

Praktikum 8: Laurent'i rida

1. Leida järgmiste funktsioonide iseärsed punktid ja määrata nende liik:

- a) $\frac{(z+1)^2}{(z^2-1)(z+2)^3}$, c) $\tan^2 z^2$
 b) $\frac{z-\frac{1}{z}}{z+\frac{1}{z}}$, d) $\cos \frac{1}{z+\pi}$.

2. Arendada järgmised funktsioonid Laurent'i ritta antud piirkondades:

- a) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, $0 < |z-1| < 2$; c) $f(z) = \frac{\sin z}{(z+4\pi)^2}$, $0 < |z+4\pi| < \infty$;
 b) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, $|z-1| > 2$; d) $f(z) = \frac{z}{z^2-9}$, $1 < |z-2| < 5$.

3. Leida Laurent'i rea peaosa punkti a ümbruses:

- a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $a = 0$; c) $f(z) = e^{1/z^3}$, $a = 0$;
 b) $f(z) = \frac{e^z-1}{e^z+1}$, $a = \pi i$; d) $f(z) = \int_z^{\pi/4} \frac{\cot \zeta}{\zeta} d\zeta$, $a = 0$.

K.* (2 p.) Reaalteljel määratud funktsiooni f Fourier' rida komplekskujul on $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, kus

$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. Olgu f 2π -perioodiline ja regulaarne ribas $|\operatorname{Im} t| < \delta$, kus $\delta > 0$, ning pidev kuni rajani. Näidata, et siis funktsiooni f Fourier' kordajad rahuldavad võrratust $|c_n| \leq M e^{-|n|\delta}$ iga $n \in \mathbf{Z}$ korral, kus $M = \max_{|\operatorname{Im} t| < \delta} |f(t)|$.

Praktikum 9: Resiidide teooria

1. Leida järgmiste funktsioonide resiidid kõikide lõplikus kauguses asuvate iseärsate punktide suhtes:

- a) $f(z) = \frac{(z+1)^2}{(z^2-2z)(z-1)^2}$, c) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$,
 b) $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$, d) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Leida järgmised integraalid:

- a) $\int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz$, d) $\int_{|z|=2} \frac{\sqrt{z} dz}{z-1}$,
 b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)(z+3)}$, e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$,
 c) $\int_{|z-1|=1} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz$, f) $\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2+1)^2}$.

L*. (2 p.) Leida järgmised integraalid:

- a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}$, $0 < a < 1$; b) $\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{1+x^4}$.

M.* (3 p.) Summade arvutamine resiidide teooria abil.

a) Olgu f regulaarne kogu komplekstasandil, välja arvatud lõplik arv punkte a_j , $j = 1, \dots, n$, kusjuures $a_j \notin \mathbf{Z}$. Eeldame, et $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Näidata, et siis

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^n \operatorname{res} [\pi f(z) \cot \pi z; a_j] \quad \text{ja} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k) = - \sum_{j=1}^n \operatorname{res} \left[\frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}; a_j \right].$$

b) Arvutada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2}$, kus $a > 0$.

c) Arvutada summad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.