste (2) põhjal, et $u>0$ ning $v<0$. Seega on esimeses veerandis asuva raadiuse kujutiseks neljandas veerandis asuv hüperbooli haru. Kui aga võtame sama raadiuse pikenduse kolmandas veerandis, s. t. φ asemel nurga $\varphi-\pi$, siis on selle kujutiseks teises veerandis asuv hüperbooli haru. Kui φ asemel võtta $-\varphi$ ning $\pi-\varphi$, siis saame sama hüperbooli harud vastavalt I ning III veerandis.

Me nägime, et punktid z_1 ja z_2 kujutuvad üheks ja samaks punktiks, kui $z_1 z_2=1$, s. t. $\arg z_1=-\arg z_2$. Seega asub üheks ja samaks punktiks kujutuvatest punktidest üks ülemises, teine alumises pooltasandis.

Eelnevas nägime, et ühikringi alumine pool kujutus ülemiseks pooltasandiks ning ülemine pool alumiseks. Seda arvestades võime nüüd väita, et ülemise pooltasandi osa väljaspool ühikringi kujutub kogu ülemiseks pooltasandiks ning alumise pooltasandi vastav osa kogu alumiseks pooltasandiks.

Kui tahame konstrueerida niisugust Riemanni pinda, milleks



Joon. 18

Žukovski funktsioon kujutaks kogu z-tasandi üks-üheselt, siis tuleb võtta kaks w-tasandi eksemplari, lõigata need läbi piki lõiku $[-1, 1]$ ning ühendada lõigete servad nii, et ühe tasandi alumiselt poolelt liiguksime teise tasandi ülemisele poolele ja vastupidi. See on vajalik seetõttu, et ühikringjoon kujutuks lõiguks $[-1, 1]$, kusjuures lähenemisele ühikringjoone ülemisele osale seestpoolt vastaks kujutispunkti lähenemine lõigule $[-1, 1]$ altpoolt, väljastpoolt lähenemisele aga ülaltpoolt lähenemine. Ühikringjoone alumisele poolele lähenemisel on olukord vastupidine. Niisiis tuleb esimese tasandi lõike alumine serv ühendada teise tasandi lõike ülemise servaga ning vastupidi (vt. joon. 18).

3.10. TRIGONOMEETRILISD JA HÜPERBOOLSED FUNKTSIOONID

Euleri valemist

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

saame (kui x asemel võtame $-x$), et

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

Nende kahe seose põhjal

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad \text{ning} \quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

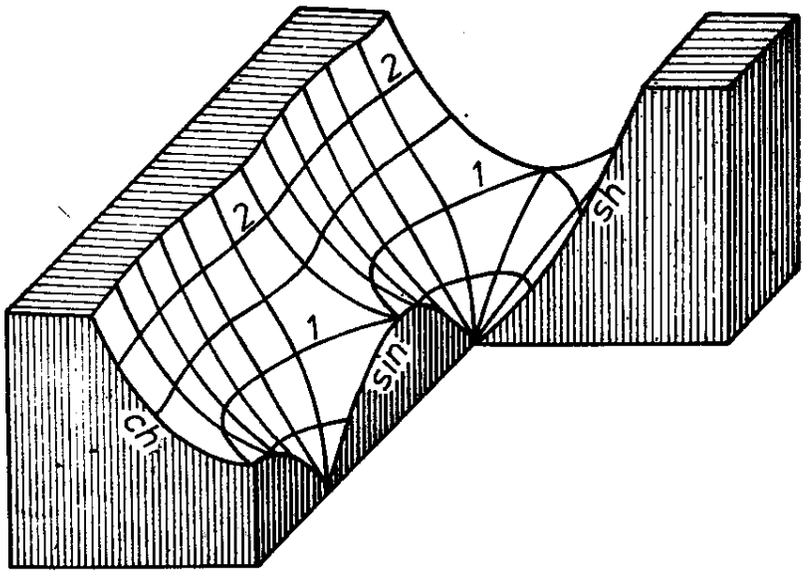
Laiendame funktsioonide «siinus» ja «koosinus» määramispiirkonda nii, et see haaraks kompleksarvude hulga. Selleks asendame äsjasaadud võrduses reaalmuutuja x kompleksmuutujaga z. Niisiis, defineerime funktsiooni «siinus» ja «koosinus» kompleksse argumendi korral võrdustega:

$$w=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \text{ning} \quad w=\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Olles selliselt defineerinud funktsioonid $w=\sin z$ ja $w=\cos z$, võime vahetult kontrollida, et neil funktsioonidel on järgmised omadused:

1) reaalse argumendi korral ühtivad need funktsioonid keskkooli-kursusest tuntud siinuse ja koosinusega;
2) nad on kogu komplekstasandil regulaarsed, kusjuures
   $(\sin z)'=\cos z$ ning $(\cos z)'=-\sin z$;
3) nende perioodiks on reaalarv 2π;
4) kehtivad tuttavad trigonomeetrilised seosed:
   $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\sin 2z=2\sin z\cos z$ jne.;
5) $w=\sin z$ on paaritu, $w=\cos z$ aga paarisfunktsioon.

Ei saa aga öelda, et kõik trigonomeetriliste funktsioonide oma-



Joon. 19

dused, mis on neil reaalarvude hulgas, säiliksid kompleksse argumendi korral. Nii teame, et iga reaalarvu x korral

$$|\sin x| \leqslant 1 \quad \text{ja} \quad |\cos x| \leqslant 1.$$

See omadus ei kehti kompleksse argumendi puhul. Nii näiteks,

$$\cos i = \frac{e+e^{-1}}{2} \approx 1{,}54 \quad \text{ning} \quad \sin i = \frac{e-e^{-1}}{2i} \approx -1{,}17i.$$

Joonisel 19 on kujutatud pind $s=|\sin z|$. Seda pinda nimetatakse **siinuse reljeefiks.**

Funktsioonidega $w=\cos z$ ja $w=\sin z$ määratud kujutuste uurimiseks taandame need funktsioonid juba tuntud funktsioonide kompositsioonideks. Vastavalt funktsiooni $w=\cos z$ definitsioonile saame, et teda võib vaadelda järgmiste funktsioonide kompositsioonina:

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1} \quad \text{ja} \quad w = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right). \tag{1}$$

Funktsiooni $w=\sin z$ puhul saame vastavalt:

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad z_3 = -iz_2 \quad \text{ja} \quad w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right).$$

Selgitame nüüd, millise piirkonna kujutab funktsioon $w=\cos z$ kogu w-tasandiks. Kasutame selleks seoseid (1) tagant ettepoole. Viimasest seosest (Žukovski funktsioon) järeldub, et z_2-tasandi ühikring kujutub w-tasandiks, millest on välja lõigatud vaid lõik $[-1, 1]$. Edasi tuleb selgitada, millise piirkonna kujutab funktsioon $z_2=e^{z_1}$ ühikringiks. Eelnevast teame, et niisugust piirkonda pole.

* Joonised 19 ja 20 on võetud raamatust **Янке Е., Эмде Ф.** Таблицы и функции, М., 1959.

Küll aga kujutab vaadeldav funktsioon poolriba $\operatorname{Re} z_1<0$, $-\pi<\operatorname{Im} z_1<\pi$ ühikringiks, lõikega piki raadiust $[-1, 0]$. Seega ei saa me ka w-tasandil z_2-tasandi lõigu $[-1, 0]$ kujutist, s. t. u-telje osa $(-\infty, -1]$. Jääb veel selgitada, millise piirkonna kujutab funktsioon $z_1=iz$ ülalmärgitud poolribaks. Et funktsioon $z_1=iz$ teostab vaid tasandi pöörde ümber nullpunkti nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra, siis on otsitavaks piirkonnaks poolrida $-\pi<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0$. Niisiis: funktsioon $w=\cos z$ kujutab poolriba $-\pi<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0$ kogu w-tasandiks, lõikega piki reaaltelje osa $(-\infty, 1]$.

Ülejäänud kaks trigonomeetrilist funktsiooni $w=\tan z$ ja $w=\cot z$ defineerime võrdustega:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-i\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1},$$

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}.$$

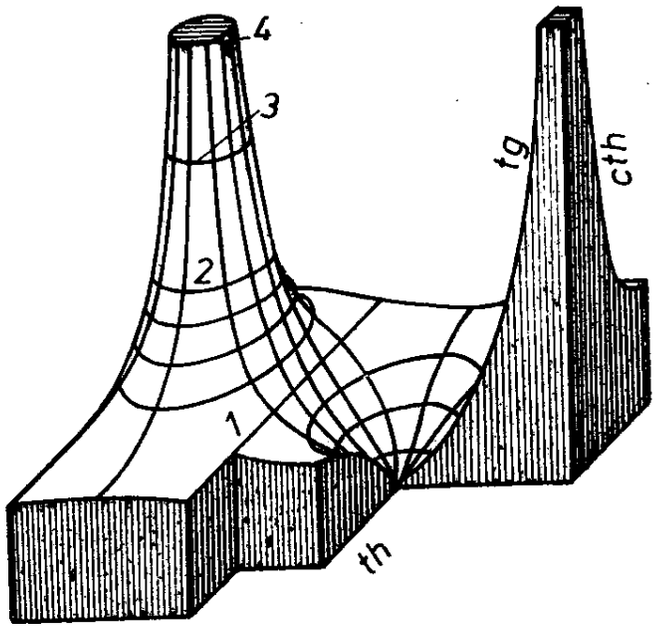
Nende funktsioonidega teostatavaid kujutusi võime vaadelda kui lineaarsete, murdlineaarsete ja eksponentfunktsioonidega teostatavate kujutuste kompositsioone.

Joonisel 20 on kujutatud tangensi reljeef, s. t. pind $s=|\tan z|$.

Analoogiliselt trigonomeetriliste funktsioonidega defineeritakse vastavad hüperboolsed funktsioonid, nimelt

$$w=\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad w=\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$w=\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad w=\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$



Joon. 20

Võrreldes neid funktsioone trigonomeetriliste funktsioonidega, näeme, et

$$\operatorname{sh} z=-i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z=\cos iz, \quad \operatorname{th} z=-i \tan iz, \quad \operatorname{cth} z=i \cot iz.$$

3.11. ARKUS- JA AREAFUNKTSIOONID

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse **arkusfunktsioonideks.** Neid tähistatakse vastavalt:

$$w=\operatorname{Arcsin} z, \quad w=\operatorname{Arccos} z, \quad w=\operatorname{Arctan} z, \quad w=\operatorname{Arccot} z.$$

Osutub, et arkusfunktsioone saab avaldada logaritmfunktsioonide kaudu. Teeme seda näiteks funktsiooni $w=\operatorname{Arccos} z$ puhul. Et vastavalt definitsioonile $z=\cos w$, siis

$$z=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=\frac{e^{2iw}+1}{2e^{iw}}.$$

Meid huvitab avaldada w muutuja z kaudu. Selleks paneme tähele, et

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,$$

millest saame

$$e^{iw}=z\pm\sqrt{z^2-1}$$

ning seega

$$w=\operatorname{Arccos} z=-i \operatorname{Ln}(z\pm\sqrt{z^2-1}). \tag{1}$$

Et aga

$$\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}=z-\sqrt{z^2-1}, \tag{2}$$

siis võime valemis (1) miinusmärgid juure ja logaritmi eest ära jätta. (Miinusmärgist juure ees võib loobuda sellepärast, et ruutjuur on kahene funktsioon. Seos (2) lubab miinusmärgi ära jätta ka logaritmi eest.) Seega

$$w=\operatorname{Arccos} z=i \operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

Eelmises jaotises nägime, et funktsioon $w=\cos z$ kujutab poolriba $-\pi<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z<0$ kogu w-tasandiks, millest on välja lõigatud vaid poolsirge $-\infty<\operatorname{Re} w<1$, $\operatorname{Im} w=0$. Sellest järeldub, et vaadeldavas w-tasandi piirkonnas saab eraldada funktsiooni $w=\operatorname{Arccos} z$ regulaarse haru. Funktsiooni $w=\operatorname{Arccos} z$ sellist regulaarset haru, mis kujutab kogu z-tasandi (väljalõikega piki poolsirget $-\infty<\operatorname{Re} z<1$, $\operatorname{Im} z=0$) poolribaks $-\pi<\operatorname{Re} w<\pi$, $\operatorname{Im} w<0$,

nimetatakse **arkuskoosinuse peaharuks** ning tähistatakse

$w=\arccos z$.

Ka teiste trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid võib avaldada logaritmfunktsiooni kaudu. Kehtivad valemid:

$$\operatorname{Arcsin} z=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arccos} z=\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arctan} z=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arccot} z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\operatorname{Ln}\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}.$$

Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse **areafunktsioonideks** ning tähistatakse vastavalt $w=\operatorname{Arsh} z$, $w=\operatorname{Arch} z$, $w=\operatorname{Arth} z$ ja $w=\operatorname{Arcth} z$.

Kehtivad järgmised valemid:

$$\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1}),\quad \operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z},\quad \operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1},$$

millest näeme, et kõik areafunktsioonid on mitmesed funktsioonid.

Kõikide nende mitmeste funktsioonide puhul võime eraldada nende üksikud harud, nagu seda tegime funktsiooni $w=\operatorname{Arccos} z$ puhul.

4. KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE

4.1. INTEGRAALI MÕISTE JA OMADUSED

Defineerime joonintegraali mõiste kompleksmuutuja funktsioonide korral. Joontena vaatleme ***Jordani jooni***, s. t. jooni, mis on määratud võrrandiga

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),$$

kus $x(t)$ ja $y(t)$ on pidevad mingil lõigul $[\alpha, \beta]$. Eeldame, et parameetri mistahes kahe väärtuse t_1 ja t_2 puhul $z(t_1)\neq z(t_2)$, s. t. vaadeldavatel joontel ei ole kordseid punkte. Erandiks võivad olla vaid α ja β. Kui $z(\alpha)=z(\beta)$, siis nimetatakse vaadeldavat joont **kinniseks**.

Kui eksisteerib pidev tuletis $z'(t)$ lõigul $[\alpha, \beta]$, siis nimetatakse vastavat joont **siledaks**. Joont, mis pole sile, kuid on jaotatav lõplikuks arvuks siledateks osadeks, nimetatakse **tükati siledaks**. Edaspidi vaatlemegi tükati siledaid jooni.

Olgu funktsioon

$$w=F(t)=U(t)+\mathrm{i}V(t)$$

pidev lõigul $[\alpha, \beta]$. Niisuguse funktsiooni puhul defineerime integraali

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta V(t)\,dt.$$

Selliselt defineeritud integraali korral kehtivad järgmised omadused

$$\mathrm{Re}\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\,F(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\int_\alpha^\beta kF(t)\,dt = k\int_\alpha^\beta F(t)\,dt, \tag{2}$$

$$\int_\alpha^\beta [F_1(t)+F_2(t)]\,dt = \int_\alpha^\beta F_1(t)\,dt + \int_\alpha^\beta F_2(t)\,dt, \tag{3}$$

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt. \tag{4}$$

Omadustes (1)—(3) on suhteliselt lihtne veenduda, kui arvestada matemaatilise analüüsi kursusest tuntud määratud integraali omadusi. Järgnevas tõestame vaid seose (4). Selleks tähistame

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = r_0 e^{i\varphi_0}$$

(definitsiooni põhjal on integraal mingi kompleksarv). Siit

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| = r_0 = r_0 e^{i\varphi_0} e^{-i\varphi_0} = e^{-i\varphi_0}\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = \int_\alpha^\beta e^{-i\varphi_0}F(t)\,dt.$$

Et saadud võrduste ahela vasakpoolseks lüliks on reaalarv, siis on seda ka parempoolne, mistõttu

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| = \int_\alpha^\beta e^{-i\varphi_0}F(t)\,dt = \mathrm{Re}\int_\alpha^\beta e^{-i\varphi_0}F(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}[e^{-i\varphi_0}F(t)]\,dt.$$

Teiselt poolt

$$\mathrm{Re}[e^{-i\varphi_0}F(t)] \leqslant |\mathrm{Re}[e^{-i\varphi_0}F(t)]| \leqslant |e^{-i\varphi_0}F(t)| = |F(t)|.$$

Viimase kahe seose põhjal saamegi (arvestades määratud integraali monotoonsuse omadust) võrratuse (4).

Olgu $w=f(z)$ mingi funktsioon, mis on pidev tükati siledal ning lõpliku pikkusega joonel C. Integraali üle joone C (võrrandiga $z=z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$) defineerime võrdusega

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{5}$$

Et $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$, siis

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f[x(t)+iy(t)]\,[x'(t)+iy'(t)]\,dt.$$

Kui tähistame $f(z)=u+iv$, siis seose (5) põhjal saame, et

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta (u+iv)\,(x'+iy')\,dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta (ux'-vy')\,dt+i\int_\alpha^\beta (vx'+uy')\,dt,$$

ehk teisiti

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C u\,dy+v\,dx. \tag{6}$$

Seostest (2) ja (3) järeldub, et

$$\int_C kf(z)\,dz=k\int_C f(z)\,dz,$$

$$\int_C [f(z)+g(z)]\,dz=\int_C f(z)\,dz+\int_C g(z)\,dz.$$

Definitsiooni (5) põhjal võime veenduda, et kui $C=C_1+C_2$, siis

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Samast definitsioonist järeldub samuti, et

$$\int_{-C} f(z)\,dz=\int_\beta^\alpha f[z(t)]\,z'(t)\,dt=-\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt=-\int_C f(z)\,dz.$$

Saadud seos kujutab endast joonintegraali hästi tuntud omadust, mis väidab, et integreerimissuuna muutmine vastupidiseks toob kaasa integraali väärtuse märgi muutumise.

Seoste (4) ja (5) põhjal saame, et

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=\left|\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt\right|\leqslant\int_\alpha^\beta |f[z(t)]|\,|z'(t)|\,dt=$$

$$=\int_C |f(z)|\,|dz|,$$

sest $|dz|=|z'(t)|\,dt$, kui integreerimine toimub parameetri kasvamise suunas ($dt\geqslant 0$). Tähistades joone C pikkuse sümboliga s, saame viimasest võrratusest, et

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\leqslant M\int_\alpha^\beta |z'(t)|\,dt=M\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=Ms,$$

kus $|f(z)| \leqslant M$ iga $z \in C$ puhul. Valemit

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leqslant Ms$$

nimetatakse **integraali mooduli hindamise valemiks.**

N ä i d e. Leiame $\int_C z^2 dz$, kui C on ühikringjoone ülemine pool ning lähtepunktiks on $z=1$. Joone C võrrandiks on $z=e^{it}$, kus $t \in [0, \pi]$. Seega

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{3it} dt = i \frac{e^{3it}}{3i} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3}.$$

Ülesanded

1. Arvutada

$$\int_C f(z)\,dz,$$

kui $f(z) = y - x - 3x^2 i$ ning C on
a) sirglõik punktist 0 punktini $1+i$,
b) murdjoon punktist 0 punkti $1+i$ läbi punkti i.

V a s t u s: a) $1 - i$; b) $\frac{1}{2}(1 - i)$.

2. Arvutada

$$\int_C \frac{z+2}{z}\,dz,$$

kui jooneks C on
a) poolringjoon $z=2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$,
b) poolringjoon $z=2e^{it}$, $t \in [0, -\pi]$,
c) ringjoon $z=2e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

V a s t u s: a) $-4+2\pi i$; b) $-4-2\pi i$; c) $4\pi i$.

3. Näidata, et

$$\int_C (3z+1)\,dz = 0,$$

kus jooneks C on ruudu $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$ rajajoon.

4. Näidata, et

$$\left| \int_0 \frac{dz}{z^2+1} \right| \leqslant \frac{\pi}{3},$$

kui C on ringjoone $|z|=2$ koordinaattasandi esimeses veerandis asuv osa.

5. Näidata, et

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0}=2\pi i, \quad \int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=0 \quad (n=2, 3, \ldots,),$$

kui C on ringjoon $|z-z_0|=r$.

4.2. CAUCHY TEOREEM

Osutub, et kui funktsioon $w=f(z)=u+iv$ *ja* tema tuletis on pidevad kinnisel joonel C ning sellega piiratud piirkonnas, siis

$$\int_C udx-vdy=0, \qquad (1)$$

$$\int_C vdx+udy=0.$$

Tõepoolest, matemaatilise analüüsi kursusest tuntud teoreemi kohaselt (joonintegraal üle kinnise joone C)

$$\int_C Pdx+Qdy=0,$$

kui funktsioonide P ja Q osatuletised on pidevad joonega C piiratud kinnises piirkonnas ning

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Et eelduse kohaselt $f'(z)$ eksisteerib ja on pidev vaadeldavas kinnises piirkonnas, siis integraalide (1) puhul on viimane tingimus täidetud Cauchy—Riemanni võrrandite põhjal.

Eelmise paragrahvi võrduse (6) põhjal on siis ka

$$\int_C f(z)dz=0. \qquad (2)$$

Sellega oleme tõestanud nn. ***Cauchy teoreemi***:

Teoreem 1. *Kui $f(z)$ ning tema tuletis on pidevad tõkestatud üheli sidusas piirkonnas D, siis võrdus* (2) *on õige iga piirkonda D kuuluva kinnise joone C korral.*

Sellisele tulemusele jõudis Cauchy juba 1825. a. Osutub aga, et iga diferentseeruva kompleksmuutuja funktsiooni tuletis on pidev. Seega peaks vastav väide kehtima ka ilma tuletise pidevuse eelduseta. Et see on tõesti nii, seda näitas 1900. a. *E. Coursat* (1858—1936).

Sellel teoreemil on kompleksmuutuja funktsioonide seas keskne koht. Tema abil saab näiteks esitada regulaarseid funktsioone

integraalide kaudu. Teoreemi suure tähtsuse tõttu on püütud teda veelgi üldistada. Rakenduslikust seisukohast lähtudes on küllaltki oluline järgnevas vaadeldav teoreem, mille esitamiseks on aga vaja tutvuda mõistega *pidevus kuni rajani.*

Olgu a ja b kaks punkti piirkonnast D või tema rajalt C. Nende punktide vaheliseks **kauguseks mööda piirkonda** D nimetatakse suurust

$$\varrho_D(a, b) = \inf \Delta(\gamma),$$

kus $\Delta(\gamma)$ on joone γ pikkus ning alumine raja on võetud kõigi nende joonte suhtes, mis ühendavad punkte a ja b ning kuuluvad piirkonda D.

Funktsiooni f nimetatakse ***kuni rajani pidevaks*** *piirkonnas D, kui iga punkti a korral piirkonnast D või tema rajalt C kehtib võrdus*

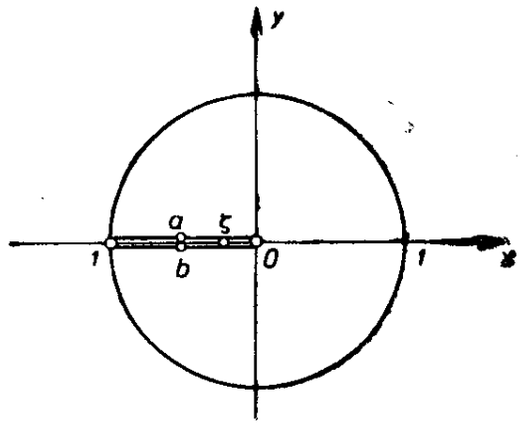
$$\lim_{\varrho_D(z,\, a)\to 0} f(z) = f(a).$$

Märkus: Kui a on piirkonna D sisepunkt või niisugune rajapunkt, mis pole rajajoonele kordseks punktiks, siis

$$\lim_{\varrho_D(z,\, a)\to 0} f(z) = \lim_{\substack{z\to a \\ z\in D}} f(z).$$

Näide. Vaatleme funktsiooni $w=\sqrt{z}=r^{1/2}e^{i\varphi/2}$, kus $z=re^{i\varphi}$, $0<r<1$ ja $-\pi<\varphi<\pi$. Selline funktsioon on regulaarne (seega ka pidev) vaadeldavas piirkonnas D, milleks on ühikring lõikega piki raadiust $[-1, 0]$ (vt. joon. 21). Kui rajapunktides ζ määrata funktsiooni f väärtused seosega

$$f(\zeta) = \lim_{\varrho_D(z,\, \zeta)\to 0} f(z),$$



Joon. 21

siis saame vaadeldavas piirkonnas kuni rajani pideva funktsiooni. Selline täiendav defineerimine aga ei muuda funktsiooni pidevaks lõike $[-1, 0]$. Tõepoolest, kui võtame mingi punkti $\zeta=x+i0$ $(-1<x<0)$, siis võime seda punkti vaadelda asuvana nii lõike ülemisel kui ka alumisel serval. Vaadeldes seda punkti lõike ülemise serva punktina, saame, et

$$f(\zeta) = \lim_{\varrho_D(z,\, \zeta)\to 0} f(z) = \lim_{\substack{z\to x \\ \mathrm{Im}\, z>0}} f(z) = |x|^{1/2}e^{i\pi/2} = i|x|^{1/2}.$$

Kui aga vaadelda sama punkti asuvana lõike alumisel serval, siis

$$f(\zeta)=\lim_{\rho_D(z,\,\zeta)\to 0} f(z)=\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)=|x|^{1/2}e^{-i\pi/2}=-i|x|^{1/2}.$$

Seega saame erinevad väärtused sõltuvalt sellest, kummal serval asuvana vaatleme punkti ζ. Siit aga järeldub, et vaadeldavat funktsiooni ei saa muuta pidevaks kinnises piirkonnas $\bar{D}$. Küll aga saime kuni rajani pideva funktsiooni, sest lõike ülemise ja alumise serva punktid ei ole lähedased mööda piirkonda võetud kauguse mõttes. Nii on $\varrho_D(a,\,b)=1$, kui $a=-0{,}5$ ja on vaadeldud lõike ülemise serva punktina ning $b=-0{,}5$ ja on vaadeldud lõike alumise serva punktina.

Sellest näitest selgub, et mõiste «pidevus kuni rajani» on eriti oluline nende piirkondade korral, millel on liibuvaid rajajoone osi.

Sõnastame nüüd teoreemi, mis on üldistuseks Cauchy teoreemile.

Teoreem 2. *Kui funktsioon f on regulaarne ühelisidusas tõkestatud piirkonnas D ja on selles piirkonnas pidev kuni rajani C, siis*

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

Selle teoreemi tõestus ei mahu käesoleva lühikursuse raamidesse. Edasises nimetame ka seda teoreemi Cauchy teoreemiks.

Ülesanded

1. Näidata, et

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz=0,$$

kui a) $f(z)=(z^2+2z+2)^{-1}$, b) $f(z)=ze^{-z}$

c) $f(z)=\tan z$, d) $f(z)=\ln(z+2i)$.

2. Olgu f diferentseeruv ühelisidusas piirkonnas D. Olgu C_1 ja C_2 kaks tükati siledat joont, mis ühendavad punkti a punktiga b. Näidata, et

$$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz,$$

s. t. integraali väärtus ei sõltu integreerimisteekonna kujust, vaid ainult selle otspunktidest.

4.3. NEWTONI—LEIBNIZI VALEM

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **algfunktsiooniks** mingis piirkonnas D, kui selle piirkonna igas punktis z kehtib võrdus

$$F'(z)=f(z).$$

Osutub, et funktsiooni $w=f(z)$ algfunktsioon pole üheselt määratud. Tõepoolest, kui algfunktsiooniks on $w=F(z)$, siis on selleks ka iga funktsioon kujul $w=F(z)+\text{const}$. Teiselt poolt, kui F ja G on mingi funktsiooni f algfunktsioonideks, siis

$$G'(z)-F'(z)=[G(z)-F(z)]'=0,$$

millest

$$G(z)-F(z)=\text{const}.$$

Saadud võrdus ütleb, et funktsiooni $w=f(z)$ kõik algfunktsioonid avalduvad kujul

$$w=F(z)+C,$$

kus F on mingi algfunktsioon ning C konstant.

Järgnevas vaatleme funktsiooni f, mis on regulaarne ühelisidusas tõkestatud piirkonnas D. Kui valime selles piirkonnas mingid kaks punkti z_0 ja z, siis integraal üle punkte z_0 ja z ühendava joone ei sõltu integreerimisteekonna kujust (järeldus Cauchy teoreemist) vaid ainult selle otspunktidest z_0 ja z. Seetõttu on mõtet kirjutada

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Kui loeme punkti z_0 fikseerituks, määrab see integraal ülemise raja z suhtes ühese funktsiooni,

$$w=\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

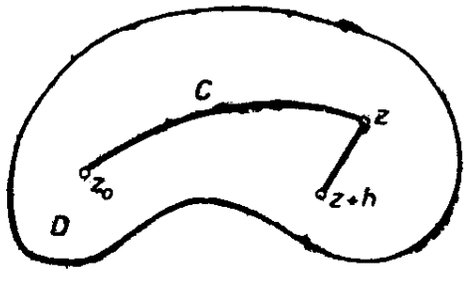
Järgnevas näitame, et Φ on funktsiooni f üks algfunktsioonidest, s. t.

$$\Phi'(z)=f(z). \tag{1}$$

Funktsiooni tuletise definitsiooni põhjal on võrdus (1) samaväärne seosega

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h}-f(z)\right|=0. \tag{2}$$

Siin eeldame, et $z+h\in D$ (vt. joon. 22). Võrduse (2) näitamiseks märgime, et



Joon. 22

$$\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta$$

ning

$$f(z)=\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,d\zeta.$$

Neid seoseid arvestades võime kirjutada, et

$$\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_z^{z+h}[f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta. \tag{3}$$

Regulaarsuse tõttu on funktsioon pidev piirkonnas D, s. t. ka punktis z, mistõttu vastavalt arvule $\varepsilon>0$ võime leida niisuguse $\delta(\varepsilon)$, et iga $\zeta\in D$ ja $|\zeta-z|<\delta(\varepsilon)$ puhul

$$|f(\zeta)-f(z)<\varepsilon. \tag{4}$$

Seoste (3) ja (4) põhjal saame, kasutades integraali mooduli hindamise valemit, et

$$\left|\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h}-f(z)\right|<\frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot|h|=\varepsilon,$$

kui $|h|<\delta(\varepsilon)$. Saadud võrratus on samaväärne seosega (2), millega olemegi tõestanud võrduse (1).

Olgu F mingi algfunktsioon funktsioonile f. Sel juhul

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta=F(z)+C. \tag{5}$$

Võttes viimases võrduses $z=z_0$, saame, et

$$C=-F(z_0).$$

Asendades selle võrdusse (5), saame ***Newtoni — Leibnizi valemi***

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta=F(z)-F(z_0).$$

Seega näeme, et kui funktsioon on ühelisidusas tõkestatud piirkonnas regulaarne, saab teda integreerida Newtoni — Leibnizi valemi abil. Sellega oleme põhjendanud, et kompleksmuutuja funktsioone võib integreerida samuti kui reaalmuutuja funktsioone.

N ä i d e. Arvutame

$$\int_{-\pi/4}^{1+i} e^{2iz}dz=\frac{1}{2i}e^{2iz}\Big|_{-\pi/4}^{1+1}=\frac{1}{2i}[e^{2i(1+i)}-e^{i\pi/2}]=\frac{1}{2i}[e^{-2(1-i)}+i].$$

Ülesanded

1. Arvutada integraalid

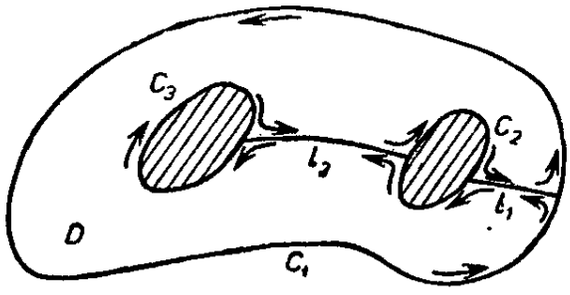
a) $\int_0^{1-i} z^2 dz$, b) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$, c) $\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2} dz$.

Vastus: a) $\frac{1}{3}(1-i)^3$, b) $\frac{1}{\pi}(1+i)$, c) $e+\frac{1}{e}$.

4.4. INTEGRAAL MITMELISIDUSAS PIIRKONNAS

Vaatleme funktsiooni f, mis on regulaarne mingis tõkestatud mitmelisidusas piirkonnas D. Olgu selleks piirkonnaks joonisel 23 kujutatud kolmelisidus piirkond, mille raja moodustavad kinnised jooned C_1, C_2 ja C_3. Nende joonte positiivseks suunaks loeme kellaosuti liikumisele vastupidise suuna. Kui tähistame raja tähega C, siis

$$C=C_1+(-C_2)+(-C_3), \tag{1}$$



Joon. 23

sest raja positiivseks suunaks loetakse suunda, mida mööda liikudes piirkond jääb vasakule.

Meie eesmärgiks on laiendada Cauchy teoreemi sellistele piirkondadele. Selleks eeldame, et funktsioon f on pidev kuni rajani C. Tõestame, et neil eeldustel

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

Tõepoolest, ühendades raja üksikud osad omavahel joontega l_1 ja l_2, saame ühelisidusa piirkonna, mille rajajooneks on joon

$$\Gamma=C+l_1+l_2+(-l_1)+(-l_2).$$

Saadud piirkonna puhul kehtib Cauchy teoreem ning seega

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

Jooniselt 23 on näha, et joone Γ täielikul läbimisel läbitakse jooned l_1 ja l_2 kahel korral, kuid erinevates suundades, mistõttu

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{C} f(z)\,dz = 0.$$

Seosest (1) saame, et

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz.$$

Saadud tulemuse põhjal võime sõnastada järgmise teoreemi.

Teoreem. *Kui funktsioon $w=f(z)$ on regulaarne mitmelisidusas tõkestatud piirkonnas ja pidev kuni selle rajani, siis integraal üle rajajoone välimise osa on võrdne summaga integraalidest üle sisemiste väljalõigete rajajoonte, kus integreerimissuunaks on suund, mida mööda liikudes piirkond (väljalõige) jääb vasakule.*

Ülesanded

1. Näidata, et

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-\mathrm{i})(z+2)} = \int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)(z-\mathrm{i})} + \int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{dz}{(z-\mathrm{i})(z+2)}.$$

2. Arvestades jaotise 4.1 ülesannet 5, arvutada eelmises ülesandes esinev integraal.

   Vastus: 0. (Ülesande lahendamiseks avaldame integraalialuse murru osamurdude summana.)

3. Tõestada, et kui f on diferentseeruv igas punktis, välja arvatud punkt $z=a$, siis mistahes punkti a hõlmava kinnise joone C korral

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{|z-a|=r} f(z)\,dz.$$

4. Eelmise ülesande põhjal leida

$$\int_{C} \frac{dz}{(z-a)^n},$$

   kus C on mingi kinnine joon.

   Vastus: a) 0, kui joon C ei hõlma punkti a, või kui $n \neq -1$;

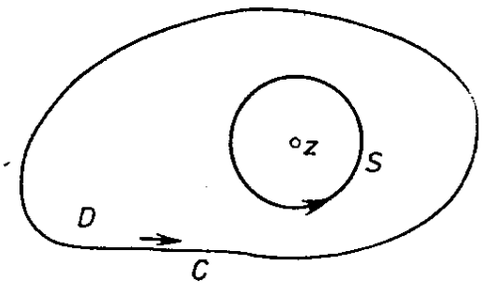
   b) $2\pi\mathrm{i}$, kui joon C hõlmab punkti a ning $n=-1$.

4.5. CAUCHY VALEM

Rakendades teoreemi 2 jaotisest 4.2, näitame, et tõkestatud piirkonnas D regulaarse ja kuni rajani C pideva funktsiooni $w=f(z)$ väärtused piirkonnas D on määratud selle funktsiooni väärtustega rajal C. Selleks tõestame, et

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{1}$$

kui rajajoon C läbitakse positiivses suunas.



Joon. 24

Valemi (1) tõestamiseks ümbritseme punkti z ringjoonega S (vt. joon. 24), mis täielikult kuulub piirkonda D. Ringjoone S raadiuse valime nii väikese, et $\zeta \in S$ puhul

$$|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon, \tag{2}$$

kus $\varepsilon>0$ on suvaliselt valitud arv. Funktsiooni f pidevuse tõttu on see võimalik.

Kui loeme joone S positiivseks suunaks kellaosuti liikumisele vastassuuna, siis saame eelmise jaotise teoreemi põhjal, et

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{3}$$

Vastavalt ülesandele 5 jaotisest 4.1 võime kirjutada, et

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{4}$$

Seoste (3) ja (4) põhjal

$$f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Rakendades saadud võrduse puhul integraali mooduli hindamise valemit, saame seose (2) tõttu, et

$$\left|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{\varepsilon}{r}\,2\pi r=\varepsilon.$$

Arvu ε suvalisust arvestades viimane võrratus tõestabki valemi (1), mida nimetatakse ***Cauchy valemiks***. Regulaarsete funktsioonide teoorias on see valem väga tähtis.

Ülesanded

1. Olgu

$$g(z)=\int_{|\zeta|=3} \frac{2\zeta^2-\zeta-2}{\zeta-z}\,d\zeta \quad (|z|\neq 3).$$

Leida $g(2)$. Milline on funktsiooni $w=g(z)$ väärtus, kui $|z|>3$?

Vastus: $g(2)=8\pi i$; $g(z)=0$, kui $|z|>3$.

2. Leida järgmised integraalid:

a) $\int_C \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz$, b) $\int_C \frac{z}{2z+1}\,dz$,

c) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz$,

kus C on ruudu $|x|\leqslant 2$, $|y|\leqslant 2$ rajajoon.

Vastus: a) 2π; b) $-\pi i/2$; c) $\pi i/4$.

4.6. CAUCHY TÜÜPI INTEGRAALID

Cauchy valemi

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{1}$$

põhjal saime esitada tõkestatud piirkonnas D regulaarset funktsiooni, teades tema väärtusi selle piirkonna rajajoonel C. Osutub aga, et valemis (1) esinev integraal eksisteerib iga $z\notin C$ puhul, kui f on pidev joonel C. Siinjuures ei tarvitse joon C olla kinnine. Vaatlemegi järgnevas funktsiooni

$$w=F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{2}$$

kus f on pidev joonel C. Selliselt defineeritud funktsioon on määratud kogu z-tasandil, välja arvatud joone C punktides. Integraali (2) nimetatakse ***Cauchy tüüpi integraaliks***. Selle integraali kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1. *Funktsioon* (2) *on mistahes arv kordi diferentseeruv, kusjuures*

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{3}$$

Tõestus. Näitame, et

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{4}$$

Vastavalt tuletise definitsioonile

$$F'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}.$$

Arvutades saame, et

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i h}\int_C\left[\frac{1}{\zeta-z-h}-\frac{1}{\zeta-z}\right]f(\zeta)\,d\zeta=$$

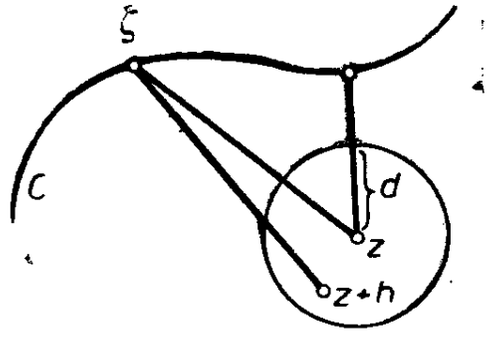
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}.$$

Olgu punkti z ja joone C vaheline kaugus $2d$. Eeldame, et $|h|<d$. Sel juhul (vt. joon. 25)

$$|\zeta-z|>d,\quad |\zeta-z-h|>d,$$

mistõttu

$$\frac{1}{|z-\zeta|}<\frac{1}{d},\quad \frac{1}{|\zeta-z-h|}<\frac{1}{d}.$$



Joon. 25

Viimaste võrratuste põhjal saame, et

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{hf(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|\leqslant\frac{Ms}{2\pi d^3}|h|,$$

kus $M=\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)|$ ning s on joone C pikkus. Et $h\to 0$ puhul vii-

mase võrratuse parem pool läheneb nullile, siis olemegi tõestanud valemi (4).

Valem (3) tõestatakse täieliku induktsiooni meetodil. Jätame selle lugejale.

Ka siis, kui $w=f(z)$ on regulaarne mingis tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni rajani, on teoreemi 1 eeldused täidetud. Sellega oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 2. *Kui funktsioon f on regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni rajajooneni C, siis eksisteerivad funktsioonil f vaadeldavas piirkonnas mistahes järku tuletised, kusjuures*

$$f^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{5}$$

Teisiti öeldes: teoreem 2 väidab, et iga regulaarne kompleksmuutuja funktsioon on mistahes arv kordi diferentseeruv. Reaalmuutuja funktsioonidel sellist omadust ei ole. Nende puhul ei järeldu tuletise olemasolust isegi selle pidevus, ammugi siis veel teist järku tuletise olemasolu.

Valemist (5) saame, et kui f on regulaarne ringis $|\zeta-z|<R$ ja pidev kuni rajajooneni, siis

$$|f^{(n)}(z)|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{n!M2\pi R}{2\pi R^{n+1}}=\frac{n!M}{R^n},$$

kus $M=\max\limits_{|\zeta-z|=R}|f(\zeta)|$. Võttes $n=1$, saame, et

$$|f'(z)|\leqslant\frac{M}{R}. \tag{6}$$

Olgu f regulaarne ja tõkestatud kogu komplekstasandil, s. t. $|f(z)|\leqslant M$ iga z puhul. Siis järeldub võrratusest (6) (kui $R\to\infty$), et

$$|f'(z)|\equiv 0.$$

Seega $f(z)=\text{const}$. Me oleme sellega tõestanud järgmise, üsna huvitava teoreemi, mis on jällegi iseloomulik vaid kompleksmuutuja funktsioonidele.

Liouville'i teoreem. *Kui funktsioon $w=f(z)$ on regulaarne ja tõkestatud kogu komplekstasandil, siis on ta konstantne.*

M ä r k u s. Liouville'i teoreemist järeldub, et kogu komplekstasandit ei saa konformselt kujutada ühekski tõkestatud piirkonnaks (näiteks ühikringiks).

Liouville'i teoreemist järeldub ka nn. **algebra põhiteoreem**:

Igal kompleksse kordajatega mittekonstantsel polünoomil on vähemalt üks nullkoht kompleksarvude vallas.

T õ e s t u s. Olgu meil mingi polünoom $P(z)$. Oletame, et polü-

noomil $P(z)$ pole ühtki nullkohta, s. t. iga z puhul $|P(z)|>a>0$. Kui vaatleme funktsiooni $w=G(z)=\frac{1}{P(z)}$, siis

$$|G(z)|=\frac{1}{P(z)}<\frac{1}{a}.$$

Et viimane võrratus kehtib iga z puhul, siis Liouville'i teoreemi põhjal $G(z)=\text{const}$, millest ka $P(z)=\text{const}$. Saadu on aga vastuolus eeldusega, mille kohaselt $P(z)$ on konstandist erinev polünoom.

Järgnevas esitame veel ühe rakenduse teoreemile 2, näidates, et Cauchy teoreemil on pöördteoreem.

Morera teoreem. *Kui funktsioon f on pidev ühelisidusas tõkestatud piirkonnas D ning*

$$\int_C f(z)\,dz=0 \tag{7}$$

iga piirkonda D kuuluva kinnise joone C puhul, siis f on selles piirkonnas regulaarne.

T õ e s t u s. Tingimusest (7) järeldub, et funktsioon

$$w=F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

on ühene. Et $F'(z)=f(z)$ (selle võrduse tõestasime jaotises 4.3); siis teoreemi 2 põhjal eksisteerib ka $F''(z)=f'(z)$. Seega f on ühene ja diferentseeruv piirkonna D igas punktis, s. t. ta on selles piirkonnas regulaarne.

Ülesanded

1. Leida

$$\int_C \frac{\tan\frac{z}{2}}{(z-2)^3}\,dz,$$

kui C on kinnine joon, mis hõlmab punkti 2.

V a s t u s: $\frac{\pi i}{2}\frac{\sin 1}{\cos^3 1}$.

2. Leida

$$\int_C \frac{\operatorname{ch} z}{z^4}\,dz,$$

kus C on kinnine joon.

V a s t u s: 0 (sõltumata joonest C).

3. Leida

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3},$$

kus C on kinnine joon.

Vastus: a) $2\pi i$, kui joon C hõlmab punkti 0, kuid ei hõlma punkti 1;

b) $-e\pi i$, kui joon C hõlmab punkti 1, kuid ei hõlma punkti 0;

c) $(2-e)\pi i$, kui joon C hõlmab nii punkti 0 kui ka punkti 1;

d) 0, kui joon C ei hõlma ei punkti 0 ega punkti 1.

4. Olgu funktsioon $w=f(z)$ regulaarne joonega C piiratud kinnises piirkonnas. Näidata, et iga $z_0 \notin C$ korral

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z-z_0} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}.$$

4.7. PARAMEETRIST SÕLTUVAD INTEGRAALID

Vaatleme funktsiooni, mis on esitatud parameetrist sõltuva integraalina:

$$w=F(z)=\int_\Gamma f(\zeta, z)d\zeta, \quad z \in D. \tag{1}$$

Teoreem 1. *Olgu täidetud järgmised tingimused:*

1) Γ *on lõpliku pikkusega tükati sile joon;*

2) *funktsioon* f *on pidev kahe muutuja funktsioon, kui* $\zeta \in \Gamma$ ja $z \in D$, *kus* D *on komplekstasandi mingi piirkond;*

3) *iga fikseeritud* $\zeta \in \Gamma$ *korral on* f *regulaarne (muutuja* z *järgi) piirkonnas* D.

Sel juhul on seosega (1) *määratud funktsioon* F *regulaarne piirkonnas* D.

Tõestus. Kasutame Morera teoreemi. Tingimuste 1 ja 2 põhjal on funktsioon F pidev piirkonnas D. Jääb näidata, et

$$\int_C F(z)dz=0$$

iga piirkonda D kuuluva kinnise joone C korral. Tõepoolest,

$$\int_C F(z)dz=\int_C \left(\int_\Gamma f(\zeta, z)d\zeta\right)dz=\int_\Gamma \left(\int_C f(\zeta, z)dz\right)d\zeta=0,$$

sest Cauchy teoreemi põhjal

$\int_C f(\zeta, z)dz=0$ iga $\zeta \in \Gamma$ puhul.

Integreerimisjärjekorda võib muuta, arvestades kahekordse integraali omadusi (reaalmuutujate korral). Sellega on teoreem tõestatud.

Teoreem 2. *Olgu täidetud teoreemi 1 tingimused. Sel juhul*

$$F'(z)=\int_{\Gamma}\frac{\partial f(\zeta,z)}{\partial z}\,d\zeta \text{ iga } z\in D \text{ korral.} \tag{2}$$

T õ e s t u s. Valime suvalise punkti $z\in D$ ning ringjoone γ, mis kuulub piirkonda D ning hõlmab punkti z. Sel juhul saame (kasutades valemit regulaarse funktsiooni tuletise kohta), et

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(t)}{(t-z)^2}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{(t-z)^2}\left(\int_{\Gamma}f(\zeta,t)\,d\zeta\right)dt=$$

$$=\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta,t)}{(t-z)^2}\,dt\right)d\zeta=\int_{\Gamma}\frac{\partial f(\zeta,z)}{\partial z}\,d\zeta.$$

Teoreem on tõestatud.

Kui seni oleme vaadelnud lõpliku pikkusega tükati siledaid jooni, siis nüüd asume vaatlema niisuguseid jooni, mis on küll lõpmatud, kuid mille iga lõpliku pikkusega osa on tükati sile. Eeldame, et tegu on joonega, millel on alguspunkt a (ühepoolselt lõpmatu joon). Vaatleme selle joone osa C_s, mis jääb punktide a ja b vahele ning mille pikkus on s. Vaatleme joonel C pidevat funktsiooni g. Sel juhul eksisteerivad integraalid

$$\int_{C_s} g(\zeta)\,d\zeta.$$

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{s\to\infty}\int_{C_s} g(\zeta)\,d\zeta,$$

siis seda nimetatakse funktsiooni g **päratuks integraaliks üle joone** C ning tähistatakse

$$\lim_{s\to\infty}\int_{C_s} g(\zeta)\,d\zeta=\int_{C} g(\zeta)\,d\zeta.$$

Sel juhul öeldakse, et vaadeldav päratu integraal koondub.

Kui on tegu kahepoolselt lõpmatu joonega (näiteks sirgega), siis valime sellel joonel mingi punkti a ning vaatleme kaht ühepoolselt lõpmatut joont. Üle nende võetud päratute integraalide summa annab meile päratu integraali üle vaadeldava joone.

Järgnevalt vaatleme parameetrist sõltuvaid päratuid integraale

$$F(z)=\int_{C} f(z,\zeta)\,d\zeta,\quad z\in D. \tag{3}$$

Öeldakse, et vaadeldav *päratu integraal koondub ühtlaselt hulgal D,*

kui iga $\varepsilon>0$ *korral leidub selline* $M>0$, *et*

$$|F(z)-\int_{C_s} f(z,\zeta)\,d\zeta|<\varepsilon$$

iga $s>M$ *ja iga* $z\in D$ *puhul.*

Weierstrassi tunnus: *Kui iga* $\zeta\in C$ *ja* $z\in D$ *korral* $|f(\zeta,z)|\leqslant \varphi(\zeta)$ *ning koondub integraal*

$$\int_C |\varphi(\zeta)|\,|d\zeta|,$$

siis päratu integraal (3) *koondub ühtlaselt hulgal* D.

Märkus. Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal ning selle juurde kuuluvad mõisted ka juhul, kui joone C pikkus s_0 on küll lõplik, kuid joonel C vaadeldav funktsioon ei ole tõkestatud joone lõpp-punkti ümbruses. Sel juhul

$$\int_C g(\zeta)\,d\zeta=\lim_{s\to s_0}\int_{C_s} g(\zeta)\,d\zeta.$$

Matemaatilise analüüsi kursusest teame mitmeid parameetrist sõltuvate päratute integraalide omadusi*. Et need omadused kehtivad ka kompleksmuutuja korral, saab tõestada analoogiliselt või siis arvestades asjaolu, et integraal kompleksmuutuja funktsioonist on esitatav kahe reaalmuutuja funktsiooni integraalide kaudu. Vaatleme paari omadust, mida vajame hiljem Laplace'i teisenduse juures (jaotis 10).

Teoreem 3. *Olgu* Γ *tükati sile lõpmatu joon ning olgu lisaks teoreemi* 1 *tingimustele* 2) *ja* 3) *täidetud tingimus:*

4) *integraal* (1) *koondub ühtlaselt igas kinnises piirkonnas* $D'\subset D$.

Sel juhul on funktsioon F *regulaarne piirkonnas* D.

Teoreem 4. *Kui lisaks teoreemi* 1 *tingimustele integraal* (2) *koondub ühtlaselt piirkonnas* $D'\subset D$, *siis kehtib valem* (2).

Need teoreemid tõestatakse analoogiliselt teoreemidega 1 ja 2, kusjuures integreerimisjärjekorra muutmine on nüüd lubatud vastavate päratute integraalide ühtlase koonduvuse tõttu.

Ülesanded

1. Näidata, et seosega

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

määratud Euleri Γ-funktsioon on regulaarne pooltasandis $\mathrm{Re}\,z>0$.

---

* **Kangro, G.** Matemaatiline analüüs II, Tln., 1968, lk. 240—246.

5. ANALÜÜTILISED FUNKTSIOONID

5.1. KOMPLEKSLIIKMETEGA READ

Vaatleme ridu

$$\sum_k u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_k + \ldots; \tag{1}$$

mille liikmeteks on kompleksarvud $u_k = a_k + ib_k$. Rida (1) nimetatakse **koonduvaks**, kui koondub tema osasummade jada, s. t. eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Et aga

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k = A_n + iB_n,$$

siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} A_n + i \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Sellest näeme, et rida (1) koondub parajasti siis, kui koonduvad read $\sum_k a_k$ ja $\sum_k b_k$. Need on reaalsete liikmetega read, mille koonduvuseks on tarvilik, et $\lim a_k = \lim b_k = 0$. Seega võib ka rida (1) koonduda vaid siis, kui

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} (a_k + ib_k) = 0.$$

Kui rea osasummade jada ei koondu, siis nimetatakse rida **hajuvaks**.

Koos reaga (1) vaadeldakse ka rida

$$\sum_k |u_k| = |u_0| + |u_1| + \ldots + |u_k| + \ldots. \tag{2}$$

Kui rida (2) on koonduv, siis nimetatakse rida (1) **absoluutselt koonduvaks**. Rea absoluutset koonduvust saab kindlaks teha matemaatilise analüüsi kursusest tuntud positiivsete liikmetega ridade koonduvustunnuste abil, sest rida (2) on positiivsete liikmetega.

Osutub, et rida (1) koondub absoluutselt parajasti siis, kui read $\sum a_k$ ja $\sum b_k$ on absoluutselt koonduvad. Täpselt samuti kui reaalsete liikmetega ridade korral saab Cauchy kriteeriumi abil näidata, et rea absoluutsest koonduvusest järeldub tema tavaline koonduvus.

Ülesanded

1. Uurida ridade $\sum_n u_n$ koonduvust, kui

a) $u_n = \frac{1+in}{2^n}$,

b) $u_n = \cos n + i \sin n$,

c) $u_n = \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$.

Vastus: a) koondub absoluutselt,
b) hajub,
c) koondub absoluutselt.

5.2. FUNKTSIONAALREAD

Nii kompleksmuutuja funktsioonide omaduste uurimise kui ka nende rakenduste vaatlemise seisukohalt huvitavad meid eeskätt funktsionaalread

$$\sum_k u_k(z) = u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_k(z) + \ldots . \tag{1}$$

Kui fikseerime muutuja z väärtuse, siis saame reast (1) arvrea.

Olgu $u_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots)$ määratud piirkonnas D. Me nimetame rida (1) **koonduvaks punktiks** $z_0 \in D$, kui koondub arvrida $\sum u_k(z_0)$. Rida (1) nimetatakse **koonduvaks piirkonnaks** D, kui ta koondub piirkonna D igas punktis. Analoogiliselt defineeritakse rea (1) absoluutne koonduvus mingis punktis $z_0 \in D$ ning piirkonnas D.

Tähistame rea (1) osasumma sümboliga $S_n(z)$. Funktsionaalrea koondumine piirkonnas D tähendab, et iga $z \in D$ puhul eksisteerib

$\lim_{n\to\infty} S_n(z)$. Tähistame

$$w = f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z).$$

Seega võime öelda, et piirkonnas D koonduva rea summa määrab selles piirkonnas ühese funktsiooni. Märkides seda fakti, ütleme, et rida (1) koondub funktsiooniks f.

Kui arvestame rea koonduvuse ning jada piirväärtuse mõisteid, võiksime piirkonnas D funktsiooniks f koonduva rea $\sum u_k(z)$ definitsiooni esitada järgmiselt.

Öeldakse, et rida $\sum u_k(z)$ *koondub funktsiooniks* f *piirkonnas* D, *kui iga* $z \in D$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *puhul leidub selline naturaalarv* $N(\varepsilon, z)$, *nii et*

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$$

iga $n>N(\varepsilon, z)$ *puhul.*

Analoogiliselt sellele defineeritakse ka rea **ühtlane koonduvus.**

Öeldakse, et rida $\sum u_k(z)$ *koondub ühtlaselt funktsiooniks* f *piirkonnas* D, *kui* $\varepsilon>0$ *puhul leidub selline naturaalarv* $N(\varepsilon)$, *nii et*

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$$

iga $z\in D$ *ja* $n>N(\varepsilon)$ *puhul.*

Võrreldes ühtlase koonduvuse ja tavalise koonduvuse definitsioone, märkame, et tavalise koonduvuse puhul ei nõuta arvu N sõltumatust punktist z. Ühtlase koonduvuse puhul nõutakse aga, et iga ε korral võib naturaalarvu N valida sõltumatuna punktist z, s. t. kogu piirkonna jaoks ühtsena.

Nagu matemaatilise analüüsi kursuses, nii ka siin saab tõestada järgmise teoreemi.

Teoreem 1. *Kui piirkonnas* D *ühtlaselt koonduva rea liikmed on pidevad punktis* z_0, *siis on ka rea summa selles punktis pidev.*

Rea ühtlase koonduvuse määramiseks kasutatakse sageli järgmist ***Weierstrassi tunnust.***

Teoreem 2. *Kui funktsionaalrea* $\sum_k u_k(z)$ *liikmed rahuldavad võrratust*

$$|u_k(z)|\leqslant a_k \quad (k=0,\ 1,\ \ldots) \tag{2}$$

iga $z\in D$ *puhul ning rida* $\sum a_k$ *on koonduv, siis koondub see funktsinaalrida ühtlaselt piirkonnas* D.

Tõestus. Võrratuse (2) ning positiivsete liikmetega ridade võrdlusteoreemi põhjal saame, et vaadeldav funktsionaalrida koondub absoluutselt igas punktis $z\in D$. Seega määrab tema summa seal funktsiooni f. Kui tähistame rea osasumma sümboliga $S_n(z)$, siis

$$|f(z)-S_n(z)|=|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\ldots|\leqslant$$

$$\leqslant|f_{n+1}(z)|+|f_{n+2}(z)|+\ldots\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots .$$

Et aga rida $\sum a_k$ on koonduv, siis saame siit, et vastavalt arvule $\varepsilon>0$ leidub niisugune $N(\varepsilon)$, millest suuremate n väärtuste puhul

$$|f(z)-S_n(z)|\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots<\varepsilon \text{ iga } z \text{ korral.}$$

Seega koondub rida $\sum u_k(z)$ ühtlaselt.

Järgnevas vaatleme ühtlaselt koonduvate ridade liikmeti diferentseerimist ja integreerimist. Vastavate küsimuste selgitamiseks esitame kaks järgnevat teoreemi.

Teoreem 3. *Kui rida* $\sum u_k(z)$ *koondub ühtlaselt piirkonnas* D, *siis iga piirkonda* D *kuuluva joone* C *puhul*

$$\int_C \left(\sum_k u_k(z)\right) dz = \sum_k \int_C u_k(z)\,dz. \tag{3}$$

Tõestus. Märgime rea summa sümboliga $f(z)$. Võrduse (3) tõestamiseks peame näitama, et

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_C u_k(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz. \tag{4}$$

Selleks valime vastavalt suvalisele arvule $\varepsilon>0$ naturaalarvu N, et iga $n>N$ ja iga $z\in D$ puhul

$$|f(z)-S_n(z)| = \left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} u_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{s},$$

kus s on joone C pikkus. Sel juhul

$$\left|\int_C f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} u_k(z)\,dz\right| = \left|\int_C \left[f(z)-\sum_{k=0}^{n} u_k(z)\right] dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{s}\cdot s = \varepsilon.$$

Saadud võrratus näitab seose (4) kehtivust, millega teoreem ongi tõestatud.

Teoreem 4. *Olgu funktsioonid* u_k $(k=0, 1, \ldots)$ *regulaarsed tõkestatud piirkonnas* D *ning pidevad kuni rajajooneni* C. *Kui rida* $\sum u_k(z)$ *koondub ühtlaselt rajajoonel* C, *siis*

1) *see rida koondub ka piirkonnas* D *ning rea summa* $f(z)$ *määrab seal regulaarse funktsiooni;*

2) *tuletistest moodustatud read* $\sum_k u_k^{(l)}(z)$ $(l=1, 2, \ldots)$ *koonduvad piirkonnas* D, *kusjuures*

$$\sum_k u_k^{(l)}(z) = f^{(l)}(z).$$

Tõestus. 1) Olgu z suvaline punkt piirkonnast D ning ζ suvaline punkt rajajoonelt C. Siis $|\zeta-z|>0$. Seega, iga fikseeritud z korral koondub rida $\sum_k \frac{1}{2\pi i(\zeta-z)} u_k(\zeta)$ ühtlaselt rajajoonel C. Seda rida võib liikmeti integreerida, mistõttu Cauchy valemi põhjal

$$\sum_k \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u_k(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_k u_k(z), \tag{5}$$

millest järeldubki, et meie funktsionaalrida koondub iga z puhul. Olgu tema summa $f(z)$. Rajajoonel C on funktsioon $w=f(\zeta)=$

$=\sum_k u_k(\zeta)$ pidev, mistõttu seose (5) asemel võime kirjutada

$$f(z)=\sum_k u_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sum u_k(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Saadud tulemustest näeme, et funktsioon f avaldub Cauchy tüüpi integraalina piirkonnas D ning on seetõttu regulaarne.

2) Täiesti analoogiliselt eelnevaga tõestame ridade $\sum_k u_k^{(l)}(z)$ koonduvuse, võttes vaid $\zeta-z$ asemel suuruse $\frac{1}{l!}(\zeta-z)^{l+1}$.

Teisest küljest,

$$\sum_k u_k^{(l)}(z)=\frac{l!}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_k u_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{l+1}}\,d\zeta=\frac{l!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{l+1}}\,d\zeta=f^{(l)}(z).$$

Sellega ongi teoreem tõestatud.

Äsjasõnastatud teoreemi tuntakse ***Weierstrassi teoreemina*** ning see pärineb aastast 1859.

5.3. ASTMEREAD

Kõikidest funktsionaalridadest on erilise tähtsusega **astmeread**

$$\sum_n c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

kus a ja c_n $(n=0, 1, \ldots)$ on konstandid. Juhul $z=a$ võrduvad rea (1) kõik liikmed (peale esimese) nulliga ning astmerea summa on sel juhul c_0. Järelikult koondub iga astmerida (1) punktis a. Kas aga leidub ka teisi z väärtusi, mille puhul rida (1) koondub, sellele annab vastuse järgmine teoreem.

Cauchy — Hadamard'i teoreem. *Astmerida* (1) *koondub ringis* $|z-a|<R$ *ja hajub piirkonnas* $|z-a|>R$, *kusjuures*

$$R=\frac{1}{p} \quad \text{ning} \quad p=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}.*$$

Tõestus. Vaatleme rea (1) koonduvust mingis fikseeritud punktis z.

1) Olgu $|z-a|<R=\frac{1}{p}$, s. t. $p|z-a|<1$. Et aga

* Sümbol $\overline{\lim}$ tähistab ülemist piirväärtust.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}=p|z-a|, \tag{2}$$

siis

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}<q<1, \text{ kui } n>n_0$$

ning n_0 on küllalt suur. Saadud võrratuse ning positiivsete ridade võrdlusteoreemi põhjal võime öelda, et rida (1) koondub punktis z absoluutselt, sest koondub geomeetriline rida $\sum q^n$ $(0<q<1)$.

2) Kui aga $|z-a|>R=\frac{1}{p}$, siis seose (2) põhjal saame, et võrratus

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}>1$$

kehtib lõpmata paljude n väärtuste korral. Viimase põhjal pole punktis z rea (1) üldliikme piirväärtus null, mistõttu rida ei saa koonduda selles punktis. Seega vaadeldavas piirkonnas rida (1) hajub.

Märkus. Cauchy—Hadamard'i teoreem on õige ka juhul, kui $p=0$ ja $p=\infty$. Neil kordadel vastavalt $R=\infty$ ja $R=0$.

Tõestus: 1) Kui $p=0$, siis

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0.$$

Võttes mingi z väärtuse $(z\neq a)$, näeme, et küllalt suurte n väärtuste korral

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{2|z-a|}.$$

Viimasest võrratusest aga järeldub, et

$$|c_n(z-a)^n|<\frac{1}{2^n},$$

mis garanteeribki rea (1) koonduvuse punktis z.

2) Olgu $p=\infty$. Näitame, et sel juhul ei koondu rida (1) üheski punktis peale punkti $z=a$. Oletame väite vastaselt, et rida (1) koondub punktis $z_0\neq a$. Sel juhul peaks $\lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n=0$, millest omakorda järelduks, et $|c_n(z_0-a)^n|<M$ ehk teisiti

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{\sqrt[n]{M}}{|z_0-a|}.$$

Et aga $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M}=1$, siis viimase võrratuse põhjal $p\neq\infty$. Selline järeldus on aga vastuolus eeldusega. Saadud vastuolu ütlebki, et rida (1) ei saa koonduda punktis z_0. Et z_0 oli suvaline (punktist a erinev) punkt, siis tõepoolest $R=0$.

Suurust R nimetatakse **astmerea koonduvusraadiuseks** ning ringi $|z-a|<R$ **koonduvusringiks.**

Millise iseloomuga on astmerea koonduvus oma koonduvusringis, seda aitab selgitada järgmine teoreem.

Abeli I teoreem. *Kui astmerida* (1) *koondub punktis* z_0, *siis koondub ta absoluutselt igas punktis* z, *mille puhul* $|z-a|<|z_0-a|$. *Seejuures igas kinnises ringis* $|z-a|\leqslant q|z_0-a|$ $(0<q<1)$ *koondub vaadeldav rida ühtlaselt.*

Tõestus. Olgu rida $\sum c_n(z_0-a)^n$ koonduv. Sel juhul leidub $M>0$, nii et $|c_n(z_0-a)^n|\leqslant M$. Ringi $|z-a|\leqslant q|z_0-a|$ punktides

$$|c_n(z-a)^n|=\left|c_n(z_0-a)^n\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right|\leqslant Mq^n.$$

Et rida $\sum_n Mq^n$ on võrratuste $0<q<1$ tõttu koonduv, siis Weierstrassi tunnuse põhjal on rida (1) ühtlaselt koonduv ringis $|z-a|\leqslant q|z_0-a|$. Samast saame ka, et rida on absoluutselt koonduv selle ringi igas punktis.

Et iga z puhul, mis rahuldab tingimust $|z-a|<|z_0-a|$, võib leida reaalarvu q, nii et $|z-a|\leqslant q|z_0-a|$ ja $0<q<1$, siis on teoreem sellega tõestatud.

Koonduvusringis määrab astmerida (rea summa) ühese funktsiooni, mis osutub seal regulaarseks. Tõepoolest, võttes mingi z väärtuse ringist $|z-a|<R$ saame ikka leida niisuguse reaalarvu, et vaadeldav z on ringi $|z-a|\leqslant qR$ sisepunkt. Eelmise jaotise viimase teoreemi põhjal saamegi, et astmerea summa on vaadeldavas punktis regulaarne. Nimetatud teoreemi rakendamiseks tuleb käesoleval juhul vaid võtta piirkonnaks D valitud kinnine ring ning panna tähele, et rea (1) liikmed on regulaarsed kogu komplekstasandil.

Astmerea (1) summana määratud funktsiooni tuletise saame eelmise paragrahvi teoreemi 4 põhjal leida rea (1) liikmeti diferentseerimisel, s. t.

$$f'(z)=\sum_n nc_n(z-a)^{n-1}.$$

Osutub, et sel viisil saadud rea koonduvusraadius on võrdne rea (1) omaga, sest

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|nc_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

Ülesanded

1. Leida astmeridade koonduvusraadiused:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (2+\mathrm{i}^n)^n z^n$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos \mathrm{i}n\, z^n$,

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$.

Vastus: a) $R=1$, b) $R=\infty$, c) $R=0$, d) $R=1$, e) $R=1/3$, f) $R=1/\mathrm{e}$, g) $R=1$, kui $|a|\leqslant 1$; $R=\frac{1}{|a|}$, kui $|a|>1$.

2. Leida järgmiste ridade koonduvuspiirkonnad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{n^2(1+\mathrm{i})^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1+\mathrm{i})^n}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{4+3\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right)^n$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\mathrm{i})^n}{3^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z+\mathrm{i})^n}$.

Vastus: a) $|z-\mathrm{i}|<\sqrt{2}$, b) $|z-1+\mathrm{i}|>1$, c) $|z-2\mathrm{i}|>5$, d) $2<|z|<3$, e) $1<|z+\mathrm{i}|<3$.

3. Näidata, et geomeetrilise rea $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ koonduvuspiirkonnaks on ühikring ning tema summaks $\frac{1}{1-z}$.

Astmerida

$$\sum_n c_n(z-a)^n$$

nimetatakse funktsiooni $w=f(z)$ ***Taylori reaks*** punktis a, kui

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Teoreem 1. *Iga astmerida on oma summa Taylori rida.*

Tõestus. Olgu

$$f(z)=\sum_n c_n(z-a)^n. \tag{1}$$

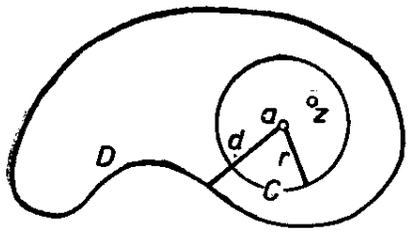
Võttes $z=a$, saame, et $c_0=f(a)$. Kui rida (1) liikmeti diferentseerida ning võtta seejärel $z=a$, saame, et $c_1=f'(a)$. Teistkordsel diferentseerimisel saaksime $c_2=\frac{1}{2}f''(a)$ jne. Sellega olemegi tõestanud teoreemi 1.

Teoreemist 1 järeldub, et funktsiooni võib vaid ühesel viisil arendada astmereaks punktis a. Me ütleme, et funktsioon f on punktis a arendatav astmereaks, kui leidub selline $R>0$, nii et võrdus (1) kehtib ringis $|z-a|<R$. Funktsiooni f nimetatakse **analüütiliseks** punktis $z=a$, kui ta on selles punktis arendatav astmereaks. Eelmise jaotise viimase teoreemi põhjal saame, et iga vaadeldavas punktis analüütiline funktsioon on seal ka regulaarne. Järgnevas näitame vastupidist.

Teoreem 2. *Punktis a regulaarne funktsioon f on selles punktis analüütiline, kusjuures funktsiooni f Taylori rida (punktis a) koondub suurimas ringis $|z-a|<R$, milles f on regulaarne.*

Tõestus. 1) Näitame, et f on analüütiline piirkonna D suvalises punktis a, kus D on funktsiooni f regulaarsuse piirkond. Tähistame tähega d punkti a kauguse piirkonna D rajajoonest (vt. joon. 26). Võtame ümber punkti a ringjoone C, mille raadius $r<d$. Olgu z suvaline punkt valitud ringist. Sel juhul $|z-a|=qr$, kus $0<q<1$. Cauchy valemi põhjal võime kirjutada, et

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$



Joon. 26

Funktsiooni f reaksarendamiseks kasutame seost

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a-(z-a)}=\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}\,\frac{1}{\zeta-a}=$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}},$$

sest eelduse kohaselt

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{qr}{r}=q<1.$$

Äsjasaadud reaksarenduse põhjal võime kirjutada, et

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}(z-a)^k. \tag{2}$$

See rida osutub ühtlaselt koonduvaks ringjoonel C. Tõepoolest, kui $\zeta\in C$, siis

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}(z-a)^k\right|\leqslant\frac{M}{2\pi}\frac{r^kq^k}{r^{k+1}}=\frac{M}{2\pi r}q^k,$$

kus $M=\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)|$. Seega on rida (2) Weierstrassi tunnuse põhjal ühtlaselt koonduv ringjoonel C ning me võime teda liikmeti integreerida. Seda tehes saame, et

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}\right]\times$$

$$\times(z-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k,$$

kus

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Sellega olemegi tõestanud, et funktsioon $w=f(z)$ on punkti a ümbruses (ringis $|z-a|<r$) arendatav Taylori reaks, s. t. on analüütiline punktis a.

2) Tõestuse käigus nägime, et $r\leqslant d$, kusjuures r võis olla kui tahes lähedane suurusele d. On selge, et r ei saa olla suurem kui d, sest vastasel korral saaksime, et funktsioon f on regulaarne ringis,

mis ulatub väljaspoole piirkonda D. Seda aga ei saa olla, sest D oli funktsiooni f regulaarsuse piirkond.

Sellega on meie teoreem tõestatud.

Märkus 1. Äsjatõestatu põhjal saame määrata funktsiooni $w=f(z)$ Taylori rea koonduvusraadiuse ilma seda rida ennast leidmata. Nimelt: *funktsiooni f Taylori rea (punktis $z=a$) koonduvusraadius on võrdne punkti $z=a$ kaugusega lähimast iseärasest punktist, s. t. punktist, kus f pole regulaarne.*

Märkus 2. Funktsiooni f Taylori rea koonduvusringi rajajoonel $|z-a|=R$ leidub punkte, kus f pole regulaarne. Tõepoolest, kui f oleks regulaarne igas selle ringjoone punktis ζ, siis leiduks ring $|z-\zeta|<r_\zeta$, kus f on regulaarne. Tähistades $r=\min\limits_{\zeta\in C} r_\zeta$, saaksime, et f on regulaarne ringis $|z-a|<R+r$. Siis aga peaks funktsiooni f Taylori rida koonduma ringis raadiusega $R+r$. Saadud vastuolu tõestabki väite.

Ülesanded

1. Arendada järgmised funktsioonid Taylori reaks ja määrata nende ridade koonduvuspiirkonnad:

   a) $w=e^z$ punktis $a=1$,

   b) $w=\dfrac{1}{z^2}$ punktides $a=-1$ ja $a=2$.

   Vastus: a) $e^z=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(z-1)^n$, $|z-1|<\infty$,

   b) $\dfrac{1}{z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$, $|z+1|<1$;

   $$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n,\quad |z-2|<2.$$

2. Arendada Taylori reaks punktis $a=0$:

   a) $w=\operatorname{ch} z$;

   b) $w=\sin^2 z$;

   c) $w=\dfrac{z}{z^2-2z+5}$;

   d) $w=\operatorname{Arctan} z$ $(\operatorname{Arctan} 0=0)$;

   e) $w=\int\limits_0^z\dfrac{\cos\zeta-1}{\zeta^2}\,d\zeta$;

   f) $w=\int\limits_0^z\sin\zeta^2\,d\zeta$.

   Leida saadud ridade koonduvusraadiused.

Vastused:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$,

c) $\frac{1}{4\mathrm{i}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2\mathrm{i})^k - (1+2\mathrm{i})^k}{5^k} z^k$, $R=\sqrt{5}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=\infty$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{4n+3}}{4n+3}$, $R=\infty$.

3. Leida järgmiste avaldistega määratud funktsioonide Taylori rea (fikseeritud punktis a) koonduvusraadiused:

a) $\frac{1}{2z+3}$, $a=0$,

b) $\sqrt{z+\mathrm{i}}$, $a=1$,

c) $\sqrt{\cos z}$, $a=0$,

d) $\frac{z-2}{\mathrm{e}^z+1}$, $a=0$,

e) $\frac{1}{\sin(2z+z^2)}$, $a=\mathrm{i}$.

Vastus: a) $R=3/2$, b) $R=\sqrt{2}$, c) $R=\pi/2$, d) $R=\pi$; e) $R=1$.

5.5. ANALÜÜTILISTE FUNKTSIOONIDE AINSUSE TEOREEM

Me teame, et murdlineaarne funktsioon on üheselt määratud, kui on teada selle funktsiooni väärtused kolmes punktis. Seda seetõttu, et iga murdlineaarne funktsioon määratakse kolme üksteisest sõltumatu parameetriga (kordajaga). Lineaarsel funktsioonil on neid kaks, mistõttu ta on määratud oma väärtustega kahes punktis. Et analüütilist funktsiooni esitab astmerida, millel on lõpmata palju kordajaid, siis nähtavasti saab analüütilist funktsiooni ühe-

selt määrata vaid sel juhul, kui on teada selle funktsiooni väärtused lõpmata paljudes punktides. Osutub aga, et sellest veel ei piisa.

N ä i d e. Kogu tasandil analüütilised funktsioonid $w=\sin z$ ja $w=g(z)\equiv 0$ on võrdsed lõpmatul punktihulgal $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$, kuid need funktsioonid pole võrdsed kõikjal.

Kehtib aga järgmine analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem.

Teoreem. *Kui piirkonnas D on analüütilised funktsioonid f ja g võrdsed selle piirkonna lõpmatul punktihulgal E, millel on vähemalt üks kuhjumispunkt piirkonnas D, siis need funktsioonid ühtivad kogu piirkonnas D.*

T õ e s t u s. 1) Olgu piirkonnaks D ring $|z-a|<R$ ning olgu hulga E kuhjumispunktiks punkt a. Olgu veel

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n.$$

Valime niisuguste punktide $z_k\in E$ jada, mille korral $f(z_k)=g(z_k)$ ning $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=a$.

Arvestades funktsioonide f ja g võrdsust hulgal E, võime kirjutada, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_k-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z_k-a)^n.$$

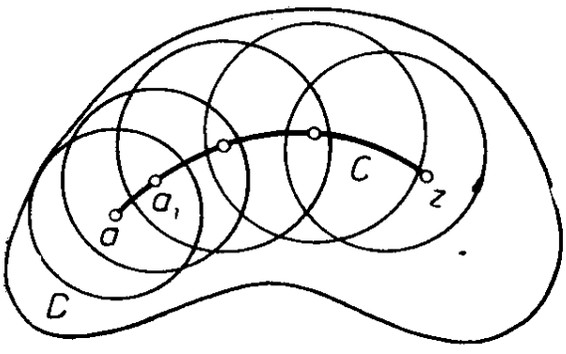
Kui läheme viimases võrduses piirile summa märgi all (seda võime teha, sest piirkonna D mis tahes sisemises kinnises ringis koondub astmerida ühtlaselt), siis saame, et $c_0=b_0$. Seega kehtib võrdus

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_k-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z_k-a)^n.$$

Jagades viimase võrduse vahega z_k-a ning seejärel korrates eelnevat mõttekäiku, saame, et $c_1=b_1$. Niiviisi järk-järgult edasi minnes saaksime mis tahes indeksi m korral näidata, et $c_m=b_m$. Seega on vaadeldavate astmeridade kordajad võrdsed, mistõttu on võrdsed ka funktsioonid f ja g.

2) Olgu nüüd D suvaline piirkond ning $E\subset D$ lõpmatu hulk, kus $f(z)=g(z)$. Punkt $a\in D$ olgu hulga E kuhjumispunkt.

Fikseerime hulgas D suvalise punkti z ning näitame, et ka selles punktis $f(z)=g(z)$. Selleks ühendame punktid a ja z piirkonda D kuuluva joonega C (vt. joon. 27). Võtame ümber punkti a mingi ringi, mis kuulub täielikult piirkonda D. See sisaldab lõpmata palju hulga E punkte, sest punkt a on hulga E kuhjumispunkt. Seega tõestuse esimese osa põhjal ühtivad funktsioonid f ja g selles ringis. Järelikult kuulub see ring tervikuna hulka E. Oli ju viimane nende punktide hulk, kus $f(z)$ ja $g(z)$ ühtivad.



Joon. 27

Valime nüüd joonel C punkti a_1, mis kuulub eelnevas vaadeldud ringi (vt. joon. 27). Ka a_1 on hulga E kuhjumispunkt ning me võime oma mõttekäiku korrata, võttes punkti a asemel punkti a_1. Järgnevalt valime punkti a_2 jne., kuni saavutame olukorra, kus selliselt valitud ring sisaldab punkti z. Niiviisi näeme lõpuks, et vaadeldavad funktsioonid $w=f(z)$ ja $w=g(z)$ on võrdsed selles fikseeritud punktis z. Punkti z suvalisuse tõttu olemegi tõestanud funktsioonide $w=f(z)$ ja $w=g(z)$ võrdsuse kogu piirkonnas D.

J ä r e l d u s. Matemaatilise analüüsi kursuses saadi järgmised reaksarendused:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<\infty,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<\infty,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<\infty.$$

Need reaksarendused on õiged ka vastavate kompleksmuutuja funktsioonide puhul, kui x asendada muutujaga z. Seda võime väita seetõttu, et astmeridadega

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

määratud funktsioonid langevad kokku vastavalt funktsioonidega $w=e^z$, $w=\sin z$ ja $w=\cos z$ lõpmatul punktihulgal (reaalteljel), millel on kuhjumispunkt (mistahes reaalarv).

Analoogiliselt saame, et kõik matemaatilise analüüsi kursusest tuntud reaksarendused on õiged ka vastavate kompleksmuutuja funktsioonide või nende üheste harude korral.

Eelnevas vaatlesime funktsioone ($w=e^z$, $w=\sin z$ ja $w=\cos z$), mille Taylori read koonduvad kogu komplekstasandil. Niisuguseid

funktsioone nimetatakse **täisfunktsioonideks**. On selge, et täisfunktsioonid on regulaarsed kogu komplekstasandil ning seega kehtib nende kohta Liouville'i teoreem. Sellest järeldub, et kompleksmuutuja funktsioonid $w=\sin z$ ja $w=\cos z$ pole tõkestatud, nagu nad on seda reaalmuutuja korral.

5.6. ANALÜÜTILISE FUNKTSIOONI NULLKOHAD

Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **nullkohaks**, kui $f(z_0)=0$. Kui aga

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0$$

ning $f^{(n)}(z_0)\neq 0$, siis nimetatakse punkti z_0 funktsiooni ***n*-järku nullkohaks**. Sellest definitsioonist järeldub, et punkt z_0 on analüütilise funktsiooni f n-järku nullkoht parajasti siis, kui

$$f(z)=(z-z_0)^n[b_0+b_1(z-z_0)+\ldots], \tag{2}$$

kus $b_0\neq 0$. Valemist (1) saame kergesti nn. ***L'Hospitali reegli***

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}, \tag{2}$$

kui punkt a on n-järku nullkoht funktsioonile g ning vähemalt n-järku nullkoht funktsioonile f. Tõepoolest, nendel eeldustel

$$f(z)=(z-a)^n[b_0+b_1(z-a)+\ldots],$$

$$g(z)=(z-a)^n[d_0+d_1(z-a)+\ldots], \quad d_0\neq 0.$$

Kui arvestame, et punkti a teatavas ümbruses koonduvad nurksulgudes seisvad read ühtlaselt, mistõttu võime minna piirile igas liidetavas eraldi, järeldubki nendest võrdustest valem (2).

Eelmises jaotises tõestatud ainsuse teoreemi põhjal saame mõningast informatsiooni analüütilise funktsiooni f nullkohtade hulga kohta, kui võrdleme seda funktsiooni teise analüütilise funktsiooniga $w=g(z)\equiv 0$.

Teoreem. *Mittekonstantsel analüütilisel funktsioonil $w=f(z)$ on igas kinnises ja tõkestatud piirkonnas ülimalt lõplik arv nullkohti.*

Tõestus. Tõepoolest, kui funktsioonil $w=f(z)$ oleks vaadeldavas kinnises ja tõkestatud piirkonnas lõpmatu arv nullkohti, siis oleks viimastel Bolzano—Weierstrassi teoreemi põhjal kuhjumispunkt vaadeldavas piirkonnas. Ainsuse teoreemi põhjal peaks siis $f(z)\equiv 0$.

Järeldus. *Mittekonstantse analüütilise funktsiooni f nullkohtade hulk on ülimalt loenduv.*

Tõestus. Olgu D funktsiooni f analüütilisuse piirkond. Vaatleme kinniseid hulki $F_n\subset D$ ($n=1, 2, \ldots$), mille rajade kaugused

piirkonna D rajast on vastavalt $1/n$. Igas hulgas F_n on vaid lõplik arv funktsiooni f nullkohti. Seega saab neid kogu piirkonnas olla ülimalt loenduv hulk*.

Äsjatõestatud omadustest järeldub, et analüütilise funktsiooni nullkohad on isoleeritud, s. t. *iga nullkoha puhul leidub ümbrus, mis ei sisalda teisi nullkohti.*

Ülesanded

1. Punkti b nimetatakse funktsiooni f A-punktiks, kui $f(b)=A$. Näidata. et igas tõkestatud kinnises piirkonnas on analüütilisel funktsioonil vaid lõplik arv A-punkte.
2. Tõestada, et analüütilise funktsiooni A-punktide hulk on ülimalt loenduv.
3. Leida järgmiste avaldistega määratud funktsioonide nullkohad ja nende järk:

   a) z^2+4,

   b) $z \sin z$,

   c) $\sin^3 z$,

   d) $\dfrac{\sin^3 z}{z}$,

   e) $\sin z^3$,

   f) $(2+e^{2z})^3$.

   V a s t u s: a) esimest järku nullkohad $2i$ ja $-2i$,

   b) teist järku nullkoht 0, esimest järku nullkohad $k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$),

   c) kolmandat järku nullkohad $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$),

   d) teist järku nullkoht 0, kolmandat järku nullkohad $k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$),

   e) kolmandat järku nullkoht 0, esimest järku nullkohad $\sqrt[3]{k\pi}$ ja $\frac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi}\,(-1\pm i\sqrt{3})$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$),

   f) kolmandat järku nullkohad $\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

5.7. TEHTED ANALÜÜTILISTE FUNKTSIOONIDEGA

Iga analüütilist funktsiooni esitab vaadeldava punkti $z=a$ ümbruses seal koonduv astmerida

$$\sum_n c_n (z-a)^n.$$

* Kui piirkonna D raja sisaldab ka lõpmatuspunkti, loeme punkti z kauguse lõpmatuspunktist võrdseks punkti $1/z$ kaugusega nullpunktist.

Edaspidi vaatleme lihtsuse mõttes juhtu, kus $a=0$. Sel juhul saame nullpunkti ümbruses analüütilised funktsioonid. Olgu meil kaks sellist funktsiooni:

$$w=f(z)=\sum_{n}^{n} c_n z^n, \tag{1}$$

$$w=g(z)=\sum b_n z^n. \tag{2}$$

Ridade (1) ja (2) koonduvusraadiused olgu vastavalt r ja R, kusjuures $r\leqslant R$.

Rea koonduvuse definitsioonist järgneb vahetult, et funktsioonide f ja g summale vastav astmerida

$$\sum_{n} (c_n+b_n)z^n=\sum_{n} d_n z^n$$

koondub ringis $|z|<r$. Analoogilise tulemuse saame ka vahe $f-g$ puhul.

Korrutist $f(z)g(z)$ esitab astmerida (ridade korrutis)

$$\sum_{n} h_n z^n, \text{ kus } h_n=\sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}. \tag{3}$$

Et read (1) ja (2) on absoluutselt koonduvad ringis $|z|<r$, siis on seda ka rida (3).

Osutub, et kui $g(0)\neq 0$, on jagatis $w=f(z)/g(z)$ nullpunktis analüütiline. Tõepoolest,

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots}{b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots}=g_0+g_1z+g_2z^2+\ldots,$$

s. t.

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots=(g_0+g_1z+\ldots)(b_0+b_1z+\ldots).$$

Ridade korrutise definitsiooni arvestades saame kordajate $g_0, g_1, \ldots$ määramiseks järgmised seosed

$$\begin{aligned}
&b_0g_0=c_0,\\
&b_0g_1+b_1g_0=c_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&b_0g_n+b_1g_{n-1}+\ldots+b_ng_0=c_n,\\
&\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{4}$$

Nendest seostest saame järk-järgult leida kõik otsitavad kordajad g_k, kui $b_0=g(0)\neq 0$

Võttes $f(z)\equiv 1$, s. t. $c_0=1$ ja $c_k=0$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, saame seoste (4) põhjal leida funktsiooni $w=1/g(z)$ reaksarenduse.

Vaatleme lõpuks rida $\sum_{n} f_n(z)$, mille liikmeteks on ringis

$|z|<r$ analüütilised funktsioonid

$$f_n(z)=\sum_k c_{nk}z^k.$$

Koondugu rida $\sum f_n(z)$ kinnises ringis $|z|\leqslant\varrho<r$ ühtlaselt. Sel juhul esitab tema summa $f(z)$ funktsiooni ringis $|z|<\varrho$. Seega

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_{nk}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k.$$

Näitame, et

$$a_k=\sum_{n=0}^{\infty}c_{nk},$$

s. t., et reas

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_{nk}z^k$$

võib vahetada summeerimisjärjekorda. Selles väites sisaldub nn. Weierstrassi teoreem topeltridade kohta. Selle õigsuses veendumiseks paneme kõigepealt tähele, et rida $\sum_k a_kz^k$ on funktsiooni f Taylori rida. Seega

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\quad(k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Et aga jaotise 5.2 teoreemi 4 põhjal

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{nk},$$

siis sellega ongi meie väide tõestatud.

Ülesanded

1. Leida $e^z+\cos z$, $e^z-\cos z$, $\frac{e^z}{1-z}$ ja $\frac{e^z}{\operatorname{ch} z}$ reaksarendused punktis $a=0$ ja määrata saadud ridade koonduvuspiirkonnad.

   V a s t u s:

$$e^z+\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!},\quad|z|<\infty,$$

$$e^z-\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!},\quad|z|<\infty,$$

$$\frac{e^z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)z^n,\ |z|<1,$$

$$\frac{e^z}{\operatorname{ch} z}=1+z+\sum_{n=1}^{\infty}g_{2n+1}z^{2n+1},$$

$$g_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)!}g_{2(n-k)+1},\ |z|<\frac{\pi}{2}.$$

2. Leida topeltridade teoreemi põhjal järgmiste avaldiste reaksarendused (esimesed liikmed kuni astmeni z^4) punktis $a=0$:

a) $e^{z\sin z}$,

b) $\sin\frac{1}{1-z}$,

c) $e^{\frac{z}{1-z}}$

d) $\ln(1+e^z)$,

e) $(1+z)^z=e^{z\ln(1+z)}$.

Vastus: a) $1+z^2+\frac{z^4}{3}+\ldots$,

b) $\sin 1+z\cos 1+\left(\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1\right)z^2+$

$+\left(\frac{5}{6}\cos 1-\sin 1\right)z^3+\ldots$,

c) $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}\right]z^n$,

d) $\ln 2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{192}z^4+\ldots$,

e) $1+z^2-\frac{1}{2}z^3+\frac{5}{6}z^4+\ldots$.

5.8. ANALÜÜTILINE JÄTKAMINE

Me defineerisime analüütilise funktsiooni kui astmerea summana esitatava funktsiooni. Et aga astmerida koondub üldjuhul vaid teatavas lõpliku raadiusega ringis, siis saame astmerea abil defineerida analüütilist funktsiooni vaid lokaalses mõttes. Näiteks astmerida $\sum z^n$ koondub vaid ringis $|z|<1$ ning järelikult defi-

neerib ta analüütilise funktsiooni vaid seal. Teiselt poolt: selle astmerea summa $(1-z)^{-1}$ määrab regulaarse (siis ka analüütilise) funktsiooni kogu komplekstasandil, välja arvatud punkt $z=1$. Seega tekib probleem, kuidas defineerida analüütiline funktsioon globaalses mõttes, lähtudes definitsioonist lokaalses mõttes astmerea abil. Astmerea summat (nagu vaadeldud näites) me sel eesmärgil kasutada ei saa, sest üldjuhul pole meil astmerea summa jaoks teist avaldist (esitist) peale astmerea enda. Püstitatud probleemile annab lahenduse analüütilise jätkamise mõiste.

Olgu funktsioonid $w=f_1(z)$ *ja* $w=f_2(z)$ *analüütilised vastavalt piirkondades* D_1 *ja* D_2 *ning* $D_1 \cap D_2=\emptyset$. *Olgu* $f_1(z)=f_2(z)$ *iga* $z \in D_1 \cap D_2$ *puhul. Sel juhul öeldakse, et* f_2 *on funktsiooni* f_1 *vahetuks analüütiliseks jätkuks piirkonnast* D_1 *piirkonda* D_2. Ainsuse teoreemi põhjal on selline analüütiline jätk üheselt määratud.

Näide: Vaatleme analüütilisi funktsioone

$$w=f_1(z)=\sum_n z^n, \quad |z|<1 \quad (=D_1),$$

ja

$$w=f_2(z)=\frac{1}{1-\mathrm{i}}\sum_n\left(\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n, \quad |z-\mathrm{i}|<\sqrt{2} \quad (=D_2).$$

Et iga $z \in D_1$ puhul $f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$ ja iga $z \in D_2$ puhul

$$f_2(z)=\frac{1}{1-\mathrm{i}}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}}=\frac{1}{1-z}$$

ning $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, siis on f_2 funktsiooni f_1 analüütiliseks jätkuks ja vastupidi.

Ülesanded

1. Arvestades vastavaid seoseid reaalse argumendi korral, näidata, et kompleksse z korral kehtivad järgmised seosed:

   a) $\operatorname{sh} z+\operatorname{ch} z=\mathrm{e}^z$,

   b) $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$,

   c) $\sin 2z=2\sin z\cos z$,

   d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$.

2. Näidata, et funktsioon $w=f(z)=(1+z^2)^{-1}$, $z \neq \mathrm{i}$, on funktsiooni

   $$w=g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

   analüütiliseks jätkuks.

3. Leida funktsiooni $w=\ln z$ analüütiline jätk ülemisest pooltasandist alumisse üle reaaltelje negatiivse osa. Veenduda, et saadud jätk erineb alumises pooltasandis funktsioonist $w=\ln z$.

   V a s t u s: $w=\ln z+2\pi i$.

4. Arvestades, et iga $x>0$ puhul kehtib seos $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, tõestada sama seose kehtivus kogu parempoolses pooltasandis $\operatorname{Re} z>0$.

5.9. ANALÜÜTILINE JÄTKAMINE ASTMERIDADE ABIL

Olgu meil analüütiline funktsioon

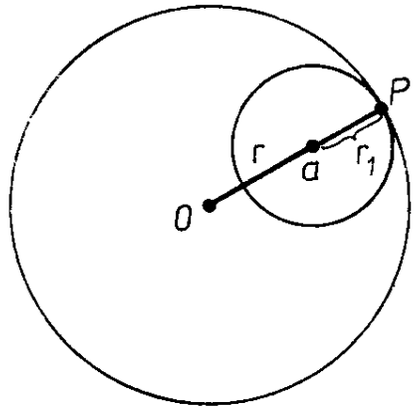
$$w=f(z)=\sum_n c_n z^n, \quad |z|<r. \tag{1}$$

Valime ringis $|z|<r$ mingi punkti a ning arendame funktsiooni f selles punktis astmereaks. Sel juhul saame

$$w=f_1(z)=\sum_n b_n (z-a)^n, \tag{2}$$

kus

$$b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{k}{n} c_k a^{k-n}.$$



Joon. 28

Märgime rea (2) koonduvusraadiuse sümboliga r_1. On selge, et $r_1\geqslant r-|a|$. Kui $r_1=r-|a|$ (vt. joon. 28), pole funktsioon $w=f(z)$ regulaarne punktis P ning uus funktsioon $w=f_1(z)$ ei ole määratud üheski punktis väljaspool esialgset ringi $|z|<r$.

Kui aga $r_1>r-|a|$, siis $w=f_1(z)$ defineerib funktsiooni f analüütilise jätku väljaspoole ringi $|z|<r$. On aga selge, et sellisel viisil me ei saa funktsiooni analüütiliselt jätkata korraga eriti kaugele, sest $r_1\leqslant r+|a|<2r$. Viimane seos tuleneb sellest, et iga astmerea koonduvusringi rajajoonel asub vähemalt üks punkt, kus vastav funktsioon pole regulaarne.

Olles nüüd saanud analüütilise jätku $w=f_1(z)$, võime seda protsessi edasi teostada, võttes ringis $|z-a|<r_1$ uue punkti b. Sellist protsessi võiksime jätkata senikaua, kui see on võimalik.

Oletame, et me oleme oma funktsiooni (1) jätkanud kõikjale, nii palju kui üldse võimalik. Sel viisil oleme laiendanud funktsiooni f definitsiooni ringist $|z|<r$ mingisse piirkonda D ja saanud uue funktsiooni F, mis on määratud piirkonnas D. Viimane

koosneb jätkamisel saadud ringidest. Teisiti öeldes: piirkond D on teatavate ringide (lahtiste hulkade) ühend (seega ka lahtine). Kui nüüd osutub, et üheski punktis $z_0 \in D$ ei ole võimalik funktsiooni F arendada ritta, mis koonduks ka väljaspool piirkonda D, siis öeldakse, et D on funktsiooni f **loomulik olemasolu piirkond.**

Näide 1. Funktsiooni

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

loomulikuks olemasolu piirkonnaks on ühikring $|z|<1$. Selle näitamiseks veendume, et ühikringjoone $|z|=1$ üheski punktis pole funktsioon f regulaarne, mistõttu teda pole võimalik jätkata üle ühikringjoone. Toodud väite tõestuseks piisab näitamisest, et $|f(z)| \to \infty$, kui z läheneb ühikringjoonele piki mistahes raadiust, millele vastav polaarnurk $\varphi = \frac{p}{q} 2\pi$ (p ja q on täisarvud). Kui z kuulub nimetatud raadiusele, siis

$$z = re^{2\pi i p/q}.$$

Sel juhul

$$f(z) = \sum_{n} r^{n!} e^{2\pi i n! p/q}.$$

Et aga $n \geqslant q$ puhul $\frac{p}{q} n!$ on täisarv, siis

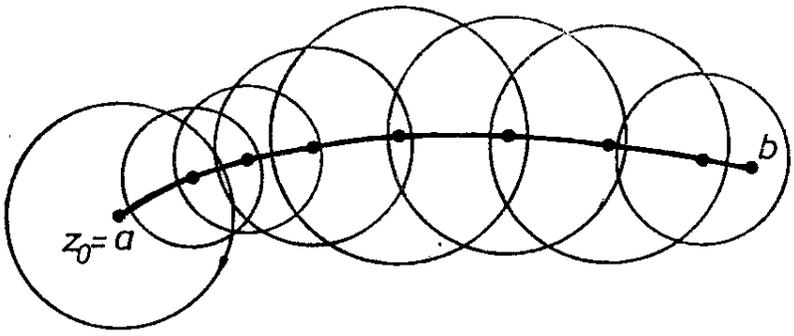
$$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} r^{n!} e^{2\pi i n! p/q} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

millest

$$|f(z)| \geqslant \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} - \left| \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} \right|.$$

Saadud võrratusest näemegi, et $|f(z)| \to \infty$, kui $r \to 1$. Et punktid $z = e^{2\pi i p/q}$ katavad ühikringjoone tihedalt, siis selgubki, et jätkamine väljapoole ühikringi pole võimalik, sest vastasel korral peaks leiduma ühikringjoonel terve kaar, kus f on regulaarne. Me nägime, et nende punktide hulk, kus funktsiooni f piirväärtus on lõpmatus, on tihe ringjoonel $|z|=1$. Sellest aga järeldub, et f pole regulaarne üheski ühikringjoone punktis.

Vaadeldud näites nägime, et funktsiooni f defineeriv astmerida ei koondunud üheski ühikringjoone punktis ning vastav funktsioon ei olnud jätkatav väljapoole ühikringi. Osutub aga, et astmerida võib küll hajuda igas ühikringjoone punktis, kuid ometi on talle vastav funktsioon jätkatav väljapoole ühikringi.



Joon. 29

Näide 2. Olgu $w=f(z)=\sum_n z^n$. Kui $z=e^{i\varphi}$, siis $|z^n|=1$. Seega ei koondu rida $\sum_n z^n$ üheski punktis $z=e^{i\varphi}$, sest rea üldliikme piirväärtus pole null. Ometi aga on see funktsioon jätkatav kogu komplekstasandile, välja arvatud punkt $z=1$.

Sageli teostatakse analüütilist jätkamist piki mingit joont C, laiendades sel viisil analüütilise funktsiooni definitsiooni punktist a punktini b (vt. joon. 29). Niisuguse protsessiga kohtusime juba siis, kui tõestasime analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreemi.

Ülesanded

1. Funktsioon $w=f(z)=\sum_n \frac{z^n}{n}$ olgu arendatud astmereaks punktis $z=-\frac{1}{2}$. Millisesse piirkonda saame sel juhul funktsiooni f analüütilise jätku?

   Vastus: $\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$.

2. Tõestada, et funktsioonid

   $w=f(z)=1+az+a^2z^2+\ldots,$

   ja

   $$w=g(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-\ldots$$

   on teineteise suhtes analüütilisteks jätkudeks.

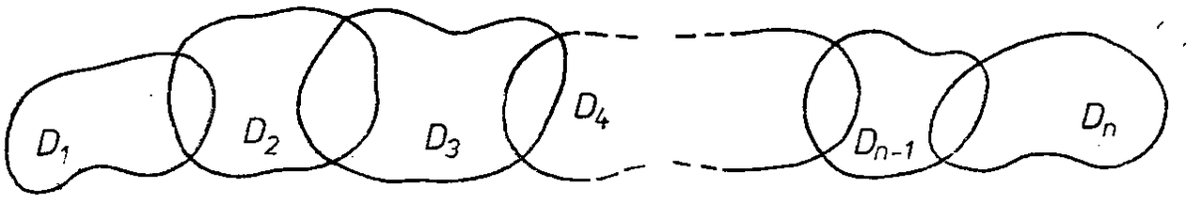
3. Tõestada, et funktsiooni

   $w=f(z)=\sum_n z^{2^n}$

   loomulikuks olemasolu piirkonnaks on ühikring.

5.10. GLOBAALSELT DEFINEERITUD ANALÜÜTILINE FUNKTSIOON

Vaatleme mingit piirkondade ahelat $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (vt. joon. 30), kus selle ahela igal kahel järjestikusel piirkonnal D_k ja D_{k+1} ühisosa $D_k \cap D_{k+1}$ ei ole tühi hulk. Igas piirkonnas D_k olgu antud analüütiline funktsioon $w=f_k(z)$, kusjuures $f_k(z)=f_{k+1}(z)$, kui $z \in D_k \cap D_{k+1}$. Sel juhul öeldakse, et f_n on funktsiooni f_1 **analüütiliseks jätkuks piki piirkondade ahelat.** Defineerides piirkonnas $D=\bigcup D_k$ analüütilise funktsiooni $w=F(z)$ võrdustega $F(z)=f_k(z)$, kui $z \in D_k$, saame, et funktsioon F on analüütiliseks jätkuks igale funktsioonile $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Igaüht neist analüütilistest funktsioonidest $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nimetatakse **analüütilise funktsiooni F elemendiks.**



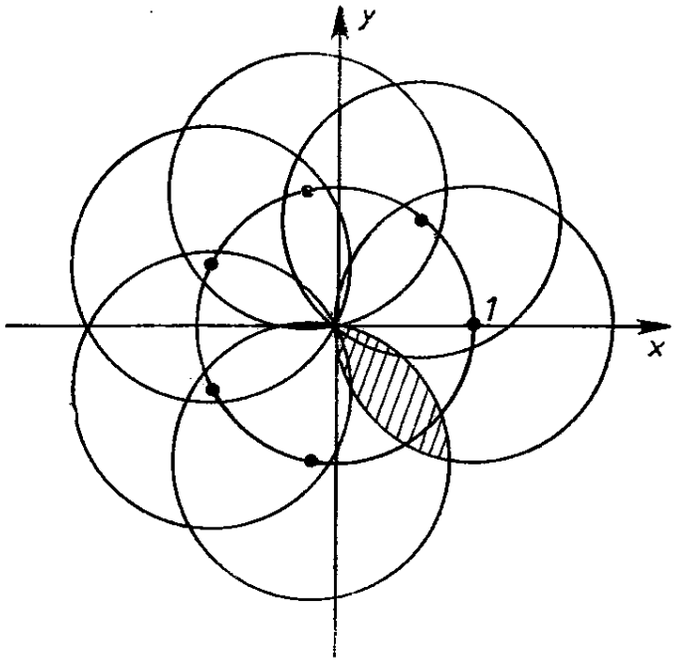
Joon. 30

Funktsioon F, mille me niisugusel analüütilisel jätkamisel saame, osutub üldjuhul mitmeseks, sest selle ahela eri piirkondadel (mitte üksnes järjestikustel) võib olla ühiseid punkte, kus vastavad funktsioonid ei tarvitse ühtida. Lepime kokku, et kleebime selle ahela eri piirkonnad kokku nendes osades, kus vastavad funktsioonid on kõik võrdsed ning jätame kokku kleepimata seal, kus vähemalt kaks on omavahel erinevad ($f_j(z) \neq f_m(z)$). Sel viisil saame mingi mitmelehelise Riemanni pinna.

N ä i d e. Lähtume funktsiooni $w=\sqrt{z}$ astmereast punktis $z=1$ kui analüütilise funktsiooni elemendist ning jätkame teda piki ringjoont $|z|=1$. Iga uue elemendi puhul on vastava rea koonduvusraadius võrdne ühega (kaugus punktist 0 kui punktist, kus $w=\sqrt{z}$ pole regulaarne). On selge, et mingi lõpliku arvu sammude järel jõuame funktsioonielemendini, millele vastaval koonduvusringil on ühiseid punkte lähteks olnud funktsioonielemendi omaga (vt. joon. 31). Nendes ühistes punktides pole aga vaadeldavate elementide väärtused võrdsed (ruutjuure eri harude väärtused).

Funktsiooni F, mille saame, kui jätkame analüütilist funktsiooni $w=f(z)$, $z \in D_1$ piki kõikvõimalikke ahelaid, nimetatakse **täielikuks analüütiliseks funktsiooniks** ning viimase määramispiirkonda (mingit Riemanni pinda) selle täieliku analüütilise funktsiooni **loomulikuks olemasolu piirkonnaks.** Vaadeldes määramispiirkonnana selle mitmese Riemanni pinna üksikuid lehti, saame eraldada vaadeldava mitmese analüütilise funktsiooni ühesed harud.

Punkte, mis kuuluvad analüütilise funktsiooni loomulikku ole-



Joon. 31

masolu piirkonda või selle rajale, nimetatakse selle funktsiooni **iseärasteks punktideks**, kui selles punktis on rikutud kasvõi ühe selle funktsiooni haru regulaarsus

Näide. Funktsioonile $w=(\sqrt[4]{z}+1)^{-1}$ on punkt $z=1$ iseäraseks punktiks, sest selles punktis pole määratud üks vaadeldava funktsiooni neljast harust (nimelt see, mille puhul $\sqrt[4]{1}=-1$).

5.11. SÜMMEETRIAPRINTSIIP

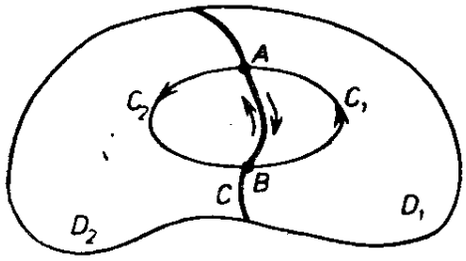
Eelnevates jaotistes vaatlesime analüütilist jätkamist astmeridade abil. Selle praktiline teostus on aga sageli üsna tülikas. Seetõttu pakub huvi ka teine analüütilise jätkamise moodus, mis rajaneb nn. sümmeetriaprintsiibile. Enne aga tõestame teoreemi, mida tuntakse **pidevusprintsiibina.**

Teoreem 1. *Olgu funktsioonid f_1 ja f_2 analüütilised vastavalt piirkondades D_1 ja D_2, millel on ühine rajajoone osa C. Kui need funktsioonid on pidevad kuni rajani C ning $f_1(z)=f_2(z)$ iga $z\in C$ puhul, siis on need funktsioonid teineteisele analüütilisteks jätkudeks.*

Tõestus. Defineerime funktsiooni

$$w=f(z)=\begin{cases} f_1(z), \text{ kui } z\in D_1, \\ f_2(z), \text{ kui } z\in D_2, \\ f_1(z)=f_2(z), \text{ kui } z\in C. \end{cases}$$

Teoreemi 1 tõestuseks kasutame Morera teoreemi. Selleks peame näitama, et integraal funktsioonist f üle mistahes kinnise joone, mis kuulub piirkonda



Joon. 32

$$D = D_1 \cup D_2 \cup C$$

(vt. joon. 32), võrdub nulliga. Kui see kinnine joon kuulub täielikult ühte ossa (kas piirkonda D_1 või D_2), siis on vastav integraal tõepoolest null, sest funktsioonid f_1 ja f_2 on analüütilised ja kehtib Cauchy teoreem.

Vaatleme juhtu, kus mingi kinnine joon kuulub osaliselt piirkonda D_1, osaliselt piirkonda D_2. Joone vastavad osad märgime sümbolitega C_1 ja C_2. Sel juhul

$$\int_{C^1+C^2} f(z)\,dz = \int_{C^1} f(z)\,dz + \int_A^B f(z)\,dz + \int_B^A f(z)\,dz + \int_{C^2} f(z)\,dz =$$

$$= \{\int_{C_1} f_1(z)\,dz + \int_A^B f_1(z)\,dz\} + \{\int_B^A f_2(z)\,dz + \int_{C_2} f_2(z)\,dz\} = 0.$$

sest Cauchy teoreemi põhjal võrduvad mõlemad loogelistes sulgudes seisvad avaldised nulliga.

Äsjatõestatud teoreemi põhjal tõestame nüüd järgmise teoreemi, mida nimetatakse ***Riemanni — Schwarzi sümmeetriaprintsiibiks.***

Teoreem 2. *Olgu $w = f(z)$ regulaarne piirkonnas D, mille rajajoon sisaldab reaaltelje lõigu L. Olgu f pidev kuni lõiguni L. Kui funktsioonil f on lõigu L punktides reaalarvulised väärtused, siis on võimalik funktsiooni f jätkata analüütiliselt piirkonda D_1, mis on sümmeetriline piirkonnaga D reaaltelje suhtes. See analüütiline jätk on esitatav kujul*

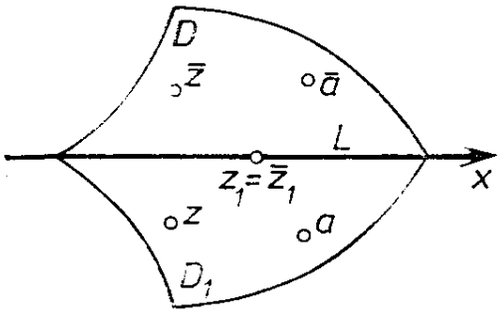
$$w = F(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

(Kui piirkondadel D ja D_1 on ühiseid punkte, siis ei tarvitse funktsioonide f ja F väärtused nendes punktides ühtida.)

T õ e s t u s. Vastavalt pidevusprintsiibile peame näitama, et F on regulaarne piirkonnas D_1, pidev kuni lõiguni L ning et $F(z) = f(z)$ *iga* $z \in L$ *puhul.*

Regulaarsuse näitamiseks piisab selle funktsiooni diferentseeruvuse näitamisest. Tuletis aga eksisteerib igas punktis $a \in D_1$, sest eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{z\to a} \frac{F(z)-F(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{f(\bar{z})}-\overline{f(\bar{a})}}{z-a} = \lim_{\bar{z}\to\bar{a}} \left(\overline{\frac{f(\bar{z})-f(\bar{a})}{\bar{z}-\bar{a}}}\right) = \overline{f'(\bar{a})}.$$



Joon. 33

Et $a \in D$ (vt. joon. 33), siis viimane suurus eksisteerib ning seega eksisteerib ka $F'(a)$.

Pidevus kuni lõiguni L järeldub seosest

$$|F(z_1)-F(z)|=|f(\bar{z}_1)-f(\bar{z})|.$$

Kui $z \in L$, siis $\bar{z}=z$ ning $\overline{f(z)}=f(z)$. Seega iga $z \in L$ puhul

$$F(z)=\overline{f(\bar{z})}=\overline{f(z)}=f(z).$$

Teoreem on sellega tõestatud.

Märkus 1. Arvestades murdlineaarse funktsiooni omadusi, võiksime tõestada, et teoreem 2 on üldistatav juhule, kus lõigu L asemel on suvaline ringjoone kaar S ning funktsiooni väärtused kaarel S kuuluvad mingile teisele ringjoone kaarele.

Märkus 2. Funktsiooni F definitsioonist järeldub, et funktsioonid f ja F kujutavad vastavalt piirkonnad D ja D_1 piirkondadeks, mis on sümmeetrilised reaaltelje suhtes.

6. ANALÜÜTILISE FUNKTSIOONI ISEÄRASED PUNKTID

6.1. ISOLEERITUD ISEÄRASED PUNKTID

Analüütilise funktsiooni f **iseäraseks** ehk **singulaarseks punktiks** nimetatakse iga punkti z_0, kus f pole ühel või teisel põhjusel regulaarne. Kui leidub iseärase punkti z_0 niisugune ümbrus, kus pole teisi iseäraseid punkte peale punkti z_0, siis nimetatakse vaadeldavat punkti **isoleeritud iseäraseks punktiks.** Kui selles ümbruses $0<|z-z_0|<R$ on vaadeldav funktsioon f ühene, siis öeldakse, et punkt z_0 on *ühese iseloomuga iseärane punkt.* Niisuguse punkti näiteks on nullpunkt funktsioonile $w=f_1(z)=\frac{1}{z}$. Seevastu aga funktsiooni $w=\sqrt{z}$ puhul on nullpunkt hoopiski teist laadi iseäraseks punktiks, ta on hargnemispunkt. Viimasel juhul öeldakse, et iseärasel punktil on mitmene iseloom. Selliseid iseärasusi me käesolevas raamatus ei vaatle.

Vaatleme järgnevalt niisuguseid iseäraseid punkte, mille puhul

leidub piirkond $0<|z-z_0|<R$, kus $w=f(z)$ on regulaarne. Niisuguste isoleeritud singulaarsete punktide juures eristame kolme tüüpi iseärasusi, olenevalt sellest, kuidas vaadeldava punkti ümbruses käitub funktsioon f.

Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks**, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **pooluseks**, kui

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **oluliselt iseäraseks punktiks**, kui funktsioonil f pole selles punktis ei lõplikku ega lõpmatut piirväärtust.

Näide 1. Vaatleme funktsiooni $w=f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Selle funktsiooni ainsaks iseäraseks punktiks on nullpunkt. Et aga $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=1$, siis on vaadeldav punkt sellele funktsioonile kõrvaldatav iseärane punkt.

Näide 2. Murdlineaarse funktsiooni $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ iseäraseks punktiks — pooluseks on $z_0=-\dfrac{d}{c}$.

Näide 3. Nullpunkt on iseäraseks punktiks ka funktsioonile $w=e^{1/z}$. Kui z läheneb nullile nii, et ta on positiivne, siis $\dfrac{1}{z}\to+\infty$ ning $e^{1/z}\to+\infty$. Kui aga z läheneb nullile reaaltelje negatiivselt poolelt, siis $\dfrac{1}{z}\to-\infty$ ning $e^{1/z}\to 0$. Vaadeldav punkt on seega oluliselt iseärane punkt.

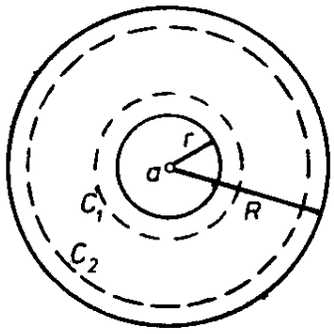
Niisuguste isoleeritud punktide täielikumaks uurimiseks on meil vaja analüütilist aparatuuri, mis võimaldaks esitada regulaarset funktsiooni piirkonnas $0<|z-z_0|<R$. Sellise aparatuuri annab järgmises jaotises vaadeldav Laurent'i rida.

Ülesanded

1. Tõestada, et kui $z=a$ on funktsioonide $w=f(z)$ ja $w=g(z)$ isoleeritud iseärane punkt, siis on ta seda ka funktsioonidele $w=f(z)+g(z)$ ja $w=f(z)g(z)$.
2. Olgu funktsioonil $w=f(z)$ kõrvaldatav katkevus punktis a. Näidata, et sel juhul on punkt a funktsioonile $w=f(z)+g(z)$ sama liiki isoleeritud iseäraseks punktiks, nagu ta on funktsioonile $w=g(z)$.

Olgu funktsioon $w=f(z)$ regulaarne rõngas $r<|z-a|<R$ (erijuhul $r=0$ ja $R=\infty$). Võtame selles rõngas kaks ringjoont C_1 ja C_2 (vt. joon. 34). Olgu need ringjooned valitud nii, et vaadeldav punkt asub nende vahel. Meie jaoks on oluline, et joontel C_1 ja C_2 on funktsioon pidev ning me võime rakendada joontega C_1 ja C_2 piiratud piirkonna jaoks Cauchy valemit. Viimase põhjal

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \tag{1}$$



Joon. 34

Kui $\zeta\in C_1$, siis $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$, ning me saame, et

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a-(z-a)}=\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}}.$$

Saadud rida osutub ühtlaselt koonduvaks joonel C_1 ning ta on seda ka pärast korrutamist teguriga $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$, mistõttu

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(\zeta)\,(\zeta-a)^k d\zeta\right]\frac{1}{(z-a)^{k+1}}. \tag{2}$$

Kui aga $\zeta\in C_2$, siis $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$ ning

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}.$$

Analoogiliselt eelnevaga saame siis, et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}\right](z-a)^k. \tag{3}$$

Tähistades

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}\quad(k=0,\ 1,\ \ldots),\tag{4}$$

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}f(\zeta)\,(\zeta-a)^{k-1}d\zeta\quad(k=1,\ 2,\ \ldots),\tag{5}$$

saame seoste (2) ja (3) põhjal, et

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{k+1}}{(z-a)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-a)^k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a),^k$$

kui $c_k=a_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$ ning $c_k=b_{-k}$ $(k=-1,\ -2,\ \ldots)$. Et Cauchy teoreemi põhjal (mitmelisidusate piirkondade puhul) võime valemites (4) ja (5) ringjooned C_1 ja C_2 asendada nende vahel asuva ringjoonega C, mille keskpunkt on punktis a, siis suuruste c_k definitsiooni kohaselt

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).\tag{6}$$

Seega kehtib vaadeldava rõnga $r<|z-a|<R$ igas punktis z seos

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k,\tag{7}$$

kus kordajad c_k avalduvad valemiga (6). Rida (7) nimetatakse ***Laurent'i reaks***, kusjuures mittenegatiivsete astendajatega liikmete summat

$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

nimetatakse Laurent'i rea **korrapäraseks osaks**. Negatiivsete astendajatega liikmete summat

$$f_2(z)=\sum_{k=-1}^{-\infty}c_k(z-a)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

nimetatakse Laurent'i rea **peaosaks**. Erijuhul, kui peaosa võrdub nulliga, saame Laurent'i reast Taylori rea.

Et korrapärane osa on astmerida, siis tema koonduvuspiirkonnaks on ring $|z-a|<R$, mis ulatub punktist a kuni funktsiooni $w=f_1(z)$ (siis ka funktsiooni $w=f(z)$, sest $w=f_1(z)+f_2(z)$) lähima iseärase punktini. Mis puutub peaosasse, siis see on astmerida suuruse $t=(z-a)^{-1}$ suhtes ning koondub mingis ringis $|t|<1/r$, s. t. piirkonnas $|z-a|>r$. Raadiust r võib vähendada senikaua, kuni piirkond $|z-a|>r$ ei sisalda ühtegi f_2 iseärast punkti. Viimane on ka funktsiooni f iseärane punkt. Seega on funktsiooni f Laurent'i rea (7) koonduvuspiirkonnaks maksimaalne rõngas $r<|z-a|<R$, kus f on regulaarne.

Näitame nüüd, et Laurent'i reaksarendus on ühene. Teisiti öeldes, kui rida

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{7'}$$

koondub mingis rõngas $r<|z-a|<R$, siis on ta seal oma summa Laurent'i rida.

Tõepoolest, avaldises

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

koonduvad viimased read vastavalt piirkondades $|z-a|<R$ ja $|z-a|>r$. Seega on real (7') mõte vaid juhul, kui $r<R$. Sel juhul määrab rida (7') oma summana teatava funktsiooni f. Abeli 1. teoreemi kohaselt koondub rida $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ ühtlaselt igas kinnises ringis $|z-a|\leqslant R_1<R$. Sama teoreemi põhjal koondub teine rida $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$ ühtlaselt igas kinnises piirkonnas $|(z-a)^{-1}|\leqslant 1/r_1<1/r$, s. t. piirkonnas $|z-a|\geqslant r_1>r$. Seega koondub rida (7') ühtlaselt igas kinnises «rõngas» $r<r_1\leqslant|z-a|\leqslant R_1<R$.

Võtame nüüd mingi ringjoone $|z-a|=\varrho$ $(r_1<\varrho<R_1)$. Et rida (7') koondub ühtlaselt sellel ringjoonel, siis võib avaldist

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\zeta-a)^{k-n-1}$$

($f(z)$ tähistab rea (7') summat) liikmeti integreerida üle ringjoone $|\zeta-a|=\varrho$ (lühiduse mõttes märgime viimase sümboliga C). Vaadeldava avaldise parema poole liikmete integreerimisel saame c_n, s. t.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = c_n.$$

Tõepoolest, et

$$\int_c (\zeta-a)^m d\zeta = \begin{cases} 0, \text{ kui } m \neq -1, \\ 2\pi i, \text{ kui } m=-1, \end{cases}$$

siis viimase rea liikmeti integreerimisel saame nullist erineva tulemuse $-2\pi i$ vaid sel juhul, kui $k-n-1=-1$, s. t. $k=n$.

Saadud tulemustest selgub, et rea (7′) kordajad on selle rea summa suhtes Laurent'i rea kordajad, See aga ütlebki, et funktsiooni võib Laurent'i reaks arendada vaid ühesel viisil.

Sellel tõsiasjal on suur praktiline tähtsus. Nüüd me ei tarvitse kasutada valemeid (6), kui tahame funktsiooni arendada Laurent'i reaks (valemis (6) esineva integraali arvutamine on enamasti väga tülikas), sest sageli õnnestub leida rida (7′) hoopis lihtsamate vahenditega. Kui saame rea, mis teatavas «rõngas» koondub vaadeldavaks funktsiooniks, siis võime väita, et saadu ongi selle funktsiooni Laurent'i rida. Illustreerime ülalöeldut näitega.

N ä i d e. Vaatleme funktsiooni

$$w=f(z)=\frac{3}{(z-1)(z+2)}$$

arendamist Laurent'i reaks z astmete järgi (sel juhul $a=0$). Et funktsioonil f on kaks iseärast punkti $z_1=1$ ja $z_2=-2$, siis on võimalik valida kolm erinevat piirkonda («rõngast»): $|z|<1$, $1<|z|<2$ ja $|z|>2$. Need on kolm «rõngast», milleks jagatakse tasand ringjoontega, mis läbivad funktsiooni f iseäraseid punkte ning mille keskpunkt asub nullpunktis.

Laurent'i rea saamiseks esitame $f(z)$ kui ratsionaalse murru osamurdude summana:

$$f(z)=\frac{3}{(z-1)(z+2)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}.$$

Iga vaadeldava «rõnga» puhul teisendame need osamurrud selliselt, et meil oleks tegemist geomeetrilise rea summaga. Niisuguse meetodiga saame iga ratsionaalset funktsiooni arendada Laurent'i reaks ükskõik millises «rõngas».

1) Vaatleme piirkonda $|z|<1$. Sel juhul

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{k=0}^{\infty} z^k \tag{8}$$

ning

$$-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^k. \tag{9}$$

Seega saime, et vaadeldavas piirkonnas

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1\right]z^k.$$

Saadud rida osutub astmereaks. See on ka loomulik, sest piirkonnas $|z|<1$ on meie funktsioon regulaarne ning seega analüütiline.

2) Olgu nüüd $1<|z|<2$. Ka sel juhul on reaksarendus (9) õige, sest $\left|\frac{z}{2}\right|<1$. Ei kehti aga (8), sest antud juhul $|z|>1$. Siin saame, et

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}. \qquad (10)$$

Seega, piirkonnas $1<|z|<2$ kehtib valem

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}.$$

Saadud rida on tüüpiline Laurent'i rida.

3) Olgu lõpuks $|z|>2$. Siis $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, mistõttu kehtib seos (10). Ei kehti aga (9), sest $\left|\frac{z}{2}\right|>1$. Antud juhul

$$-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-1}}{z^k}.$$

Seega saame, et $|z|>2$ puhul

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^{k-1}}{z^k}$$

Saime, et sel korral koosneb Laurent'i rida vaid oma peaosast.

Kui valemi (6) puhul tähistame ringjoone C raadiuse tähega ϱ, siis saame, et

$$|c_k|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}\right|\leqslant\frac{M\varrho 2\pi}{2\pi\varrho^{k+1}}=\frac{M}{\varrho^k},$$

kus $M=\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)|$. Äsjasaadud võrratusest

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{\varrho^k} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

nimetatakse Laurent'i rea kordajate ***Cauchy võrratuseks.***

Ülesanded

1. Arendada järgmiste avaldistega määratud funktsioonid Laurent'i reaks antud piirkondades:

   a) $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$, $0<|z|<1$ ja $|z|>1$,

   b) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $0<|z-2|<r$ ja $1<|z|<2$,

   c) $z^2 e^{1/z}$, $0<|z|<\infty$,

   d) $e^{z+1/z}$, $0<|z|<\infty$,

   e) $\sin z \sin \dfrac{1}{z}$, $0<|z|<\infty$.

   Vastus: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n-2}$ ja $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{-(n+3)}$,

   b) $\dfrac{1}{z-2}+\mathrm{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2+\mathrm{i})^{n+1}-(2-\mathrm{i})^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$,

   kusjuures $r=\sqrt{5}$, ja $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$,

   c) $\dfrac{1}{2}+z+z^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)!z^n}$,

   d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$, $c_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!(n+k)!}$,

   e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^{-2n}$, $c_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!}$

6.3. KÕRVALDATAV ISEÄRANE PUNKT

Olgu funktsioonil f punktis z_0 kõrvaldatav iseärane punkt, s. t. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. Sellest järeldub, et funktsioon f on tõkestatud ($|f(z)|\leqslant M$) teatavas piirkonnas $0<|z-z_0|<r$, mis ei sisalda teisi iseäraseid punkte. Arendame funktsiooni f Laurent'i reaks selles piirkonnas (punkti z_0 ümbruses):

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

Cauchy võrratuse põhjal saame, et

$$|c_k|\leqslant\frac{M}{\varrho^k}=M\varrho^{-k},$$

kus M on funktsiooni f tõke vaadeldavas piirkonnas. Et ϱ võib olla kui tahes väike, siis $k<0$ korral saame, et $c_k=0$. Seega puudub vaadeldavas Laurent'i reas peaosa.

Osutub, et see tulemus kehtib ka ümberpöördult. Olgu $0<|z-z_0|<r$ puhul

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots. \tag{1}$$

Minnes selles võrduses piirile ($z\to z_0$), saame, et

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0,$$

s. t. punktis z_0 on kõrvaldatav iseärane punkt.

Me oleme seega tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem. *Funktsiooni f isoleeritud iseärane punkt z_0 on kõrvaldatav parajasti siis, kui vaadeldava punkti ümbruses funktsiooni f Laurent'i rida ei sisalda peaosa.*

Märkus 1. Kui $f(z_0)=c_0$, oleks funktsioon punktis z_0 regulaarne. Et aga selles punktis on eelduse kohaselt kõrvaldatav katkevus, siis kas $f(z_0)$ pole määratud või $f(z_0)\neq c_0$. Me võime selle iseärasuse «kõrvaldada», kui defineerime $f(z_0)=c_0$. Siit järeldubki nimetus «kõrvaldatav iseärane punkt».

Märkus 2. Oma teoreemi tõestamisel nägime, et kui iseärase punkti z_0 puhul on funktsioon f mingis piirkonnas $0<|z-z_0|<r$ tõkestatud, siis on z_0 funktsiooni kõrvaldatav iseärane punkt. Vastupidine järeldub kõrvaldatava iseärase punkti definitsioonist. Seega: *iseärane punkt z_0 on funktsiooni f kõrvaldatavaks iseärasuseks parajasti siis, kui $f(z)$ on tõkestatud mingis piirkonnas $0<|z-z_0|<r$.*

Näide. Olgu $w=f(z)=\dfrac{1}{z}(e^z-1)$. Siin $z=0$ on iseärane

punkt. Et

$$e^z - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

siis

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots.$$

Seega on antud funktsioonil kõrvaldatav iseärasus punktis $z=0$.

6.4. POOLUSED JA NULLKOHAD

Kui punkt z_0 on funktsiooni f poolus, siis vastavalt pooluse definitsioonile $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Siit aga järeldub, et iga $M>0$ puhul leidub piirkond $0<|z-z_0|<r$, milles $|f(z)|>M$. Selles piirkonnas on siis funktsioon $w=g(z)=1/f(z)$ regulaarne, kusjuures $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=0$. Defineerides $g(z_0)=0$, saame, et $w=g(z)$ on regulaarne ringis $|z-z_0|<r$.

Vastupidi, kui z_0 on regulaarse funktsiooni $w=g(z)$ nullkoht, siis leidub analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreemi kohaselt piirkond $0<|z-z_0|<r$. milles pole teisi $w=g(z)$ nullkohti. Selles piirkonnas on siis funktsioon $w=f(z)=1/g(z)$ regulaarne, kusjuures punktis z_0 on tal poolus.

Sellega on meil tõestatud järgmine teoreem.

Teoreem 1. *Funktsioonil $w=f(z)$, mis on regulaarne piirkonnas $0<|z-z_0|<r$, on punktis z_0 poolus parajasti siis, kui funktsioonil*

$$w=g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

on selles punktis nullkoht.

Märkus. Äsjasõnastatud teoreemi puhul loeme funktsiooni g väärtuseks punktis z_0 tema piirväärtust selles punktis. Eeldame ka, et g pole samaselt null.

Kui z_0 on funktsiooni g k-järku nullkoht, siis

$$g(z) = c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots =$$
$$= (z-z_0)^k[c_k + c_{k+1}(z-z_0) + \dots] = (z-z_0)^k\varphi(z),$$

kus $\varphi(z_0)=c_k\neq 0$.

Funktsiooni $w=g(z)=1/f(z)$ nullkoha järku nimetatakse funktsiooni f **pooluse järguks.**

Teoreem 2. *Isoleeritud iseärane punkt z_0 on funktsiooni f pooluseks parajasti siis, kui selle punkti ümbruses vaadeldava funktsiooni Laurent'i rea peaosa sisaldab vaid lõpliku arvu liikmeid, s. t. punkti z_0 ümbruses kehtib valem*

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots .$$

Seejuures on suurim astendaja, mis esineb peaosa liikmete nimetajas, võrdne pooluse järguga.

Tõestus. 1) Olgu z_0 funktsiooni f k-järku poolus. Sel juhul on funktsioonil $w=g(z)=1/f(z)$ k-järku nullkoht punktis z_0, s. t.

$$w=g(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k\varphi(z),\ \text{kus}\ \varphi(z_0)\neq 0.$$

Viimase tingimuse tõttu on funktsioon $w=1/f(z)$ analüütiline punktis z_0, mistõttu

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\,\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^k}\,[b_0+b_1(z-z_0)+\ldots]=$$

$$=\frac{b_0}{(z-z_0)^k}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{b_{k-1}}{z-z_0}+b_k+b_{k+1}(z-z_0)+\ldots .$$

Saadud rida on funktsiooni $w=f(z)$ Laurent'i rida punkti z_0 ümbruses. Tema peaosa sisaldab lõpliku arvu liikmeid. Tarvilikkus on seega tõestatud.

2) Kehtigu mingis piirkonnas $0<|z-z_0|<r$ võrdus

$$f(z)=\frac{c_k}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_1}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots .$$

Siit saame, et

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\,[c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+\ldots]=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k},$$

kus $\varphi(z_0)\neq 0$. Viimasest aga järeldub, et

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k\,\frac{1}{\varphi(z)},$$

kus $w=1/\varphi(z)$ on analüütiline punktis z_0. Seega on z_0 funktsiooni g k-järku nullkoht. Vastavalt teoreemile 1 ning definitsioonile on punkt z_0 funktsiooni f k-järku poolus.

Teoreem on sellega tõestatud.

Ülesanded

1. Leida järgmiste avaldistega määratud funktsioonide poolused ja määrata nende järk:

a) $\dfrac{1}{z^2-z^3}$,

b) $\dfrac{\sin z}{(1+z^2)^2}$,

c) $\dfrac{\sin 4z}{z(1-e^{-z})}$,

d) $\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$,

e) $\dfrac{1}{1+e^{2z}}$,

f) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

Vastus: a) 0 — 2. järku ja 1 — 1. järku poolus; b) $\pm i$—2. järku poolused; c) 0—1. järku ja $2k\pi i$ ($k=\pm1, \pm2, \ldots$)—1. järku poolused; d) kui $a\neq(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($m=0, \pm1, \ldots$), siis $z=2k\pi+a$ ja $z=(2k+1)\pi-a$ ($k=0, \pm1, \ldots$) on 1. järku poolused; kui $a=(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$, siis $m=2p$ korral on punktid $z=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 2. järku poolused, $m=2p+1$ korral on punktid $z=(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 2. järku poolused; e) $z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}i$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) 1. järku poolused; f) $z=2k\pi i$ ($k=\pm1, \pm2, \ldots$). 1. järku poolused.

6.5. OLULISELT ISEÄRANE PUNKT

Eelmises kahes jaotises saadud tulemusi arvestades võime öelda, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem. *Isoleeritud iseärane punkt z_0 on funktsiooni f oluliselt iseärane punkt parajasti siis, kui funktsiooni f Laurent'i rea peaosa selle punkti ümbruses sisaldab lõpmata palju liikmeid.*

Järgnevas tõestame ühe teoreemi oluliselt iseäraste punktide kohta, mis aitab lähemalt iseloomustada funktsiooni käitumist oluliselt iseärase punkti ümbruses.

Sohhotski teoreem. *Kui z_0 on funktsiooni f oluliselt iseäraseks punktiks, siis leidub mis tahes kompleksarvu A (ka $A=\infty$) puhul punktiks z_0 koonduv jada (z_n), mille puhul $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.*

Tõestus. 1) Olgu $A=\infty$. Et f ei saa olla tõkestatud üheski piirkonnas $0<|z-z_0|<\dfrac{1}{n}$ (vastasel korral oleks z_0 kõrvaldatav

iseärane punkt), siis valime sellest piirkonnast punkti z_n, mille puhul $|f(z_n)|>n$. Siit saamegi, et $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$.

2) Olgu $A\neq\infty$. Kui igas piirkonnas $0<|z-z_0|<\frac{1}{n}$ leidub punkte, kus $f(z)=A$, siis ongi Sohhotski teoreemi väide õige. Kui aga leidub piirkond $0<|z-z_0|<\frac{1}{N}$, milles $f(z)\neq A$, siis on funktsioon

$$w=g(z)=\frac{1}{f(z)-A}$$

regulaarne selles piirkonnas. Punkt z_0 on oluliselt iseärane punkt ka funktsioonile $w=g(z)$, mistõttu eelneva põhjal leidub punktiks z_0 koonduv jada (z_n), mille puhul

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n)=\infty.$$

Siit aga

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty}\left[A+\frac{1}{g(z_n)}\right]=A.$$

Teoreem on sellega tõestatud.

Ülesanded

1. Olgu funktsioonil $w=f(z)$ punktis a n-järku poolus. Näidata, et funktsioonil $w=f(z)+g(z)$ on selles punktis m-järku poolus $(m>n)$ või oluliselt iseärane punkt sõltuvalt sellest, kas see punkt on funktsioonile $w=g(z)$ m-järku poolus või oluliselt iseärane punkt.
2. Selgitada tõsiasja, et kui $z=a$ on funktsioonidele f ja g oluliselt iseärane punkt, siis summale $f+g$ võib ta olla nii kõrvaldatav iseärane punkt, poolus kui ka oluliselt iseärane punkt.
3. Olgu funktsioonil f m-järku poolus ning funktsioonil g kas n-järku poolus või oluliselt iseärane punkt punktis a. Tõestada, et sel juhul on funktsioonil fg selles punktis kas $(m+n)$-järku poolus või oluliselt iseärane punkt.
4. Näidata, et kui punkt $z=a$ on funktsioonidele f ja g oluliselt iseärane punkt, võib funktsioonil fg selles punktis olla iga liiki isoleeritud iseärane punkt.
5. Olgu funktsioon f analüütiline piirkonnas $0<|z-a|<r$ ning punkt a funktsiooni f nullkohtade kuhjumispunkt. Näidata, et punkt a on funktsiooni f oluliselt iseärane punkt juhul, kui see funktsioon pole selles piirkonnas konstantne.

Kui funktsioon f on regulaarne mingis piirkonnas $R<|z|<\infty$, siis ütleme, et lõpmatuspunkt on selle funktsiooni isoleeritud iseärane punkt. Defineerime iseärasuse tüübi lõpmatuspunktis samuti kui lõplikus punktis. Soovides leida kriteeriume (analoogilisi jaotistes 6.3—6.5 tooduile) iseärasuse tüübi määramiseks, teeme muutuja vahetuse $z=\frac{1}{\zeta}$ ning saame

$$f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=F(\zeta).$$

Et $w=f(z)$ on regulaarne piirkonnas $R<|z|<\infty$, siis $w=F(\zeta)$ on regulaarne piirkonnas $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$ ning tal on seal sama liiki iseärasus, mis funktsioonil $w=f(z)$ lõpmatuspunktis.

Kui funktsioonil $w=f(z)$ on lõpmatuspunktis isoleeritud iseärane punkt, siis kõrvaldatava iseärasuse korral

$$f(z)=F(\zeta)=c_0+c_1\zeta+\ldots=c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots,$$

pooluse puhul aga

$$f(z)=F(\zeta)=\frac{b_{-k}}{\zeta^k}+\frac{b_{-k+1}}{\zeta^{k-1}}+\ldots+\frac{b_{-1}}{\zeta}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n=$$

$$=c_kz^k+c_{k-1}z^{k-1}+\ldots+c_1z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$$

ning oluliselt iseärase punkti puhul

$$f(z)=F(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{-k}}{\zeta^k}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}.$$

Nendest reaksarendustest selgub, et lõpmatuspunkti ümbruses moodustavad rea peaosa positiivsete astendajatega liikmed ja korrapärase osa mittepositiivsete astendajatega liikmed.

Kui funktsioonil f on lõpmatuspunktis kõrvaldatav iseärasus, siis defineerime $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ ja nimetame funktsiooni f **regulaarseks lõpmatuspunktiks.**

Teoreem. *Kui funktsioon f on regulaarne täielikul komplekstasandil, siis ta on konstantne.*

Tõestus. Regulaarsusest lõpmatuspunktis järeldub, et leiduvad konstant $M_1>0$ ning piirkond $|z|>R$, kus

$$|f(z)|\leqslant M_1.$$

Et aga eelduse kohaselt on f regulaarne ka kinnises piirkonnas $|z| \leqslant R$, siis on ta seal pidev ning seega tõkestatud, s. t.

$$|f(z)| \leqslant M_2.$$

Võttes $M = \max(M_1, M_2)$, saame, et $|f(z)| \leqslant M$ iga z puhul.

Seega saime, et funktsioon f on tõkestatud kogu tasandil, mistõttu Liouville'i teoreemi põhjal on ta konstantne.

Tõestatud teoreemist järeldub, et huvi pakuvad vaid need analüütilised funktsioonid, millel on vähemalt üks (kas siis lõplik või lõpmatu) iseärane punkt. Neid vaatlemegi lähemalt järgmises jaotises.

Ülesanded

1. Kas saab järgmiste avaldistega määratud funktsioone arendada Laurent'i reaks lõpmatuspunkti ümbruses:

   a) $\cos\dfrac{1}{z}$, c) $\ln\dfrac{1}{z-1}$;

   b) $\cot z$, d) $\sqrt{z(z-1)}$?

   Vastus: a) ja, b) ei, c) ei d) ja (mõlemate harude puhul).

2. Arendada funktsioon $w = \ln\dfrac{z-a}{z-b}$ Laurent'i reaks lõpmatuspunkti ümbruses.

   Vastus: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n - a^n}{nz^n}$, kus $|z| > \max(|a|, |b|)$.

6.7. LIHTSAMAD ANALÜÜTILISTE FUNKTSIOONIDE KLASSID

Me teame, et kui $w = f(z)$ on täisfunktsioon, siis rida

$$f(z) = \sum_n c_n z^n \tag{1}$$

koondub kogu komplekstasandil, s. t. piirkonnas $|z| < \infty$. Seetõttu võime rida (1) vaadelda ka kui funktsiooni $w = f(z)$ arendust Laurent'i reaks punktis $z = \infty$. Seda asjaolu silmas pidades saame öelda järgmist:

1) kui täisfunktsioon on regulaarne ka lõpmatuspunktis, siis on ta konstantne;
2) kui lõpmatuspunkt on täisfunktsiooni pooluseks, siis on see funktsiooni **polünoom (täisratsionaalne funktsioon)**;
3) kui lõpmatuspunkt on oluliselt iseärane punkt funktsioonile $w = f(z)$, siis sisaldab rida (1) lõpmata palju liikmeid.

Viimasel juhul nimetatakse funktsiooni f **täistranstsendentseks funktsiooniks**. Sellise funktsiooni näideteks on $w=e^z$, $w=\sin z$, $w=\cos z$ jt.

Funktsiooni f, millel kõik lõplikus kauguses asuvad iseärased punktid on poolused, nimetatakse **meromorfseks**. Osutub, et *komplekstasandi igas lõplikus ja kinnises osas võib meromorfsel funktsioonil olla vaid lõplik arv pooluseid.* Tõepoolest, kui seal oleks lõpmata hulk pooluseid, siis oleks neil vähemalt üks kuhjumispunkt a. Viimane on selle funktsiooni iseärane punkt, sest selles punktis ei saa funktsioonil olla lõplikku piirväärtust. Seega ei saa funktsioon olla regulaarne oma pooluste kuhjumispunktis. Teiselt poolt: punkt a ei ole poolus, sest poolus on isoleeritud iseärane punkt, mida aga pole punkt a. Seega saame, et kui funktsioonil f oleks mingis lõplikus ja kinnises piirkonnas lõpmatu hulk pooluseid, siis oleks tal lõplikus kauguses veel üks iseärane punkt, mis pole poolus. Ent see on vastuolus meromorfse funktsiooni definitsiooniga. Seega on meie väide tõestatud.

Kogu komplekstasandil aga võib meromorfsel funktsioonil olla lõpmatu hulk pooluseid (näiteks funktsioonidel $w=\tan z$ ja $w=\cot z$).

Teoreem. *Kui funktsiooni f kõik iseärased punktid täielikul komplekstasandil on poolused, on see funktsioon ratsionaalne.*

Tõestus. Märgime kõigepealt, et tehtud eeldustel on funktsioonil f vaid lõplik arv pooluseid. Tõepoolest, kui neid oleks lõpmata palju, siis oleks vähemalt lõpmatuspunkt nende kuhjumispunktiks, mistõttu sellel funktsioonil oleks täielikul tasandil ka teisi iseäraseid punkte peale pooluste.

Olgu punktid $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ funktsiooni f poolused (lõplikus kauguses asuvad poolused). Nende pooluste ümbruses olgu Laurent'i ridade peaosad vastavalt

$$g_1(z)=\frac{a_m}{(z-\alpha_1)^m}+\ldots+\frac{a_1}{z-\alpha_1},$$

. . . . . .

$$g_n(z)=\frac{c_p}{(z-\alpha_n)^p}+\ldots+\frac{c_1}{z-\alpha_n}.$$

Lõpmatuspunkti ümbruses olgu funktsiooni f Laurent'i rea peaosa

$$g(z)=A_1z+\ldots+A_qz^q$$

(kui funktsioon f on regulaarne lõpmatuspunktis, siis $A_1=\ldots=A_q=0$).

Vaatleme funktsiooni

$$w=h(z)=f(z)-g(z)-\sum_{k=1}^{n}g_k(z).$$

See funktsioon on regulaarne igas lõplikus punktis $z \neq a_n$, sest ta avaldub lõpliku arvu regulaarsete funktsioonide summana. Igas punktis $z=a_k$ on tal kõrvaldatav iseärane punkt, sest kõikide nende punktide ümbruses puudub funktsiooni h Laurent'i reaksarendistel peaosa. Tõepoolest, punkti $z=a_k$ ümbruses on funktsioonide $w=f(z)$ ja $w=g_k(z)$ Laurent'i ridade peaosad võrdsed ning kõik ülejäänud funktsioonid h avaldises peale nende funktsioonide on regulaarsed punktis $z=a_k$. Sama kehtib ka lõpmatuspunkti korral.

Kui defineerida sobivalt funktsiooni h väärtused punktides $z=a_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ja $z=\infty$, siis saame funktsiooni, mis on regulaarne täielikul tasandil, s. t. $h(z)=A_0$. Seega

$$f(z)=A_0+g(z)+\sum_{k=1}^{n} g_k(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+$$

$$+\ldots+A_qz^q+\frac{a_m}{(z-a_1)^m}+\ldots+\frac{a_1}{z-a_1}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{c_p}{(z-a_n)^p}+\ldots+\frac{c_1}{z-a_n}.$$

Saadud võrdusest järeldubki meie teoreemi väide, sest kui teostaksime viimases avaldises vajalikud aritmeetilised tehted, ilmneks, et funktsioon f avaldub kahe polünoomi jagatisena, s. t. on ratsionaalne.

M ä r k u s. Viimati saadud võrdus näitab muuseas, et igat ratsionaalset funktsiooni on võimalik esitada selle täisosa ja osamurdude summana. Reaalsete ratsionaalsete funktsioonide puhul vaadeldi seda esitist seoses ratsionaalsete funktsioonide integreerimisega.

7. RESIIDIDE TEOORIA

7.1. RESIIDID

Kui funktsioon f on regulaarne punkti a mingis ümbruses, siis kehtib Cauchy teoreemi põhjal võrdus

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

iga sellesse ümbrusse kuuluva kinnise joone C puhul. Kui aga punkt a on isoleeritud iseärane punkt, erineb selle integraali väärtus üldiselt nullist. Osutub, et selle integraali väärtus ei sõltu joone kujust. Oluline on vaid, et joon C ei hõlmaks funktsiooni f teisi iseäraseid punkte peale punkti a. Tõepoolest, arendades funktsiooni f Laurent'i reaks piirkonnas $0<|z-a|<r$, saame avaldise

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Et saadud rida koondub ühtlaselt joonel C, kui viimane kuulub ülalmärgitud piirkonda, siis võime seda rida liikmeti integreerida üle joone C, mistõttu

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i c_{-1},$$

sest

$$\int_C (z-a)^m dz=\begin{cases} 0, \text{ kui } m\neq -1, \\ 2\pi i, \text{ kui } m=-1. \end{cases}$$

Saadud tulemustest selgub, et eriline tähtsus on isoleeritud iseärase punkti ümbruses võetud Laurent'i rea kordajal c_{-1}, mistõttu on talle antud eriline nimetus — **resiid**. Selle mõiste tõi kompleksmuutuja funktsioonide teooriasse Cauchy, kes näitas ka resiidi mõistele mitmesuguseid rakendusi.

Hilisemal perioodil on resiidi mõistet defineeritud mitmeti. Oma sisult on need definitsioonid aga ühetähenduslikud. Et saavutada ühtsust nii lõplike punktide kui ka lõpmatuspunkti puhul, defineerime resiidi mõiste järgmiselt.

Funktsiooni f resiidiks punktis a nimetatakse suurust

$$\operatorname{res}[f(z);a]=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz,$$

kus C on punkti a niisuguse ümbruse rajajoon, mis iseärastest punktidest sisaldab vaid punkti a.

Märkus. Arvestades, et ümbruse rajajoone positiivseks suunaks on see, mida mööda liikudes ümbrus jääb vasakule, saame esitatud definitsioonist, et lõpliku a korral

$$\operatorname{res}[f(z);a]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz$$

ning lõpmatuspunkti puhul

$$\operatorname{res}[f(z);\infty]=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,dz.$$

On vahetult selge, et toodud definitsioon on sisuliselt samaväärne sellega, et nimetada resiidiks kordajat c_{-1}. Teiselt poolt on oluline märkida erinevust, mis ilmneb lõpliku ja lõpmatuspunkti vahel. Kui $z=a$ on lõplik ning funktsiooni f kõrvaldatav iseärane punkt, siis punkti $z=a$ ümbruses võetud Laurent'i rea kordaja $c_{-1}=0$. Seega on resiid võrdne nulliga funktsiooni lõplikus kau-

guses asuva kõrvaldatava iseärase punkti suhtes. Kui aga kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks on lõpmatuspunkt (sel juhul öeldakse, et funktsioon on regulaarne lõpmatuspunktis), ei tarvitse resiid olla null. Näiteks funktsiooni $w=\frac{1}{z}$ puhul

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z};\ \infty\right]=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R}\frac{1}{z}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i=-1.$$

Oluline on rõhutada, et lõpmatuspunkti puhul ei võrdu resiid lõpmatuspunkti ümbruses võetud Laurent'i rea

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$$

kordajaga c_{-1}, vaid selle vastandväärtusega $-c_{-1}$. Et sel juhul kuulub kordaja c_{-1} rea korrapärasesse ossa, ei tarvitse viimane võrduda nulliga, kui funktsioon on lõpmatuspunktis regulaarne. Erandjuhtudel võib see siiski nii olla, näiteks

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2};\ \infty\right]=0.$$

Arvestades resiidi mõistet, võime Cauchy teoreemi üldistada *resiidide teooria põhiteoreemiks.*

Teoreem. *Kui funktsioon f on regulaarne tõkestatud piirkonnas D, välja arvatud lõplik arv punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ning pidev kuni selle piirkonna rajajooneni C, siis*

$$\int\limits_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\,[f(z);\,a_k].$$

T õ e s t u s. Eraldame kõik iseärased punktid a_k ringjoontega C_k, mis omavahel ei lõiku ega asu üksteise sees. Ülejäänud piirkonnas on f regulaarne ning me võime kasutada Cauchy teoreemi mitmelisidusate piirkondade jaoks. Selle põhjal

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{C_k} f(z)\,dz.$$

Arvestades resiidi definitsiooni, saame siit vahetult teoreemi väite.

J ä r e l d u s. *Kui funktsioon f on regulaarne täielikul kompleks-tasandil, välja arvatud lõplik arv punkte, siis on tema resiidide summa kõikide iseäraste punktide suhtes (kaasa arvatud lõpmatuspunkt) võrdne nulliga.*

T õ e s t u s. Võtame ringjoone $|z|=R$ selliselt, et kõik lõplikus kauguses asuvad iseärased punktid a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ on selle

ringjoonega hõlmatud. Äsjatõestatud teoreemi põhjal

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[f(z); a_k] = \int_{|z|=R} f(z)\,dz.$$

Teiselt poolt, definitsiooni põhjal

$$2\pi i \operatorname{res}\,[f(z); \infty] = -\int_{|z|=R} f(z)\,dz.$$

Nendest kahest võrdusest järeldubki väide.

Ülesanded

1. Olgu h regulaarne punktis a ning $h(a) \neq 0$. Näidata, et punkt a on funktsioonile

   $$w = f(z) = \frac{h(z)}{z-a}$$

   pooluseks ning $\operatorname{res}\,[f(z); a] = h(a)$.

2. Arvutada järgmised integraalid:

   a) $\int_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\,dz$,

   b) $\int_{|z|=r} \sin^2\frac{1}{z}\,dz$,

   c) $\int_{|z|=r} z^n e^{2/z}\,dz$ (n on täisarv),

   d) $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{(z-1)z}\,dz$.

   Vastus: a) $2\pi i$, b) 0, c) $\frac{2^{n+2}}{(n+1)!}\cdot\pi i$ ($n \geqslant -1$) ja 0 ($n < -1$),

   d) $10\pi i$.

7.2. RESIIDIDE ARVUTAMINE

a) Funktsiooni f esimest järku pooluse $z=a$ puhul kehtib valem

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z),$$

kus φ on analüütiline punkti a ümbruses. Sellest võrdusest leiame, et

$$c_{-1} = (z-a)f(z) - (z-a)\varphi(z),$$

millest saame (minnes piirile $z \to a$) järgmise valemi resiidi leidmiseks:

$$\operatorname{res}\,[f(z); a] = c_{-1} = \lim_{z\to 0} (z-a)f(z), \tag{1}$$

sest $\lim_{z\to a} (z-a)\varphi(z) = 0$.

Näide 1. Olgu $f(z)=\frac{z^2}{z^2-4}$. Leiame res $[f(z); 2]$.

Saame, et

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{z^2-4};\ 2\right]=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^2}{z^2-4}=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z+2}=1.$$

Kui funktsioon avaldub kujul

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)},\ \text{kus}\ g(a)\neq 0,$$

ning $z=a$ on funktsiooni h esimest järku nullkoht (seega on punkt a funktsiooni f esimest järku poolus), siis

$$\operatorname{res}[f(z); a]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}}.$$

Et aga

$$\lim_{z\to a}\frac{h(z)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{h(z)-h(a)}{z-a}=h'(a),$$

siis saame siit valemi

$$\operatorname{res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};\ a\right]=\frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{2}$$

Näide 2. Olgu $w=f(z)=\cot z$. Punktid $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) on selle funktsiooni esimest järku poolusteks. Leiame nendes resiidid valemi (2) põhjal:

$$\operatorname{res}[\cot z;\ k\pi]=\frac{\cos z}{(\sin z)'}\Big|_{z=k\pi}=1.$$

b) Olgu punkt $z=a$ funktsiooni f kõrgemat järku pooluseks. Ka sel juhul saame suhteliselt lihtsa valemi resiidi leidmiseks. See valem osutub üldistuseks valemile (1). Me teame, et funktsiooni f k-järku pooluse a ümbruses kehtib seos

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k},$$

kus φ on analüütiline vaadeldavas ümbruses. Sellest seosest saame, et

$$(z-a)^k f(z)=(z-a)^k\varphi(z)+c_{-1}(z-a)^{k-1}+\ldots+c_{-k}.$$

Kui viimast seost diferentseerida $k-1$ korda, siis saame võrduse

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k f(z)]=\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k\varphi(z)]+(k-1)!c_{-1}. \qquad (3)$$

Et $z=a$ on avaldisega $(z-a)^k\varphi(z)$ määratud funktsiooni suhtes vähemalt k-järku nullkoht, siis

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k\varphi(z)]=0.$$

Viimast tulemust arvestades saame seose (3) põhjal järgmise valemi:

$$\operatorname{res}[f(z);a]=c_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k f(z)]. \qquad (4)$$

Kui võtta $k=1$, siis saame valemist (4) valemi (1).

Näide 3. Leida funktsiooni $w=f(z)=(z^2+1)^{-n}$ resiid punktis $z=\mathrm{i}$. Vastavalt valemile (4) saame, et

$$\operatorname{res}[f(z);\mathrm{i}]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-\mathrm{i})^n\frac{1}{(z^2+1)^n}\right]=$$

$$=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^n}\right]=$$

$$=\lim_{z\to\mathrm{i}}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!(z+\mathrm{i})^{2n-1}}=$$

$$=(\mathrm{i}^2)^{n-1}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!(2\mathrm{i})^{2n-1}}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}\frac{1}{2^{2n-1}}=-\mathrm{i}\binom{n-1}{2n-2}2^{1-2n}.$$

c) Vaatleme nüüd juhtu, kus punkt a on funktsiooni f oluliselt iseärane punkt. Sel juhul ei ole resiidi leidmiseks nii lihtsaid valemeid kui pooluste korral. Oluliselt iseärase punkti korral kasutatakse selleks enamikul juhtudel Laurent'i rida vaadeldava punkti a ümbruses. Viimase puhul on vaja määrata vaid kordaja c_{-1}. Sageli on seda kordajat suhteliselt lihtne leida.

Näide 4. Leida funktsiooni $w=\mathrm{e}^{z+1/z}$ resiidid iseäraste punktide suhtes. Et vaadeldava funktsiooni iseäraseks punktiks on punkt $z=0$, siis tuleb leida selle funktsiooni reaksarendus punkti $z=0$ ümbruses. On aga teada, et

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad\text{ning}\quad\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n},$$

mistõttu

$$e^{z+1/z}=e^z e^{1/z}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\dots\right).$$

Korrutades need kaks rida, saame z^{-1} sisaldavad liikmed vaid juhul, kui korrutame esimese rea esimese liikme teise rea teise liikmega, teise kolmandaga, kolmanda neljandaga jne. Seega

$$c_{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Sellega olemegi leidnud resiidi nullpunkti suhtes.

Teiseks iseäraseks punktiks on $z=\infty$. Et rohkem iseäraseid punkte pole, siis saame eelmises jaotises toodud järelduse põhjal, et

$$\operatorname{res}[f(z);\infty]=-\operatorname{res}[f(z);0]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Analoogilisel viisil saab nii mõnigi kord kasutada nimetatud järeldust resiidide leidmiseks.

d) Mõnel juhul resiidi leidmine lihtsustub, kui peame silmas seoseid

$$\operatorname{res}[f(z)+g(z);a]=\operatorname{res}[f(z);a]+\operatorname{res}[g(z);a] \quad \text{ja}$$
$$\operatorname{res}[kf(z);a]=k\operatorname{res}[f(z);a],$$

mis järelduvad vahetult resiidi definitsioonist.

Näide 5. Leida funktsiooni $w=\cos\frac{1}{z+1}+\frac{e^z}{z+1}$ resiidid tema iseäraste punktide suhtes. Sel juhul on iseäraseks punktiks $z=-1$, mis esimese liidetava suhtes on oluliselt iseärane punkt ning teise suhtes esimest järku poolus. Viimase korral saame, et

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z+1};\ -1\right]=\frac{e^z}{(z+1)'}\Big|_{z=-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Mis puutub esimesse liidetavasse, siis, arvestades $\cos z$ Maclaureni rida, saame reaksarenduse

$$\cos\frac{1}{z+1}=1-\frac{1}{2!(z+1)^2}+\dots.$$

Selles reas puudub liige, milles esineks avaldis $(z+1)^{-1}$. Seega

$$c_{-1}=\operatorname{res}\left[\cos\frac{1}{z+1};\ -1\right]=0 \text{ ning siit}$$

$$\operatorname{res}[f(z);-1]=\frac{1}{e}.$$

Teine iseärane punkt on $z=\infty$. Resiidide teooria põhiteoreemi järelduse põhjal saame, et

$$\operatorname{res}[f(z);\infty]=-\frac{1}{e}.$$

Ülesanded

1. Olgu funktsioonid g ja h regulaarsed punktis a, kusjuures punkt a on funktsiooni h teist järku nullkoht. Näidata, et sel juhul

$$\operatorname{res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};\ a\right]=2\frac{g'(a)}{h''(a)}-\frac{2}{3}\frac{g(a)h'''(a)}{[h''(a)]^2}.$$

2. Leida järgmiste avaldistega määratud funktsioonide resiidid kõikide lõplike isoleeritud iseäraste punktide suhtes:

a) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$, c) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$, e) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$,

b) $\operatorname{th} z$, d) $\dfrac{1}{\sin z}$, f) $\dfrac{\arctan z}{z}$.

Vastus: a) $\operatorname{res}[f;0]=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}[f;2]=\frac{3}{2}$,

b) $\operatorname{res}\left[f;\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right]=1$,

c) $\operatorname{res}[f;0]=-\frac{4}{3}$,

d) $\operatorname{res}[f;k\pi]=(-1)^k$,

e) $\operatorname{res}[f;-1]=(-1)^{n+1}\binom{n+1}{2n}$,

f) $\operatorname{res}[f;0]=0$.

3. Leida funktsiooni $w=f(z)=\left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$ resiidid kõikide isoleeritud iseäraste punktide suhtes.

Vastus: $\operatorname{res}\left[f(z);\frac{1}{k\pi}\right]=(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}$ $(k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots)$

$(k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots)$

ja $\operatorname{res}[f(z);\infty]=-\frac{1}{6}$.

4. Piirkonnas $|z|>R$ kehtigu võrdus

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots.$$

Leida res $[(f(z))^2; \infty]$.

Vastus: $-2c_0c_1$.

5. Näidata, et

$$\operatorname{res}[f(z)g(z); a] = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a),$$

kui g on analüütiline punktis a ning punkti a ümbruses kehtib seos

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

6. Arvutada järgmised integraalid:

a) $\int\limits_{|z|=4} \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, d) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{\operatorname{sh} 2z}$,

b) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z+4)}$, e) $\int\limits_{|z|=k} \tan kz\,dz$ $(k=1, 2, \ldots)$.

c) $\int\limits_{|z|=2} \tan z\,dz$,

Vastus: a) $6\pi i$, b) $\frac{\pi i}{32}$, c) $-4\pi i$, d) $-\pi i$,
e) $-4\left[\frac{2k^2-1}{2\pi}\right]\pi i$.

7.3. RESIIDIDE KASUTAMINE INTEGRAALIDE ARVUTAMISEL

Vaatleme resiidide teooria rakendamise võimalusi määratud (ka päratute) integraalide arvutamisel. Siinjuures peatume vaid kolmel üldisemal ning suhteliselt lihtsasti käsitletaval juhul.

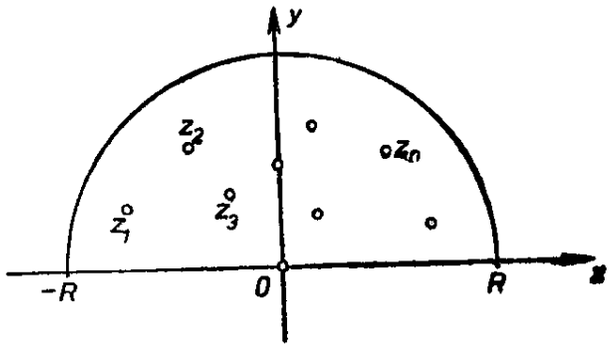
a) Vaatleme integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on polünoomid. Et selline intergaal eksisteeriks, peab polünoomi $Q(x)$ aste olema vähemalt kahe võrra kõrgem lugeja omast ning polünoomil $Q(x)$ ei tohi olla reaalteljel nullkohti. Eeldame, et need tingimused on täidetud.

Võtame vaatluse alla funktsiooni

$$w = F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$



Joon. 35

On selge, et tehtud eeldustel $\lim_{z\to\infty} zF(z)=0$, kusjuures viimane võrdus kehtib z suhtes ühtlaselt, s. t. ei sõltu muutuja z lõpmatusele lähenemise viisist. Et funktsioonil F on vaid lõplik arv iseäraseid punkte — pooluseid (nimetaja nullkohti) —, siis võime valida nii suure raadiusega ringjoone $|z|=R$, mis hõlmab kõiki ülemises pooltasandis asuvaid iseäraseid punkte (vt. joon. 35). Seega residiide teooria põhiteoreemi kohaselt

$$\int_{-R}^{R} F(x)\,dx+\int_{C_R} F(z)\,dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{res}\,[F(z);\,z_k].$$

Et ülemises pooltasandis pole väljaspool vaadeldavat poolringi ühtegi iseärast punkti, siis R kasvades viimase võrduse parem pool ei muutu. Seda arvestades läheme piirile $R\to\infty$. Osutub, et

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)\,dz=0. \tag{1}$$

Tõepoolest, funktsioonile F seatud kitsenduste tõttu $|zF(z)|<\varepsilon$, kui $|z|=R$ ning R on küllalt suur, mistõttu

$$\left|\int_{C_R} F(z)\,dz\right|=\left|\int_{C_R} zF(z)\,\frac{1}{z}\,dz\right|<\varepsilon\,\frac{1}{R}\,\pi R=\pi\varepsilon.$$

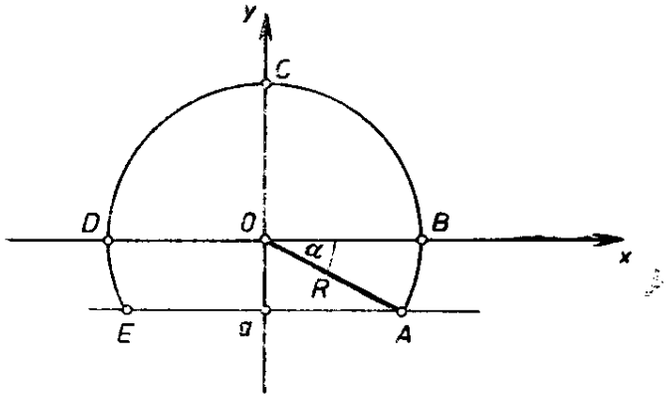
Saadud tulemust arvestades võime öelda, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{res}\,[F(z);\,z_k]. \tag{2}$$

Näide 1. Leiame integraali $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$. Vastavalt valemile (2) saame, et

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\,2\pi i\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2+1};\ i\right]=$$

$$=\pi i\,\frac{1}{2z}\Big|_{z=i}=\pi i\,\frac{1}{2i}=\frac{\pi}{2}.$$



Joon. 36

b) Osutub, et võrdus (1) on õige ka teistel eeldustel funktsiooni F kohta. Ühe niisuguse tingimuse annab järgmine teoreem, mida tuntakse ***Jordani lemmana***.

Jordani lemma. *Kui piirkonnas* $|z|>R_0$, $\operatorname{Im} z>-a$ *kehtib võrdus* $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ z\to\infty}} f(z)=0$ *arg z suhtes ühtlaselt, siis valem* (1) *on õige, kui*

$F(z)=e^{i\lambda}f(z)$, kus $\lambda>0$.

Tõestus. Olgu $z=x+iy=re^{i\varphi}$, $M_R=\max\limits_{z\in C_R}|f(z)|$ ja $\alpha=$ $=\arcsin\frac{a}{R}$. Eelduse põhjal $M_R\to 0$, kui $R\to\infty$. Sel korral ka $\alpha\to 0$, kusjuures $\alpha R\to a$ (vt. joon. 36). Kui $a>0$, siis kaartel AB ja DE saame, et $|e^{i\lambda z}|=e^{-\lambda y}\leqslant e^{a\lambda}$. Järelikult kehtib seos

$$\left|\int\limits_{\gamma} e^{i\lambda z}f(z)\,dz\right|\leqslant M_R e^{a\lambda}\alpha R\to 0, \text{ kui } R\to\infty,$$

kus γ on kas kaar AB või DE.

Arvestades seost $\sin\varphi\geqslant\frac{2}{\pi}\varphi$, kui $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, saame, et kaarel BCD

$$|e^{i\lambda z}|=e^{-\lambda R\sin\varphi}\leqslant e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi},$$

mistõttu

$$\left|\int\limits_{BCD} e^{i\lambda z}f(z)\,dz\right|\leqslant M_R R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi}\,d\varphi=M_R\frac{\pi}{2\lambda}(1-e^{-\lambda R})\to 0,$$

kui $R\to\infty$. Sellega on lemma tõestatud juhul, kus $a>0$.

Juhul $a\leqslant 0$ tõestus vaid lihtsustub, sest siis pole vaja vaadelda integraale üle kaarte AB ja DE. Lemma on sellega täielikult tõestatud.

Märkus. Jaotises 10, seoses Laplace'i teisenduse pööramisega, tuleb meil vaadelda Jordani lemmat mõnevõrra teisel kujul. Seal $p=iz$, s. t. joonisel 36 esitatu on pööratud 90° võrra vastupidi kellaosuti liikumise suunale.

Käesolevas rakendame Jordani lemmat (võttes $a=0$) selleks, et arvutada integraale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx,$$

kus $\lambda>0$ ja funktsioon f rahuldab Jordani lemma tingimusi. Selgitame seda võimalust järgmise näitega.

Näide 2. Arvutame integraali

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Et integraali all on paarisfunktsioon, siis

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Pidades silmas Euleri valemit $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, saame, et

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Viimase integraali arvutame valemi (2) abil, mille põhjal

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=2\pi i\left\{\operatorname{res}\left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)};\ i\right]+\right.$$

$$\left.+\operatorname{res}\left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)};\ 2i\right]\right\}=2\pi i\left\{\left.\frac{ze^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i}+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{z=2i}\right\}=2\pi i\left\{\frac{ie^{-1}}{2i(-1+4)}+\frac{2ie^{-2}}{(-4+1)4i}\right\}=$$

$$=\frac{\pi i}{3e}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Seega

$$I=\frac{\pi}{6e}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

c) Vaatleme integraale

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)\,dx,$$

kus integraalialune funktsioon on ratsionaalne $\cos x$ ja $\sin x$ suhtes.

Teeme muutuja vahetuse $z=e^{ix}$, s. t.

$$\cos x=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin x=\frac{z^2-1}{2iz},\quad dx=\frac{dz}{iz}.$$

Tehes vajalikud asendused, saame, et

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)\,dx=\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\ \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1} G(z)\,dz.$$

Vastavalt resiidide teooria põhiteoreemile

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x,\ \sin x)\,dx=2\pi i\sum_{|z_k|<1}\operatorname{res}\,[G(z_k);\ z_k].$$

Siinjuures on muidugi oluline, et ükski funktsiooni G iseärastest punktidest ei asuks ühikringjoonel. Siis ei oleks ka $R(\cos x,\ \sin x)$ pidev lõigus $[0, 2\pi]$.

Näide 3. Leiame integraali

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+4\sin x}.$$

Vastavalt ülaltoodud valemitele saame, et

$$5+4\sin x=5+4\,\frac{z^2-1}{2iz}=\frac{1}{iz}\,(2z^2+5iz-2)$$

ning

$$I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2+5iz-2}=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2i)\,(z+i/2)}.$$

Ühikringis asub vaid üks viimase integraali aluse funktsiooni poolustest — $z=-\frac{i}{2}$ —, mille suhtes resiid on $\frac{2}{3i}$. Seega

$$I=2\pi i\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3i}=\frac{2}{3}\,\pi.$$

Ülesanded

1. Näidata, et

a) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)\,(x^2+4)^2}=\frac{\pi}{200}$, b) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^6+1}=\frac{\pi}{6}$,

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, d) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$,

e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=-\frac{\pi}{5}$, f) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}$ $(a>0)$

g) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{2e}$;

h) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin ax\,dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{2}e^{-a}\sin a$ $(a>0)$,

i) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2+4x+5}=-\frac{\pi}{e}\sin 2$,

j) $\int_0^\infty \frac{x\sin ax\,dx}{x^2+b^2}=\frac{\pi}{2}e^{-|ab|}\operatorname{sgn} a$ (a, b — reaalarvud).

2. Arvutada integraalid:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}$, b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$,

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\,dx}{5-4\cos 2x}$, d) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$.

Vastus: a) $-\frac{\pi}{3}$, b) $\pi\sqrt{2}$, c) $\frac{3}{8}\pi$, d) $2\pi a(a^2-1)^{-3/2}$ $(a>1)$.

7.4. LOGARITMILINE RESIID

Funktsiooni $w=f(z)$ **logaritmiliseks resiidiks** nimetatakse tema logaritmilise tuletise $w=f'(z)/f(z)$ resiidi vaadeldavas punktis. Logaritmilise tuletise avaldisest on selge, et tema iseäraseks punktiks on ka funktsiooni f nullkoht. Vaatlemegi kõigepealt juhtu, kus punkt b on funktsiooni f m-järku nullkoht. Sel juhul kehtib punkti b ümbruses seos

$$f(z)=(z-b)^m\varphi(z), \qquad (1)$$

kus φ on analüütiline punktis b ning $\varphi(b)\neq 0$. Siis aga

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=[\operatorname{Ln} f(z)]'=[\operatorname{Ln}(z-b)^m\varphi(z)]'=$$

$$=[m\operatorname{Ln}(z-b)+\operatorname{Ln}\varphi(z)]'=\frac{m}{z-b}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Et $\varphi(b)\neq 0$, siis on funktsioon $w=\varphi'(z)/\varphi(z)$ analüütiline punktis b ning seega

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-b}+c_0+c_1(z-b)+\ldots.$$

Viimasest seosest järeldub, et

$$\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\ b\right]=m.$$

Me saime, et *funktsiooni logaritmiline resiid nullkoha suhtes võrdub selle nullkoha järguga.*

Vaatleme juhtu, kus punkt a on funktsiooni $w=f(z)$ k-järku poolus. Sel juhul saame seose (1) asemel võrduse

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^k},$$

kus ψ on analüütiline punktis a ning $\psi(a)\neq 0$. Analoogiliselt eelnevaga leiame, et

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots,$$

mistõttu

$$\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\ a\right]=-k.$$

Seega: *funktsiooni logaritmiline resiid pooluse suhtes võrdub selle pooluse järgu vastandarvuga.*

Olgu funktsioon f pidev ja nullist erinev kinnisel joonel C. Kui funktsioonil f on joonega C piiratud piirkonnas lõplik arv nullkohti, $b_1, b_2, \ldots, b_q$ ning ainsate iseäraste punktidena lõplik arv pooluseid $a_1, a_2, \ldots, a_p$, siis

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{q}\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\ b_k\right]+\sum_{k=1}^{p}\operatorname{res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)};\ a_k\right].$$

Kui iga nullkohta ja poolust lugeda niimitu korda, kui suur on tema järk, siis eelnevas sooritatud arvutuste põhjal võime viimase võrduse kirjutada kujul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P, \tag{2}$$

kus N on selle funktsiooni nullkohtade ja P pooluste arv joonega C hõlmatud piirkonnas.

Saadud seosest järeldub nn. **argumendi printsiip**:

Kui tõkestatud piirkonnas D rajajooneni C pideval funktsioonil f on piirkonnas D iseäraste punktidena vaid lõplik arv pooluseid ning rajajoonel C see funktsioon ei võrdu nulliga, siis on funktsiooni väärtuse argumendi muutus rajajoone C täielikul läbimisel 2π korda suurem selles piirkonnas D asuvate funktsiooni f nullkohtade ja pooluste arvu vahest.

Tõestus. Et

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = d[\operatorname{Ln} f(z)] = d[\ln|f(z)|] + i\,d[\operatorname{Arg} f(z)],$$

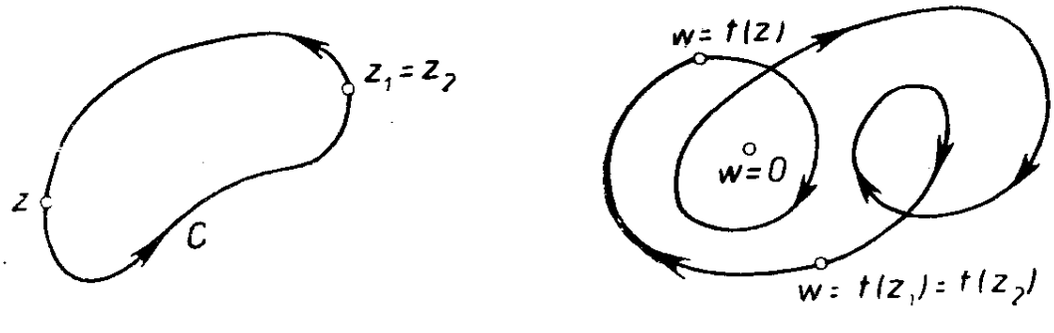
siis

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \ln|f(z_2)| - \ln|f(z_1)| + i[\operatorname{Arg} f(z_2) - \operatorname{Arg} f(z_1)].$$

Kui $z_1 = z_2$, saame integraali üle kinnise joone C. Et $|f(z_1)| = |f(z_2)|$, siis (vt. joon. 37)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\,i[\operatorname{Arg} f(z_2) - \operatorname{Arg} f(z_1)] = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Saadud võrduse vasak pool võrdub eelmise teoreemi kohaselt joonega C hõlmatud nullkohtade ja pooluste arvu vahega. Sellega ongi argumendi printsiip tõestatud.



Joon. 37

Ülesanded

1. Olgu funktsioon g analüütiline joonega C piiratud piirkonnas ning olgu funktsioonil f selles piirkonnas lõplik arv nullkohti $a_1, \ldots, a_n$ (vastavalt järkudega $m_1, \ldots, m_n$) ning iseäraste punktidena vaid poolused $b_1, \ldots, b_q$ (vastavalt järkudega $r_1, \ldots, r_q$). Näidata, et sel juhul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{n} m_k g(a_k)-\sum_{k=1}^{q} r_k g(b_k).$$

2. Tõestada, et kui f on regulaarne joonel C ja sellega piiratud piirkonnas, siis võrrandi $f(z)=a$ lahendite arv selles piirkonnas võrdub integraaliga

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}.$$

7.5. ROUCHE TEOREEM

Argumendi printsiibi järeldusena tõestame teoreemi, mis võimaldab otsustada funktsiooni nullkohtade arvu üle.

Rouche teoreem. *Kui funktsioonid f ja g on regulaarsed ühelisidusas ja tõkestatud piirkonnas D ning pidevad selle rajajooneni C, kusjuures iga $z\in C$ puhul $|f(z)|>|g(z)|$, siis on funktsioonidel f ja $f+g$ ühepalju nullkohti piirkonnas D.*

Tõestus. Et

$$\arg[f(z)+g(z)]=\arg f(z)+\arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right],$$

siis tuleb argumendi printsiibi kohaselt (pooluseid pole) meil Rouche teoreemi tõestamiseks veenduda, et

$$\Delta_C \arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]=0. \tag{1}$$

See on aga tõesti nii, sest kompleksarv

$$\omega=1+\frac{g(z)}{f(z)}$$

kuulub teoreemi eelduse ($|f(z)|>|g(z)|$) kohaselt ringi $|\omega-1|<1$. Viimane aga ei sisalda nullpunkti ning seega saavutab ω argument joone C täielikul läbimisel oma esialgse väärtuse. Niisiis kehtib võrdus (1) ning seeläbi ka Rouche teoreem.

Näide. Leiame võrrandi

$$z^9 - 9z^4 + 3z^3 + 2z^2 - 1 = 0 \quad . \tag{2}$$

lahendite arvu ühikringis $|z| < 1$.

Võtame $f(z) = z^9 - 9z^4$ ning $g(z) = 3z^3 + 2z^2 - 1$. Sel juhul ringjoone $|z| = 1$ punktides

$$|f(z)| = |z^9 - 9z^4| \geqslant ||z^9| - |9z^4|| = 8$$

ning

$$|g(z)| = |3z^3 + 2z^2 - 1| \leqslant |3z^3| + |2z^2| + 1 = 6.$$

Sellest näeme, et Rouche teoreemi tingimused on täidetud ning seega on võrrandil (2) ühikringis sama palju lahendeid, kui neid on seal võrrandil

$$f(z) = z^9 - 9z^4 = z^4(z^5 - 9) = 0.$$

Viimasel on neid 4 ($z = 0$ on neljakordne lahend), sest $\sqrt[5]{9} > 1$.

Rouche teoreemi järeldusena tõestame veel kord **algebra põhiteoreemi**:

igal n-astme polünoomil on parajasti n nullkohta.

Tõestus. Olgu

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Võtame $f(z) = a_n z^n$ ja $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$. Siis $P_n(z) = f(z) + g(z)$ ning

$$\lim_{z \to \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0.$$

Viimase seose põhjal leidub niisugune $R > 0$, mille puhul piirkonnas $|z| < R$ kehtib võrratus

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1.$$

Me saame, et ringi $|z| \leqslant R$ suhtes on täidetud Rouche teoreemi tingimused, mistõttu funktsioonidel P_n ja f on ühepalju nullkohti ringis $|z| < R$. Viimasel on neid n (0 on n-järku nullkoht). Teoreem on tõestatud.

Ülesanded

1. Leida järgmiste võrrandite lahendite arv sulgudes näidatud piirkondades:

   a) $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$ $(|z|<1)$,

   b) $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ $(|z|<1)$,

   c) $z^4-5z+1=0$ $(|z|<1,\ 1<|z|<2)$,

   d) $z^4-8z+10=0$ $(|z|<1,\ 1<|z|<3)$.

   Vastus: a) 1, b) 0, c) 1 ja 3, d) 0 ja 4.

2. Mitu lahendit on võrrandil $e^z=az^n$ (n on naturaalarv) ringis $|z|<R$, kui $|a|>e^R R^{-n}$?

   Vastus: n.

7.6. ANALÜÜTILISE FUNKTSIOONI PÖÖRAMINE

Analüütilisele funktsioonile pöördfunktsiooni leidmisel osutub õigeks täpselt samasugune väide, nagu seda tunneme diferentseeruvate reaalmuutuja funktsioonide puhul. Nimelt, kehtib järgmine

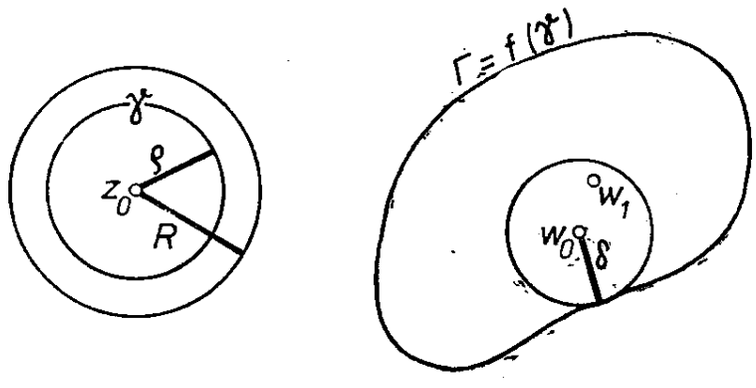
Teoreem. *Ühese analüütilise funktsiooni f jaoks on tingimus $f'(z_0)\neq 0$ tarvilik ja piisav selleks, et punktil z_0 leiduks ümbrus, kus funktsioon f on üheleheline.*

Tõestus. Kehtigu ringis $|z-z_0|<R$ seos

$$w=f(z)=w_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots .$$

Et $f'(z_0)\neq 0$, siis leidub niisugune ring $|z-z_0|\leqslant\varrho$, milles $f(z)\neq w_0$, kui $z\neq z_0$. Tähistame sümboliga γ ringjoone $|\zeta-z_0|=\varrho$, mille kujutiseks olgu joon Γ (joon. 38). Kui võtame $\delta=\min\limits_{\omega\in\Gamma}|\omega-w_0|$, siis iga w_1 korral ringist $|w-w_0|<\delta$ kehtib seos

$|f(\zeta)-w_0|>|w_0-w_1|$, kus $\zeta\in\gamma$.



Joon. 38

Selle võrratuse ja Rouche teoreemi põhjal on võrranditel

$f(z)-w_0=0$,

$f(z)-w_1=f(z)-w_0+(w_0-w_1)=0$

ühepalju lahendeid ringis $|z-z_0|<\varrho$. Et esimesel võrrandil on seal üks lahend, siis on seda ka teisel võrrandil. Seega: tõepoolest, igale kujutisele ringist $|w-w_0|<\delta$ vastab parajasti üks originaal, s. t. funktsioon $w=f(z)$ on seal üheleheline. Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. *Analüütilisel funktsioonil f on punkti z_0 teatavas ümbruses ühene pöördfunktsioon parajasti siis, kui $f'(z_0)\neq 0$. See pöördfunktsioon on analüütiline.*

Tõestus. Teoreemi tõestuse käigus nägime, et pöördfunktsioon $z=\varphi(w)$ on ühene ringis $|w-w_0|<\delta$. Et diferentseeruva funktsiooni pöördfunktsioon on diferentseeruv, siis φ on regulaarne ning seega ka analüütiline ringis $|w-w_0|<\delta$.

Märkus. Esitatud teoreemi tõestusest ilmneb, et mittekonstantne funktsioon $w=f(z)$ kujutab punkti z_0 ümbruse $|z-z_0|<\varrho$ piirkonnaks, mis sisaldab punkti $w_0=f(z_0)$ mingi ümbruse. Seda ka siis, kui $f'(z_0)=0$.

Järeldus 2. *Mittekonstantne analüütiline funktsioon kujutab lahtise hulga lahtiseks hulgaks.*

Tõestus. Lahtise hulga igal punktil z_0 on ümbrus, mis kuulub sellesse hulka. Niisuguse ümbruse kujutis sisaldab punkti z_0 kujutise w_0 mingi ümbruse, s. t. et w_0 on kujutishulga sisepunkt. Kujutishulk on lahtine.

Järeldus 3. *Mittekonstantne analüütiline funktsioon kujutab piirkonna piirkonnaks.*

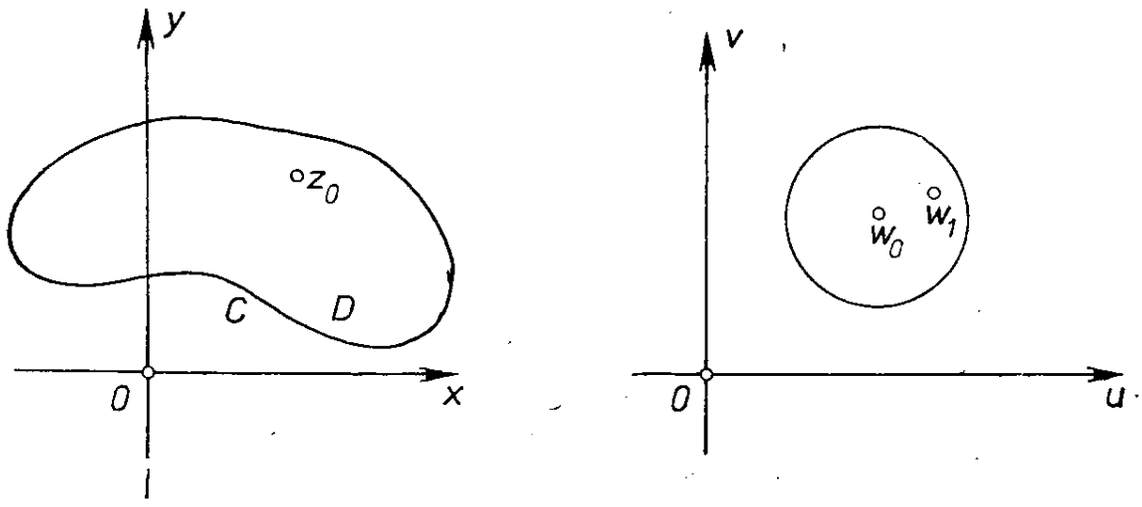
Tõestus. Et piirkond on lahtine ja sidus hulk, siis eelmist järeldust arvestades on vaja veenduda kujutishulga sidususes. Viimane aga järeldub faktist, et joon kujutub jooneks.

7.7. MOODULI MAKSIMUMI PRINTSIIP

Mooduli maksimumi printsiibina tuntakse järgmist teoreemi.

Teoreem. *Kui mittekonstantne funktsioon on analüütiline piirkonnas D ja pidev selle rajajooneni C, siis funktsiooni moodul ei saavuta oma maksimaalset väärtust piirkonnas D, vaid rajajoonel C.*

Tõestus. Oletame väite vastaselt, et funktsiooni moodulil on maksimaalne väärtus punktis $z_0\in D$. Et aga punktil $w_0=f(z_0)$ on ümbrus, mis koosneb vaid kujutistest $f(z)$, siis saame sellest ümbrusest (joon. 39) valida kujutise $w_1=f(z_1)$, mille puhul $|w_1|>|w_0|$, s. t. $|f(z_1)|>|f(z_0)|$. Saime vastuolu, mis tõestabki teoreemi.



Joon. 39

Mooduli miinimumi printsiip. *Kui mittekonstantne funktsioon on analüütiline ja nullist erinev piirkonnas D ning pidev selle rajajooneni C, siis selle funktsiooni moodul ei saavuta oma minimaalset väärtust piirkonnas D, vaid rajajoonel C.*

Tõestus on analoogiline eelnevaga.

7.8. HARMOONILISTE FUNKTSIOONIDE OMADUSI

Harmooniliste ja regulaarsete funktsioonide vahel on tihe seos. Näitame, et ka nende funktsioonide omadused on sarnased. Täpsemalt öeldes: kanname eelmises jaotises tõestatud tulemused üle harmoonilistele funktsioonidele. Alustame teoreemist, mida tuntakse **ekstreemumi printsiibina**. Kirjutiste lihtsustamiseks tähistame $u(x, y) = u(z)$.

Teoreem 1. *Kinnises piirkonnas $\overline{D}$ ei saavuta mittekonstantne harmooniline funktsioon u oma ekstremaalset väärtust selle piirkonna sisepunktis.*

Tõestus. Oletame väite vastaselt, et funktsioon u saavutab oma maksimumi punktis $z_0 \in D$. Kui piirkond D on mitmelisidus, siis ühendame rajajoone üksikud sidusad osad omavahel nii, et piirkond D muutub ühelisidusaks piirkonnaks G ning z_0 jääb ka viimase sisepunktiks. Piirkonnas G leiame funktsioonile u kaasharmoonilise v ning moodustame regulaarse funktsiooni $g = u + iv$. Ka funktsioon $w = e^{g(z)}$ on regulaarne piirkonnas G ning $|e^{g(z)}| = e^{u(z)}$. Et aga $e^{u(z)}$ ja $u(z)$ saavutavad maksimumi koos, siis peaks regulaarse funktsiooni $w = e^{g(z)}$ moodul saavutama oma maksimumi piirkonna G sisepunktis. See on aga mooduli maksimumi printsiibi järgi võimatu. Saadud vastuolu tõestabki, et funktsioonil u ei saa olla maksimumi piirkonna D sisepunktis.

Selle tõestamiseks, et funktsioon u ei saavuta ka oma miini-

mumi piirkonna D sisepunktis, võtame $u_1(z)=-u(z)$ ning kasutame äsjatõestatud tulemust maksimumi kohta.

Teoreem 2. *Kui funktsioon on kogu tasandil harmooniline ja ühepoolselt tõkestatud (näiteks ülalt), siis on ta konstantne.*

Tõestus. Olgu $u(z)\leqslant M$. Moodustame regulaarsed funktsioonid $w=g(z)=u(z)+iv(z)$ ning $w=e^{g(z)}$. Siis $|e^{g(z)}|=e^{u(z)}\leqslant e^{M}$ ning seega (Liouville'i teoreemi põhjal) $e^{g(z)}=\text{const}$. Siit omakorda järeldub, et $g(z)=\text{const}$. Et kompleksmuutuja funktsioon on konstantne parajasti siis, kui selle reaal- ja imaginaarosad on konstantsed, siis saamegi järeldusena teoreemi väite.

Ülesanded

1. Tõestada, et suvalisel harmoonilisel funktsioonil on mistahes järku osatuletisi ja et need on samuti harmoonilised funktsioonid.
2. Näidata, et kui kahel harmoonilisel funktsioonil on võrdsed väärtused piirkonna D rajajoonel, siis ühtivad need funktsioonid kogu piirkonnas D.

8. KONFORMNE KUJUTAMINE

8.1. KONFORMSE KUJUTAMISE PÕHIÜLESANNE

Kui jaotises 2.7. vaatlesime tuletise geomeetrilist tähendust, siis selgitasime, et regulaarne funktsioon $w=f(z)$, $z\in D$, teostab konformse kujutamise, kui $f'(z)\neq 0$ iga $z\in D$ puhul. Üks-ühest kujutust nimetatakse **konformseks**, kui säilivad nurgad nii suuruse kui ka suuna poolest ning kehtib lõpmata väikeste ringjoonte invariantsus. Näitame nüüd, et iga konformne kujutus on esitatav analüütilise (ehk regulaarse) funktsiooniga. Selleks tõestame järgmise teoreemi.

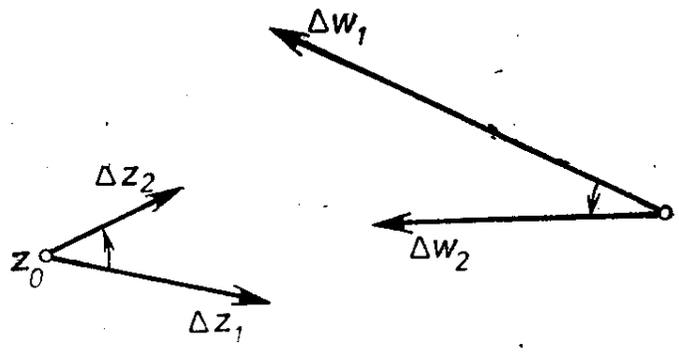
Teoreem. *Kui funktsioon $w=f(z)$ kujutab konformselt piirkonna D piirkonnaks G, siis f on regulaarne ning $f'(z)\neq 0$ iga $z\in D$ puhul.*

Tõestus. Et iga ühene kujutus on vaadeldav funktsioonina, siis võime ka konformse kujutuse puhul kõnelda funktsioonist $w=f(z)$, $z\in D$. Jääb näidata, et iga $z\in D$ puhul $f'(z)\neq 0$. Tõepoolest, vaadeldes punkti z_0 kujutist w_0 ning kahe punktist z_0 lähtuva lõpmata väikese vektori kujutist (joon. 40), saame konformse kujutuse definitsiooni põhjal, et

$$\frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|}=\frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|}=k\neq 0$$

ning

$$\arg \Delta w_2-\arg \Delta w_1=\arg \Delta z_2-\arg \Delta z_1.$$



Joon. 40

Viimane neist seostest esitub kujul

$$\arg \Delta w_2 - \arg \Delta z_2 = \arg \Delta w_1 - \arg \Delta z_1$$

ehk

$$\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha.$$

Seega saame piirile minnes, et

$$\lim_{\Delta z_1 \to 0} \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \lim_{\Delta z_2 \to 0} \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = k e^{i\alpha},$$

millest Δz_1 ja Δz_2 suvalisuse tõttu järeldamegi, et eksisteerib $f'(z)$ ning $|f'(z_0)| = k \neq 0$. Teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. *Kahe konformse kujutuse kompositsioon on konformne kujutus.*

Järeldus 2. *Konformse kujutuse pöördkujutus on konformne kujutus.*

Konformse kujutamise põhiülesandeks nimetatakse järgmist ülesannet:

antud piirkondade paari D ja G jaoks leida selline piirkonnas D regulaarne funktsioon $w = f(z)$, mille korral $f'(z) \neq 0$ iga $z \in D$ jaoks ning mis kujutab piirkonna D piirkonnaks G.

Ülesanded

1. Tõestada, et funktsioon $w = \dfrac{2iz}{z+3}$ kujutab ringi $|z-1| < 2$ konformselt ühikringiks $|w| < 1$.
2. Tõestada, et funktsioon $w = z^2$ kujutab piirkonna $-\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{2}$ konformselt pooltasandiks $\operatorname{Im} w > 0$ ja piirkonna $|z| < 2$, $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ piirkonnaks $|w| < 4$, $\operatorname{Im} w > 0$.
3. Tõestada, et funktsioon $w = e^{iz}$ kujutab piirkonna $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ konformselt poolringiks $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

Järgnevas tõestame kaks teoreemi, millest esimest tuntakse **üksühese vastavuse printsiibina** ja teist **rajade vastavuse printsiibina.**

Teoreem 1. *Kui piirkonnas D regulaarne funktsioon $w=f(z)$ kujutab piirkonna D üks-üheselt piirkonnaks G, siis on see kujutus konformne.*

Tõestus. Jaotises 7.6 tõestasime, et kujutus $w=f(z)$ on üksühene parajasti siis, kui $f'(z)\neq 0$ ühegi z puhul. Viimane tingimus aga tähendab, et kujutus on konformne. Teoreem on tõestatud.

Öeldakse, et kujutamisel säilib joone C suund, kui punkti pidevale liikumisele joone C positiivses suunas vastab tema kujutispunkti liikumine kujutisjoone Γ positiivses suunas.

Teoreem 2. *Olgu tõkestatud piirkonnas D, mis on piiratud rajajoonega C, antud regulaarne funktsioon $w=f(z)$. Kui see funktsioon on pidev ka rajajoonel C ning kujutab joone C üks-üheselt piirkonna G rajajooneks Γ ja säilitab joone suuna, siis funktsioon $w=f(z)$ kujutab piirkonna D konformselt piirkonnaks G.*

Tõestus. Meil piisab näidata, et funktsioon $w=f(z)$ kujutab piirkonna D üks-üheselt piirkonnaks G. Selleks aga veendume, et (joon. 41)

1) iga $w_1 \in G$ jaoks eksisteerib parajasti üks selline $z_1 \in D$, mille puhul $f(z_1)=w_1$;

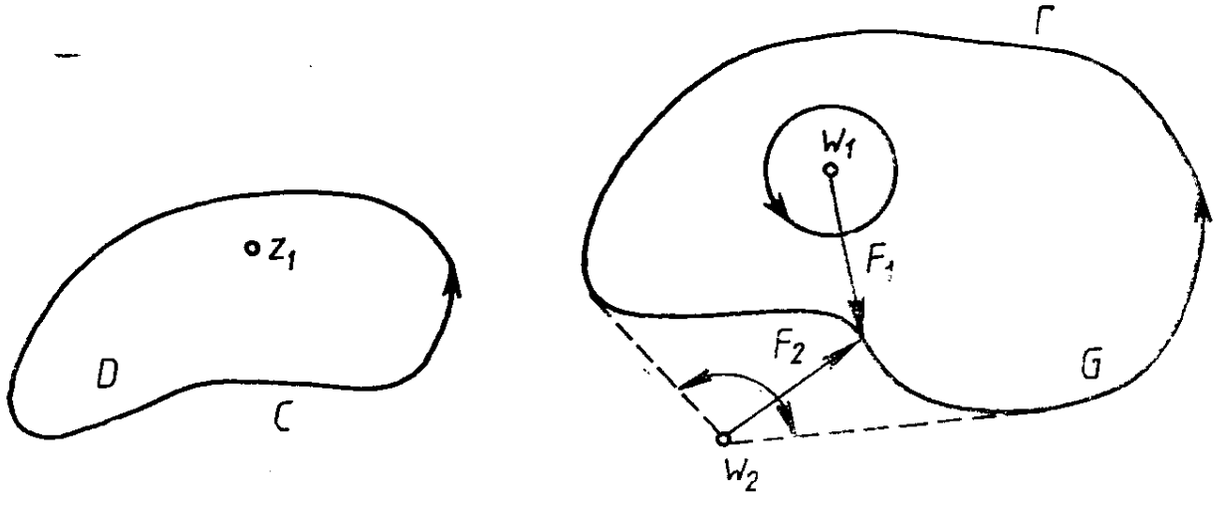
2) ühegi $w_2 \notin G \cup \Gamma$ jaoks ei eksisteeri originaali piirkonnas D.

Moodustame funktsioonid.

$$w=F_1(z)=f(z)-w_1,$$

$$w=F_2(z)=f(z)-w_2$$

ning rakendame argumendi printsiipi. Et moodustatud funktsioonid on regulaarsed, siis raja C täielikul läbimisel muutuvad nende argu-



Joon. 41

mendid arvu 2π ja nullkohtade arvu korrutise võrra. Jooniselt 41 on näha, et $\Delta_C \arg F_1(z)=2\pi$ ja $\Delta_C \arg F_2(z)=0$. Seega on funktsioonil F_1 piirkonnas D_1 üks nullkoht, funktsioonil F_2 aga mitte ühtegi. Väited 1) ja 2) ning seega ka kogu teoreem on tõestatud.

M ä r k u s. Kui joone C positiivsele suunale vastaks joone negatiivne suund, siis saaksime, et $\Delta_C \arg F_1(z)=-2\pi$ ja $\Delta_C \arg F_2(z)=0$. Arvestades argumendi printsiipi, on niisugune olukord võimalik sel juhul, kui funktsioonil f (seega ka funktsioonidel F_1 ja F_2) on piirkonnas D üks esimest järku poolus ning nullkohti funktsioonil F_2 üks, funktsioonil F_1 aga ei ühtegi. Selline situatsioon vastab olukorrale, kus f kujutab piirkonna D joone Γ suhtes väliseks piirkonnaks ning üks punktidest kujutub lõpmatuspunktiks.

Ülesanded

1. Tõestada, et funktsioon $w=-i\dfrac{z-1}{z+1}$ kujutab ühikringi ülemise poole konformselt komplekstasandi esimeseks veerandiks.
2. Tõestada, et funktsioon $w=\operatorname{ch} z$ kujutab piirkonna $\operatorname{Re} z>0$, $0<\operatorname{Im} z<\pi$ konformselt ülemiseks pooltasandiks.
3. Tõestada, et funktsioon $w=\operatorname{tan} z$ kujutab piirkonna $0<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0$ konformselt ülemiseks pooltasandiks lõikega piki lõiku $[0, i]$.

8.3. KONFORMSE KUJUTAMISE PÕHIÜLESANDE LAHENDUVUS

Millistel tingimustel on konformse kujutamise põhiülesanne lahenduv, sellele annab vastuse

Riemanni teoreem. *Iga üheli sidusat piirkonda, mille raja sisaldab vähemalt kaks punkti, on võimalik konformselt kujutada ühikringiks.*

Käesolevas me seda teoreemi ei tõesta. Näitame vaid teoreemi eelduste tähtsust. Osutub, et mitmelisidusat piirkonda D ei saa kujutada konformselt ühelisidusaks piirkonnaks D_1. Tõepoolest, kui D on mitmelisidus, võib temas valida kinnise joone C, mis hõlmab ka piirkonda D mittekuuluvaid punkte. Kui D_1 on ühelisidus, on joone C kujutis selles piirkonnas kinnine joon C_1, mis hõlmab ainult piirkonna D_1 punkte. Deformeerime joont C_1 piirkonnas D_1 nii, et ta lõpuks kõdub üheks punktiks. Kui kujutus oleks konformne, siis on nii tema kui ka tema pöördkujutus pidevad ning seetõttu peaks ka joon C kõduma üheks punktiks, kuid sealjuures nii, et ta ei väljuks piirkonnast D. See on võimatu.

Mis puutub tingimusse, et raja peab sisaldama vähemalt kaks punkti, siis seda ei saa ära jätta kasvõi Liouville'i teoreemi tõttu.

Viimase põhjal ei saa kogu tasandit (rajaks ainult lõpmatuspunkt) ühikringiks kujutada.

M ä r k u s. Riemanni teoreemis räägitakse ühikringist, kuid selle asemel võiks olla mis tahes ühelisidus piirkond, mille rajal on samuti vähemalt kaks punkti. Niisuguse piirkonna saab äsjasõnastatud teoreemi abil kujutada konformselt ühikringiks. Pöördkujutus oleks samuti konformne ning kujutaks ühikringi vaadeldavaks piirkonnaks. Et kahe konformse kujutamise järjest rakendamine on jällegi konformne kujutus, siis saamegi siit Riemanni teoreemi näiliselt üldisema sõnastuse.

On selge, et kui leidub üks konformne kujutus, mis kujutab piirkonna D ühikringiks, siis leidub niisuguseid kujutusi lõpmata palju. Tõepoolest, iga kujutus, mis koosneb vaadeldavast konformsest kujutusest ning pöördest (ümber nullpunkti), on samuti konformne. Millistel tingimustel on konformse kujutamise põhiülesandel ühene lahend, sellele annab vastuse järgmine

Teoreem. *Leidub üks ja ainult üks funktsioon* $w=f(z)$, *mis kujutab etteantud ühelisidusa piirkonna* D, *mille rajal on vähemalt kaks punkti, ühikringiks* $|w|<1$ *ning täidab tingimusi*

$$f(z_0)=w_0,\ \arg f'(z_0)=\alpha_0, \tag{1}$$

kus $z_0 \in D$ ja $|w_0|<1$.

T õ e s t u s. Oletame, et niisuguseid funktsioone on kaks,

$$w_1=f(z) \quad \text{ja} \quad w_2=\varphi(z).$$

Tähistame piirkonna D raja C punktid tähega ζ. Tingimusest (1) ja rajade vastavusest saame, et ($w_0=0$ korral)

$$f(z_0)=0,\quad \arg f'(z_0)=\alpha_0,\quad |f(\zeta)|=1,$$

$$\varphi(z_0)=0,\quad \arg \varphi'(z_0)=\alpha_0,\quad |\varphi(\zeta)|=1.$$

Vaatleme funktsiooni

$$w_2=\varphi[f^{-1}(w_1)]=g(w_1).$$

See funktsioon kujutab ühikringi ühikringiks, kusjuures

$$g(0)=\varphi[f^{-1}(0)]=\varphi(z_0)=0$$

ja

$$g'(0)=\varphi'(z_0)\frac{d}{dw_1}f^{-1}(0)=\varphi'(z_0)\frac{1}{f'(z_0)}=\frac{r_2\,e^{i\alpha_0}}{r_1\,e^{i\alpha_0}}=\frac{r_2}{r_1}>0.$$

Vaatleme nüüd abifunktsiooni h, mis on defineeritud järgmiselt:

$$h(w_1)=\begin{cases}\dfrac{g(w_1)}{w_1}, & 0<|w_1|<1,\\ g'(0), & w_1=0.\end{cases}$$

Funktsioon h on pidev ja nullist erinev kinnises ringis $|w_1| \leqslant 1$, kusjuures $|h(w_1)| = 1$, kui $|w_1| = 1$. Mooduli maksimumi ja miinimumi printsiipide põhjal

$$|h(w_1)| \equiv 1, \quad |w_1| < 1.$$

Siit saame, et $h(w_1) \equiv \text{const}$. Tingimusest $h(0) = g'(0) > 0$ järeldame, et $h(w_1) \equiv 1$. Funktsiooni h definitsiooni põhjal saame, et

$$w_2 = g(w_1) = w_1.$$

Seega funktsioonid f ja φ langevad kokku ning teoreem on sellega tõestatud.

Märkus. Tingimusi (1), mis määravad konformset kujutamist teostava funktsiooni üheselt, nimetatakse **normeerivateks tingimusteks**. Kui vaadelda neid normeerivaid tingimusi (1), siis märkame, et need sisaldavad kolm reaalset parameetrit (w_0 reaal- ja imaginaarosa ning α). Osutub, et tingimuste (1) asemel võib vaadelda ka teisi tingimusi, mis samuti sisaldavad kolme reaalset parameetrit ning normeerivad konformse kujutamise. Näiteks, anname ette ühe sisepunkti ja ühe rajapunkti kujutise:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1$$

($z_0 \in D$ ja $|w_0| < 1$, $z_1 \in C$ ning $|w_1| = 1$). Konformne kujutus on üheselt määratud ka siis, kui fikseerida kolme rajapunkti kujutised:

$$f(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Ülesanded

1. Leida ülemise pooltasandi kujutus $w = f(z)$ iseendaks, kui

   a) $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = \infty$;

   b) $f(0) = 1$, $f(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$.

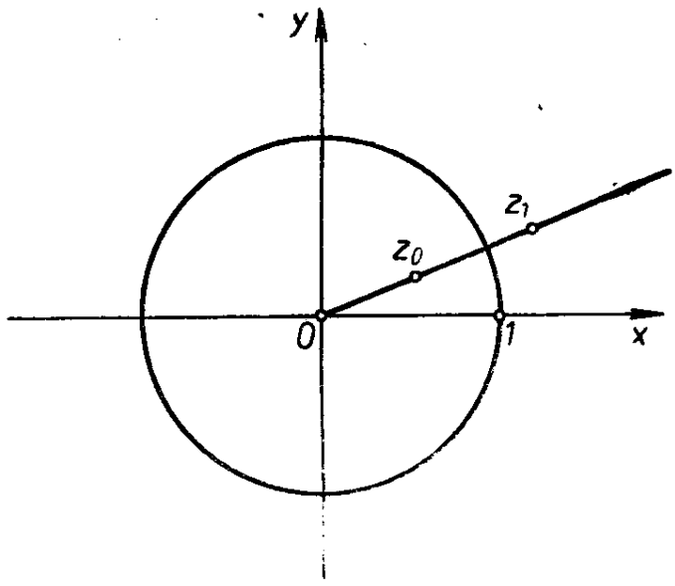
   Vastus: a) $w = \dfrac{2}{2 - z}$; b) $w = -2\dfrac{2z+1}{z-2}$.

8.4. NÄITEID KONFORMSE KUJUTAMISE KOHTA

Käesolevas jaotises vaatleme mõningaid lihtsaid, kuid edasise ainekäsitluse seisukohalt tähtsaid näiteid.

Näide 1. Leida funktsioon, mis kujutab ühikringi konformselt ühikringiks, kusjuures punkt z_0 ($|(z_0)| < 1$) kujutub nullpunktiks.

Et siin ringjoon peab kujutuma ringjooneks (rajade vastavus), siis otsime vastavat funktsiooni murdlineaarsete funktsioonide hulgast. Selle murdlineaarse funktsiooni määramiseks on meil tingimus $f(z_0) = 0$. Et aga nullpunktiga on ühikringjoone suhtes süm-



Joon. 42

meetriline lõpmatuspunkt, siis peab punktiga z_0 sümmeetriline punkt z_1 (vt. joon. 42) kujutuma lõpmatuspunktiks, s. t. $f(z_1)=\infty$. Milline punkt on sümmeetriline punktiga z_0? Vastavalt sümmeetriliste punktide definitsioonile $|z_0||z_1|=1$, millest $|z_1|=\frac{1}{|z_0|}$, ning $\arg z_0=\arg z_1$, mistõttu $z_1=\frac{1}{\bar{z}_0}$.

Saadud kahe punkti z_0 ja $1/\bar{z}_0$ kujutiste järgi püüame määrata otsitavat murdlineaarset funktsiooni

$$w=\frac{az+b}{cz+d}. \tag{1}$$

Vastavalt konformse kujutamise ühesuse teoreemile võime öelda, et otsitaval funktsioonil jääb üks reaalne parameeter määramatuks, sest me ei fikseerinud pöörde suurust punktis z_0. Niisiis peame saama määrata murdlineaarse funktsiooni, milles on vaid üks reaalne parameeter.

Seosest

$$w=f(z_0)=\frac{az_0+b}{cz_0+d}=0$$

saame, et $az_0+b=0$, s. t. $b=-az_0$. Teiselt poolt,

$$w=f\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)=\frac{a+b\bar{z}_0}{c+d\bar{z}_0}=\infty,$$

s. t. $c+d\bar{z}_0=0$, millest $c=-d\bar{z}_0$. Asendamisel seosesse (1) saame, et

$$w=\frac{az-az_0}{-d\bar{z}_0z+d}=\frac{a}{d}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}.$$

Et aga ühikringjoone punkt $z=1$ peab kujutuma ühikringjoone punktiks, siis

$$|f(1)| = \left|\frac{a}{d}\right| \left|\frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}\right| = \left|\frac{a}{d}\right| = 1,$$

s. t. $\frac{a}{d}=e^{i\alpha}$, kus α on mingi reaalarv. Seega saame, et otsitavaks funktsiooniks on

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}. \qquad (2)$$

Leides saadud funktsiooni tuletise punktis z_0

$$f'(z_0) = e^{i\alpha}\frac{1-z_0\bar{z}_0}{(1-\bar{z}_0 z)^2}\Big|_{z=z_0} = e^{i\alpha}\frac{1}{1-|z_0|^2},$$

näeme, et parameetri α määrab tasandi pööre punktis z_0, sest $\arg f'(z_0)=\alpha$.

Kui avaldada seosest (2) muutuja z, saame selle kujutuse pöördkujutuse, s. t. funktsiooni, mis kujutab ühikringi ühikringiks, kusjuures nullpunkt kujutub etteantud punktiks z_0 ($|z_0|<1$).

Näide 2. Kujutada ülemine pooltasand $\operatorname{Im} z>0$ ühikringiks $|w|<1$ selliselt, et punkt z_0 ($\operatorname{Im} z_0>0$) kujutub nullpunktiks.

Otsime seda funktsiooni jällegi murdlineaarsete funktsioonide hulgast, sest rajaks olev sirge peab kujutuma ringjooneks. Et sel juhul rajade suhtes sümmeetrilised punktid peavad kujutuma sümmeetrilisteks punktideks, siis

$$w(z_0)=0,\ w(\bar{z}_0)=\infty.$$

Kui tähistame

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

siis eelnevate tingimuste põhjal saame, et

$$az_0+b=0,\ c\bar{z}_0+d=0,$$

millest

$$w=\frac{a}{c}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}.$$

Et punkt $z=0$ on originaalide piirkonna rajapunkt, siis peab tema kujutispunkt asuma ühikringjoonel. Seega saame, nagu eelmisegi näite puhul, et $\frac{a}{c}=e^{i\alpha}$, kus α on reaalne parameeter. Kokkuvõttes võime kirjutada, et otsitav funktsioon avaldub kujul

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Selle funktsiooni pöördfunktsioon kujutab ühikringi ülemiseks pooltasandiks, kusjuures $w(0) = z_0$ ($\operatorname{Im} z_0 > 0$).

Näide 3. Leida funktsioon, mis kujutab ülemise pooltasandi konformselt ülemiseks pooltasandiks.

Otsime murdlineaarset funktsiooni

$$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Põhimõtteliselt saab kordajate leidmiseks moodustada süsteemi 4 reaalarvulisest originaalist z koos nende reaalarvuliste kujutistega w. Sellise lineaarse süsteemi lahendid a, b, c, d on ka reaalarvud.

Vastupidi, kui kordajad a, b, c, d on reaalsed, siis kujutub reaaltelg reaalteljeks. Et reaaltelje suund jääks samaks (siis kujutub ülemine pooltasand ülemiseks pooltasandiks), peab funktsiooni tuletise argument võrduma nulliga iga reaalarvulise z puhul, s. t. tuletis peab neis punktides olema positiivne.

Leides vastava tuletise, saame tingimusena, et

$$\frac{ad - bc}{(cx+d)^2} > 0.$$

millest

$$ad - bc > 0. \tag{3}$$

Seega: ülemise pooltasandi kujutab iseendaks niisugune murdlineaarne funktsioon, mille kordajad on reaalsed ning täidavad tingimust (3).

Ülesanded

1. Kujutada ühikring ühikringiks nii, et

a) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ja $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$;

b) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0$ ja $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

c) $w(0) = 0$ ja $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$;

d) $w(a) = a$ ja $\arg w'(a) = \alpha$.

Vastus: a) $w = \frac{2z-1}{2-z}$; b) $w = \frac{2iz+1}{2+iz}$; c) $w = -iz$;

d) $\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

2. Kujutada ülemine pooltasand ühikringiks selliselt, et

a) $w(i)=0$ ja $\arg w'(i)=-\dfrac{\pi}{2}$;

b) $w(2i)=0$ ja $w'(2i)>0$.

Vastus: a) $w=\dfrac{z-i}{z+i}$; b) $w=i\dfrac{z-2i}{z+2i}$.

3. Kujutada ring $|z|<R$ ühikringiks.

Vastus: $w=Re^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0z}$.

4. Leida järgmised konformsed kujutused:

a) ring $|z|<R$ pooltasandiks $\operatorname{Im} w>0$;
b) pooltasand $\operatorname{Re} z>0$ ühikringiks $|w|<1$;
c) pooltasand $\operatorname{Re} z>0$ pooltasandiks $\operatorname{Re} w>0$.

Vastus: a) $\dfrac{aRe^{i\alpha}-\bar{a}z}{Re^{i\alpha}-z}$, $\operatorname{Im} a>0$;

b) $w=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{z+a}$, $\operatorname{Re} a>0$, c) $w=\dfrac{az+ib}{icz+d}$, a, b, c, d — reaalarvud, mis täidavad tingimust $ad+bc>0$.

8.5. DIRICHLET' ÜLESANNE

Mitmed väljateooria ja hüdromehhaanika probleemid taanduvad järgmisele matemaatilisele ülesandele:

Leida piirkonnas D harmooniline funktsioon $u=h(x, y)$, mis selle piirkonna rajajoonel C omandab etteantud pidevalt muutuvad väärtused.

Seda ülesannet nimetatakse ***Dirichlet' ülesandeks***. Harmoonilise funktsiooni $u=h(x, y)$ väärtusena rajapunktis $\zeta=(\xi, \eta)=\xi+i\eta$ mõistame piirväärtust $\lim\limits_{z\to\zeta} h(x, y)$, kus $z\in D$ ja $z=(x, y)=x+iy$. Lahendame selle ülesande konformset kujutamist kasutades. Ühtlasi näeme, et Dirichlet' ülesanne on lahenduv nendesamade piirkondade korral, mida saab konformselt kujutada ühikringiks. Esitame Dirichlet' ülesande lahendamise üldskeemi ning leiame lahendid Poisson'i integraalidena ringi ja ülemise pooltasandi tarvis.

a) Vaatleme kõigepealt üldjuhtu. Lühiduse mõttes kirjutame $h(x, y)$ asemel $h(z)$ ning rajaväärtuste $h(\xi, \eta)$ asemel $h(\zeta)$.

Kujutleme nüüd, et on teada funktsioon φ_z, mis kujutab piirkonna D konformselt ühikringiks $|w|<1$, kusjuures suvaliselt fikseeritud punkt $z \in D$ kujutub punktiks $w=0$. Ringis $|w|<1$ vaatleme regulaarset funktsiooni F, mille reaalosaks on $^*U=h\circ\varphi_z^{-1}$, s. t. $h=U\circ\varphi_z$. Kui võtame $\omega=e^{i\theta}$, siis $d\omega=ie^{i\theta}d\theta$ ning Cauchy valemi põhjal

$$F(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1}\frac{F(\omega)\,d\omega}{\omega}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(e^{i\theta})\,d\theta$$

ehk

$$U(0)+iV(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(e^{i\theta})\,d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(e^{i\theta})\,d\theta,$$

kus V on funktsiooni F imaginaarosa. Viimase võrduse põhjal

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1}\frac{U(\omega)}{\omega}\,d\omega.$$

Seose $\omega=\varphi_z(\zeta)$ tõttu saame üle minna muutujale ζ. Kui veel arvestame, et $h(z)=U[\varphi_z(z)]=U(0)$, saame valemi

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi_z'(\zeta)}{\varphi_z(\zeta)}h(\zeta)\,d\zeta. \qquad (1)$$

b) Olgu piirkonnaks D ülemine pooltasand. Tema rajaks on reaaltelg, mille punktid märgime tähega t. Otsitava harmoonilise funktsiooni rajaväärtusteks olgu $h(t)$.

Funktsiooniks, mis kujutab ülemise pooltasandi konformselt ühikringiks ja punkti z nullpunktiks, on murdlineaarne funktsioon (vt. näide 2 eelmises jaotises)

$$w=\varphi_z(\sigma)=\frac{\sigma-z}{\sigma-\bar{z}},$$

kus σ on suvaline punkt ülemiselt pooltasandilt. Seega

$$\varphi_z(t)=\frac{t-z}{t-\bar{z}}$$

ning

$$\frac{\varphi_z'(t)}{\varphi_z(t)}=\frac{z-\bar{z}}{(t-\bar{z})(t-z)}=\frac{z-\bar{z}}{|t-z|^2}.$$

* Sümbol $\circ$ tähistab funktsioonide kompositsiooni (liitfunktsiooni).

Olgu $z=x+iy$. Siis

$$\frac{\varphi_z'(t)}{\varphi_z(t)}=\frac{2iy}{|t-x-iy|^2}=\frac{2yi}{(t-x)^2+y^2}.$$

Valemi (1) põhjal saame (seost $h(x, y)=h(z)$ arvestades), et

$$h(x, y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{2}$$

Valem (2) annab otsitava harmoonilise funktsiooni väärtused integraalina, mida nimetatakse ***Poisson'i integraaliks*** ülemise pooltasandi tarvis.

c) Valemi (1) põhjal leiame veel ringis $|\sigma|<R$ harmoonilise funktsiooni, mille rajaväärtused on $h(\zeta)=u(t)$, kus $\zeta=Re^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$.

Funktsiooniks φ_z, mis kujutab ringi $|\sigma|<R$ konformselt ühikringiks selliselt, et punkt z kujutub nullpunktiks, on eelmise jaotise ülesande 3 põhjal (võttes $\alpha=0$) murdlineaarne funktsioon

$$w=\varphi_z(\sigma)=R\frac{\sigma-z}{R^2-\bar{z}\sigma}.$$

Arvutades saame, et

$$\varphi_z'(\zeta)=R\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)^2}$$

ning

$$\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi_z(\zeta)}=\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}.$$

Kui võtta $\zeta=Re^{it}$ ja $z=re^{i\varphi}$, siis

$$\frac{\varphi_z'(\zeta)}{\varphi_z(\zeta)}d\zeta=\frac{(R^2-r^2)ie^{it}dt}{R^2e^{it}-Rre^{-i\varphi}e^{2it}-Rre^{i\varphi}+r^2e^{it}}=$$

$$=\frac{(R^2-r^2)i\,dt}{R^2+r^2-Rre^{i(t-\varphi)}-Rre^{i(\varphi-t)}}=\frac{(R^2-r^2)i\,dt}{R^2+r^2-2rR\cos(t-\varphi)}.$$

Tähistades $h(x, y)=h(z)=h(re^{i\varphi})=u(r, \varphi)$, saame valemi (1) põhjal, et

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\varphi)}u(t)\,dt. \tag{3}$$

Otsitava harmoonilise funktsiooni väärtused saime integraalina, mida nimetatakse **Poisson'i integraaliks** ringi tarvis.

8.6. SCHWARZI VALEMID

Me teame, et regulaarset funktsiooni saab Cauchy valemi põhjal esitada tema rajaväärtuste kaudu. Teiselt poolt teame, et regulaarne funktsioon on määratud oma reaalosaga. Eelmise jaotise põhjal saame nüüd järeldada, et regulaarset funktsiooni on võimalik esitada tema reaalosa rajaväärtuste kaudu. Vaatleme seda ülemise pooltasandi ja ringi puhul, lähtudes eelmise jaotise valemitest (2) ja (3).

Olgu f ülemises pooltasandis regulaarne funktsioon, mille reaalosaks on $h(x, y)$ rajaväärtustega $h(t)$, $-\infty<t<\infty$. Et

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=\operatorname{Re}\frac{1}{\mathrm{i}(t-z)},$$

siis eelmise jaotise valemi (2) põhjal saame võrduse

$$h(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{1}{\mathrm{i}(t-z)}h(t)\,dt=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t)}{t-z}\,dt,$$

millest

$$f(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(t)}{t-z}\,dt+\mathrm{i}C, \tag{1}$$

kus C on reaalarvuline konstant, sest reaalosa määrab regulaarse funktsiooni puhtimaginaarse liidetava täpsuseni (vt. jaotis 2.6).

Eelmise jaotise valemist (3) saame analoogilise tulemuse ringi $|z|<R$ tarvis, arvestades, et

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}=\operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z},$$

kus $\zeta=Re^{it}$ ja $z=re^{i\varphi}$. Viimase võrduse põhjal leiame, et ringis $|z|<R$ regulaarne funktsioon f on määratud valemiga

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dt+\mathrm{i}A, \tag{2}$$

kus $u(t)$ on funktsiooni f reaalosa rajaväärtus kohal $\zeta=Re^{it}$ ning A reaalarvuline konstant.

Valemeid (1) ja (2) nimetatakse ***Schwarzi valemiteks.***

9. REGULAARSETE FUNKTSIOONIDE RAKENDAMINE VÄLJATEOORIAS

9.1. TASAPARALLEELNE VEKTORVÄLI

Regulaarsetel funktsioonidel on suur tähtsus aero- ja hüdrodünaamika, soojusjuhtivuse, elektro- ja raadiotehnika, elastsusteooria jm. küsimuste käsitlemisel. Kõikide nende puhul on tegemist teatavate vektorväljadega, mida küllaltki heas lähenduses saab vaadelda tasaparalleelsetena ehk tasandilistena. **Tasaparalleelse vektorvälja** korral leidub niisugune tasand, millega selle vektorvälja vektorid on paralleelsed ning iga selle tasandiga ristuva sirge punktidele vastavad võrdsed vektorid. Selle tasandi võtame xOy tasandiks ehk lihtsalt z-tasandiks. Sel juhul võime esialgse vektorvälja asemel vaadelda vektorvälja z-tasandil. Punktile $z=(x, y)$ vastaku vektor

$$\vec{A}=A_x(x, y)\vec{i}+A_y(x, y)\vec{j},$$

mida vaatleme kompleksarvuna $A=A_x+iA_y$.

9.2. KOMPLEKSNE POTENTSIAAL

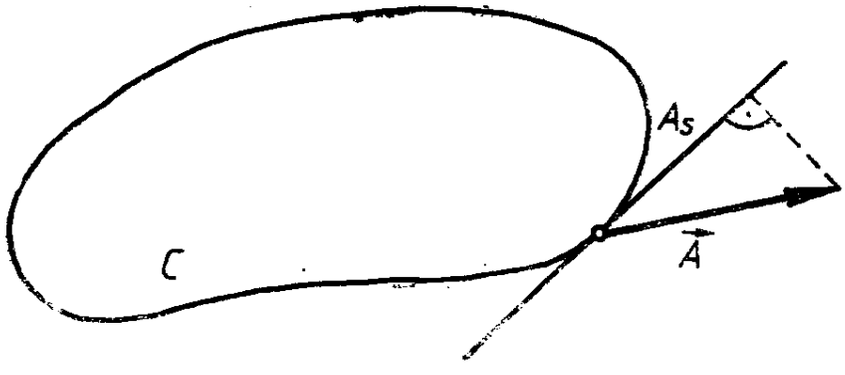
Olgu meil vektorväli $\vec{A}$ ja selles kinnine joon C. Vaatleme joone C punktidele vastavaid vektoreid $\vec{A}$ ning tähistame nende projektsioone (koos märgiga) puutujale sümboliga A_s. Seejuures loeme vektori projektsiooni A_s positiivseks, kui selle vektori suunas liikudes jääb joonega piiratud piirkond vasakule (joon. 43).

Vektorvälja $\vec{A}$ **tsirkulatsiooniks** üle kinnise joone C nimetatakse suurust

$$\Gamma_C=\int_C A_s(x, y)\,ds.$$

Arvestades, et $\overrightarrow{ds}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy$ ning

$$(\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds})=A_s ds=A_x(x, y)\,dx+A_y(x, y)\,dy,$$



Joon. 43

saame valemi

$$\Gamma_C = \int_C (\vec{A} \cdot d\vec{s}) = \int_C A_x dx + A_y dy.$$

Tsirkulatsiooni pindtihedust, s. t. piirväärtust tsirkulatsiooni Γ_C ja joonega C piiratud kujundi pindala S suhtest, kui joon tõmbub kokku punktiks z, nimetatakse **vektorvälja rootoriks** ehk **keeriseks** punktis z:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{C \to z} \frac{1}{S} \int_C (\vec{A} \cdot d\vec{s}).$$

Matemaatilise analüüsi kursusest teame, et

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Kui ühelisidusas piirkonnas D iga kinnise joone C korral $\Gamma_C = 0$, siis peab integraalialune avaldis valemis (1) võrduma mingi funktsiooni $u = \varphi(x, y)$ täisdiferentsiaaliga, s. t.

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \varphi(x, y).$$

Niisugust vektorvälja nimetatakse **potentsiaalseks**. Sel juhul vektori $\vec{A}$ koordinaatideks on

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

On aga teada, et avaldis $A_x dx + A_y dy$ on mingi funktsiooni täisdiferentsiaaliks parajasti siis, kui*

$$\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} \tag{2}$$

iga $z = (x, y)$ puhul piirkonnas D (Siinjuures on eeldatud avaldiste A_x ja A_y ning vastavate osatuletiste pidevust). Tingimuse (2) võib kirjutada kujul

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0.$$

Kui tingimus (2) ei ole täidetud üksikutes punktides, mis kuuluvad joonega C piiratud piirkonda, siis üldjuhul $\Gamma_C \neq 0$. Kui selliseid punkte on vaid üks (punkt z_0), siis seda punkti nimetatakse **keerispunktiks** ning suurust Γ_C **keerise intensiivsuseks** punktis z_0.

* Kangro, M. Matemaatiline analüüs II, Tln., 1968, lk. 183—185.

Vektorvälja $\vec{A}$ **vooks** läbi joone C nimetatakse suurust

$$N_C = \int_C A_n ds = \int_C (\vec{A} \cdot \overrightarrow{dn}) = \int_C A_x dy - A_y dx,$$

kus $\overrightarrow{dn} = \vec{n} ds = \vec{i} dy - \vec{j} dx$ ning $\vec{n}$ on joone C normaali suunaline ühikvektor. Siinjuures on vektor $\overrightarrow{dn}$ valitud selliselt, et $(\overrightarrow{dn} \cdot \overrightarrow{ds}) = 0$ ning $\overrightarrow{dn}$ on kinnise joone C puhul välisnormaal.

Voo pindtihedust, s. t. piirväärtust voo N_C ja joonega C piiratud kujundi pindala S suhtest, kui joon C tõmbub kokku punktis z, nimetatakse **välja divergentsiks** ehk **hajuvuseks** punktis z:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{C \to z} \frac{1}{S} \int_C (\vec{A} \cdot \overrightarrow{dn}).$$

Matemaatilise analüüsi kursusest on teada, et

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

Kui $N_C = 0$ iga kinnise joone C korral vaadeldavas ühelisidusas piirkonnas D, siis peab leiduma selline kahe muutuja funktsioon $v = \psi(x, y)$, et

$$dv = d\psi(x, y) = A_x dy - A_y dx,$$

s. t.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x.$$

Kui eeldada avaldiste $A_x(x, y)$ ja $A_y(x, y)$ ning nende osatuletiste $\frac{\partial}{\partial y} A_y$ ja $\frac{\partial}{\partial x} A_x$ pidevust, siis tingimus

$$\frac{A_y(x, y)}{\partial y} = \frac{A_x(x, y)}{\partial x} \tag{3}$$

ehk

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

on tarvilik ja piisav selleks, et kehtiks võrdus $N_C = 0$ iga kinnise joone C puhul piirkonnast D. Niisugust vektorvälja $\vec{A}$ nimetatakse **solenoidaalseks.**

Kui tingimus (3) pole täidetud mõnes üksikus punktis joonega C piiratud piirkonnast, siis üldjuhul $N_C \neq 0$. Kui selliseks punktiks on

vaid punkt z_0, siis seda punkti nimetatakse välja **allikaks** ja suurust N_C **allika intensiivsuseks.**

Kui vektorväli $\vec{A}$ on nii potentsiaalne kui ka solenoidaalne, siis leiduvad kahe muutuja funktsioonid $u=\varphi(x, y)$ ja $v=\psi(x, y)$, nii et

$$du=d\varphi(x, y)=A_x dx+A_y dy,$$

$$dv=d\psi(x, y)=A_x dy-A_y dx.$$

Avaldist (või sellega määratud funktsiooni)

$$f(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$$

nimetatakse selle **vektorvälja kompleksseks potentsiaaliks.**

Arvestades Cauchy — Riemanni võrrandeid ja seoseid

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=A_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=A_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

on kompleksse potentsiaaliga määratud funktsioon $w=f(z)$ regulaarne.

Veendume, et kompleksne potentsiaal $f(z)$ annab meile üsna palju informatsiooni vektorvälja $\vec{A}$ kohta. Et

$$f'(z)=\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}+i\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}=A_x-iA_y,$$

siis

$$\vec{A}=A_x+iA_y=\overline{f'(z)}$$

ning

$$|\vec{A}|=|f'(z)|, \quad \arg\vec{A}=-\arg f'(z).$$

Funktsioonide φ ja ψ nivoojooned

$$\varphi(x, y)=c_1 \quad \text{ja} \quad \psi(x, y)=c_2$$

moodustavad ortogonaalse võrgu, sest need kujutuvad funktsiooniga $w=f(z)$ ristkoordinaatide võrguks. Nivoojooned $\varphi(x, y)=c_1$ on risti vektoritega $\vec{A}$, sest

$$\vec{A}=\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}.$$

Seega on vektorid $\vec{A}$ nivoojoonte $\psi(x, y)=c_2$ puutujaiks, mis tähendab, et jooned $\psi(x, y)=c_2$ on selle vektorvälja **vektorjoonteks.**

Arvutamisel saame, et

$$\int_C f'(z)\,dz=\Gamma_C+iN_C.$$

Edaspidi eeldame, et vektorvälja potentsiaalsust ja solenoidaalsust määravad tingimused (2) ja (3) on täidetud peaaegu kõigis vaadeldava piirkonna punktides. Erandiks võivad olla vaid üksikud punktid, mida nimetame **vektorvälja iseärasteks punktideks.**

9.3. NÄITEID KOMPLEKSSETEST POTENTSIAALIDEST

N ä i d e 1. Vaatleme vektorvälja, millel on üks allikas koordinaatide alguses ning keerised puuduvad.

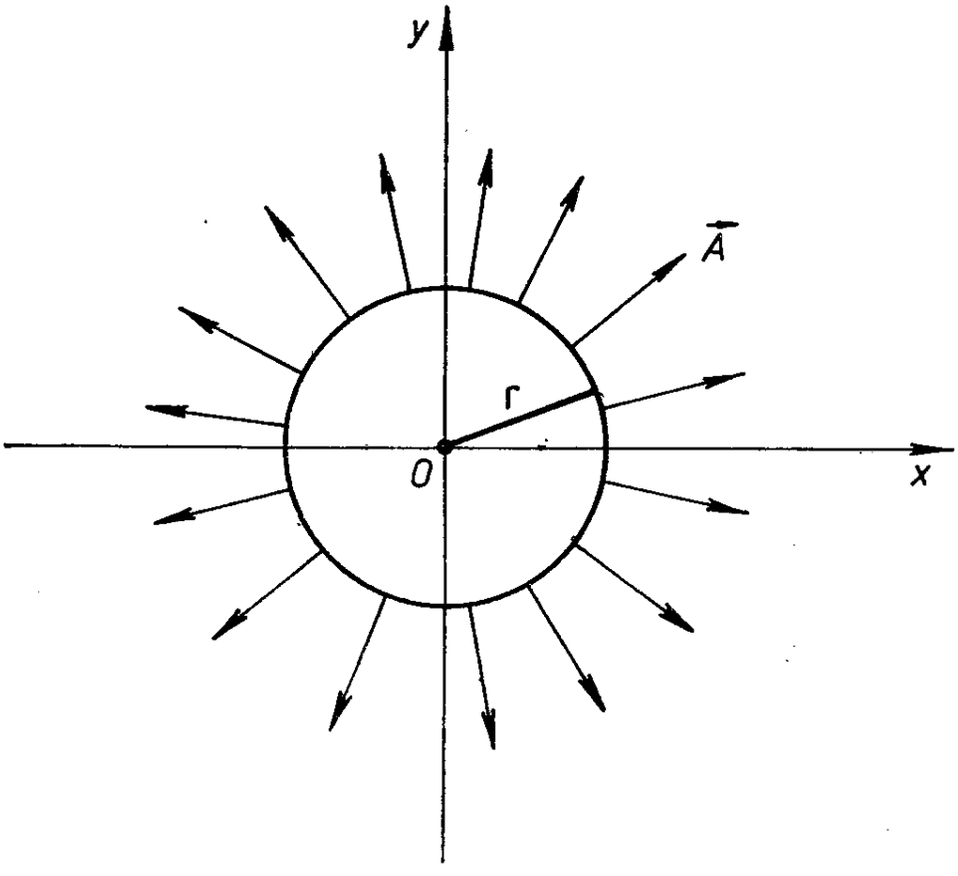
Et väli on sümmeetriline, siis

$$\vec{A}=g(r)\vec{r} \quad \text{ehk} \quad \vec{A}=g(r)z,$$

kus $\vec{r}$ on punkti z kohavektor ning r tema moodul. Tähistame allika intensiivsuse sümboliga N. Et punkt $z=0$ on ainsaks allikaks, siis voog läbi suvalise ringjoone $|z|=r$ on N, s. t.

$$N=\int\limits_{|z|=r}(\vec{A}\cdot\overrightarrow{dn})=\int\limits_{|z|=r}A_n\,ds.$$

Vektor $\vec{A}$ on risti ringjoonega $|z|=r$ (joon. 44), mistõttu $A_n=|\vec{A}|=A$ ning



Joon. 44

$$N=\int\limits_{|z|=r} A\,ds=g(r)\,r\int\limits_0^{2\pi} r\,d\varphi=g(r)\,r^2\,2\pi.$$

Seega

$$g(r)=\frac{N}{2\pi r^2}$$

ning

$$\vec{A}=\frac{N}{2\pi r^2}\,\vec{r}=\frac{N}{2\pi|z|^2}\,z=\frac{Nz}{2\pi z\bar{z}}=\frac{N}{2\pi\bar{z}}.$$

Kompleksse potentsiaali saame seosest $\vec{A}=\overline{f'(z)}$, s. t.

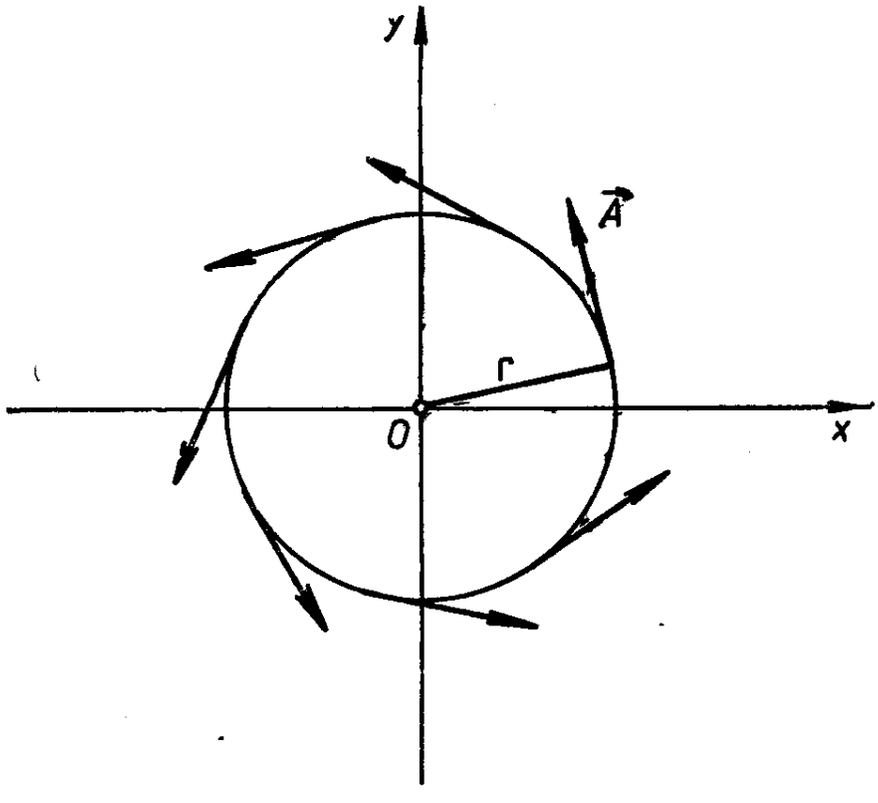
$$f'(z)=\frac{N}{2\pi}\,\frac{1}{z},$$

millest

$$f(z)=\frac{N}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,z+C.$$

Näide 2. Vaatleme vektorvälja, mille ainsaks iseäraseks punktiks on $z=0$, mis olgu keerispunktiks intensiivsusega Γ.

Ka siin lähtume välja sümmeetrilisusest, mille alusel $\vec{A}=h(r)\,iz$ (joon. 45). Vektor $\vec{A}$ peab olema risti vektoriga $\vec{r}$, s. t. $\mathrm{Arg}\,\vec{A}=\frac{\pi}{2}+\arg\vec{r}=\frac{\pi}{2}+\arg z$. Võttes suvalise ringjoone $|z|=r$,



Joon. 45

saame, et

$$N=\int\limits_{|z|=r}(\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds})=\int\limits_{|z|=r}h(r)r\,ds=h(r)r\int\limits_{|z|=r}ds=h(r)\,r^2\,2\pi.$$

Seega

$$h(r)=\frac{\Gamma}{2\pi r^2}$$

ning

$$\vec{A}=\frac{\Gamma}{2\pi r^2}\,\mathrm{i}z=\frac{\Gamma\mathrm{i}z}{2\pi z\bar{z}}=\frac{\Gamma\mathrm{i}}{2\pi\bar{z}}.$$

Seose $\vec{A}=\overline{f'(z)}$ põhjal saame kompleksse potentsiaali

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\operatorname{Ln}z+C.$$

Näide 3. Vaatleme vektorvälja, mille kompleksseks potentsiaaliks on $f(z)=(a+\mathrm{i}b)\operatorname{Ln}z$, kus a ja b on reaalarvud.

Et $z=0$ on funktsiooni f ainsaks iseäraseks punktiks, siis on see punkt ka ainsaks iseäraseks punktiks vektorväljale. Vaatleme joonena C ringjoont $|z|=r$. Sel juhul

$$\Gamma_C+\mathrm{i}N_C=\int\limits_C f'(z)\,dz=(a+\mathrm{i}b)\int\limits_C\frac{dz}{z}=2\pi\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b),$$

millest

$$\Gamma_C=-2\pi b\quad\text{ja}\quad N_C=2\pi a.$$

Seega on punkt $z=0$ nii allikaks kui ka keerispunktiks.

Tähistades $z=re^{\mathrm{i}\varphi}$, eraldame kompleksse potentsiaali reaal- ja imaginaarosa:

$$(a+\mathrm{i}b)\operatorname{Ln}z=(a+\mathrm{i}b)\,(\ln r+\mathrm{i}(\varphi+2k\pi))=$$

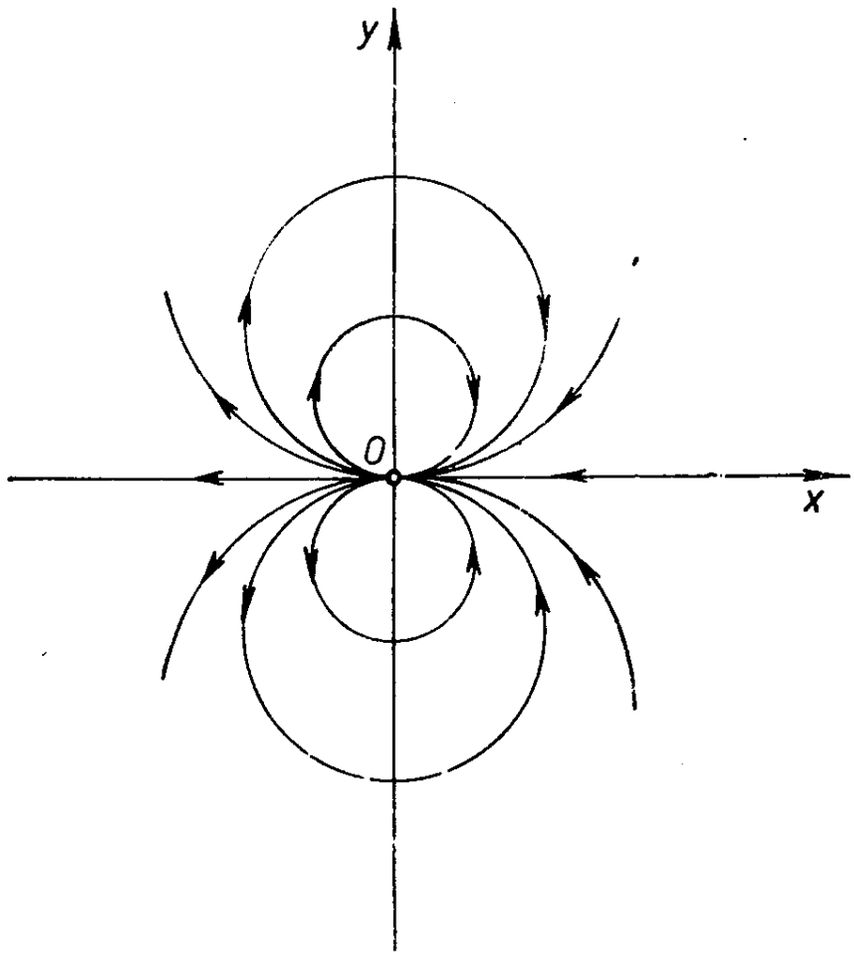
$$=a\ln r-b(\varphi+2k\pi)+\mathrm{i}(b\ln r+a(\varphi+2k\pi)).$$

Imaginaarosa $v=b\ln r+a(\varphi+2k\pi)$ põhjal leiame vektorjooned $v=\mathrm{const}$. Me saame, et nendeks on logaritmilised spiraalid:

$$r=Ce^{-(a/b)\varphi}.$$

Näide 4. Vaatleme süsteemi, kus punktis $z_1=h$ on allikas intensiivsusega N ja punktis $z_2=0$ allikas intensiivsusega $-N$ (äravool). Kompleksseks potentsiaaliks on sel juhul summa

$$f_h(z)=\frac{N}{2\pi}\operatorname{Ln}(z+h)-\frac{N}{2\pi}\operatorname{Ln}z.$$



Joon. 46

Edasi vaatleme piirjuhtu, kus $h \to 0$ ja $N \to \infty$, kusjuures $Nh \to p$. Sel juhul

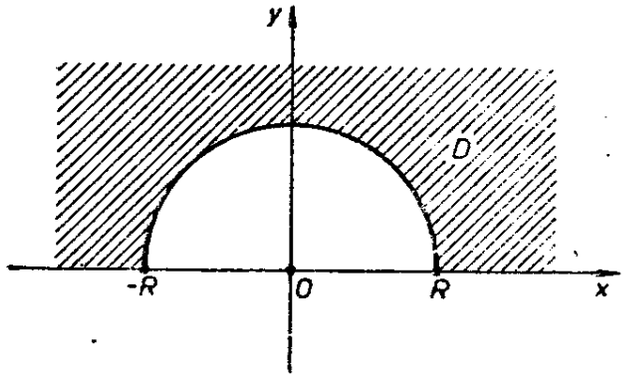
$$f(z) = \lim_{h \to 0} \frac{Nh}{2\pi} \frac{\mathrm{Ln}(z+h) - \mathrm{Ln}(z)}{h} = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z}$$

Saadud süsteemi nimetatakse **dipooliks** momendiga p. Vektorjoonteks on (joon. 46) siin nullpunkti läbivad ringjooned, mille keskpunktid asuvad imaginaarteljel.

9.4. VOOLAMINE POOLTASANDIS

Järgnevates jaotistes vaatleme kompleksse potentsiaali rakendamist voolamisülesannete lahendamisel. Seejuures selgub konformse kujutamise oluline tähendus. Saame ettekujutuse ka sellest, milline eriline osa on juba eespool vaadeldud lihtsatel piirkondadel — ringil ja pooltasandil.

Vaatleme enesega mittelõikuvat (üldiselt siledat) joont, mille mõlemad otsad ulatuvad lõpmatusse. Selline joon C jagab tasandi kaheks osaks D_1 ja D_2. Vaatleme vedeliku (või gaasi) voolamist pooltasandis D_1, eeldades, et see vedelik pole kokkusurutav ning puuduvad allikad. Vektorvälja moodustavad vedelikuosakeste kiirusvektorid. Joone C punktides peavad need olema suunatud piki joone C puutujat. Seega on joon C üheks vektorjooneks, s. t. on



Joon. 47

määratud võrrandiga $\psi(x, y)=v_0$. Et kompleksne potentsiaal on määratud konstantse liidetava täpsuseni (vektorväli määrab kompleksse potentsiaali tuletise seosega $\overrightarrow{f'(z)}=\vec{A}$), siis võime võtta $v_0=0$. Selliselt valitud kompleksse potentsiaali puhul funktsioon $w=f(z)$ kujutab vaadeldava pooltasandi ülemiseks või alumiseks pooltasandiks. Konformse kujutamise ainsuse teoreemi põhjal on niisuguseid funktsioone lõpmata palju, mistõttu ühesuse tagamiseks võib seada lisatingimusi. Hüdrodünaamika (või aerodünaamika) ülesannetes seatakse tavaliselt järgmised tingimused:

$$|f'(\infty)|=v_\infty \quad \text{ja} \quad f(\infty)=\infty. \tag{1}$$

Vaatleme konkreetse näitena joonisel 47 esitatud piirkonda D ning selles vedeliku voolamist vasakult paremale. Leiame funktsiooni, mis kujutab antud piirkonna D ülemiseks pooltasandiks. Selleks võtame

$$z_1=\frac{z-R}{z+R}.$$

Valitud funktsioon kujutab reaaltelje reaalteljeks ning ringjoone $|z|=R$ reaalteljega ristuvaks sirgeks. Et punkt $z=R+R\mathrm{i}$ kujutub punktiks $z_1=\frac{1}{5}(1+2\mathrm{i})$ ning punkt $z=R$ punktiks $z_1=0$, siis piirkonna D kujutiseks on z_1-tasandi I veerand. Ülemise pooltasandi saame, kui rakendame ruutfunktsiooni, võttes

$$z_2=z_1^2=\left(\frac{z-R}{z+R}\right)^2. \tag{2}$$

Et saadud funktsioon on vaid üks võimalikest funktsioonidest, mis kujutab piirkonna D ülemiseks pooltasandiks, siis see funktsioon ei tarvitse täita lisatingimusi (1). Tõepoolest, saadud funktsioon ei kujuta lõpmatuspunkti lõpmatuseks.

Soovitud omadustega funktsiooni leidmiseks rakendame suvalist funktsiooni, mis kujutab ülemise pooltasandi konformselt ülemiseks pooltasandiks. Nagu teame (vt. jaotis 8.4 näide 3), on selleks reaalsete kordajatega murdlineaarne funktsioon

$$w=\frac{az_2+b}{cz_2+d}.$$

Asendades viimases avaldises suuruse z_2 valemi (2) põhjal, saame funktsiooni

$$w=f(z)=\frac{(a+b)z^2+2(b-a)Rz+(a+b)R^2}{(c+d)z^2+2(d-c)Rz+(c+d)R^2},$$

kus a, b, c ja d on reaalsed konstandid. Selgitame, millisel juhul see funktsioon rahuldab tingimusi (1). Paneme tähele, et tingimuse $f'(\infty)=v_\infty\neq 0$ tõttu peab selle ratsionaalfunktsiooni nimetaja aste olema madalam kui lugeja oma (jagatise tuletise valemist!), s. t. $c+d=0$. Teiselt poolt, tingimuse $f(\infty)=\infty$ põhjal järeldame, et $a+b\neq 0$. Seega

$$w=f(z)=\frac{(a+b)z^2+2(b-a)Rz+(a+b)R^2}{2(d-c)Rz}=\alpha z+\beta+\frac{\alpha R^2}{z},$$

kus

$$\alpha=\frac{a+b}{2(d-c)R} \quad \text{ja} \quad \beta=\frac{b-a}{d-c}.$$

Saadud avaldisest leiame, et

$$w'=f'(z)=\alpha-\frac{\alpha R^2}{z^2}.$$

Et punktis $z=Ri$ võrdub tasandi pööre nulliga (puutuja suund — reaaltelje positiivne suund — säilib!), siis $\arg f'(Ri)=0$, s. t. $f'(Ri)=2\alpha>0$. Tingimusest $|f'(\infty)|=|\alpha|=v_\infty$ saame, et $\alpha=v_\infty$. Arvestades veel, et kompleksne pooltasand on määratav konstantse liidetava täpsuseni, võtame $\beta=0$, mistõttu otsitavaks kompleksseks potentsiaaliks võime võtta avaldise

$$f(z)=v_\infty\left(z+\frac{R^2}{z}\right).$$

Leitud kompleksse potentsiaali põhjal

$$|\vec{A}|=|f'(z)|=\left|v_\infty\left(1-\frac{R^2}{z^2}\right)\right|.$$

Punktides $z=\pm R$ on $\vec{A}=0$. Neid punkte nimetatakse selle vektorvälja **kriitilisteks punktideks.**

Leides funktsiooni f imaginaarosa

$$\psi(x,y)=v_\infty\left(y-\frac{R^2y}{x^2+y^2}\right),$$

saame, et vaadeldava vektorvälja vektorjooned (voolujooned) esituvad võrrandiga

$$(x^2+y^2-R^2)y=C(x^2+y^2).$$

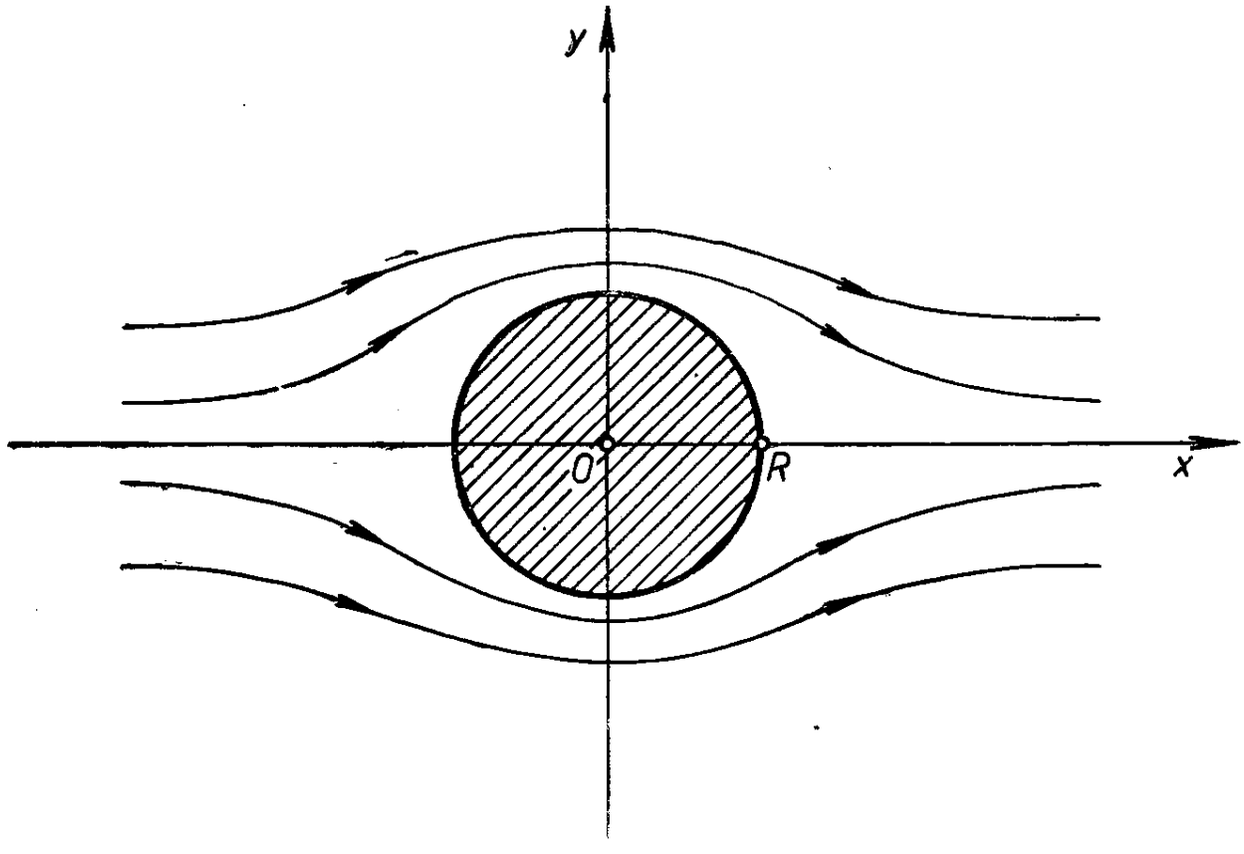
Kui $C=0$, esitub vektorjoon kahe võrrandiga $y=0$ (reaaltelg) ja $x^2+y^2=R^2$ (antud ringjoon). Selleks vektorjooneks on niisiis piirkonna D rajajoon.

9.5. VOOLAMINE ÜMBER KINNISE JOONE

Vaatleme tasaparalleelset voolamist ümber ringsilindri, mis on risti voolamistasandiga. Tasandil vastaks sellele voolamine ümber ringjoone. Valime koordinaatide süsteemi selliselt, et koordinaatide alguspunkt asub ringjoone keskpunktis ning voolamine toimub x-telje positiivses suunas (joon. 48). Sel viisil saavutame sisuliselt sama olukorra, mida vaatlesime eelmises jaotises. Niisuguse voolamise kompleksseks potentsiaaliks on

$$v_\infty\left(z+\frac{R^2}{z}\right). \tag{1}$$

Vaatleme mõnevõrra üldisemat olukorda. Olgu tegemist ka keerisega ümber silindri. Jaotise 9.3 näite 2 põhjal on niisuguse voolamise kompleksseks potentsiaaliks



Joon. 48

$$\frac{\Gamma}{-2\pi} i \operatorname{Ln} z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z, \qquad (2)$$

kus Γ tähistab keerise intensiivsust. Liites avaldised (1) ja (2), saamegi vaadeldava üldisema voolamise kompleksse potentsiaali

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z.$$

Sellise voolamise puhul võrdub kiirus lõpmatuspunktis arvuga v_∞ ning keerise intensiivsus punkti $z=0$ suhtes on Γ.

Arvutades

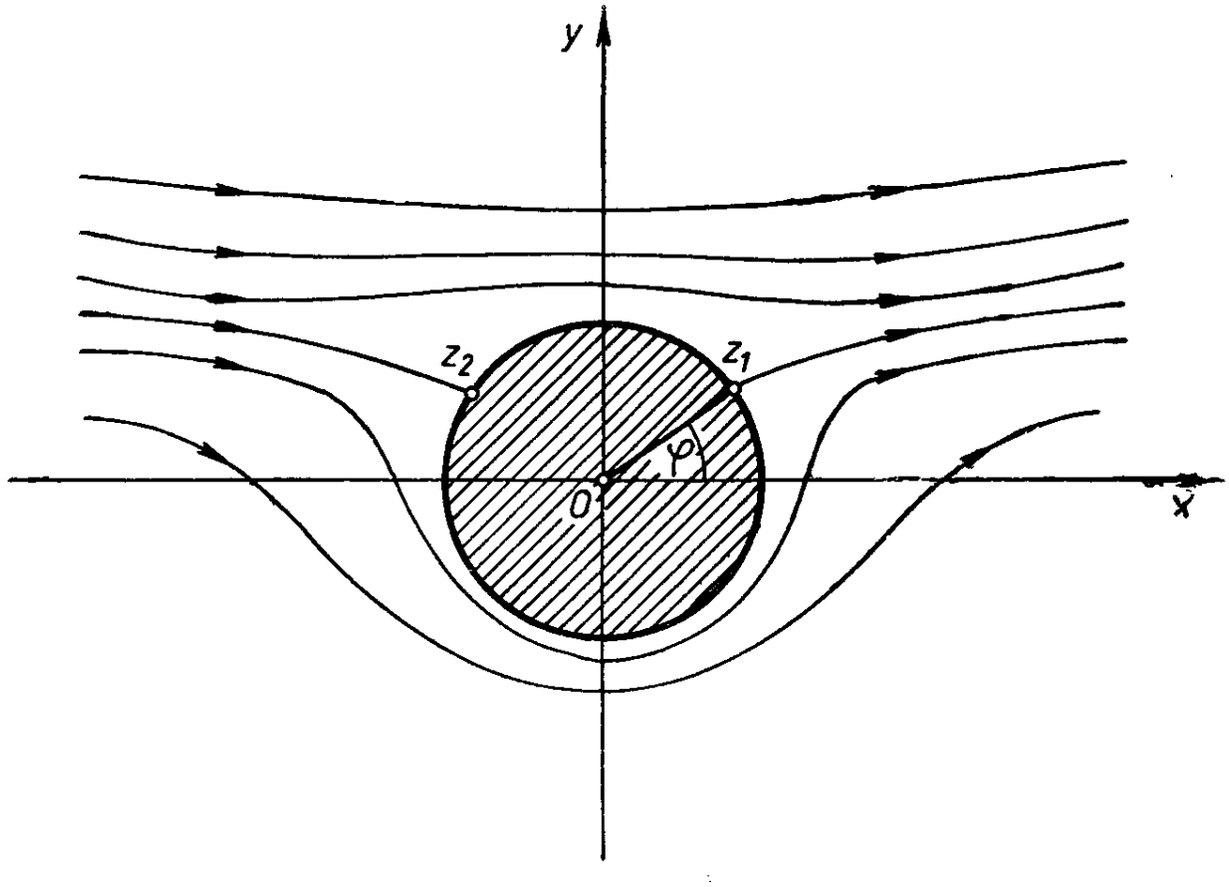
$$f'(z) = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z},$$

saame leida antud voolamise kriitilised punktid, s. t. punktid, kus kiirus võrdub nulliga. Selleks tuleb lahendada võrrand $f'(z)=0$. Et see võrrand taandub ruutvõrrandiks

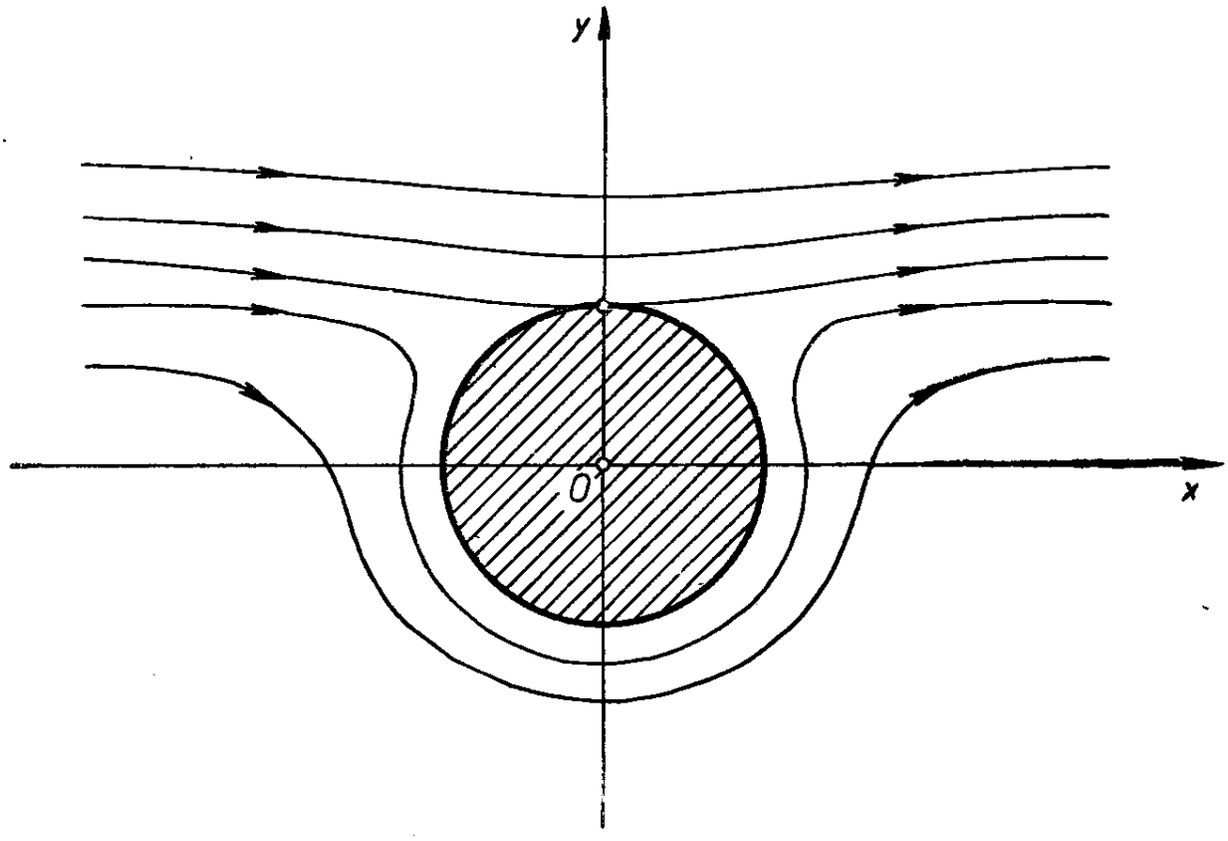
$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i v_\infty} z - R^2 = 0,$$

siis kriitilisteks punktideks on

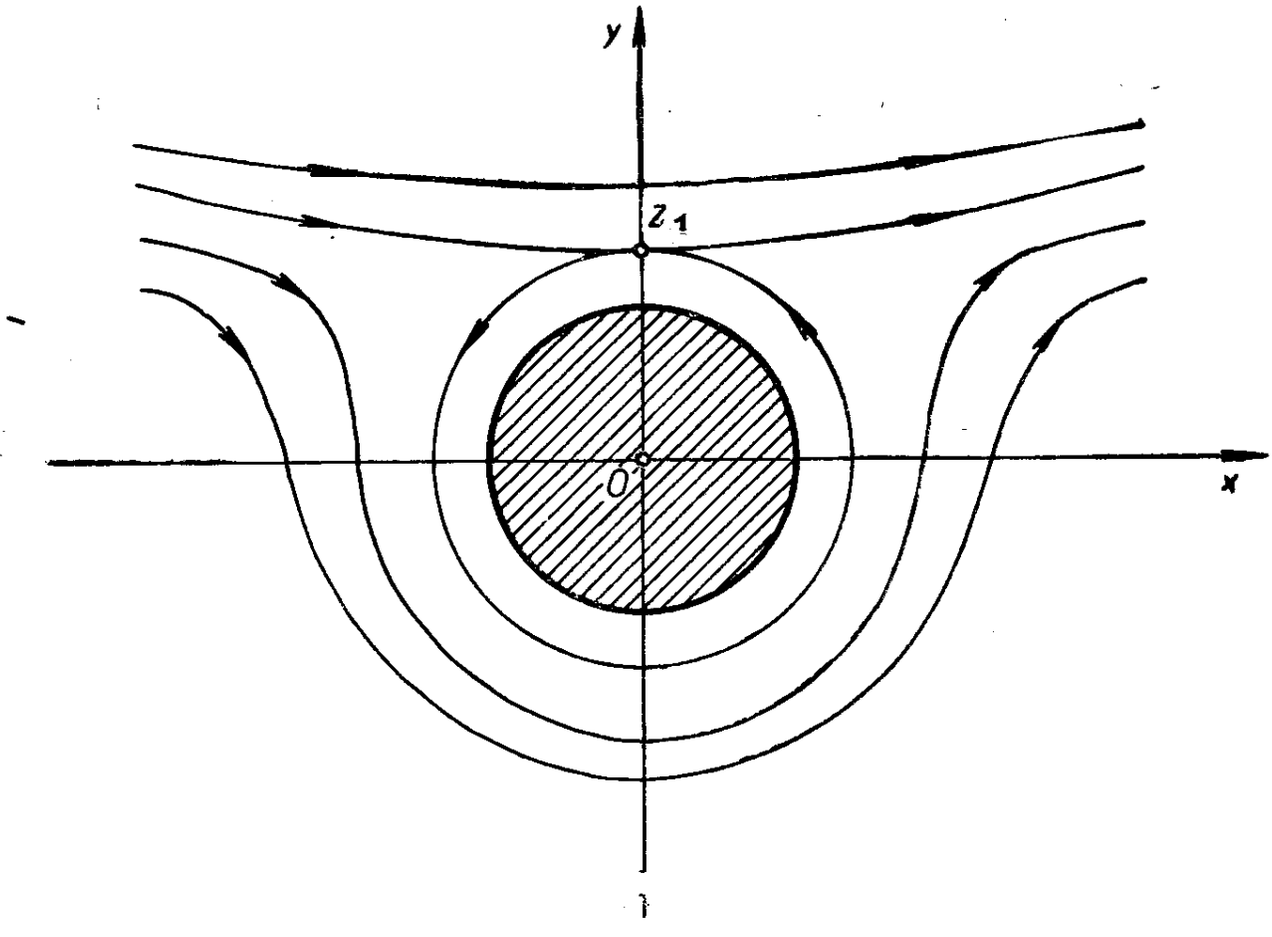
$$z_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} i \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_\infty^2}}.$$



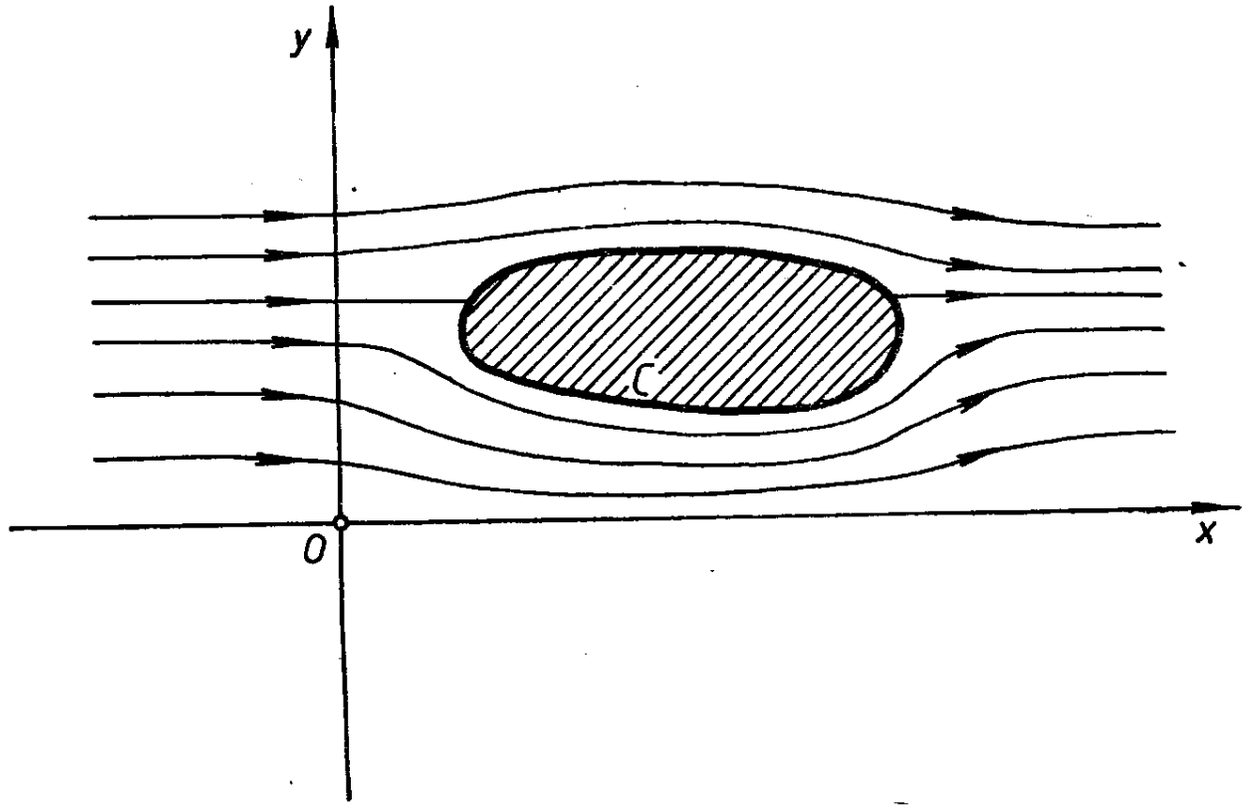
Joon. 49



Joon. 50



Joon. 51



Joon. 52

Siin tuleb ilmsiks kolm erinevat olukorda.

1) Kui $|\Gamma/(4\pi v_\infty)|<R$, siis $|z_1|=|z_2|=R$ ning need punktid asuvad y-telje suhtes sümmeetriliselt (joon. 49). Punkt z_2 on voolu hargnemispunkt ning punkt z_1 on voolu koondumispunkt. Arvutades saaksime, et koondumispunkti argumendi saab määrata seosest

$$\sin\varphi=\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}. \tag{3}$$

2) Kui $|\Gamma/4\pi v_\infty|=R$, siis on tegemist vaid ühe, imaginaarteljel asuva kriitilise punktiga (joon. 50).

3) Kui $|\Gamma/(4\pi v_\infty)|>R$, siis saame kaks imaginaarteljel asuvat kriitilist punkti z_1 ja z_2, mille puhul $|z_1|\cdot|z_2|=R^2$, s. t. üks neist asub vaadeldavas ringis ning teine väljaspool seda. Viimast läbiv kinnine voolujoon jagab kõik voolujooned kahte ossa: kinnised ja mittekinnised jooned (joon. 51). Seega näeme, et kolme suuruse v_∞, Γ ja R erinev vahekord määrab meile oluliselt erineva iseloomuga voolamise.

Kui vaadelda voolamist ümber suvalise kinnise joone C (joon. 52), siis tuleb appi võtta konformne kujutamine; kujutada joonest C väljaspoole jääv piirkond D piirkonnaks $|\zeta|>R$. Kujutuse $\zeta=\varphi(z)$ valime nii, et $\varphi(\infty)=\infty$ ja $\arg\varphi'(\infty)=0$, s. t. $\varphi'(\infty)>0$. Arvestades, et raadiuse R võime valida vabalt, teeme seda nii, et $\varphi'(\infty)=1$. Niisuguse valiku korral kompleksne potentsiaal

$$f[\varphi(z)]=v_\infty\left[\varphi(z)+\frac{R^2}{\varphi(z)}\right]+\frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln}\varphi(z) \qquad (4)$$

kirjeldab voolamist ümber joone C, mille puhul kiirus lõpmatuses on v_∞ ja tsirkulatsioon joonel C on Γ. Tõepoolest,

$$\frac{d}{dz}f[\varphi(z)]\Big|_{z=\infty}=f'(\infty)\varphi'(\infty)=v_\infty\cdot 1=v_\infty$$

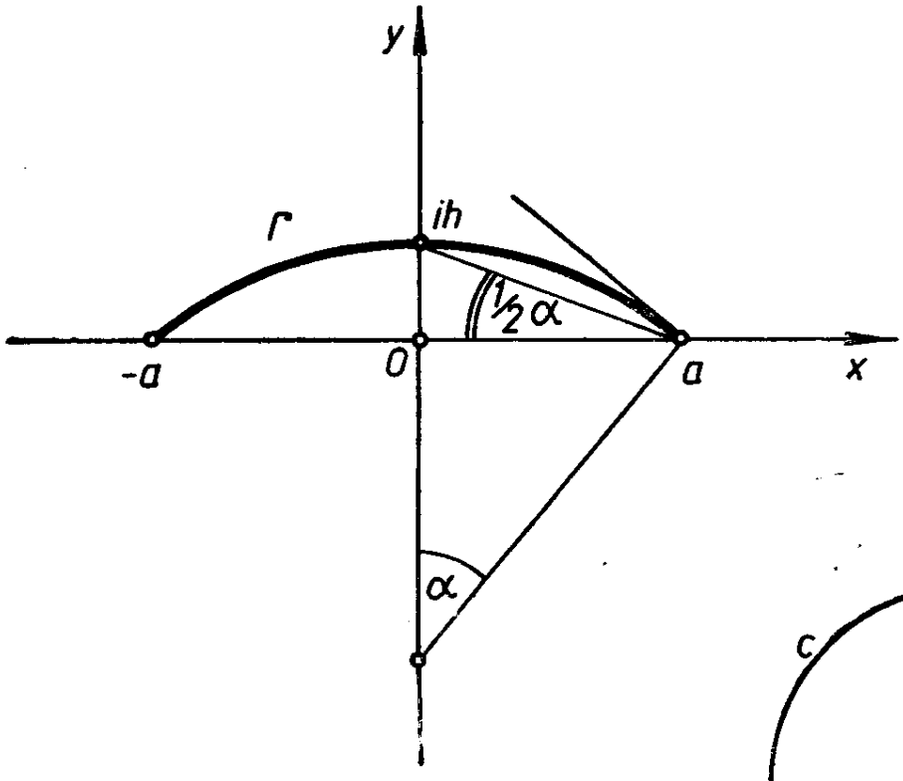
ning

$$\int_C \frac{d}{dz}f[\varphi(z)]dz=\int_{|\zeta|=R} f'(\zeta)d\zeta=\Gamma.$$

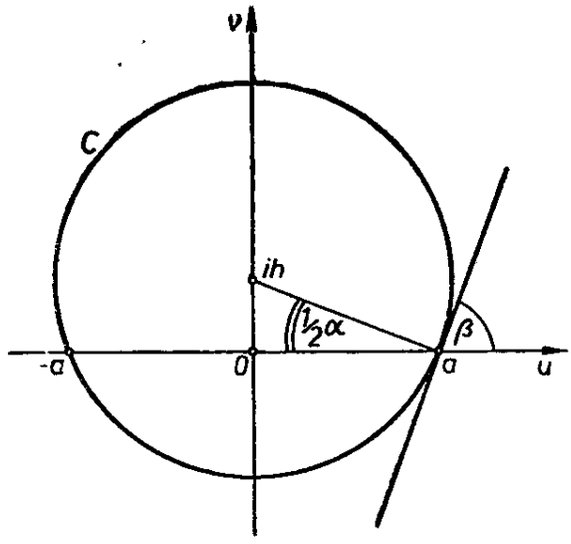
9.6. ŽUKOVSKI PROFIIL

Käesolevas jaotises vaatleme lennuki tiiva ristlõiget (Žukovski profiili) ümbritseva piirkonna kujutamist ringjoont ümbritsevaks piirkonnaks.

Lähtume sellest, et kujutame tasandi, millest on välja lõigatud ringjoone kaar Γ (joon. 53), tasandiks, millest on välja lõigatud



Joon. 53



Joon. 54

ring keskpunktiga punktis $K=ih$ (joon. 54). Kasutame ühelt poolt funktsiooni $z_1=\frac{z-a}{z+a}$, mis kujutab vaadeldava kaare nullpunktist lähtuvaks kiireks. See kiir moodustab reaaltelje negatiivse osaga nurga α, sest vaadeldava funktsiooni tuletis on positiivne punktis $z=a$, s. t. tuletise argument on 0, mistõttu pööret selles punktis ei ole.

Teiselt poolt, kasutades sama funktsiooni w-tasandi kujutamiseks, saame, et funktsioon

$$w_1=\frac{w-a}{w+a}$$

kujutab vaadeldava ringjoone w_1-tasandi sirgeks, mis läbib nullpunkti ja mille tõusunurk on

$$\beta=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Kui kasutame järgnevalt kujutust $w_2=w_1^2$, saame kogu w_2-tasandi lõikega piki kiirt, mis moodustab reaaltelje positiivse suunaga nurga $2\beta=\pi-\alpha$. Me saime w_2-tasandil sama piirkonna kui z_1-tasandil. Seega võime võtta $z_1=w_2=w_1^2$ ehk

$$\frac{z-a}{z+a}=\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2. \qquad (1)$$

Avaldades leitud seosest muutuja z, saame funktsiooni

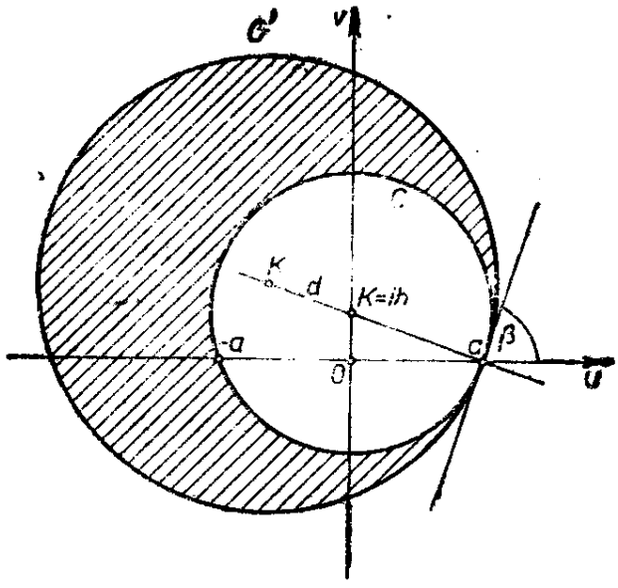
$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{a^2}{w}\right),$$

mis $a=1$ korral on tuntud Žukovski funktsioonina.

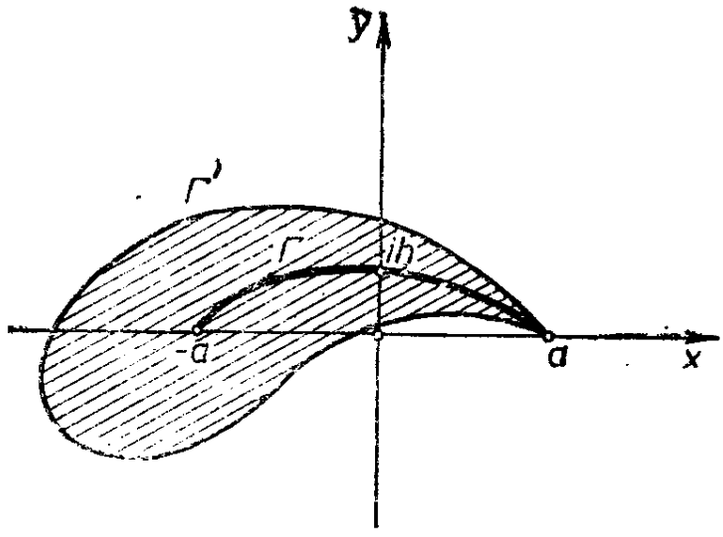
Kui avaldame seosest (1) muutuja w, siis saame eelnevale pöördfunktsiooni

$$w=z+\sqrt{z^2-a^2}. \qquad (2)$$

Uurime seda kujutust mõnevõrra lähemalt. Vaatleme w-tasandil veel ringjoont C', mille keskpunktiks on K' ning mis puutub ringjoont C punktis $w=a$ (joon. 55). Selle ringjoone originaaliks on mingi kinnine joon Γ', mis ümbritseb kaart Γ ning puutub seda punktis $z=a$ (joon. 56). Joonel Γ' on seega tagasipöördepunkt punktis $z=a$. Funktsioon (2) kujutab joonega Γ' piiratud kujundi (Žukovski profiili) välise piirkonna ringjoone C' suhtes väliseks piirkonnaks. Siit saame võimaluse lennuki tiibade profiili arvutamiseks. Viimane sõltub kolmest parameetrist a, h ja d. Esimene neist iseloomustab tiiva laiust, teine — tiiva kõverust ning kolmas (ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus) — tiiva paksust.



Joon. 55



Joon. 56

9.7. VOOLAMINE ÜMBER ŽUKOVSKI PROFIILI

Eelmises jaotises leidsime funktsiooni (2), mis kujutab konformselt Žukovski profiili välise piirkonna mingist ringjoonest väljaspoole jäävaks tasandi osaks. Et rakendada jaotise 9.5. valemit (4), tuleb see ringjoon kujutada niisuguseks ringjooneks, mille keskpunkt asub nullpunktis. Seda saame teha nihke teel, võttes

$$\omega_1=\varphi_1(z)=w-K_0=z-K'+\sqrt{z^2-a^2},$$

kus K' on ringjoone C' keskpunkt (joon. 55). Selle funktsiooni korral $\varphi_1(\infty)=\infty$ ning $\varphi_1'(\infty)=2$. Jaotise 9.5. valemi (4) rakendamiseks on aga vaja, et tuletis lõpmatuspunktis võrduks ühega. Seepärast võtame φ_1 asemel funktsiooni

$$\omega=\varphi(z)=\frac{1}{2}\,(z-K'+\sqrt{z^2-a^2}).$$

Valemi (4) rakendamiseks jääb veel leida keerise intensiivsus Γ. Selleks kasutame nn. ***Tšaplõgini tingimust***; voolamisel ümber kontuuri, millel on teravik (nurk puutujate vahel on väiksem kui π), nihkub voolu koondumispunkt teraviku tippu. Leiame teraviku tipu a kujutise, arvestades, et

$$K'=ih+de^{i(\pi-\arctan h/a)}=ih-de^{-i\arctan h/a}.$$

Teraviku kujutiseks on seega punkt

$$B=\varphi(a)=\frac{1}{2}\,(a-K')=\frac{1}{2}\,(a-ih+de^{-i\arctan h/a})=$$

$$=\frac{1}{2}\,(\sqrt{a^2+h^2}+d)\,e^{-i\arctan h/a}.$$

Et koondumispunkti argument ja keerise intensiivsus Γ on seotud jaotise 9.5 valemiga (3), siis saamegi määrata suuruse Γ:
$\Gamma = 4\pi R v_\infty \sin(-\arctan h/a) = -4\pi v_\infty R \sin \arctan h/a.$

Et

$$\sin(\arctan h/a) = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

ja

$$R = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+h^2}+d),$$

siis

$$\Gamma = -2\pi v_\infty \left(h + \frac{d}{\sqrt{a^2+h^2}}\right).$$

9.8. TŠAPLÕGINI VALEM

Kui kiirus on väiksem helikiirusest, võib õhku vaadelda kokkusurumatu vedelikuna. Lennuki tiiva kuju uurides kujutleme, et tiib on paigal ning õhk kui kokkusurumatu vedelik voolab ümber tiiva.
Rõhk tiivale avaldub ***Bernoulli valemiga***

$$p = A - \frac{\varrho}{2} v^2,$$

kus A on konstant, ϱ — õhu tihedus ja v — kiirus vaadeldavas punktis. Et rõhk on risti vaadeldava jooneelemendiga dz (vektor), siis viimasele mõjuv rõhk (vektor) avaldub kujul

$$\left(A - \frac{\varrho}{2} v^2\right) i dz.$$

Tähistades joonele C mõjuva kogurõhu (vektori) tähega P, saame integreerides, et

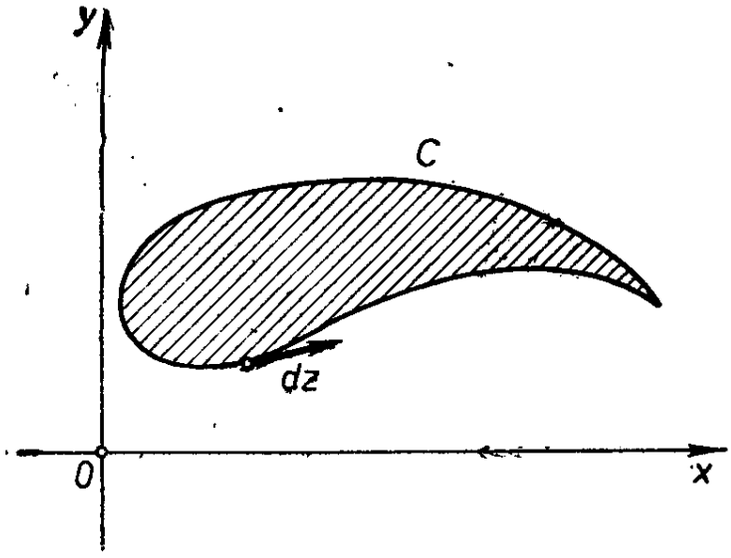
$$P = \int_C \left(A - \frac{\varrho}{2} v^2\right) i dz = -\frac{i\varrho}{2} \int_C v^2 dz,$$

sest Cauchy teoreemi põhjal

$$\int_C A i dz = 0.$$

Et $\vec{v} = \overline{f'(z)}$ ning $v = |\vec{v}| = |f'(z)|$, kui $f(z)$ on vaadeldavat voolamist kirjeldav kompleksne potentsiaal, siis

$$P = -\frac{i\varrho}{2} \int_C |f'(z)|^2 dz. \qquad (1)$$



Joon. 57

Arvestame asjaolu, et joone C punktides on kiirusvektor suunatud piki puutujat (joon. 57). Seega

$$\operatorname{Arg}\overline{f'(z)} = \operatorname{Arg} dz = \alpha,$$

millest

$$\operatorname{Arg} f'(z) = -\alpha$$

ning

$$\operatorname{Arg}\left([f'(z)]^2 dz\right) = -2\alpha+\alpha = -\alpha.$$

Et

$$\operatorname{Arg}\left(|f'(z)|^2 dz\right) = 0+\alpha = \alpha \quad \text{ja} \quad |[f'(z)]^2 dz| = ||f'(z)|^2 dz|,$$

siis

$$\overline{|f'(z)|^2 dz} = [f'(z)]^2 dz.$$

Selle seose põhjal saame valemist (1), et

$$\bar{P} = \frac{\varrho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz.$$

Seda valemit tuntakse ***Tšaplõgini valemina.***

9.9. ŽUKOVSKI TEOREEM

Kui eeldada, et lennuki tiiba ümbritsevas piirkonnas on vaadeldav vektorväli potentsiaalne ja solenoidaalne, siis on ka sellele vastav kompleksne potentsiaal $f(z)$ regulaarne väljaspool joont C. Sama omadus on siis ka tuletisel $f'(z)$, mille võime seetõttu arendada lõpmatuspunkti ümbruses Laurent'i ritta:

$$f'(z)=\bar{v}_\infty+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots,$$

kus $\bar{v}_\infty$ on kiirusvektori v_∞ kaaskompleks.

Olgu L kinnine joon, mis hõlmab joone C. Rakendades Cauchy teoreemi kahelisidusa piirkonna korral, saame seose

$$\int_C [f'(z)]^2 dz=\int_L [f'(z)]^2 dz.$$

Et

$$[f'(z)]^2=\bar{v}^2_\infty+\frac{2\bar{v}_\infty c_{-1}}{z}+\frac{c^2_{-1}+2\bar{v}_\infty c_{-2}}{z^2}+\ldots,$$

siis Tšaplõgini valemi põhjal

$$\bar{P}=\frac{\varrho i}{2}\int_L [f'(z)]^2 dz=\frac{\varrho i}{2}\cdot 2\pi i\, 2\bar{v}_\infty c_{-1}=-2\pi\varrho\bar{v}_\infty c_{-1}.$$

Kordaja c_{-1} arvutame seosest

$$\int_L f'(z)\,dz=\int_C f'(z)\,dz=\Gamma+iN.$$

Seejuures peame silmas asjaolu, et joone C punktides on kiirusvektor puutuja suunaline ning seetõttu $N=0$. Seega

$$\int_C f'(z)\,dz=c_{-1}2\pi i=\Gamma,$$

millest

$$c_{-1}=\frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

Vastavalt sellele saame, et

$$\bar{P}=\varrho i v_\infty\Gamma$$

ning

$$P=-i\varrho v_\infty\Gamma.$$

Viimast seost tuntakse ***Žukovski teoreemina tõstejõust.***

Et $\varrho>0$, siis vektor P on pööratud vektori v_∞ suhtes nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra, kui $\Gamma<0$ (voolamine ümber profiili kellaosuti liikumise suunas), ning nurga $-\frac{\pi}{2}$ võrra, kui $\Gamma>0$ (voolamine ümber profiili vastupidine kellaosuti liikumise suunale).

10. LAPLACE'I TEISENDUS

10.1. LAPLACE'I TEISENDUSE MÕISTE

Laplace'i teisenduseks nimetatakse võrdusega

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt \tag{1}$$

määratud integraal-operaatorit, milles muutujat p vaadeldakse kompleksmuutujana. Funktsioon f omagu reaalseid või kompleksseid väärtusi ning tema määramispiirkonda kuulugu vähemalt kõik positiivsed reaalarvud t. Et integraal (1) oleks määratud, tuleb funktsioonile f seada teatavad kitsendused. Arvestades ka integraali rakendusi, tehakse need kitsendused järgmised:

1) $f(t)\equiv 0$, *kui* $t<0$;
2) *poolsirge* $t\geqslant 0$ *igas lõplikus lõigus ei ole funktsioonil ega tema teataval arvul tuletistel rohkem kui lõplik arv katkevuspunkte* (*need võivad olla I liiki*);
3) *eksisteerivad konstandid* $M>0$ *ja* $a\geqslant 0$ *selliselt, et iga* $t>0$ *puhul*

$$|f(t)|\leqslant Me^{at}.$$

Arvude a alumist raja nimetatakse funktsiooni f **kasvu näitajaks.** Tingimusi 1)—3) rahuldavat funktsiooni nimetatakse **originaaliks.** Seosega (1) määratud funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **kujutiseks.** Vastavust originaali ja kujutise vahel märgitakse sümbolitega

$$f(t)\doteqdot F(p),\quad F(p)\doteqdot f(t)$$

või

$$F=\mathfrak{L}(f),\quad F(p)=\mathfrak{L}[f(t)].$$

Kirjanduses võib esineda ka teistsuguseid sümboleid, kuid siinesitatud on vast kõige enam kasutatavad.

Näitame, et iga tingimusi 1)—3) rahuldava funktsiooni jaoks eksisteerib kujutis. Selleks tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 1. *Integraal* (1) *koondub absoluutselt pooltasandis* $\operatorname{Re} p>a$, *kus* a *on funktsioon* f *kasvu näitaja. Igas pooltasandis* $\operatorname{Re} p\geqslant a_0>a$ *koondub see integraal ühtlaselt.*

T õ e s t u s. Tõepoolest, kui $p=s+i\sigma$, siis

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|\,dt\leqslant\int_0^\infty Me^{at}e^{-st}dt\leqslant M\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{M}{s-a}, \tag{2}$$

mis ütlebki, et integraal koondub.

Kui nüüd $\operatorname{Re} p = s \geqslant a_0 > a$, saaksime eelmisest võrratuste ahelast, et

$$\int_0^\infty |f(t)\mathrm{e}^{-pt}|\,dt \leqslant M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}dt \leqslant M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a_0-a)t}\,dt = \frac{M}{a_0-a}.$$

Weierstrassi tunnuse põhjal järeldame, et integraal (1) on ühtlaselt koonduv piirkonnas $\operatorname{Re} p \geqslant a_0 > a$. Teoreem on tõestatud.

Vaadeldes veel kord originaali määravaid tingimusi 1)—3), näeme, et tingimusel 1) pole seost kujutise eksisteerimisega. Selle tingimuse seos reaalsete ülesannetega väljendub asjaolus, et harilikult vaadeldakse algtingimustega ülesandeid (diferentsiaalvõrrandeid). Seetõttu pole oluline, kuidas käitub otsitav suurus (funktsioon) enne algpunkti (milleks võib alati võtta $t=0$). Teisiti öeldes, meid ei huvita uuritava nähtuse (funktsiooni) «minevik», vaid ainult tema muutumine $t>0$ korral — «tulevikus», milleks peame teadma uuritava nähtuse mõningaid karakteristikuid algpunktis ($t=0$). Mis aga puutub tingimustesse 2) ja 3), siis neid rahuldab enamik klassikalisi füüsikanähtusi kirjeldavaid funktsioone. Nüüdisajal aga kasutatakse automaatsüsteemides signaale (funktsioone), mis kestavad väga lühikest aega, kasvades peaaegu momentaanselt väga suurte väärtusteni. Sel korral jäävad tingimused 2) ja 3) täitmata ning tekib vajadus üldistada originaali mõistet.

Üldistatud originaaliks nimetatakse funktsiooni f, mille korral leidub niisugune reaalarv α, et koondub integraal

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}|f(t)|\,dt.$$

Veendume, et kujutis F on regulaarne funktsioon.

Teoreem 2. *Kui integraal* (1) *koondub pooltasandis* $\operatorname{Re} p > a$, *siis funktsioon* F *on regulaarne samas pooltasandis, kusjuures selle funktsiooni tuletised avalduvad kujul:*

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^n f(t)\,dt.$$

T õ e s t u s. Vastavalt omadusele 2 jaotisest 4.7 peame vaid näitama, et võrduses esinev päratu integraal on ühtlaselt koonduv igas kinnises pooltasandis $\operatorname{Re} p \geqslant a_0 > a$.

Võtame $n=1$. Siis saame, et

$$\left|\int_0^\infty f(t)te^{-pt}dt\right| \leqslant M\int_0^\infty te^{-(a_0-a)t}dt = \frac{M}{(a_0-a)^2},$$

s. t. vaadeldav integraal on ühtlaselt koonduv pooltasandis $\operatorname{Re} p \geqslant a_0 > a$.

Täieliku induktsiooni meetodit kasutades saaksime tõestada, et teoreemi väide on õige iga n korral.

Teoreem 3. *Kui F on mingi funktsiooni kujutiseks, siis*

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p)=0.$$

Tõestus. Vahetu järeldus seosest (2).

Näide 1. Funktsiooni H, mis on määratud seosega

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

nimetatakse **ühikfunktsiooniks** ehk ***Heaviside'i funktsiooniks***. Arvutamisel saame, et

$$\mathfrak{L}(H)=\mathfrak{L}(1)=\int_0^\infty e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p},\quad \operatorname{Re} p>0.$$

Näide 2. Olgu $f(t)=e^{\omega t}$, kus $\omega=u+iv$. Sel juhul

$$\mathfrak{L}(f)=\mathfrak{L}(e^{\omega t})=\int_0^\infty e^{\omega t}e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{(\omega-p)t}dt=$$

$$=\frac{1}{\omega-p}e^{(\omega-p)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p-\omega},\quad \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\omega.$$

Seega

$$\mathfrak{L}(e^{\omega t})=\frac{1}{p-\omega},\quad \text{kui } \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\omega.$$

Märkus. Mingist reaalteljel (vähemalt $t\geqslant 0$ puhul) määratud funktsioonist f kui originaalist kõneldes mõistame teda funktsioonina $f\cdot H$, s. t.

$$f(t)\cdot H(t)=\begin{cases}f(t), & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Teguri $H(t)$ jätame lühiduse mõttes kirjutamata. Ent kui selle ärajätmine võib põhjustada valesti mõistmist, kirjutame $H(t)$ asemel lihtsalt 1 (vt. näide 2 järgmises jaotises).

10.2. LAPLACE'I TEISENDUSE OMADUSI

I. Lineaarsus. *Operaator $\mathfrak{L}$ on lineaarne, s. t.*

$$\mathfrak{L}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathfrak{L}(f)+\mu\mathfrak{L}(g),$$

kus λ ja μ on konstandid.

Tõestus.

$$\mathfrak{L}=(\lambda f+\mu g)=\int_0^\infty [\lambda f(t)+\mu g(t)]\,e^{-pt}dt=$$

$$=\lambda\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt+\mu\int_0^\infty g(t)\,e^{-pt}dt=\lambda\mathfrak{L}(f)+\mu\mathfrak{L}(g).$$

Näide 1. Leiame $\mathfrak{L}(\sin\omega t)$.
Eelmise jaotise näite 2 põhjal

$$\mathfrak{L}(e^{i\omega t})=\frac{1}{p-i\omega},\ \text{kui}\ \operatorname{Re}p>-\operatorname{Im}\omega,$$

ning

$$\mathfrak{L}(e^{-i\omega t})=\frac{1}{p+i\omega},\ \text{kui}\ \operatorname{Re}p>\operatorname{Im}\omega,$$

Operaatori $\mathfrak{L}$ lineaarsust kasutades saame, et

$$\mathfrak{L}(\sin\omega t)=\mathfrak{L}\left[\frac{1}{2i}\,(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})\right]=$$

$$=\frac{1}{2i}\,[\mathfrak{L}(e^{i\omega t})-\mathfrak{L}(e^{-i\omega t})]=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\,\frac{2i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

Analoogiliselt saaksime, et

$$\mathfrak{L}(\cos\omega t)=\frac{p}{p^2+\omega^2},\ \text{kui}\ \operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}\omega|.$$

II. Sarnasusteoreem. *Kui* $\lambda>0$ *ning*

$$\mathfrak{L}[f(t)]=F(p),\ \operatorname{Re}p>a,$$

siis

$$\mathfrak{L}[f(\lambda t)]=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right),\ \operatorname{Re}p>\lambda a.$$

Tõestus. Väite saame vahetult, kui teeme Laplace'i teisendust määravas integraalis muutuja vahetuse $\lambda t=\tau$.

III. Originaali tuletised. *Kui* f' *ja* $f^{(n)}$ *on originaalid, siis*

$$\mathfrak{L}[f'(t)]=p\mathfrak{L}[f(t)]-f(0),$$

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)]=p^n\mathfrak{L}[f(t)]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Tõestus. Ositi integreerimisel saame, et

$$\mathfrak{L}[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt=[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

Kuna $\operatorname{Re} p=s>a$, siis $|f(t)\mathrm{e}^{-pt}|\leqslant M\mathrm{e}^{-(s-a)t}$, mistõttu $\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}=0$. Sellega olemegi tõestanud esimese valemi. Teine valem on tõestatav täieliku induktsiooni meetodiga.

Märkus. Kui $f(0)=0$, siis

$$\mathfrak{L}[f'(t)]=p\mathfrak{L}[f(t)],$$

s. t. originaali diferentseerimisele vastab kujutise korrutamine argumendiga p.

IV. Kujutise tuletised. *Kujutise diferentseerimisele vastab originaali korrutamine teguriga* $-t$, *s. t.*

$$\frac{d^n}{dp^n}\mathfrak{L}[f(t)]=(-1)^n\mathfrak{L}[t^nf(t)].$$

Tõestus. Väide on tõestatud eelmise jaotise teoreemiga 2.

Näide 2. Leiame $\mathfrak{L}(t^n)$.

Heaviside'i funktsiooni kujutist kasutades saame, et

$$\mathfrak{L}(t^n)=\mathfrak{L}(t^n\cdot 1)=\frac{1}{(-1)^n}\frac{d^n}{dp^n}\mathfrak{L}(1)=$$

$$=(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Näide 3.

$$\mathfrak{L}(t^n\mathrm{e}^{\omega t})=\frac{1}{(-1)^n}\frac{d^n}{dp^n}\mathfrak{L}(\mathrm{e}^{\omega t})=$$

$$=(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p-\omega}\right)=\frac{n!}{(p-\omega)^{n+1}}$$

Näide 4. Leiame $\mathfrak{L}(t^\alpha)$, kus $\alpha\in\mathbf{R}$.

Vastavalt definitsioonile

$$\mathfrak{L}(t^\alpha)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^\alpha dt=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\frac{\tau^\alpha}{p^\alpha}\frac{d\tau}{p}=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\tau^\alpha d\tau,$$

kus $pt=\tau$ ja $pdt=d\tau$. Seega

$$\mathfrak{L}(t^\alpha)=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1),$$

kui $\operatorname{Re} p>0$ ja $\alpha>-1$. Kui $\alpha<0$, siis t^α on originaal, kui aga $-1<\alpha<0$, siis t^α ei ole originaal, sest $t^\alpha\to\infty$, kui $t\to 0$. Viimasel juhul t^α on üldistatud originaal.

V. Originaali integreerimine. *Originaali integreerimisele vastab jagamine argumendiga p, s. t.*

$$\mathfrak{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)=\frac{\mathfrak{L}[f(t)]}{p}.$$

Tõestus. Veendume, et $g(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ on originaal. Kontrollimist vajab vaid tingimus 3), sest ülejäänud kahe täidetus on ilmne. Tingimust 3) kontrollides saame:

$$\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right|\leqslant M\int_0^t e^{a\tau}d\tau=\frac{M}{a}\,(e^{at}-1)\leqslant\frac{M}{a}\,e^{at},$$

s. t. tingimus 3) on täidetud. Et $g(0)=0$, siis

$$\mathfrak{L}[f(t)]=\mathfrak{L}[g'(t)]=p\mathfrak{L}[g(t)],$$

millest saamegi väite.

VI. Kujutise integreerimine. *Kui* $F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$ *ning integraal* $\int_p^\infty F(q)\,dq$ *koondub, siis*

$$\int_p^\infty F(q)\,dq=\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

Tõestus. Eeldame, et integreerimistee asub pooltasandis $\operatorname{Re} p\geqslant a_0>a$. Sel juhul

$$\left|\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt\right|\leqslant M\int_0^\infty e^{-(a_0-a)t}dt,$$

millest järeldub, et funktsiooni F defineeriv integraal koondub p suhtes ühtlaselt ning me võime järgmises integraalis muuta integreerimise järjekorda. Seega

$$\int_p^\infty F(q)\,dq=\int_p^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\,e^{-qt}dt\right)dq=\int_0^\infty f(t)\int_p^\infty e^{-qt}dq\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}dt=\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

Näide 5.

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\int_p^\infty\frac{dq}{1+q^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan p=\operatorname{arccot} p.$$

Näide 6. Omaduse V põhjal saame, et

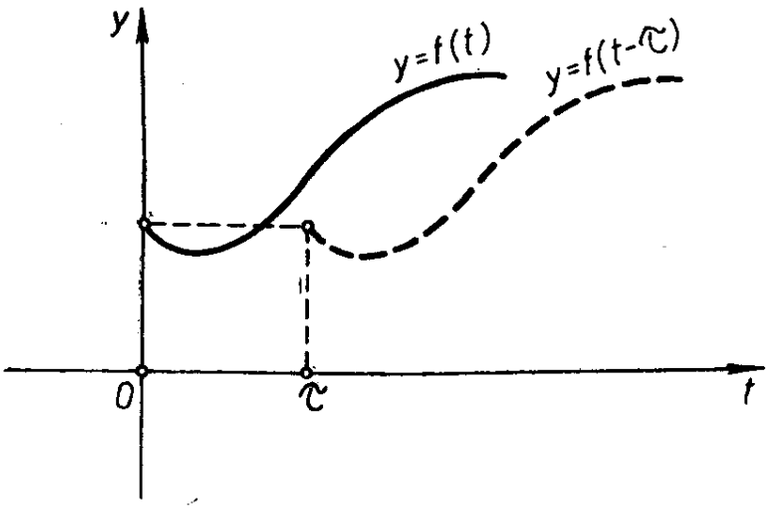
$$\mathfrak{L}(\operatorname{Si} t)=\mathfrak{L}\left(\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right)=\frac{\operatorname{arccot} p}{p}.$$

VII. Hilinemisteoreem. *Iga positiivse arvu* τ *korral*
$\mathfrak{L}[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}\mathfrak{L}[f(t)]$.

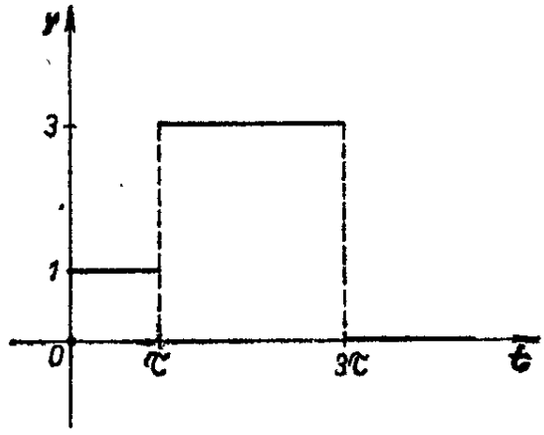
Tõestus. Et $f(t-\tau)=0$ (joon. 58), kui $t<\tau$, siis

$$\mathfrak{L}[f(t-\tau)]=\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_{0}^{\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)}du=$$

$$=e^{-p\tau}\int_{0}^{\infty} f(u)e^{-pu}du=e^{-p\tau}\mathfrak{L}[f(t)].$$



Joon. 58



Joon. 59

Näide 7. Leiame treppfunktsiooni (joon. 59)
$y=f(t)=H(t)+2H(t-\tau)-3H(t-3\tau)$
kujutise.

Et $\mathfrak{L}[H(t)]=\frac{1}{p}$, siis lineaarsuse omaduse ja hilinemisteoreemi põhjal saame:

$$\mathfrak{L}[f(t)]=\mathfrak{L}[H(t)]+2\mathfrak{L}[H(t-\tau)]-3\mathfrak{L}[H(t-3\tau)]=$$

$$=\frac{1}{p}+2e^{-p\tau}\frac{1}{p}-3e^{-3\tau p}\frac{1}{p}=\frac{1}{p}(1+2e^{-p\tau}-3e^{-3p\tau}).$$

VIII. Nihketeoreem. *Iga kompleksarvu* λ *korral*
$\mathfrak{L}[e^{\lambda t}f(t)]=F(p-\lambda)$,
kus $F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$.

Tõestus. Vahetu definitsiooni rakendamine.

Näide 8. Et $\mathfrak{L}(\sin\omega t)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, siis

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}=\mathfrak{L}(e^{-\lambda t}\sin\omega t).$$

Märkus. Kui λ on negatiivne reaalarv, siis originaal kirjeldab stabiliseeruvat protsessi või sumbuvat võnkumist, mistõttu nihketeoreemi nimetatakse sageli ka **sumbumisteoreemiks.**

IX. Perioodilise originaali kujutis. *Kui originaal f on perioodiline funktsioon perioodiga T, siis*

$$\mathfrak{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{1}$$

Tõestus: Et

$$\mathfrak{L}[f(t)]=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-pt}f(t)\,dt,$$

siis tehes selles integraalis muutuja vahetuse $t=\tau+T$ ja arvestades seost $f(t+T)=f(t)$, saame:

$$\mathfrak{L}[f(t)]\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt+\int_0^\infty e^{-p(\tau+T)}f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt+e^{-Tp}\mathfrak{L}[f(t)],$$

millest järeldubki väide (1).

Märkus. Äsjatõestatud omadust on kasulik interpreteerida järgmiselt. Olgu

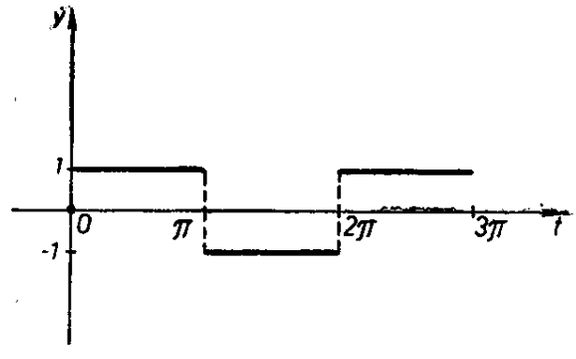
$$g(t)=f(t)\,[H(t)-H(t-T)],$$

s. t.

$$g(t)=\begin{cases} f(t), & t\in[0,T],\\ 0, & t\in[0,T].\end{cases}$$

Sel juhul

$$\mathfrak{L}[f(t)]\frac{1}{1-e^{-Tp}}\mathfrak{L}[g(t)].$$



Joon. 60

Näide. Olgu $f(t)=\operatorname{sgn}(\sin t)$ (vt. joon. 60). Leiame kujutise. Et f on perioodiline funktsioon perioodiga 2π, siis saame rakendada viimast valemit, võttes

$g(t)=H(t)-2H(t-\pi)+H(t-2\pi)$. Arvutades leiame, et

$$\mathfrak{L}[g(t)]=\frac{1}{p}\,(1-2e^{-\pi p}+e^{-2\pi p})=\frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p},$$

millest

$$\mathfrak{L}[\operatorname{sgn}(\sin t)]=\frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p(1-e^{-2\pi p})}=\frac{1-e^{-\pi p}}{p(1+e^{-\pi p})}=\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}.$$

Märkus. Praktikas ei ole oluline määrata seda piirkonda (pooltasandit), kus kujutis eksisteerib. Oluline on teada, et niisugune pooltasand $\operatorname{Re} p>c$ on olemas. Seetõttu jätame edaspidi kujutise eksisteerimise piirkonna märkimata.

Ülesanded

1. Tõestada valemid 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 20 ja 27 tabelist 3.

10.3. PARAMEETRIST SÕLTUVATE FUNKTSIOONIDE LAPLACE'I TEISENDUSED

Vaatleme mingist parameetrist α sõltuvate originaalide Laplace'i teisendusi. Olgu

$$\mathfrak{L}[f(t, \alpha)] = F(p, \alpha), \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2].$$

Teoreem 1. *Kui eksisteerib piirväärtus* $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(t, \alpha)$, *siis*

$$\mathfrak{L}[\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(t, \alpha)] = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \mathfrak{L}[f, \alpha].$$

T õ e s t u s. Väide järeldub vastava päratu integraali ühtlasest koonduvusest, mistõttu võime minna piirile integraalimärgi all.

Teoreem 2. *Kui eksisteerib osatuletis* $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *ja viimane on originaal, siis*

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(p, \alpha).$$

T õ e s t u s. Et

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t, \alpha)\, dt = F(p, \alpha),$$

siis parameetri α järgi diferentseerides saame:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty e^{-pt} f(t, \alpha)\, dt = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(p, \alpha).$$

Eelduse kohaselt $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$ on originaal, mistõttu võime viimases avaldises diferentseerida integraali märgi all. Teoreem on tõestatud.

N ä i d e 1. Et

$$\mathfrak{L}(\sin \alpha t) = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2},$$

siis parameetri α järgi diferentseerides saame seose

$$\mathfrak{L}(t \cos \alpha t) = \frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}.$$

Näide 2. Et

$$\mathfrak{L}(t^\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\ \alpha>-1,$$

siis parameetri α järgi diferentseerides saame seose

$$\mathfrak{L}(t^\alpha \ln t)=\frac{1}{p^{\alpha+1}}[\Gamma'(\alpha+1)-\Gamma(\alpha+1)\ln p].$$

Tähistades $\Gamma'(1)=-C$ ja $e^C=\gamma$ ning võttes $\alpha=0$, saame, et

$$\mathfrak{L}(\ln t)=-\frac{1}{p}\ln(\gamma p).$$

Teoreemi 2 rakendatakse ka osatuletistega võrrandite lahendamisel Laplace'i teisenduse abil.

Teoreem 3. *Kui on olemas integraalid*

$$\int_{\beta_0}^{\beta} f(t,\alpha)\,d\alpha \quad \text{ja} \quad \int_{\beta_0}^{\beta} F(p,\alpha)\,d\alpha,$$

siis

$$\mathfrak{L}\left[\int_{\beta_0}^{\beta} f(t,\alpha)\,d\alpha\right]=\int_{\beta_0}^{\beta} F(p,\alpha)\,d\alpha.$$

Tõestus. Et

$$\int_{\beta_0}^{\beta} d\alpha \int_0^A e^{-pt} f(t,\alpha)\,dt=\int_0^A dt \int_{\beta_0}^{\beta} e^{-pt} f(t,\alpha)\,d\alpha,$$

siis piirile minnes $(A\to\infty)$ saamegi väite. Tõepoolest, eelduse kohaselt eksisteerib piirväärtus võrduse vasakust poolest, mistõttu peab eksisteerima ka piirväärtus paremast poolest.

Järeldus. Kui $F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$, siis kehtivad seosed

$$\mathfrak{L}\left[\int_t^\infty \frac{f(u)}{u}\,du\right]=\frac{1}{p}\int_0^p F(q)\,dq, \tag{1}$$

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t \frac{f(u)}{u}\,du\right]=\frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\,dq, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{u}\,du=\int_0^\infty F(q)\,dq. \tag{3}$$

Tõestus. Sarnasusteoreemi põhjal

$$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=F(\alpha p),\ \alpha>0.$$

Rakendame eelmist teoreemi, võttes integreerimislõiguks lõigu [0, 1]. Sel juhul saame võrduse

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^1 \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) d\alpha\right] = \int_0^1 F(\alpha p)\, d\alpha.$$

Tehes siin muutujate vahetuse $t=\alpha u$ ja $\alpha p = q$, saamegi valemi (1).

Valemi (2) tõestamiseks lähtume kujutise integreerimise omadusest, mille põhjal

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(q)\, dq.$$

Rakendades sellele seosele originaali integreerimise omadust, saamegi valemi (2).

Kasutades Laplace'i teisenduse lineaarsust, saame valemite (1) ja (2) liitmisel, et

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^\infty \frac{f(u)}{u}\, du\right] = \frac{1}{p}\int_0^\infty F(q)\, dq.$$

Selles seoses seisab operaatori $\mathfrak{L}$ märgi all konstant, mille võime lineaarsuse omaduse tõttu tuua operaatorimärgi ette. Et aga

$\mathfrak{L}(1) = \mathrm{H}[H(t)] = \frac{1}{p}$, siis saamegi valemi (1).

Selles järelduses tõestatud valemeid (1) ja (2) võib rakendada kujutiste leidmisel, mida demonstreerime järgneva näitega. Valemit (3) saab rakendada integraalide arvutamisel, millel peatume jaotises 11.5.

Näide 3. Integraalne koosinus defineeritakse seosega

$$\mathrm{ci}(t) = -\int_{-t}^\infty \frac{\cos u}{u}\, du,\ t>0.$$

Seose (3) põhjal saame, et

$$\mathfrak{L}[\mathrm{ci}(t)] = -\frac{1}{p}\int_0^p \frac{q\,dq}{q^2+1} = -\frac{1}{2p}\ln(p^2+1).$$

Ülesanded

1. Tõestada valemid 36, 37 ja 40 tabelist 3.

Teoreem 1. *Kui* $\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)$ *ja* $f'(t)$ *on originaal, siis* $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, p\to\infty} pF(p)=\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$.

Tõestus. Et $f'(t)$ on originaal, siis

$$\mathfrak{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0),$$

kus

$$f(0)=\lim_{t\to 0+} f(t)$$

Jaotise 10.1. teoreemi 3 põhjal

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p\to\infty}[pF(p)-f(0)]=0.$$

millest saamegi teoreemi väite.

Tõestatud teoreemi põhjal võib väärtuse $f(0)$ leida kujutise kaudu.

Teoreem 2. *Kui* $\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)$, *kus* $f'(t)$ *on originaal, ja eksisteerib* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, *siis*

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=\lim_{t\to\infty} f(t).$$

Tõestus. Lähtume seosest

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt=pF(p)-f(0).$$

Läheme selles võrduses piirile $(p\to 0)$. Võime seda teha integraalimärgi all, mistõttu saame

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt=\lim_{p\to 0}[pF(p)-f(0)].$$

Et aga

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt=\lim_{t\to\infty} f(t)-f(0),$$

siis viimase kahe võrduse põhjal saamegi teoreemi väite.

Ülesanded

1. Näidata, et $f'(0)=a$, kui

$$\mathfrak{L}[f(t)]=\frac{ap+b}{p(p^2+cp+d)}.$$

10.5. KONVOLUTSIOON. BORELI TEOREEM

Kahe funktsiooni f ja g **konvolutsiooniks** nimetatakse funktsiooni, mis on määratud avaldisega

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Funktsioonide konvolutsioon on (korrutamisetaoline) tehe funktsioonide hulgas, seda tähistatakse sümboliga $*$ (näiteks, $h=f*g$ või $h(t)=f(t)*g(t)$).

Vaatleme konvolutsiooni omadusi.

I. Kommutatiivsus: $f*g=g*f$.

Tõestus. Tehes konvolutsiooni $f*g$ defineerivas integraalis muutuja vahetuse $t-\tau=u$, saame

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t g(u)f(t-u)\,du=g(t)*f(t).$$

II. Assotsiatiivsus: $(f*g)*h=f*(g*h)$.

III. Distributiivsus: $f*(g+h)=f*g+f*h$.

Need omadused tõestatakse sarnaselt kommutatiivsuse omadusega.

IV. $|f*g|\leqslant|f|*|g|$.

Tõestus. Et

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right|\leqslant\int_0^t |f(\tau)|\,|g(t-\tau)|\,d\tau,$$

siis olemegi saanud vastava omaduse.

V. *Kui funktsioonid f ja g on pidevad juhul $t\geqslant 0$, siis on pidev ka nende konvolutsioon.*

Tõestus tuleneb vahetult määratud integraali pidevusest ülemise raja järgi.

VI. ***Titchmarsh'i teoreem:*** *Kui f ja g on pidevad $t\geqslant 0$ puhul ning $f*g=0$, siis vähemalt üks funktsioonidest on võrdne nulliga iga $t\geqslant 0$ puhul.*

Selle teoreemi tõestust me ei esita.

VII. *Kui funktsioonid f ja g on originaalid, siis on seda ka nende konvolutsioon.*

Tõestus. Esimese kahe originaalile esitatud tingimuse täidetus on ilmne. Vaatleme kolmandat tingimust. Olgu

$$|f(t)|<M_1e^{at} \quad \text{ja} \quad |g(t-\tau)|<M_2e^{a(t-\tau)},$$

mille põhjal

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right|<M\int_0^t e^{a\tau}e^{a(t-\tau)}d\tau=Mte^{at}<Me^{(a+\varepsilon)t},$$

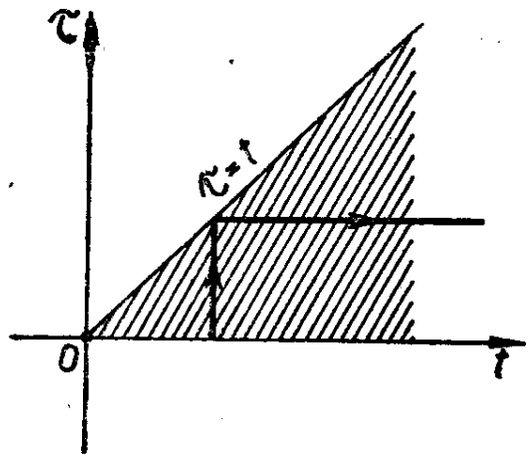
kus ε on kuï tahes väike positiivne arv. Seega on originaali tingimus 3) konvolutsiooni puhul täidetud.

Boreli teoreem. *Kui* $\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)$ *ja* $\mathfrak{L}[g(t)]=G(p)$, *siis* $\mathfrak{L}[f(t)*g(t)]=F(g)\,G(p)$.

T õ e s t u s. Konvolutsiooni kujutis on määratud absoluutselt koonduva kahekordse integraaliga, milles muudame integreerimise järjekorra (vt. joon. 61). Saame, et

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right]=\int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)\left(\int_\tau^\infty e^{-pt}g(t-\tau)\,dt\right)d\tau.$$



Joon. 61

Tehes viimases integraalis muutuja vahetuse $u=t-\tau$, $du=d\tau$, saame, et

$$\mathfrak{L}[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty g(u)e^{-pu}du=F(p)\,G(p).$$

Teoreem on tõestatud.

N ä i d e 1. Leiame originaali funktsioonile

$$w=F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Et $\dfrac{1}{p^2+1}=\mathfrak{L}(\sin t)$, siis

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\doteq\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(2\tau-t)-\cos t]\,d\tau=\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t-\frac{1}{2}\tau\cos t\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$$

Teoreem. *Kui* $\mathfrak{L}[f(t)*g(t)]=F(p)\,G(p)$, *siis*

$$\mathfrak{L}[f(t)]*g'(t)+f(t)g(0)]=pF(p)\,G(p)$$

ja

$$\mathfrak{L}[g(t)*f'(t)+g(t)f(0)]=pF(p)\,G(p).$$

Tõestus. Et

$$pF(p)\,G(p)=[pG(p)-g(0)]F(p)+g(0)F(p),$$

siis Boreli teoreemi, originaali diferentseerimise ja lineaarsuse omadust kasutades saamegi esimese võrduse tõestada. Teise tõestame analoogiliselt.

Äsjatõestatud kahte võrdust nimetatakse ***Duhameli integraalideks.***

Ülesanded

1. Näidata, et

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^\infty f(u)g(t;u)\,du\right]=G(p)F[q(p)],$$

kui

$$\mathfrak{L}[f(t)]=F(p) \quad \text{ja} \quad \mathfrak{L}[g(t;u)]=e^{-uq(p)}G(p)$$

ning q ja G on analüütilised funktsioonid (***Efrose teoreem***).

2. Näidata, et Efrose teoreem on Boreli teoreemi üldistus.

10.6. FOURIER' TEISENDUS

Matemaatilise analüüsi kursusest teame*, et kui funktsioon f on absoluutselt integreeruv kogu arvsirgel ning tal on igas punktis lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(t+)$ ja $f'(t-)$, siis igas punktis t, kus

$$f(t)=\frac{1}{2}\,[f(t+)-f(t-)],$$

kehtib seos

$$f(t)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}e^{ist}ds=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-isu}du. \tag{1}$$

Märkides

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-isu}du, \tag{2}$$

---

* Vt. **Kangro, G.** Matemaatiline analüüs II, Tln., 1968, lk. 258—263.

saame, et

$$f(t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)\,e^{ist}ds, \tag{3}$$

kus viimane integraal on mõistetud nn. ***Cauchy peaväärtusena***

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(s)\,e^{ist}ds=\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}F(s)\,e^{ist}ds.$$

Seost (2) nimetatakse ***Fourier' teisenduseks*** ning seost (3) tema **pöördteisenduseks.** Fourier' teisendus on rakenduslikult väga tähtis matemaatilises füüsikas ja raadiotehnikas. Meil läheb seda vaja seoses Laplace'i teisenduse pöördteisenduse vaatlemisega järgmises jaotises, kus muutujat s tuleb vaadelda kompleksmuutujana.

Kasutatakse järgmist sümboolikat ja terminoloogiat. Seost (1) märgitakse lühidalt

$$\mathfrak{F}(f)=F \quad \text{ehk} \quad \mathfrak{F}[f(t)]=F(s).$$

Funktsiooni f nimetatakse **originaaliks** ja funktsiooni F **kujutiseks.** Kujutist $F(s)$ nimetatakse funktsiooni $y=f(t)$ **spektraalseks tiheduseks**, kujutise moodulit $|F(s)|$ — **amplituudi tiheduseks** ning kujutise argumenti $\arg F(s)$ — **algfaasiks.**

Lähtudes Fourier' integraali definitsioonist saab kontrollida järgmisi omadusi.

I. Lineaarsus: $\mathfrak{F}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathfrak{F}(f)+\mu\mathfrak{F}(g)$.

II. Originaali nihe: $\mathfrak{F}[f(t\pm\tau)]=e^{\pm is\tau}\mathfrak{F}[f(t)]$.

III. Kujutise nihe. *Kui* $\mathfrak{F}[f(t)]=F(s)$, *siis*

$$\mathfrak{F}[f(t)\,e^{\pm i\sigma t}]=\mathfrak{F}(s\pm\sigma).$$

IV. ***Ljapunovi võrdus.*** *Kui* $\mathfrak{F}(f)=F$ *ja* $\mathfrak{F}(g)=G$, *siis*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}F(s)\,\overline{G(s)}\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}G(s)\,\overline{F(s)}\,ds.$$

V. ***Parsevali võrdus.*** *Kui* $\mathfrak{F}(f)=F$, *siis*

$$\int_{0}^{\infty}|f(t)|^2dt=\int_{0}^{\infty}|F(s)|^2ds.$$

VI. Sarnasusteoreem. *Kui* $\mathfrak{F}[f(t)]=F(s)$, *siis*

$$\mathfrak{F}[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

VII. Originaali diferentseerimine. *Kui* $\mathfrak{F}(f)=F$ *ja* $f^{(k)}(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *on absoluutselt integreeruv kogu arvsirgel, siis*

$$\mathfrak{F}[f^{(k)}(t)]=(is)^k\mathfrak{F}[f(t)],\quad k=1, 2, \ldots, n.$$

VIII. Kujutiste korrutamine. *Kui* $\mathfrak{F}(f)=F$ *ja* $\mathfrak{F}(g)=G$, *siis* $\mathfrak{F}(f*g)=F(s)\,G(s)$, *kus*

$$f(t)*g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(t-u)\,du.$$

Viimast avaldist nimetatakse funktsioonide f ja g **konvolutsiooniks** piirkonnas $(-\infty, \infty)$.

10.7. LAPLACE'I TEISENDUSE PÖÖRAMINE

Olgu $\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)$. Teisendust $\mathfrak{L}^{-1}$, mille abil saame leida originaali $f(t)$, teades kujutist $F(p)$, nimetatakse ***Laplace'i teisenduse pöördteisenduseks***. See esitub ***Riemanni — Mellini valemiga***

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp=\frac{1}{2}\,[f(t+)+f(t-)], \tag{1}$$

milles $\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)$, $\operatorname{Re}p=x>a$, kus a on funktsiooni f kasvu näitaja. Selles valemis on integraali mõistetud Cauchy peaväärtusena ning integreerimine toimub piki imaginaarteljega paralleelset sirget. Rõhutame, et funktsiooni f pidevuspunktis annab valem (1) selle funktsiooni väärtuse $f(t)$ ning esimest liiki katkevuspunktis ühepoolsete piirväärtuste aritmeetilise keskmise.

Valemi (1) tõestamiseks märgime, et funktsioon

$$y=e^{-xt}f(t)$$

on absoluutselt integreeruv kogu arvsirgel (vt. jaotis 10.1.), kusjuures $f(t)=0$, kui $t<0$. Seetõttu võib sellele funksioonile rakendada eelmise jaotise valemit (1); saame

$$e^{-xt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}ds\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-xu}e^{-isu}du$$

ehk

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x+is)t}ds\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+is)u}f(u)\,du.$$

Tähistame $x+is=p$. Sel juhul $dp=ids$, kui p muutub mööda sirget $\operatorname{Re}p=x=\text{const}$, ning me saame, et

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}dp\int_{0}^{\infty}e^{-pu}f(u)\,du$$

ehk

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp.$$

Vastavalt eelmise jaotise alguses toodud märkustele tähendab

$f(t)$ siin suurust $\frac{1}{2}[f(t+)+f(t-)]$. Valem (1) on sellega tõestatud.

Järgnevas vaatleme ühte teoreemi, mis annab piisava tingimuse originaali olemasoluks.

Teoreem. *Olgu funktsiooni F puhul rahuldatud järgmised tingimused:*

1) *F on regulaarne piirkonnas* $\operatorname{Re} p > a$;

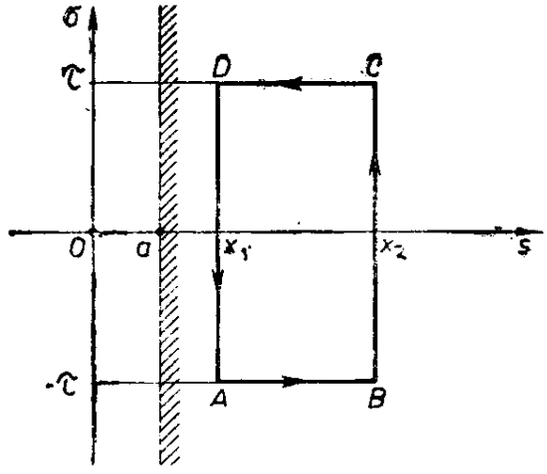
2) *kui* $\operatorname{Re} p > a$, *siis* $\lim\limits_{\operatorname{Im} p \to \infty} f(p) = 0$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+i\sigma)|\,d\sigma$ *on koonduv.*

Sel juhul on funktsioon F kujutiseks ning tema originaal avaldub kujul

$$f(t) = \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp, \qquad (2)$$

kus $x = \operatorname{Re} p > a$.



Joon. 62

Tõestus. 1) Kõigepealt näitame, et funktsiooni f määrav integraal ei sõltu sellest, milline on $x > a$. Vaatleme piirkonnas $\operatorname{Re} p = x > a$ ristkülikut $ABCD$ (vt. joon. 62). Et funktsioon F on regulaarne selles poolt̀asandis, siis Cauchy teoreemi põhjal

$$\int_{\Gamma} e^{pt} F(p)\,dp = 0, \qquad (3)$$

kus Γ on selle ristküliku rajajoon.

Et

$$\left| \int_{AB} e^{pt} F(p)\,dp \right| \leqslant e^{x_2 t} \int\limits_{x_1}^{x_2} |F(x - i\tau)|\,dx$$

ja

$$\left| \int_{CD} e^{pt} F(p)\,dp \right| \leqslant e^{x_2 t} \int\limits_{x_1}^{x_2} |F(x+i\tau)|\,dx,$$

siis teoreemi eelduse 2) kohaselt saame seosed:

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{AB} = \lim_{\tau \to \infty} \int_{CD} = 0.$$

Seega saame seose (3) põhjal, et

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{x_2-i\tau}^{x_2+i\tau} e^{pt}F(p)\,dp-\lim_{\tau\to\infty}\int_{x_1-i\tau}^{x_1+i\tau} e^{pt}F(p)\,dp=0$$

ehk

$$\int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp=\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp.$$

Sellega olemegi tõestanud, et funktsiooni f määrav integraal ei sõltu suuruse x valikust.

2) Vaatleme joonisel 63 kujutatud piirkonda G, mille rajaks on lõik BA ja ringjoone kaar c_r. Cauchy teoreemi põhjal

$$\int_{c_r} e^{pt}F(p)\,dp+\int_{BA} e^{pt}F(p)\,dp=0$$

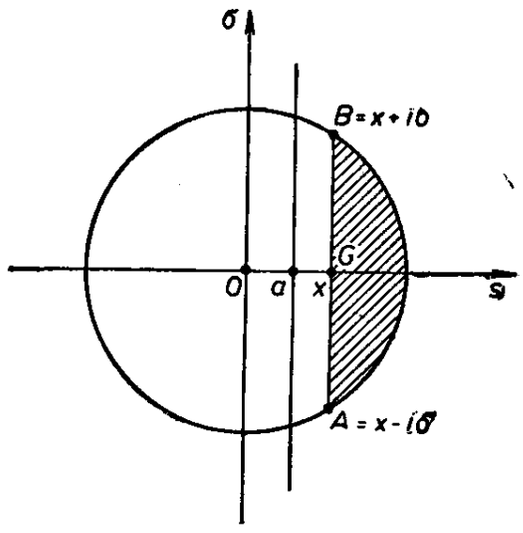
ehk

$$\int_{x-i\sigma}^{x+i\sigma} e^{pt}F(p)\,dp=\int_{c_r} e^{pt}F(p)\,dp.$$

Jordani lemma põhjal

$$\lim_{|p|\to\infty}\int_{c_r} e^{pt}F(p)\,dp=0,\ \text{kui}\ t<0,$$

mistõttu



Joon. 63

$$f(t)=\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp=0,\ \text{kui}\ t<0. \tag{4}$$

Kui $t>0$, siis

$$|f(t)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp\right|\leqslant\frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+i\sigma)|\,d\sigma.$$

Tähistades

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+i\sigma)|\,d\sigma=M,$$

saame, et $|f(t)|\leqslant Me^{xt}$. Seega näeme, et seosega (2) määratud funktsioon on originaal.

3) Näitame lõpuks, et valemiga (2) määratud funktsioon on originaaliks funktsioonile F, s. t.

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Tõepoolest, teoreemi eelduse 3) põhjal võime funktsioonile F rakendada eelmise jaotise valemit (1):

$$F(x+\mathrm{i}\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}F(x+\mathrm{i}u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(\sigma-u)}du.$$

Tähistades $p=x+\mathrm{i}\sigma$ ja $q=x+\mathrm{i}u$, saame, et

$$F(p)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}dt\int_{x-\mathrm{i}\infty}^{x+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{qt}F(q)\,dq.$$

Valemeid (2) ja (4) arvestades saamegi seose

$$F(p)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\,dt.$$

10.8. ARENDUSTEOREEMID

Tõestame mõne teoreemi, mille abil saame originaali esitada reaksarendusena. Seejuures seame kujutisele konkreetsed nõuded.

Teoreem 1 (esimene arendusteoreem). *Kui kujutis F on regulaarne lõpmatuspunktis ning selle ümbruses esitatav Laurent'i reana*

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k},$$

siis originaaliks on täisfunktsioon f, mis on esitatav astmerea summana

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}\,t^{k-1}.$$

Tõestus. Võtame $q=\frac{1}{p}$ ja $G(q)=F\left(\frac{1}{q}\right)$. Siis

$$G(q)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kq^k$$

määrab ringis $|q|<1/R$ analüütilise funktsiooni G. Cauchy võrratuse põhjal $|c_k|<MR^k$ ning seega

$$|f(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,\frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!}\leqslant MR\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R|t|)^k}{k!}=MR\mathrm{e}^{|R|t},$$

mis ütlebki, et f on täisfunktsioon. Viimane võrratus annab samuti, et $f(t)$ on originaal (3. tingimus). Et funktsiooni f defineeriv astmerida on ühtlaselt koonduv, siis peale teguriga e^{-pt} korrutamist võime teda liikmeti integreerida. Kasutades seost $\mathfrak{L}(t^n)=\frac{n!}{p^{n+1}}$, saame, et funktsiooni f kujutiseks on funktsioon F.

Märkus. On võimalik tõestada ka vastupidist: kui originaal f on täisfunktsioon, mis rahuldab võrratust $|f(t)|<Me^{a|t|}$, siis kujutis on regulaarne lõpmatuspunktis.

Teoreem 2 (teine arendusteoreem). *Olgu funktsiooni F puhul täidetud järgmised tingimused:*

1) *F on meromorfne ning pooltasandis* $\operatorname{Re} p>a$ *regulaarne;*

2) *leiduvad ringjooned* $C_n: |p|=R_n$, $R_1<R_2\ldots$, $R_n\to\infty$, *millistel $F(p)$ läheneb nullile ühtlaselt* $\arg p$ *suhtes, kui* $n\to\infty$;

3) *iga* $\tau>a$ *puhul on integraal* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\tau+i\sigma)|\,d\sigma$ *koonduv.*

Sel juhul on funktsiooni F originaal määratud seosega

$$f(t)=\sum_k \operatorname{res}\left[F(p)e^{pt};\ p_k\right], \tag{1}$$

kus resiidid on võetud kõikide iseäraste punktide suhtes ning $|p_{k+1}|\geqslant|p_k|$.

Tõestus. Valime mingi $\tau>a$ ning vaatleme ringjoone C_n seda osa l_n, mis jääb pooltasandisse $\operatorname{Re} p<\tau$ (joon. 64). Ringjoone kaar l_n koos lõiguga A_nB_n moodustab kinnise joone, mille märgime sümboliga Γ_n. Et eelmise jaotise teoreemi põhjal

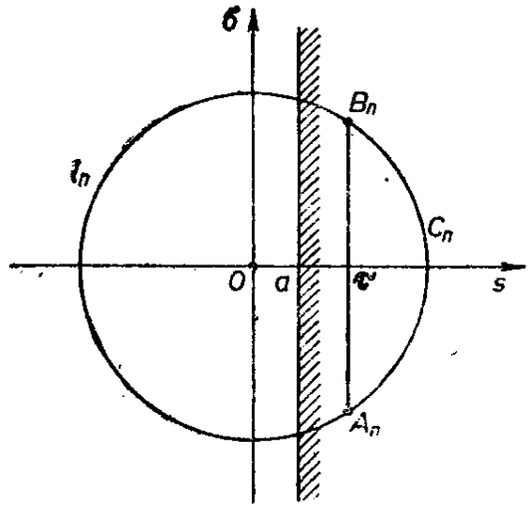
$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{A_nB_n}e^{pt}F(p)\,dp$$

ning Jordani lemma põhjal, kui $t>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_n}e^{pt}F(p)\,dp=0,$$

siis

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}e^{pt}F(p)\,dp.$$



Joon. 64

Selle integraali võime arvutada resiidide teooria põhiteoreemi kohaselt, mistõttu

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\Gamma_n}\operatorname{res}\left[e^{pt}F(p);\ p_k\right].$$

Siit saamegi teoreemi väite.

Järeldus 1. *Kui* $f(p)=P(p)/Q(p)$ *on ratsionaalne lihtmurd, siis originaal on määratud seosega*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left\{F(p)\,(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\right\},$$

kus punktid p_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ *on funktsiooni* F *poolused,* n_k *nende pooluste järgud ning summas on võetud resiidid kõikide pooluste suhtes.*

Tõestus. Väide järeldub vahetult seosest (1), arvestades resiidi väärtust poolustes. Meenutame siinkohal ka seda, et ratsionaalse lihtmurru korral $\lim_{p\to\infty} F(p)=0$ ning pooluseid on lõplik arv.

Järeldus 2. *Kui lihtmurru* $P(p)/Q(p)$ *nimetaja nullkohad* p_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ *on kõik esimest järku, siis*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\,e^{p_k t}. \tag{2}$$

Tõestus. Viimase valemi saame vahetult valemist (1), kasutades resiidi arvutamise valemit esimest järku pooluse jaoks (valem (2) jaotisest 7.2).

Rakendustes (eriti elektrotehnikas) esinevad sageli kujutised kujul

$$F(p)=\frac{P(p)}{pQ(p)},$$

kus polünoomi $P(p)$ aste ei ole polünoomi $Q(p)$ omast suurem ning kõik funktsiooni F poolused on esimest järku. Sel juhul resiid punktis 0 avaldub kujul $P(0)/Q(0)$, nagu see järeldub jaotise 7.2. valemist (1). Arvestades veel, et $Q(p_k)=0$ ning $[pQ(p)]'=Q(p)+pQ'(p)$, võime sel juhul valemi (2) esitada kujul

$$f(t)=\frac{P(0)}{Q(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{p_kQ'(p_k)}\,e^{p_k t}, \tag{3}$$

kus summas on arvestatud kõik polünoomi $Q(p)$ nullkohad p_k.

Märkus 1. Kui polünoomid $P(p)$ ja $Q(p)$ on reaalsete kordajatega, siis on poolusteks nii p_k kui ka $\bar{p}_k$ (kaaskompleksarv), kusjuures

$$\frac{P(\bar{p}_k)}{Q'(\bar{p}_k)}\,e^{\bar{p}_k t}=\overline{\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\,e^{p_k t}},$$

mis tähendab, et ka resiidid pooluste p_k ja $\bar{p}_k$ suhtes on kaaskompleksarvud. Kuna $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$, siis järelduse 2 põhjal saame, et õige on järgmine väide.

Järeldus 3. *Kui polünoomide* $P(p)$ *ja* $Q(p)$ *kordajad on reaalsed ning polünoomi* $Q(p)$ *nullkohad on kõik esimest järku, siis ratsionaalse lihtmurru* $P(p)/Q(p)$ *originaal avaldub kujul*

$$f(t)=\sum\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\,e^{p_k t}+2\mathrm{Re}\sum\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\,e^{p_k t},$$

kus arvudeks p_k on esimeses summas kõik reaalarvulised poolused ning teises summas kõik positiivsete imaginaarosadega poolused.

Märkus 2. Iga liige valemis (2) on esitatav kujul

$$\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{s_k t}[\cos \sigma_k t + \sin \sigma_k t],$$

kus $p_k = s_k + i\sigma_k$. Sellest on selge, et reaalarvulistele poolustele ($\sigma_k = 0$) vastab mitteperioodiline võnkumine, negatiivse imaginaarosaga kompleksetele poolustele — sumbuv võnkumine, puhtimaginaarsetele poolustele ($s_k = 0$) — harmooniline võnkumine. Positiivseid reaalarvulisi pooluseid ja positiivse reaalosaga kompleksarvulisi pooluseid ei saa üldse olla, kui vaadeldav süsteem ei võngu tõkestamatult kasvava amplituudiga. Öeldust järeldub, et statsionaarset võnkumist kirjeldab funktsioon f, mis on määratud seosega

$$f(t) = 2\mathrm{Re} \sum \frac{P(i\sigma_k)}{Q'(i\sigma_k)} e^{i\sigma_k t},$$

kus summa on võetud kõigi nende pooluste suhtes, mille puhul $p_k = i\sigma_k$, $\sigma_k > 0$.

10.9. IMPULSSFUNKTSIOONID

Teame, et kujutise $F(p)$ puhul $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, p \to \infty} F(p) = 0$, mis tähendab, et $1, p, p^2, \ldots$ ei saa olla kujutised tavalises mõttes. Ent mõnel juhul tuleb rakendustes vaadelda just niisuguseid seoseid, kus kujutisena tuleb arvestada ka ülalmärgitud suurusi. Et $\mathfrak{L}[H(t)] = p^{-1}$, siis originaali diferentseerimise omadust arvestades peaks ühiku originaaliks olema $H'(t)$. Heaviside'i funktsioon pole aga tavalises mõttes diferentseeruv, mistõttu tuleks laiendada funktsiooni mõistet selliselt, et ka funktsioonil H oleks tuletis. Selle eesmärgi saavutame, kui vaatleme ***Diraci δ-funktsiooni***, mida võib iseloomustada järgmiselt

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

ning

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Viimane tingimus tuleneb otseselt seosest $H'(t) = \delta(t)$, sest viimase põhjal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} H'(t)\, dt = H(\infty) - H(-\infty) = 1.$$

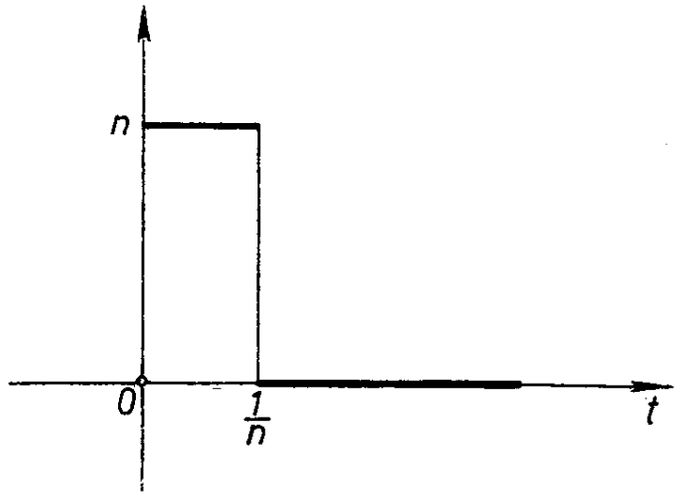
Et funktsiooni (signaali) φ **impulsiks** nimetatakse suurust

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt,$$

siis δ-funktsiooni nimetatakse **ühikimpulsiga impulssfunktsiooniks** või **null-järku impulssfunktsiooniks.**

Diraci δ-funktsioonini võiksime jõuda ka järgmistest kaalutlustest lähtudes. Olgu funktsioonid δ_n defineeritud seosega (vt. joon. 65)

$$\delta_n(t)=\begin{cases} n, & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & t<0 \text{ või } t>\frac{1}{n}. \end{cases}$$



Joon. 65

Sel juhul

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)\,dt=1$$

ning

$$h_n(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta_n(u)\,du=\begin{cases} 0, & t<0, \\ nt, & 0\leqslant t<\frac{1}{n}, \\ 1, & t\geqslant\frac{1}{n}. \end{cases}$$

On loomulik lugeda õigeks seosed

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=\delta(t) \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty}h_n(t)=H(t).$$

Olgu φ mingi Laplace'i teisenduse originaal. Sel juhul

$$\int_0^{\infty}\varphi(t)\delta_n(t)\,dt=\int_0^{1/n}\varphi(t)\delta_n(t)\,dt=n\int_0^{1/n}\varphi(t)\,dt=$$

$$=n\varphi(\tau)\,\frac{1}{n}=\varphi(\tau),$$

kus $0<\tau<\frac{1}{n}$. Selle põhjal on loomulik lugeda kehtivaks seos

$$\int_0^{\infty}\varphi(t)\delta(t)=\varphi(0) \qquad (1)$$

(kui φ ei ole pidev punktis $t=0$, siis $\varphi(0)$ tähendab parempoolset piirväärtust selles punktis).

Vastavalt seosele (1) saamegi, et

$$\mathfrak{L}[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-pt}dt=1$$

ning hilinemisteoreemi põhjal

$$\mathfrak{L}[\delta(t-\tau)]=e^{-p\tau},$$

mis on samuti kooskõlas seosega (1). Nende seoste põhjal näeme, et on õige teoreem kujutiste korrutamise kohta. Tõepoolest,

$$1 \cdot F(p) \doteq \int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \doteq f(t).$$

Analoogiliselt on võimalik esitada ka kõrgemat järku impulssfunktsioonide $\delta^{(n+1)}$ mõiste selliselt, et

$$\mathfrak{L}[\delta^{(n+1)}(t)] = p^n \quad \text{ning} \quad \delta^{(n)}(t) = H^{(n+1)}(t).$$

Olgu märgitud, et impulssfunktsioonid kuuluvad distributsioonide (üldistatud funktsioonide) klassi. Viimaste kohta on loodud matemaatiline teooria, aga käesolevas raamatus ei ole ruumi seda vaadelda.

11. LAPLACE'I TEISENDUSE RAKENDUSI

11.1. HARILIKUD LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Vaatleme konstantsete kordajatega lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t).$$

Lühidalt kirjutatakse see võrrand

$$L(D)x(t) = f(t), \tag{1}$$

kus $L(D)$ on operaatorpolünoom:

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

milles D on diferentseerimise operaator, s. t.

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad \ldots; \quad D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Otsime vaadeldava võrrandi lahendit piirkonnas $t \geqslant 0$ algtingimustel

$$x^{(k)}(0) = x_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Eeldame, et funktsioonid f ning $x^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots; n)$ on originaalid, ning tähistame

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(p),$$

$$\mathfrak{L}[x(t)] = X(p).$$

Originaali diferentseerimise eeskirja ning algtingimusi arvestades saame, et

$$\mathfrak{L}[x'(t)] = pX(p) - x_0,$$

$$\mathfrak{L}[x''(t)]=p^2X(p)-x_0p-x_1,$$

. . . . . .

$$\mathfrak{L}[x^{(n)}(t)]=p^nX(p)-\sum_{k=1}^{n}x_{k-1}p^{n-k}.$$

Rakendades võrrandile (1) Laplace'i teisendust (arvestades teisenduse lineaarsust), saame kujutise suhtes võrrandi

$$L(p)X(p)=F(p)+Q(p),$$

mida nimetatakse **operaatorvõrrandiks.** Selles võrrandis on $L(p)$ polünoom, mille kordajateks on operaatorpolünoomi kordajad, ning $Q(p)$ on $(n-1)$-astme polünoom, mille kordajad on määratud algtingimustega (2). Operaatorvõrrandist leiame otsitava funktsiooni kujutise:

$$X(p)=\frac{F(p)+Q(p)}{L(p)}.$$

Selle kujutise järgi leiame ka originaali. Selleks võib kasutada arendusteoreeme, Laplace'i teisenduse omadusi ja nende teisenduste tabelit.

N ä i d e 1. Lahendame diferentsiaalvõrrandi $x''+x=2\cos t$ algtingimustel $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.

Et $\mathfrak{L}(\cos t)=\frac{p}{p^2+1}$ ja

$$\mathfrak{L}(x'')=p^2\mathfrak{L}(x)-px(0)-x'(0)=p^2\mathfrak{L}(x)+1,$$

siis Laplace'i teisenduse rakendamisel sellele võrrandile saame, et

$$p^2\mathfrak{L}(x)+1+\mathfrak{L}(x)=\frac{2p}{p^2+1}$$

ehk

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{2p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Arvestades seost

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)',$$

leiame Laplace'i teisenduse omadusi kasutades, et

$$\mathfrak{L}(x)=\mathfrak{L}(t\sin t)-\mathfrak{L}(\sin t),$$

millest saame võrrandi lahendi

$$x(t)=t\sin t-\sin t=(t-1)\sin t.$$

Sellest lahenduskäigust märkame, et operaatormeetodil diferentsiaalvõrrandit lahendades arvestatakse algtingimusi juba lahenduskäigu alguses. Sel moel ilmneb algtingimuste mõju juba enne lahendi leidmist. Kui $x_k=0$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ (algtingimused nullid), on operaatormeetodil lahendamine eriti lihtne.

Operaatormeetodi eelised on eriti ilmekad ka siis, kui võrrandi parem pool on tükati sile (või isegi tükati pidev). Operaatormeetodit kasutades ei pea leidma iga sileduse (või pidevuse) piirkonna jaoks erilahendi, vaid saame ühe, kõikide piirkondade jaoks kehtiva lahendi.

Näide 2. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$x''+4x=f(t)$$

algtingimustel $x(0)=x'(0)=0$, kus

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ a, & 0\leqslant t<b, \\ 0, & t\geqslant b. \end{cases}$$

Funktsiooni f võime Heaviside'i funktsiooni abil esitada järgmiselt:

$$f(t)=a[H(t)-H(t-b)].$$

Rakendades võrrandile Laplace'i teisendust (arvestades originaali diferentseerimise ja lineaarsuse omadusi, hilinemisteoreemi ning Heaviside'i funktsiooni kujutist), saame operaatorvõrrandi

$$p^2X(p)+4X(p)=\frac{a}{p}\,(1-\mathrm{e}^{-bp}),$$

millest

$$X(p)=\frac{a(1-\mathrm{e}^{-bp})}{p(p^2+4)}.$$

Jaotise 10.8 valemi 4 põhjal $(p_1=2\mathrm{i},\ p_2=-2\mathrm{i})$

$$\frac{a}{p(p^2+4)}\doteqdot\frac{a}{4}+\frac{a}{2\mathrm{i}\cdot 4\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\frac{a}{-2\mathrm{i}\cdot(-4\mathrm{i})}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}=$$

$$=\frac{a}{4}-\frac{a}{4}\cos 2t=\frac{a}{2}\sin^2 t$$

ning hilinemisteoreemi põhjal

$$\frac{a\mathrm{e}^{-bp}}{p(p^2+4)}\doteqdot\frac{a}{2}\sin^2(t-b)H(t-b).$$

Seega saame, et meie võrrandi lahend $x(t)$ on

$$x(t)=\frac{a}{2}\,[\sin^2 tH(t)-\sin^2(t-b)H(t-b)].$$

Ülesanded

1. Lahendada Laplace'i teisendust kasutades järgmised diferentsiaalvõrrandid:
   a) $x''+2x'+x=\sin t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$;
   b) $x''-2x'+x=e^t,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$;
   c) $x'''+x'=t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=0$;
   d) $x''+x=t\cos t,\ x(0)=x'(0)=0$.

   Vastused: a) $x=\frac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$;

   b) $x=\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)e^t$;

   c) $x=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t-\sin t$;

   d) $x=\frac{1}{4}(t^2\sin t+t\cos t-\sin t)$.

2. Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandid:
   a) $x''+4x'+4x=2e^{-t}[1-H(t-1)],\ x(0)=1,\ x'(0)=0$;
   b) $x''+x=f(t),\ x(0)=x'(0)=0,$

$$f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1,\\ 4, & t>1,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

   Vastused: a) $x=e^{-2t}+2e^{-t}-2H(t-1)\,[e^{-t}-te^{-2t-1}]$;
   b) $x=(2-\cos t)H(t)+[2-2\cos(t-1)]H(t-1)$.

11.2. DUHAMELI INTEGRAALI KASUTAMINE

Olgu vaja lahendada n-järku diferentsiaalvõrrand

$$L(D)x(t)=f(t) \tag{1}$$

algtingimustel $x^{(k)}(0)=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Sel juhul esitub operaatorvõrrandi lahend kujul

$$X(p)=\frac{F(p)}{L(p)},$$

kus $F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$.

Seosega

$$W(p)=\frac{1}{L(p)}$$

määratud funktsiooni W nimetatakse võrrandi (1) **ülekandefunktsiooniks.** Viimase kaudu saame operaatorvõrrandi lahendi esitada seosega

$$X(p)=W(p)F(p). \tag{2}$$

Seega on *ülekandefunktsioon niisugune funktsioon, millega võrrandi parema poole kujutist korrutades saame lahendi kujutise.*

Olgu meil teada võrrandi (1) lahend $x_1(t)$, kui $f(t)=H(t)$. Seose (2) põhjal

$$\mathfrak{L}[x_1(t)]=X_1(p)=\frac{1}{p}W(p),$$

s. t.

$$W(p)=pX_1(p).$$

Asendus seosesse (2) annab meile, et

$$X(p)=pX_1(p)F(p),$$

millest Duhameli integraali (vt. jaotis 10.5) põhjal

$$x(t)=x_1(t)f(0)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

N ä i d e. Lahendada võrrand

$$x''+x=e^{-t^2}$$

algtingimusel $x'(0)=x(0)=0$.

Et käesoleval juhul ülekandefunktsioon avaldub seosega

$$W(p)=\frac{1}{p^2+1},$$

siis

$$X_1=\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1},$$

millest $x_1(t)=1-\cos t$. Seega saame seose (3) põhjal, et vaadeldava võrrandi lahend avaldub kujul

$$x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)^2}\sin\tau\,d\tau.$$

Seda integraali ei saa elementaarfunktsioonide kaudu avaldada.

Ülesanded

1. Lahendada diferentsiaalvõrrandid

a) $x''-x'=\frac{1}{1+e^t}$, $x(0)=x'(0)=0$;

b) $x^{IV}-2x''+x=24t\cos t$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

Vastused:

a) $x=\ln(e^t+1)-t-\ln 2-1+e^t[1-t+\ln(e^t+1)-\ln 2]$;

b) $x=3(-4\sin t+2t\cos t+2\,\mathrm{sh}\,t)$.

11.3. BESSELI FUNKTSIOONIDE KUJUTISED

Operaatormeetodit saab üsna edukalt rakendada ka niisuguste lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamisel, mille kordajateks a_k on polünoomid muutuja t suhtes. Kasutades originaali diferentseerimise omadust, saab ka sel korral avaldada kõik kujutised $\mathfrak{L}[a_k x^{(k)}(t)]$ otsitava kujutise $X(p)=\mathfrak{L}[x(t)]$ ja tema tuletise kaudu. Sel viisil osutub operaatorvõrrandiks diferentsiaalvõrrand, mille järk on võrdne lahendatava võrrandi kordajapolünoomide kõrgeima astmega. Peatumata selle juures üldjuhul, vaatleme, kuidas kirjeldatud meetodil lahendada võrrand (1). Et selle lahend avaldub teatava spetsiaalse funktsioonina, mida nimetatakse Besseli funktsiooniks, siis peatume kõigepealt Besseli funktsioonide mõiste juures.

Diferentsiaalvõrrandi

$$z^2y''(z)+zy'(z)+(z^2-\nu^2)y(z)=0$$

(ν on konstant, mille puhul $\mathrm{Re}\,\nu>-1$) lahendeid, mis ei ole samaselt võrdsed nulliga, nimetatakse **silindrilisteks funktsioonideks.** Üheks niisuguseks lahendiks on funktsioon J_ν, mille määrab seos

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

ning mida nimetatakse **esimest liiki ν-järku *Besseli funktsiooniks.*** D'Alembert'i tunnuse abil võib kontrollida, et Besseli funktsiooni defineeriv astmerida koondub kogu komplekstasandil, millest võib olla välja arvatud punkt $z=0$.

Vaatleme järgnevas täisarvulist järku ($\nu=n$, $n=0, 1, \ldots$) Besseli funktsioone. Need on täisfunktsioonid. Et $\Gamma(n+k+1)=(n+k)!$, siis

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

millest

$$J_n(z)=\frac{z^n}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=\frac{z^n}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}z^{2k}.$$

Et

$$|c_{2k}|=\left|\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!2^{2k}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{2k}(k!)^2}\leqslant\frac{1}{(2k)!},$$

sest $2^{2k}(k!)^2\geqslant(2k)!$ (seda võrratust saab tõestada täieliku induktsiooni meetodiga), siis

$$|J_n(z)|\leqslant\left|\left(\frac{z}{2}\right)^n\right|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\leqslant\left|\left(\frac{z}{2}\right)^n\right||e^z|.$$

Järgnevas vaatleme funktsioone J_n reaalse argumendi korral (võtame $z=t$). Et J_n on täisfunktsioon, siis originaali teine tingimus on täidetud. Kolmanda tingimuse täidetus tuleneb viimati esitatud võrratusest. Seega on funktsioonid J_n originaalid. Leiame nende kujutised. Kõigepealt leiame funktsiooni J_0 kujutise. Selleks lähtume teda defineerivast diferentsiaalvõrrandist

$$tJ_0''(t)+J_0'(t)+tJ_0(t)=0 \qquad (1)$$

ning arvestame, et $J_0(0)=1$ ja $J_0'(0)=0$. Tähistades $\mathfrak{L}(J_0(t))=X(p)$, saame originaali diferentseerimise omaduse põhjal, et

$$\mathfrak{L}(J_0'(t))=pX(p)-1$$

$$\mathfrak{L}(J_0''(t))=p^2X(p)-p.$$

Kui veel peame silmas, et kujutise diferentseerimise omaduse põhjal

$$\mathfrak{L}[tJ_0(t)]=-X'(p),$$

$$\mathfrak{L}[tJ_0''(t)]=-[p^2X(p)-p]'=-2pX(p)-p^2X'((p)+1,$$

siis operaatori $\mathfrak{L}$ lineaarsust arvestades saame seosest (1), et

$$-2pX-p^2X'+1+pX-1-X'=0$$

ehk

$$-(p^2+1)\frac{dX}{dp}-pX=0.$$

Me saime kujutise $X(p)$ leidmiseks eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dX}{X}=-\frac{p}{p^2+1}dp,$$

millest

$$\ln X = -\frac{1}{2}\ln(p^2+1)+\ln C$$

ehk

$$X=\frac{C}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Esimese piirteoreemi (teoreem 1 jaotisest 10.4) põhjal

$$\lim_{\mathrm{Re}\ p\to\infty} pX = \lim_{\mathrm{Re}\ p\to\infty} \frac{pC}{\sqrt{p^2+1}} = C = \mathrm{J}_0(0) = 1.$$

Järelikult

$$\mathfrak{L}(\mathrm{J}_0(t)) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Kõrgemat järku ($n>0$) Besseli funktsioonide kujutiste leidmiseks kasutatakse nende funktsioonide puhul kehtivaid seoseid

$$\mathrm{J}_n(t) = \mathrm{J}_{n-2}(t) - 2\mathrm{J}'_{n-1}(t), \quad \mathrm{J}_{-n}(t) = (-1)^n \mathrm{J}_n(t).$$

Viimaste põhjal ($n=1$ korral) saame, et

$$\mathrm{J}_1(t) = \mathrm{J}_{-1}(t) - 2\mathrm{J}'_0(t), \quad \mathrm{J}_{-1}(t) = -J_1(t),$$

millest

$$\mathrm{J}_1(t) = -\mathrm{J}'_0(t).$$

Seega

$$\mathfrak{L}(\mathrm{J}_1(t)) = \mathfrak{L}(-\mathrm{J}'_0(t)) = -p\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + \mathrm{J}_0(0),$$

mistõttu

$$\mathfrak{L}(\mathrm{J}_1(t)) = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Täieliku induktsiooni meetodiga võiksime tõestada, et

$$\mathfrak{L}(\mathrm{J}_n(t)) = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Kasutades sarnasusteoreemi, saame kordse argumendiga Besseli funktsioonide puhul, et

$$\mathfrak{L}(J_n(at)) = \frac{1}{a}\frac{(\sqrt{(p/a)^2+1}-p/a)^n}{\sqrt{(p/a)^2+1}} = \frac{(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n}{a^n\sqrt{p^2+a^2}}.$$

Besseli funktsioonide abil defineeritakse **imaginaarse argumendiga silindrilised funktsioonid** I_n:

$$I_n(t) = (-i)^n J_n(it) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}.$$

Nende puhul

$$\mathfrak{L}(I_n(t)) = \frac{(p-\sqrt{p^2-1})^n}{\sqrt{p^2-1}}$$

ning

$$\mathfrak{L}(I_n(at)) = \frac{(p-\sqrt{p^2-a})^n}{a^n\sqrt{p^2-a^2}}.$$

Viimased valemid saadakse analoogiliselt funktsioonide J_n kohta käivate vastavate valemitega, arvestades, et

$I_1(t) = I_0'(t)$ ja $I_n(t) = I_{n-2}(t) - 2I_{n-1}'(t)$ $(n \geqslant 2)$.

Ülesanded

1. Tõestada, et

$$\mathfrak{L}(J_0(2\sqrt{t})) = \frac{1}{p}e^{-1/p}, \quad \mathfrak{L}(t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})) = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p}.$$

2. Lahendada diferentsiaalvõrrandid

a) $tx'' - x' = tJ_2(2\sqrt{t})$;

b) $tx'' - (1+t)x' + 2(1-t)x = 0$.

Vastused:

a) $x = c_1t^2 + c_2 - tJ_2(2\sqrt{t})$;

b) $x = c_1e^{2t} + c_2(1+3t)e^{-t}$.

11.4. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMID

Analoogiliselt harilike diferentsiaalvõrranditega saab lahendada operaatormeetodil ka diferentsiaalvõrrandite süsteeme. Võrrandisüsteemist lähtudes leitakse sellele vastav operaatorvõrrandite süsteem, mis osutub lineaarseks võrrandisüsteemiks. Viimase lahedamisel

saame otsitavate suuruste kujutised, mille põhjal leiamegi vaadeldava süsteemi lahendid. Piirdume siinkohal näitega.

N ä i d e. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

algtingimustel $x(0) = y(0) = 1$.

Olgu $\mathfrak{L}(x) = X$ ja $\mathfrak{L}(y) = Y$. Siis Laplace'i teisenduse rakendamisel selle süsteemi võrranditele saame algebralise süsteemi

$$\begin{cases} pX - 1 = -Y \\ pY - 1 = 2X + 2Y. \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahendamisel leiame, et

$$X = \frac{p-3}{p^2 - 2p + 2}, \quad Y = \frac{2+p}{p^2 - 2p + 2}.$$

Et originaali leidmiseks saaks kasutada tabelit, esitame need lahendid kujul

$$X = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{2}{(p-1)^2+1},$$

$$Y = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{3}{(p-1)^2+1}.$$

Tabelist leiame nüüd meie diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendid:

$x = e^t \cos t - 2e^t \sin t,$

$y = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$

Ülesanded

1. Lahendada järgmised diferentsiaalvõrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = x'(0) = 0$;

b) $\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1$;

c) $\begin{cases} 3tx' = 2x + y - z \\ 2ty' = x + 3y + z \\ 6tz' = -x + 7y + 5z \end{cases}$, $x(1) = y(1) = z(1) = 1.$

Vastused: a) $x=2(1-e^{-t}-te^{-t})$, $y=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$;

b) $x=-e^{-t}$, $y=0$, $z=e^{t}$;

c) $x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t$, $y=\frac{5}{4}t^2-\frac{1}{4}$,

$z=\frac{5}{4}t^2-\frac{2}{3}t+\frac{5}{12}$.

11.5. INTEGRAALIDE ARVUTAMINE

Operaatorarvutus võimaldab arvutada ka paljusid integraale. Selleks kasutatakse Boreli teoreemi, seoseid (3) ja (4) jaotisest 10.3, mitmeid erikujulisi operaatorarvutuse valemeid ning neid kahte teoreemi, mida käesolevas jaotises tõestame. Alustame paari näitega.

Näide 1. Arvutame integraali

$$I=\int_0^\infty \frac{J_0(t)-\cos t}{t}\,dt.$$

Jaotise 10.3 valemi (3) põhjal

$$I=\int_0^\infty \mathfrak{L}[J_0(t)-\cos t]\,dp=\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{1}{p^2+1}\right)dp=$$

$$=\left[\ln(p+\sqrt{p^2+1})-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)\right]_0^\infty=\ln 2.$$

Näide 2. Arvutame integraali

$$I=\int_0^t \sin(t-u)J_1(u)\,du.$$

Vaadeldav integraal on suuruste $\sin t$ ja $J_1(t)$ konvolutsioon. Et

$$\mathfrak{L}(\sin t)=\frac{1}{p^2+1}, \qquad \mathfrak{L}[J_1(t)]=\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}},$$

siis Boreli teoreemi põhjal

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t \sin(t-u)J_1(u)\,du\right]=\frac{1}{p^2+1}\,\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}.$$

Et

$$\mathfrak{L}[J_0(t)]=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

siis kujutise diferentseerimise omaduse põhjal

$$\mathfrak{L}[-tJ_0(t)]=-\frac{p}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}},$$

mistõttu

$$I=\sin t-tJ_0(t).$$

Tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 1. *Olgu* $\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)$, $\operatorname{Re} p>0$. *Siis*

$$\int_0^\infty f(t)\,dt=\lim_{p\to 0}F(p),$$

kui selline integraal eksisteerib.

Tõestus. Originaali integreerimise valemi kohaselt

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right]=\frac{F(p)}{p},\quad \operatorname{Re} p>0.$$

Et see päratu integraal eksisteerib, siis teise piirteoreemi (teoreem 2 jaotisest 10.4) põhjal

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(u)\,du=\lim_{p\to 0}p\frac{F(p)}{p}=\lim_{p\to 0}F(p).$$

Näide 3. Arvutame integraali

$$\int_0^\infty J_n(at)\,dt,\quad a>0.$$

Et

$$\mathfrak{L}[J_n(at)]=\frac{(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n}{a^n\sqrt{p^2+a^2}},$$

siis äsjatõestatud teoreemi kohaselt

$$\int_0^\infty J_n(at)\,dt=\frac{1}{a}.$$

Teoreem 2. *Kui*

$$\mathfrak{L}[f(t)]=F(p)\quad\text{ja}\quad\mathfrak{L}[f_1(t)]=F_1(p)$$

siis

$$\int_0^\infty F(t)f_1(t)\,dt = \int_0^\infty F_1(t)f(t)\,dt.$$

Viimast seost nimetatakse ***Parsevali võrduseks.***

Tõestus. Et

$$\int_0^\infty F(t)f_1(t)\,dt = \int_0^\infty f_1(t)\left[\int_0^\infty e^{-tu}f(u)\,du\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty f(u)\left[\int_0^\infty e^{-tu}f_1(t)\,dt\right]du = \int_0^\infty f(u)F_1(u)\,du,$$

siis olemegi tõestanud Parsevali võrduse.

Erijuhul, kui

$$f_1(t) = H(t-a) - H(t-b),\ a<b,$$

siis

$$F_1(p) = \frac{1}{p}\,(e^{-ap} - e^{-bp})$$

ning

$$\int_0^\infty F(t)f_1(t)\,dt = \int_a^b F(t)\,dt.$$

Parsevali võrduse põhjal saame seega seose

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} f(t)\,dt.$$

Näide 4. Arvutame integraali

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt.$$

Selleks võtame viimases seoses $f(t) = H(t)$. Me saame, et

$$I = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_a^b = \ln\frac{b}{a},$$

sest $\mathfrak{L}[H(t)] = \frac{1}{p}$.

Näide 5. Arvutame integraali

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Et $\mathfrak{L}(\sin t)=\frac{1}{p^2+1}$, siis Parsevali võrduse põhjal

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}H(t)\,dt=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\arctan t\,|_0^\infty=\frac{\pi}{2}.$$

Ülesanded

1. Näidata, et

a) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-at}}{te^t}\,dt=\ln(a+1)$,

b) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}\,dt=\arctan\frac{1}{a}$,

c) $\int_0^\infty (J_0(t)-e^{-at})\,\frac{dt}{t}=\ln 2a$,

d) $\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)\,du=\sin t$.

11.6. KONVOLUTSIOONI TÜÜPI INTEGRAALVÕRRANDID

Operaatorarvutusega saab hõlpsasti lahendada integraalvõrrandeid

$$\lambda\int_0^t k(t-u)x(u)\,du=f(t) \tag{1}$$

ja

$$x(t)+\lambda\int_0^t k(t-u)x(u)\,du=f(t), \tag{2}$$

mida nimetatakse vastavalt **esimest** ja **teist liiki konvolutsiooni tüüpi *Volterra integraalvõrranditeks***. Otsitavaks on neis funktsioon x; arv λ on reaalarvuline konstant. Neis võrrandeis esinevat integraali võib vaadelda kahe funktsiooni konvolutsioonina, millest tuleneb ka võrrandi nimetus.

Tähistame

$$\mathfrak{L}[f(t)]=F(p),\ \mathfrak{L}[k(t)]=K(p) \quad \text{ja} \quad \mathfrak{L}[x(t)]=X(p).$$

Boreli teoreemi arvestades saame vastavateks operaatorvõrranditeks

$$\lambda K(p)X(p)=F(p) \tag{3}$$

ja

$$X(p)+\lambda K(p)X(p)=F(p). \tag{4}$$

Lahendades operaatorvõrrandi ja leides saadud lahendile kui kujutisele vastava originaali, saamegi vaadeldava integraalvõrrandi lahendi.

Näide 1. Olgu meil vaja lahendada esimest liiki Volterra integraalvõrrand

$$\int_0^t \sin(t-u)\,x(u)\,du = \sin^2 t.$$

Käesoleval juhul $\lambda=1$ ning $k(t)=\sin t$. Et

$$\mathfrak{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2+1}$$

ning

$$\mathfrak{L}(\sin^2 t) = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right),$$

siis vastavalt võrrandile (3) saame operaatorvõrrandi

$$\frac{1}{p^2+1}X(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right),$$

millest

$$X(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + 3\frac{p}{p^2+4}\right).$$

Kujutiste tabeli põhjal saame, et vaadeldava integraalvõrrandi lahendiks on

$$x(t) = \frac{1}{2}(1+3\cos 2t),\ t>0.$$

Näide 2. Leiame lahendi integraalvõrrandile

$$x(t) + 2\int_0^t e^{t-u}x(u)\,du = 1.$$

See võrrand on teist liiki Volterra integraalvõrrand, kus $\lambda=2$. Vastavalt võrrandile (4) saame operaatorvõrrandi

$$X(p) + \frac{2}{p-1}X(p) = \frac{1}{p},$$

mille lahendiks on

$$X(p) = \frac{p-1}{p(p+1)} = \frac{2p-p-1}{p(p+1)} = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p}.$$

Kujutiste tabeli põhjal leiame integraalvõrrandi lahendi

$$x(t) = 2e^{-t} - 1,\ t>0.$$

Ülesanded

1. Lahendada järgmised integraalvõrrandid:

a) $x(t)=t+\int_0^t (t-u)x(u)\,du$,

b) $x(t)=t+2\int_0^t \cos(t-u)x(u)\,du$,

c) $1-\cos t=\int_0^t ch(t-u)x(u)\,du$,

d) $t^3=\int_0^t (t-u)^2x(u)\,du$.

Vastused:

a) $x=\operatorname{sh} t$,
b) $x=2te^t-2e^t+t+2$,
c) $x=2\sin t-t$,
d) $x=3$.

11.7. OSATULETISEGA VÕRRANDID

Operaatormeetod on edukalt rakendatav ka osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. Seejuures kasutame Laplace'i teisenduse omadusi parameetrist sõltuvate funktsioonide kujutamisest. Operaatormeetodi rakendamisel taandame osatuletistega võrrandi lahendamise hariliku diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Arendamata üldist teooriat, piirdume vaid näitega.

Näide. Varras pikkusega l on ühte otsa ($x=0$) pidi kinnitatud. Vabale otsale ($x=l$) mõjub telje sihiline jõud $F=A\sin\omega t$. Leida varda punktide pikivõnkumised.

Pikivõnkumisi kirjeldab diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

kus $u=u(x,t)$ väljendab varda punkti x nihet ajamomendil t ning a^2 on varda materjalist sõltuv konstant. Alg- ja rajatingimused esituvad kujul:

$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad u(0,t)=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{A}{E}\sin\omega t,$$

kus E on elastsusmoodul. Viimane tingimus tuleneb Hooke'i seadusest, mille põhjal vardale mõjuv jõud F ja nihe u on seotud valemiga

$$F=E\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Võrrandist (1) saame operaatorvõrrandi

$$p^2U=a^2\frac{d^2U}{dx^2}, \tag{2}$$

kus $U=U(x, p)$. Kui vaatleme muutujat p parameetrina, on operaatorvõrrand teist järku harilik diferentsiaalvõrrand, mille karakteristliku võrrandi

$$p^2=a^2\lambda^2,$$

lahenditeks on

$$\lambda_1=\frac{p}{a} \quad \text{ja} \quad \lambda_2=-\frac{p}{a}.$$

Seega avaldub võrrandi (2) üldlahend kujul

$$U=C_1e^{(p/a)x}+C_2e^{(-p/a)x}.$$

Meil on aga vaja leida lahend, mis rahuldaks tingimusi:

$$U|_{x=0}=0, \quad \frac{dU}{dx}\Big|_{x=l}=\frac{A}{E}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Esimese tingimuse põhjal saame, et $C_2=-C_1$, mistõttu

$$U=C_1(e^{(p/a)x}-e^{-(p/a)x})=2C_1\,\mathrm{sh}\,\frac{p}{a}x.$$

Teise tingimuse põhjal saame nüüd, et

$$2C_1\frac{p}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{p}{a}l=\frac{A}{E}\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

millest

$$2C_1=\frac{b}{p(p^2+\omega^2)\,\mathrm{ch}\,\frac{p}{a}l},$$

kus $b=\frac{Aa\omega}{E}$.

Sellega oleme leidnud operaatorvõrrandi lahendi

$$U=\frac{b}{p(p^2+\omega^2)}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}p}{\mathrm{ch}\,\frac{l}{a}p}=\frac{G(p)}{B(p)}.$$

Originaali leidmiseks kasutame teist arendusteoreemi, sest saadud kujutisel on loenduv hulk puhtimaginaarseid pooluseid, mis on paarikaupa kaaskomplekssed. Ülemises pooltasandis asuvad poolused

$$p=i\omega, \quad p_k=i\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)=i\omega_k \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Punkt $p=0$ ei ole poolus, vaid kujutise kõrvaldatav iseärane punkt, mille suhtes resiid on null.

Me saame, et

$$u(x, t)=2\mathrm{Re}\left\{\frac{G(\mathrm{i}\omega)}{B'(\mathrm{i}\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{G(p_k)}{B'(p_k)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\right\},$$

kusjuures eeldame, et $\omega_k\neq\omega$ $(k=1, 2, \ldots)$, mis sisuliselt tähendab resonantsi puudumist.

Kui teha viimases avaldises vajalikud arvutused, saaksime, et

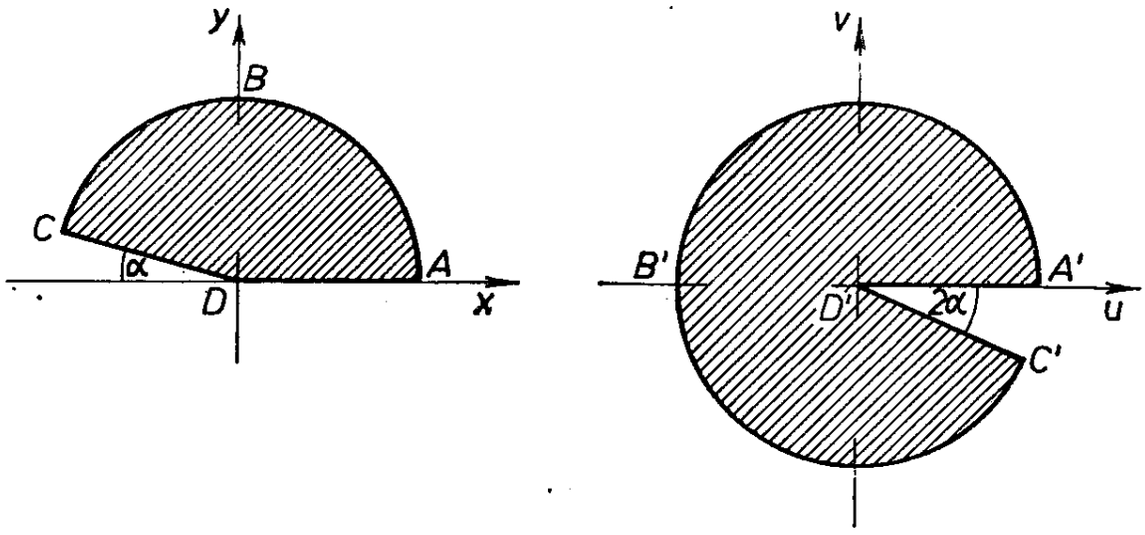
$$u(x, t)=\frac{1}{\omega^2\cos\dfrac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t+$$

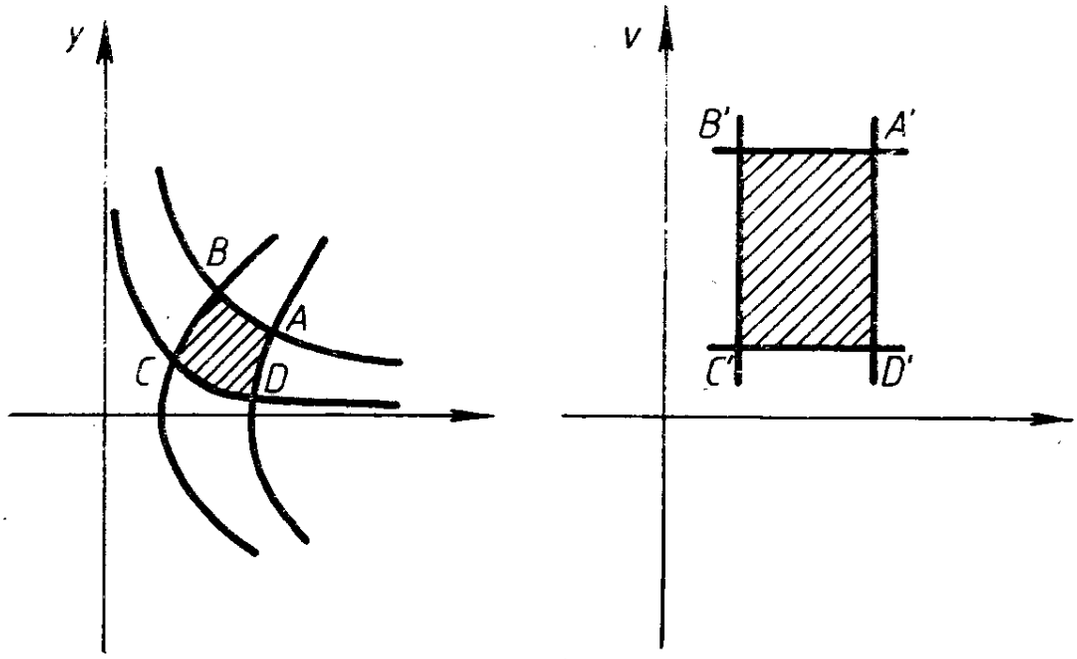
$$+\frac{2ab}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\dfrac{\omega_k}{a}x}{\omega_k^2-\omega^2}\,\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}.$$

LISAD

Konformsed kujutused elementaarfunktsioonidega

Tabel 1

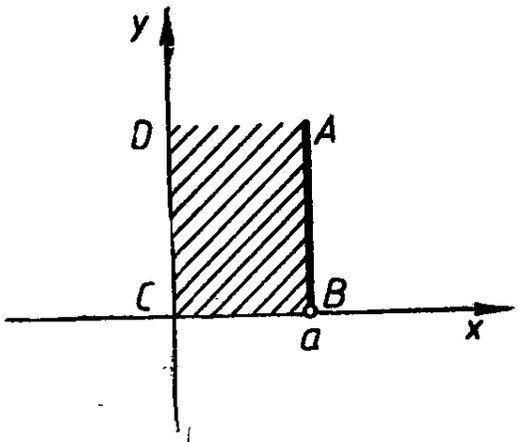


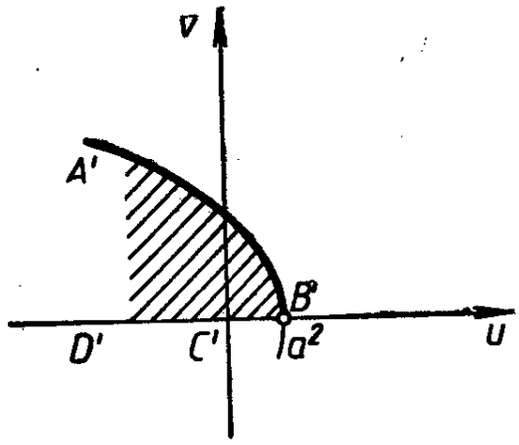


CB ja DA $\quad x^2 - y^2 = const$

CD ja BA $\quad xy = const$

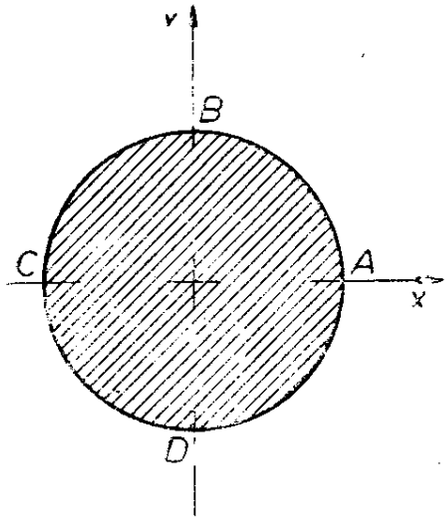
$w = z^2$

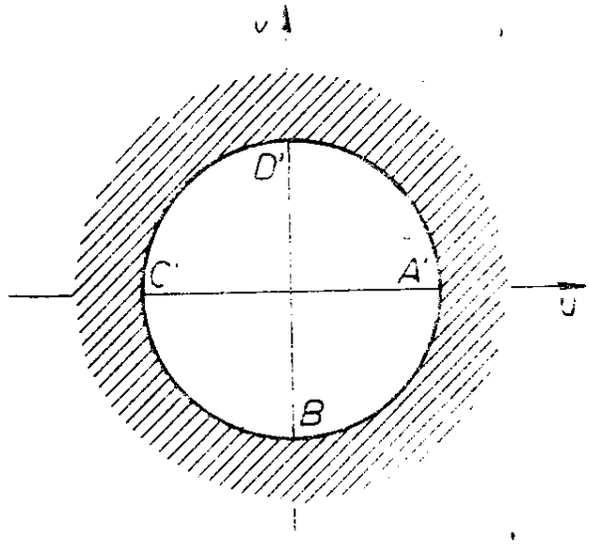




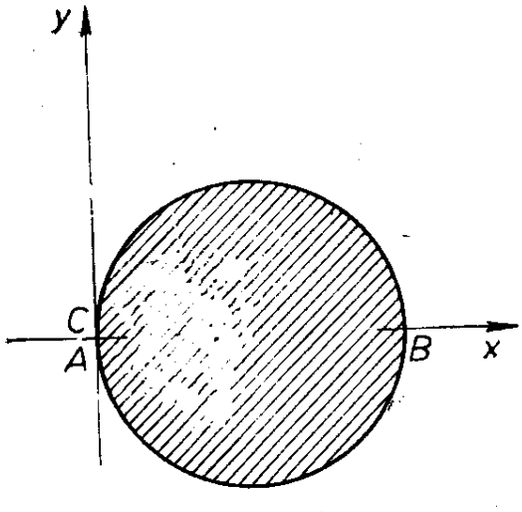
$$A'B' : a^2 - \frac{1}{4a^2} v^2 = u$$

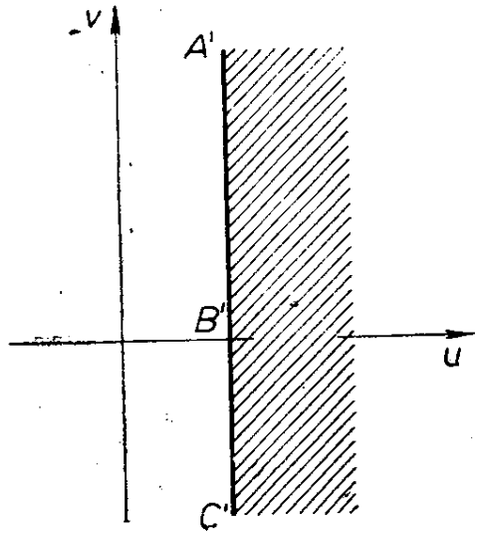
$$w = z^2$$



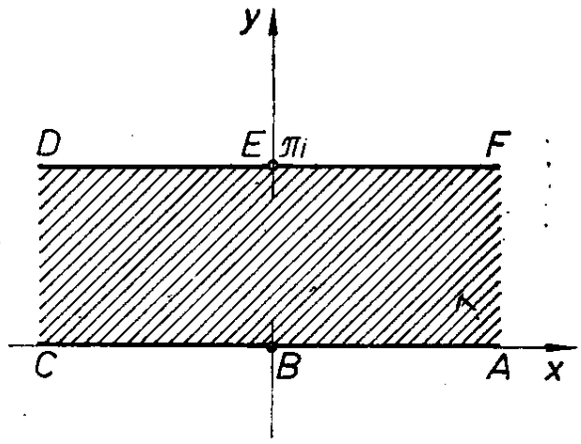


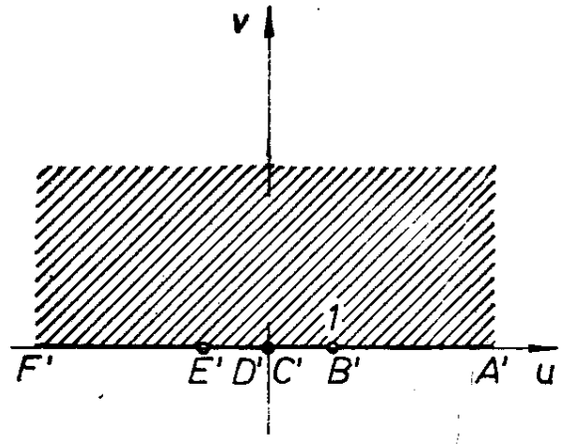
$w = \frac{1}{z}$



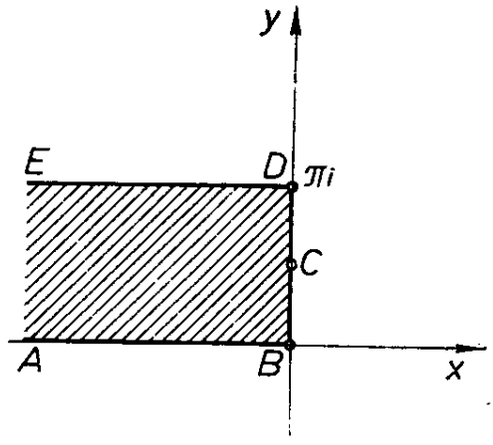


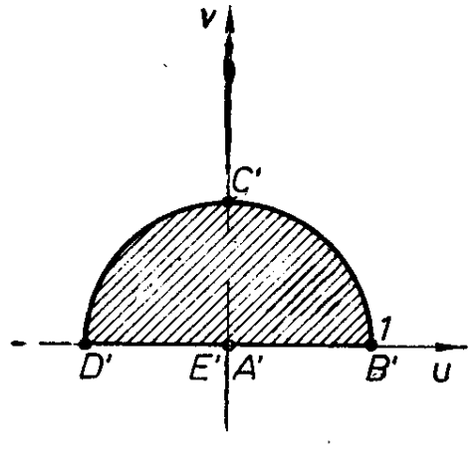
$w = \frac{1}{z}$


y
D
E
πi
F
C
B
A
x

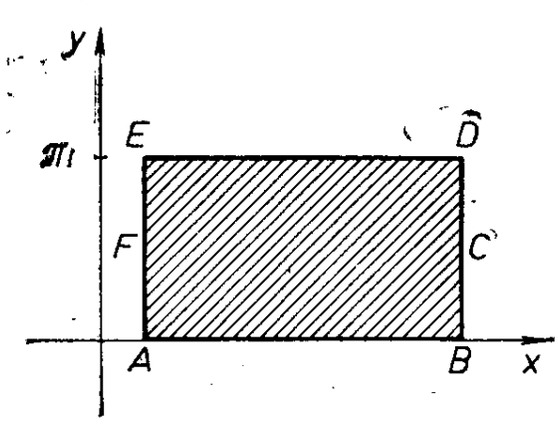

v
1
F'
E'
D'
C'
B'
A'
u

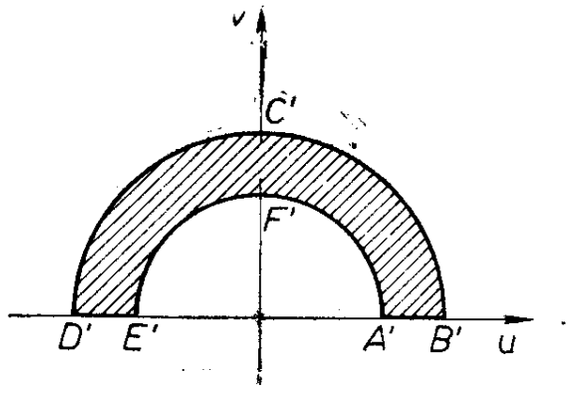
$w = e^z$


y
E
D
πi
C
A
B
x

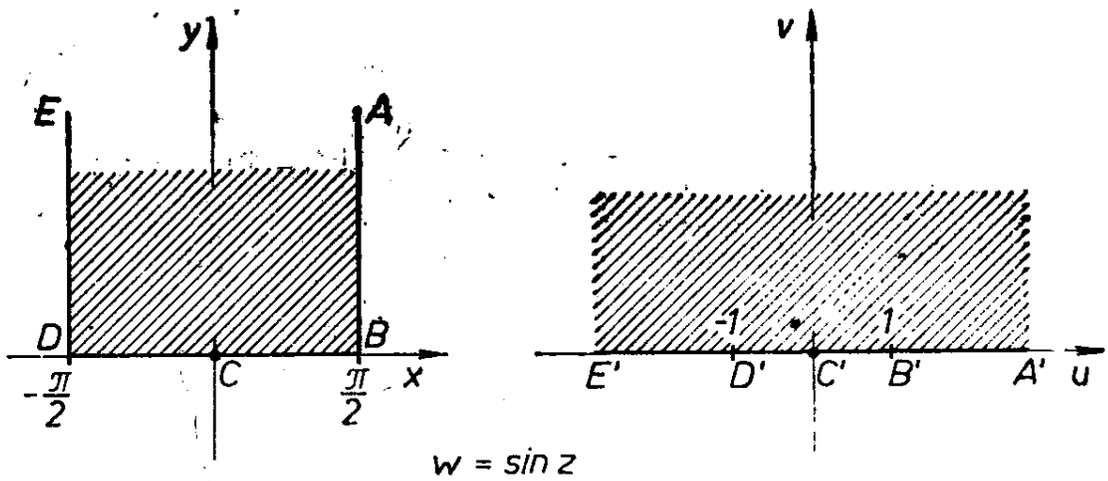

v
C'
1
D'
E'
A'
B'
u

$w = e^z$

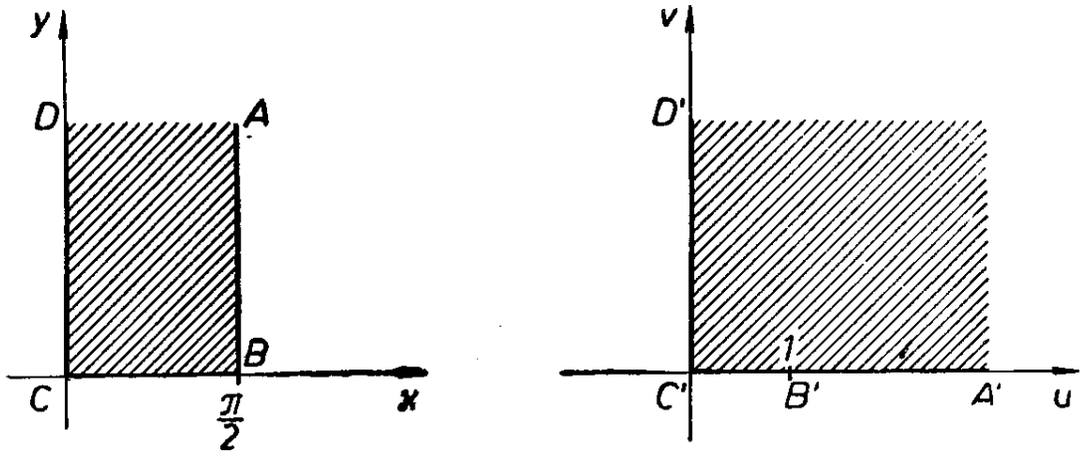

y
πi
E
D
F
C
A
B
x


v
C'
F'
D'
E'
A'
B'
u

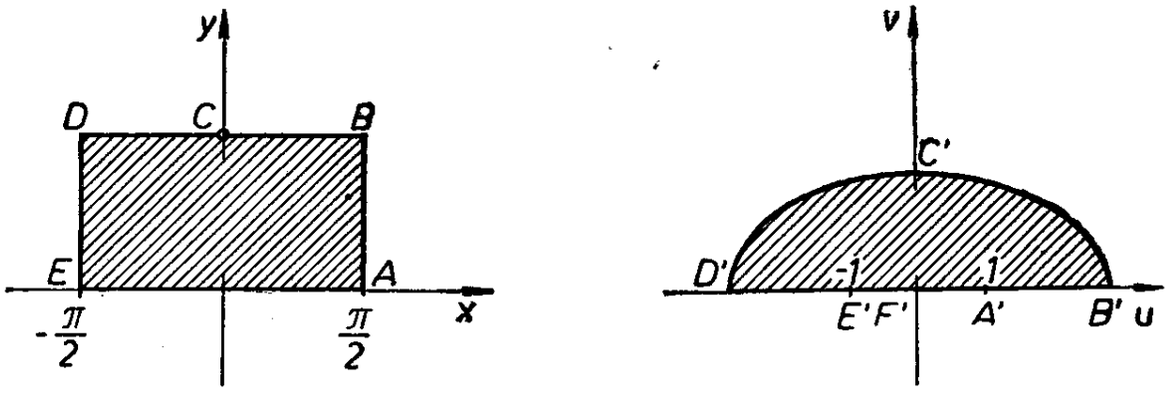
$w = e^z$



$w = \sin z$

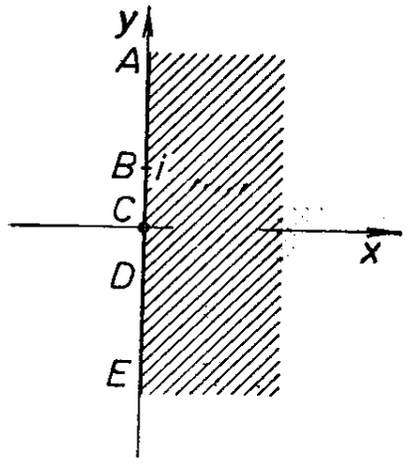


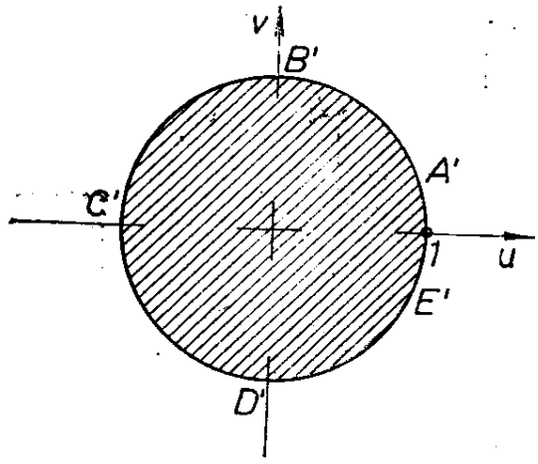
$w = \sin z$



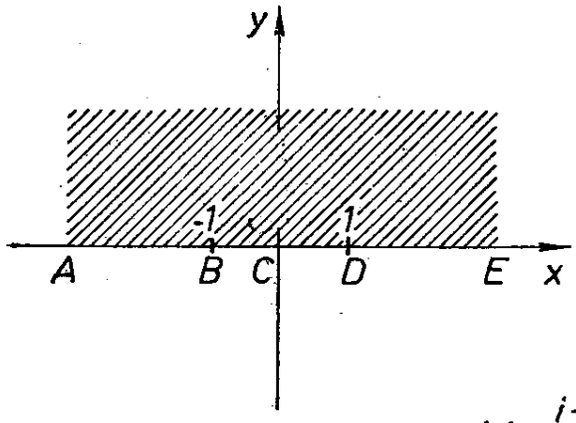
$BCD: y = b$

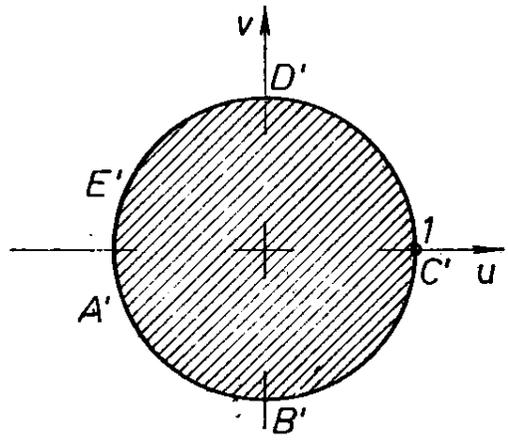
$B'C'D': \frac{u^2}{ch^2 b} + \frac{v^2}{h^2 b} = 1$



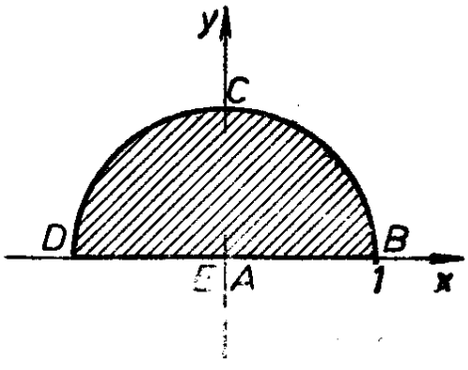


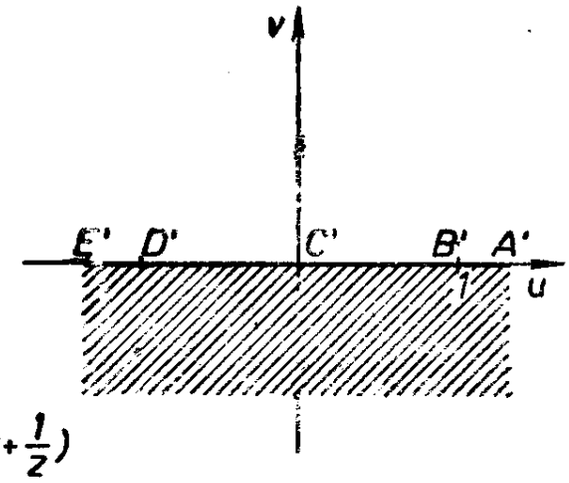
$$w=\frac{z-1}{z+1}$$



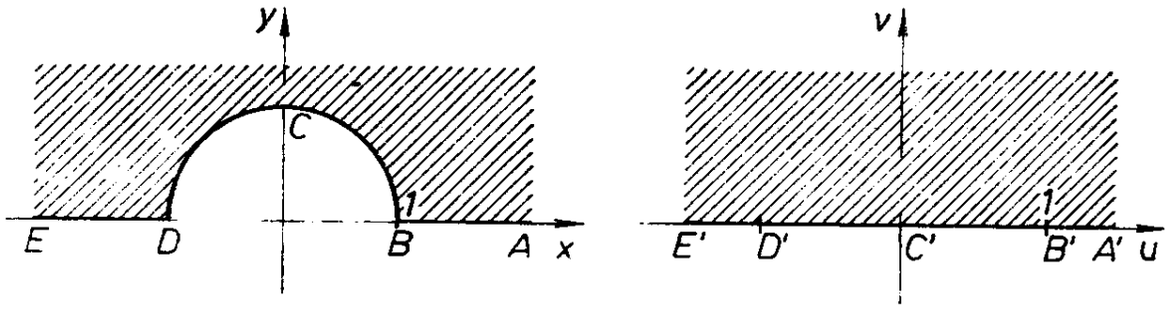


$$w=\frac{i-z}{i\ z}$$





$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

Tabel 2

Laplace'i teisenduse põhivalemid ja omadused

Jrk. nr.	$f(t)$	$F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$
1.	$f(t)H(t)$	$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=F(p)$
2.	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda\mathfrak{L}[f(t)]+\mu\mathfrak{L}[g(t)]$
3.	$f(\alpha t),\quad \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
4.	$f(t-\tau),\ \tau>0$	$e^{-\tau p}F(p)$
5.	$e^{\lambda t}f(t)$	$F(p-\lambda)$
6.	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
7.	$f'(t),\quad f(0)=0$	$pF(p)$
8.	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
9.	$f^{(n)}(t),\ f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$	$p^nF(p)$
10.	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
11.	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{1}{p}F(p)$
12.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(q)\,dq$
13.	$\int_0^t \frac{f(u)}{u}\,du$	$\frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\,dq$
14.	$\int_t^\infty \frac{f(u)}{u}\,du$	$\frac{1}{p}\int_0^p F(q)\,dq$

Jrk. nr.	$f(t)$	$F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$
15.	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$\mathfrak{L}[f(t)]\cdot\mathfrak{L}[g(t)]=F(p)G(p)$
16.	$f(t)g(0)+\int_0^t f(u)g'(t-u)du$	$pF(p)G(p)$
17.	$g(t;u)$	$e^{-uq(p)}G(p)$
	$\int_0^\infty f(u)g(t;u)du$	$G(p)F[q(p)]$
18.	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(q)G(p-q)dq$
19.	$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{A_{kl}t^{l-1}}{(l-1)!}e^{p_k t}$	$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{A_{kl}}{(p-p_k)^l}$
20.	$\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n,$ $\lvert c_n\rvert<\frac{MR^n}{n!},\ M>0,\ R>0$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n n!}{p^{n+1}}$

Laplace'i teisenduse valemid

Jrk. nr.	$f(t)$	$F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$
1.	$H(t)$	$\frac{1}{p}$
2.	$H(t-\tau)$, $\tau>0$	$\frac{1}{p}\,e^{-\tau p}$
3.	$e^{\omega t}$	$\frac{1}{p-\omega}$
4.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5.	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
6.	$t^n e^{\omega t}$	$\frac{n!}{(p-\omega)^{n+1}}$
7.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9.	$\mathrm{sh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
10.	$\mathrm{ch}\, \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
11.	$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
12.	$\cos^2 \omega t$	$\frac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
13.	$\mathrm{ch}^2\, \omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2-4\omega^2)}$
14.	$\mathrm{ch}^2\, \omega t$	$\frac{p^2-2\omega^2}{p(p^2-4\omega^2)}$
15.	$e^{-\lambda t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
16.	$e^{-\lambda t}\cos \omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$

Jrk. nr.	$f(t)$	$F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$
17.	$e^{-\lambda t}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2-\omega^2}$
18.	$e^{-\lambda t}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2-\omega^2}$
19.	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
20.	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
21.	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
22.	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
23.	$t^n\sin\omega t$	$n!\dfrac{\operatorname{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
24.	$t^n\cos\omega t$	$n!\dfrac{\operatorname{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
25.	$e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\alpha)$	$\dfrac{\omega\cos\alpha+(p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
26.	$e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)$	$\dfrac{(p+\lambda)\cos\alpha-\omega\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
27.	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$
28.	$\dfrac{\sin\omega t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{p}{\omega}=\operatorname{arccot}\dfrac{p}{\omega}$
29.	$\dfrac{\sin^2 t}{t}$	$\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2}$
30.	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$
31.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
32.	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\sin\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$

Jrk. nr.	$f(t)$	$F(p)=\mathfrak{L}[f(t)]$
33.	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos \omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$
34.	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{sh} \omega t$	$\sqrt{\frac{p-\sqrt{p^2-\omega^2}}{p^2-\omega^2}}$
35.	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{ch} \omega t$	$\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2-\omega^2}}{p^2-\omega^2}}$
36.	$\operatorname{si}(t)=-\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$	$-\frac{1}{p}\arctan p$
37.	$\operatorname{Si}(t)=\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$	$\frac{1}{p}\operatorname{arccot} p$
38.	$\operatorname{Ci}(t)=\operatorname{ci}(t)=-\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
39.	$-\operatorname{Ei}(-t)=\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$	$\frac{1}{p}\ln(p+1)$
40.	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du$	$\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$
41.	$\operatorname{Erf}(\sqrt{t})=1-\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}$
42.	$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$
43.	$e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$
44.	$S(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$	$\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p^2+1}}$

	$f(t)$	
45.	$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du$	$\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}}$
46.	$J_0(\alpha t),\ \alpha>0$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$
47.	$J_n(\alpha t),\ \alpha>0,\ n=1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^n}{\alpha^n\sqrt{p^2+\alpha^2}}$
48.	$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{\alpha t}),\ \alpha>0,\ n=1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{\alpha}{p}}\alpha^{\frac{n}{2}}$
49.	$I_0(\alpha t),\ \alpha>0$	$\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$
50.	$I_n(\alpha t),\ \alpha>0,\ n=1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{(p-\sqrt{p^2-\alpha^2})^n}{\alpha^n\sqrt{p^2-\alpha^2}}$
51.	$\delta(t)$	1
52.	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau p}$
53.	$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}H(t)=\delta^{(n)}(t)$	p^n

REGISTER

KIRJANDUS

1. Keres, H. Matemaatilise füüsika meetodid. Tln., 1964.
2. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., 1968.
3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., 1972.
4. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., 1975.
5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М., 1971.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., 1965.
8. Евграфов М. А., Аналитические функции. М., 1968.
9. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабинин М. И., Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций. М., 1969.
10. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы) Ч. 1, М., 1980.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. т. 1, М., 1967, т. 2, М., 1968.
13. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. Киев, 1973.
14. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М., 1979.
15. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1976.
16. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М., 1964.
17. Шабат Б. В. Введение в комплексной анализ. Ч. 1, М., 1976.
18. Шостак Р. Я. Операционное исчисление. М., 1972.

SISUKORD

Ю р и м я э Эндель.
Краткий курс теории функций комплексной переменной.
На эстонском языке.
Художник-оформитель К. Тормис.
Таллин, «Валгус».
Toimetaja U. Ālas.
Kunstiline toimetaja H. Puzanov.
Tehniline toimetaja M. Pall.
Korrektorid E. Martoja ja S. Uustare.
ИБ № 4351.
Laduda antud 03. 12. 82.
Trükkida antud 13. 07. 83.
Formaat 60×90/16.
Trükipaber nr. 1.
Kiri: *literaturnaja.*
Kõrgtrükk.
Tingtrükipoognaid 14,5.
Tingvärvitõmmiseid 14,5.
Arvestuspoognaid 12,93.
Trükiarv 2000.
Tellimuse nr. 3648.
Hind 75 kop.
Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10.
H. Heidemanni nim. trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19. I.