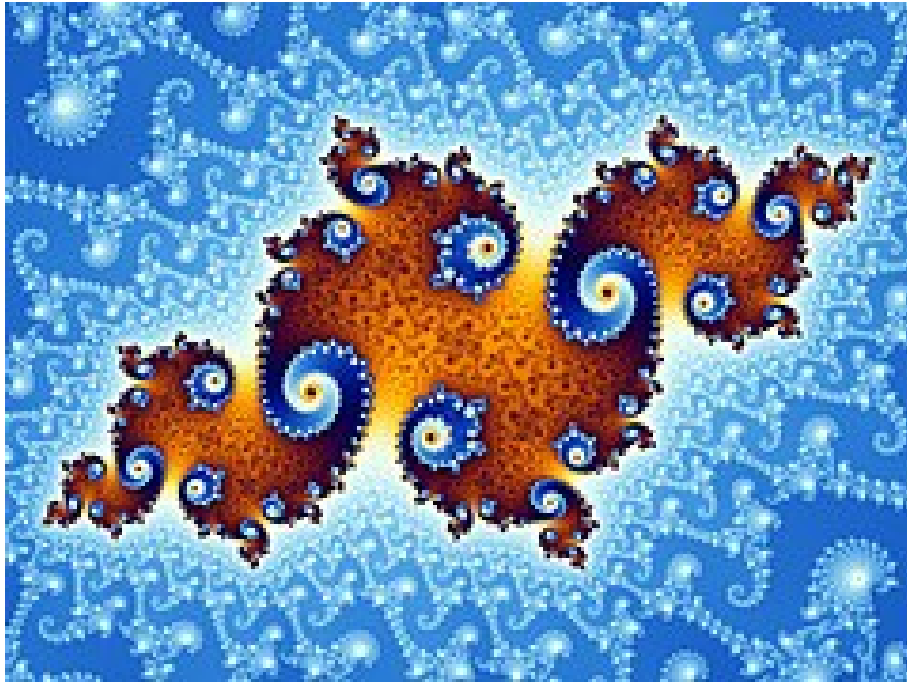


Kompleksmuutuja funktsioonide teooria



Loengukonspekt

Urve Kangro

2021 kevad

Sisukord

1	Kompleksarvud	1
1.1	Kompleksarvud ja tehted nendega	1
1.2	Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju. Moodul ja argument	2
1.3	Kompleksarvude hulgad	2
2	Kompleksmuutuja funktsioon, tema piirväärtus, pidevus ja diferentseeruvus	4
2.1	Kompleksmuutuja funktsiooni mõiste	4
2.2	Funktsiooni piirväärtus	4
2.3	Funktsiooni pidevus	5
2.4	Funktsiooni tuletis	5
2.5	Cauchy-Riemanni võrrandid	6
2.6	Funktsioonide visuaalne kujutamine	7
3	Elementaarfunktsioonid	8
3.1	Astmefunktsioon $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$	8
3.2	Juurfunktsioon $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$	10
3.3	Eksponentfunktsioon $f(z) = e^z$	11
3.4	Logaritmifunktsioon $f(z) = \operatorname{Ln} z$	11
3.5	Üldine astmefunktsioon $f(z) = z^A$, $A \in \mathbb{C}$	13
3.6	Pöördväärtuse funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$	13
3.7	Murdlineaarne funktsioon $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$	13
3.8	Trigonomeetrilised funktsioonid	14
3.9	Hüperboolsed funktsioonid	14
3.10	Arkusfunktsioonid	15
3.11	Areafunktsioonid	15
4	Integraal kompleksmuutuja funktsioonist	16
4.1	Integraali mõiste ja omadused	16
4.2	Cauchy teoreem	18
4.2.1	Pidevus kuni rajani	18
4.3	Algfunktsioon. Newton-Leibnizi valem	19
4.4	Cauchy valem. Cauchy tüüpi integraalid	20
4.5	Liouville'i ja Morera teoreemid. Algebra põhiteoreem	21
4.6	Parameetrist sõltuvad integraalid	22
4.6.1	Päratu parameetrist sõltuv integraal	23
5	Analüütilised funktsioonid	25
5.1	Arvread	25
5.2	Funktsionaalread	26
5.3	Astmeread	28
5.4	Taylori rida	28
5.5	Analüütilised funktsioonid	29
5.6	Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem	29

5.7	Analüütilise funktsiooni nullkohad	30
6	Analüütilise funktsiooni iseärased punktid. Laurent'i rida	32
6.1	Laurent'i rida	32
6.2	Analüütilise funktsiooni iseärased punktid	34
6.2.1	Funktsiooni isoleeritud iseärase punkti tüübi ja funktsiooni Laurent'i rea selle punkti ümbruses peaosa vaheline seos	35
6.2.2	Funktsiooni käitumine olulise iseärasuse ümbruses	36
6.2.3	Funktsiooni käitumine lõpmatuspunktis	37
6.3	Lihtsamad analüütiliste funktsioonide klassid	37
7	Resiidide teooria	39
7.1	Resiidi mõiste. Resiidide teooria põhiteoreem	39
7.2	Resiidide arvutamine	40
7.2.1	Resiidi arvutamine 1. järku pooluse korral	40
7.2.2	Resiidi arvutamine kõrgemat järku pooluse korral	40
7.2.3	Resiidi arvutamine olulise iseärasuse korral	40
7.2.4	Resiidi arvutamine lõpmatuspunktis	41
7.3	Resiidide kasutamine integraalide arvutamisel	41
7.3.1	Resiidide teooria põhiteoreemi otsene rakendamine	41
7.3.2	Integraalid üle reaaltelje	41
7.3.3	Integraalid perioodilistest funktsioonidest üle perioodi	43
7.4	Logaritmiline resiidi. Nullkohtade arvu määramine	44
7.4.1	Logaritmilise resiidi mõiste. Argumendi printsiip	44
7.5	Analüütilise funktsiooni pööramine	45
7.6	Mooduli maksimumi ja miinimumi printsiibid	46
7.7	Harmoonilised funktsioonid	47
7.8	Analüütiline jätkamine	49
7.8.1	Jätkamine astmeridade abil	49
7.8.2	Jätkamine valemite abil	50
8	Konformne kujutamine	51
8.1	Konformse kujutuse mõiste ja põhiomadused	51
8.2	Konformse kujutamise põhiülesanne	53
9	Laplace'i ja Fourier' teisendus	55
9.1	Laplace'i teisenduse definitsioon	55
9.2	Laplace'i teisenduse omadused	56
9.2.1	Konvolutsioon	57
9.3	Fourier' teisendus	58
9.3.1	Fourier' teisenduse omadused	59
9.3.2	Konvolutsioon	60
9.4	Laplace'i ja Fourier' teisenduse rakendusi	61
9.4.1	Harilikud lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	61
9.4.2	Lineaarsed diferentsiaalvõrrandite süsteemid	62
9.4.3	Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	62
9.4.4	Konvolutsioonitüüpi integraalvõrrandid	63
9.4.5	Signaalitöötlus	63
9.4.6	Statistika	64
9.5	Laplace'i ja Fourier' teisenduse pööramine	64
9.6	Laplace'i teisenduse originaali olemasolu	65
9.7	Arendusteoreemid	67

10 Riemanni dzeetafunktsioon	68
10.1 Riemanni dzeetafunktsiooni definitsioon	68
10.1.1 Esitus lõpmatu korrutisena	68
10.1.2 Dzeetafunktsiooni seos algarvude loendamise funktsiooniga	69
10.2 Riemanni dzeetafunktsiooni analüütiline jätkamine	69
10.2.1 Mõned väärtused	70
10.3 Dzeetafunktsiooni nullkohad. Riemanni hüpotees	70

Peatükk 1

Kompleksarvud

1.1 Kompleksarvud ja tehted nendega

Definitsioon. Kompleksarvudeks nim. reaalarvude järjestatud paare $z = (x, y)$, millega on defineeritud võrdus ja tehted järgnevalt:

- 1) $z_1 = z_2$, kui $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$;
- 2) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- 3) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Kõigi kompleksarvude hulka tähistatakse $\mathbb{C}$. Kompleksarvud moodustavad korpuse.

Korpuse aksioomid:

- (A1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
- (A2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
- (A3) $\exists 0 \in \mathbb{C}: z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
- (A4) $\forall z \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C}: z + (-z) = 0$,
- (M1) $z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
- (M2) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
- (M3) $\exists 1 \in \mathbb{C}: z \cdot 1 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
- (M4) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists z^{-1} \in \mathbb{C}: z z^{-1} = 1$,
- (D) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Tähtis seos: $i^2 = -1$.

Kompleksarvu algebraline kuju: $z = x + iy$.

Kompleksarvu reaalosa $\operatorname{Re}(x + iy) = x$, imaginaarosa $\operatorname{Im}(x + iy) = y$.

Kui $\operatorname{Re} z = 0$, siis kompleksarvu nim. puhtimaginaararvuks;

kui $\operatorname{Im} z = 0$, siis kompleksarvu nim. reaalarvuks.

Kasutame tähiseid:

kompleksarvud: $z, \zeta, w, A, B, \dots$

reaalarvud: $x, y, \xi, \eta, u, v, a, b, \dots$

NB! Võrratus pole defineeritud, s.t pole võimalik defineerida sellist järjestust, mis oleks kooskõlas tehete (järjestatud korpuse mõttes).

Kuna kompleksarvud on defineeritud kui reaalarvude paarid, siis saab neid kujutada punktidenä või vektoritena tasandil, seda nimetatakse komplekstasandiks, tähistatakse $\mathbb{C}$. Vahel samastatakse seda reaaltasandiga $\mathbb{R}^2$. Kompleksarvude liitmine ja lahutamine vastab tasandil vektorite liitmisele ja lahutamisele.

1.2 Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju. Moodul ja argument

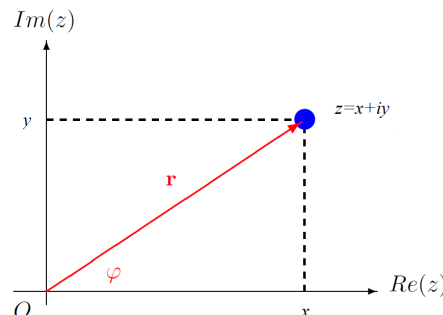
Komplekstasand $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$.

Polaarkoordinaatides $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Kompleksarvu **trigonomeetriline kuju**: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Kompleksarvu **moodul**: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Kompleksarvu **argument**: $\text{Arg } z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}$,
argumendi peaväärtus $\arg z$ on $\varphi \in \text{Arg } z$: $-\pi < \varphi \leq \pi$.



Euleri valem : $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Kompleksarvu **eksponentkuju**: $z = r e^{i\varphi}$.

Euleri samasus : $e^{i\pi} = -1$.

Korrutamine ja jagamine trigonomeetrilisel kujul:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Eksponentkujul:

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Astendamine – de Moivre' valem:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kolmnurga võrratus: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

Tagurpidi kolmnurga võrratus: $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Kaaskompleksarv $\overline{x + iy} = x - iy$.

Omadused:

$$1) \quad z \bar{z} = |z|^2,$$

$$2) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

$$3) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$4) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

$$5) \quad \text{Re } z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \text{Im } z = \frac{-i}{2}(z - \bar{z}).$$

1.3 Kompleksarvude hulgad

Lõpmatuspunkt $z = \infty$.

Kinnine e. täielik komplekstasand $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Kui $z \neq 0$, siis $\frac{z}{0} = \infty$ ja $z\infty = \infty$; kui $z \neq \infty$, siis $\frac{z}{\infty} = 0$.

Definitsioon. Punkti $z_0 \in \mathbb{C}$ **ümbrus**: $U_\varepsilon(z_0) = B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Lõpmatuspunkti ümbrus: $U_M(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$.

Definitsioon. Punkti z nim. hulga $D \subset \mathbb{C}$ **sisepunkti**, kui leidub punkti z ümbrus $U(z)$ nii, et $U(z) \subset D$.

Definitsioon. Punkti z nim. hulga $D \subset \mathbb{C}$ **rajapunktiks**, kui iga ümbrus $U(z)$ sisaldab nii hulga D kui hulga $\mathbb{C} \setminus D$ punkte.

Definitsioon. Hulga D **rajaks** ∂D nim. selle hulga kõigi rajapunktide hulka.

Definitsioon. Hulga D nim. **lahtiseks hulgaks**, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja **kinniseks hulgaks**, kui $\partial D \subset D$.

Definitsioon. Punkti z nim. hulga $D \subset \mathbb{C}$ **kuhjumispunktiks**, kui iga $r > 0$ korral $(B(z, r) \setminus \{z\}) \cap D \neq \emptyset$.

Definitsioon. Hulka nim. **sidusaks**, kui selle hulga iga kahte punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva pideva joonega.

Definitsioon. Lahtist sidusat hulka nim. **piirkonnaks**. Piirkonda koos oma rajaga nim. **kinniseks piirkonnaks**.

Definitsioon. Piirkonna raja **positiivseks suunaks** loetakse suund, milles liikudes piirkond (lokaalselt) jääb vasakule.

Definitsioon. Hulka nim. **tõkestatud hulgaks**, kui ta sisaldub mingis ringis $B(0, M)$, vastasel juhul **tõkestamata hulgaks**.

Kinnisel komplekstasandil tõkestamata hulk või tema raja sisaldab alati lõpmatuspunkti.

Definitsioon. Hulka nim. **ühelisisidusaks**, kui ta on sidus ning iga temas sisalduvat kinnist kõverat saab selles hulgas pidevalt deformeerida punktiks. Sidusat hulka, mis pole ühelisisidus, nim. **mitmelisisidusaks**.

Tõkestatud piirkond on ühelisisidus parajasti siis, kui tema raja on sidus ehk piirkonnas pole “auke”. Tõkestatud piirkonna **sidususe järguks** nim. tema raja sidususkomponentide arvu (“aukude” arv $+1$).

Tõkestamata hulga puhul tema sidususe järgust rääkides vaadeldakse teda tavaliselt kinnisel komplekstasandil.

Peatükk 2

Kompleksmuutuja funktsioon, tema piirväärtus, pidevus ja diferentseeruvus

2.1 Kompleksmuutuja funktsiooni mõiste

Olgu $D \subset \mathbb{C}$.

Definitsioon. Kui igale kompleksarvule $z \in D$ on seatud vastavusse mingi kindel kompleksarv w , siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud **kompleksmuutuja funktsioon** $w = f(z)$. Hulka D nim. **originaalide hulgaks**. Hulka $f(D) = \{f(z) : z \in D\}$ nim. funktsiooni **väärtuste hulgaks** e. **kujutiste hulgaks**. Kui D on piirkond, siis D nim. ka funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Näide. $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$.

Definitsioon. Kui igale kompleksarvule $z \in D$ on seatud vastavusse mingi kompleksarvude hulga mitetühi alamhulk, siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud **multifunktsioon** e. **mitmene funktsioon**.

Näide. $f(z) = \text{Arg}(z)$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definitsioon. Kui igale kujutisele vastab ainult üks originaal, siis funktsiooni nim. **üheleheliseks** e. **injektiivseks**, vastasel juhul **mitmeleheliseks**.

Kui funktsioon $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ on üheleheline, siis tal leidub pöördfunktsioon $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$.

Näide. $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$ on kaheleheline, tema pöördfunktsioon $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on mitmene funktsioon $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$.

Näide. $f(z) = z^2$, $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$ on üheleheline, tal leidub pöördfunktsioon $f^{-1} : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, kus $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$; $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ peaharu.

Kui hulgal D on määratud funktsioon $w = f(z)$, siis igale kompleksarvule $z = x + iy$ hulgas D on seatud vastavusse mingi kompleksarv $w = u + iv$. Seega on igale reaalarvude paarile hulgas $D_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$ seatud vastavusse 2 reaalarvu $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$. Funktsioone u ja v nim. funktsiooni f **reaal-** ja **imaginaarosaks**, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Näide. $f(z) = z^2$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

2.2 Funktsiooni piirväärtus

Definitsioon. Kompleksarvu A nimetatakse jada (z_n) **piirväärtuseks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N > 0$ nii, et kui $n > N$, siis $|z_n - A| < \varepsilon$.

Olgu funktsioon f määratud hulgal D ning olgu $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ hulga D kuhjumispunkt.

Definitsioon. Suurust $A \in \overline{\mathbb{C}}$ nim. funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis z_0 , kui iga punkti A ümbruse $V(A)$ korral leidub punkti z_0 ümbrus $U(z_0)$ nii, et kui $z \in U(z_0) \cap D$, siis $f(z) \in V(A)$.

Erijuhul $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $A \in \mathbb{C}$:

Definitsioon. Suurust $A \in \mathbb{C}$ nim. funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis z_0 , kui $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: [z \in D, |z - z_0| < \delta] \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$.

Teoreem 1. Olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ning olgu $z_0 = x_0 + iy_0$ funktsiooni f originaalide hulga kuhjumispunkt. Siis $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$ parajasti siis, kui $\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} u(x, y) = a$ ja $\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} v(x, y) = b$.

2.3 Funktsiooni pidevus

Olgu funktsioon f määratud hulgal D ning olgu $z_0 \in D$ hulga D kuhjumispunkt.

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks** punktis z_0 , kui $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Olgu iga hulga D punkt ühtlasi ka tema kuhjumispunkt (näiteks D on piirkond või kinnine piirkond või pidev joon).

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **ühtlaselt pidevaks** hulgas D , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $z_1, z_2 \in D$ ja $|z_1 - z_2| < \delta$, siis $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Lause 1. Funktsioon f on pidev punktis $z_0 = x_0 + iy_0$ parajasti siis, kui funktsioonid u ja v , kus $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, on pidevad punktis (x_0, y_0) .

Teoreem 2 (Weierstrass). Kinnises tõkestatud hulgas pidev funktsioon on tõkestatud.

Teoreem 3 (Cantor). Kinnises tõkestatud hulgas pidev funktsioon on ühtlaselt pidev selles hulgas.

NB! Ei kehti näiteks Bolzano-Cauchy teoreem funktsiooni vahepealsetest väärtustest.

2.4 Funktsiooni tuletis

Olgu funktsioon f defineeritud punkti z mingis ümbruses.

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **diferentseeruvaks** punktis z , kui leidub lõplik piirväärtus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$, sellisel juhul seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks** punktis z .

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **regulaarseks** piirkonnas D , kui ta on diferentseeruv piirkonna D igas punktis.

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **regulaarseks punktis** z , kui ta on diferentseeruv punkti z mingis ümbruses.

f on regulaarne piirkonnas $D \Leftrightarrow f$ on diferentseeruv piirkonnas D

f on regulaarne punktis $z \Rightarrow f$ on diferentseeruv punktis z .

NB! Vastupidine järeldus üldjuhul ei kehti.

Näide. Funktsioon $f(z) = |z|^2$ on diferentseeruv ainult punktis 0 ning pole regulaarne kusagil, sest

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\bar{z} + \bar{h}) - z\bar{z}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{z} + z\bar{h} + h\bar{h}}{h} = \bar{z} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z\bar{h}}{h}, \end{aligned}$$

siin viimane piirväärtus leidub ainult siis, kui $z = 0$.

Kui kirjutame $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, siis funktsioonid $u(x, y) = x^2 + y^2$ ning $v(x, y) = 0$ on diferentseeruvad igal pool!

2.5 Cauchy-Riemanni võrrandid

Olgu f defineeritud punkti $z = x + iy$ mingis ümbruses ja olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Teoreem 4 (Cauchy-Riemanni võrrandid). *Olgu funktsioon f on diferentseeruv punktis $z = x + iy$. Siis funktsioonidel u ja v leiduvad osatuletised punktis (x, y) ja*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{ning} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

Tõestus. Olgu f on diferentseeruv punktis $z = x + iy$. Siis

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} + \frac{i(v(x + h, y) - v(x, y))}{h} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z + ih) - f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{v(x, y + h) - v(x, y)}{h} - \frac{i(u(x, y + h) - u(x, y))}{h} = v_y(x, y) - iu_y(x, y). \end{aligned}$$

Seega $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$.

Definitsioon. Funktsiooni $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nim. **diferentseeruvaks** punktis (x, y) , kui leiduvad $a, b \in \mathbb{R}$ nii, et protsessis $h_1, h_2 \rightarrow 0$ $u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = ah_1 + bh_2 + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$.

Sealjuures $a = u_x(x, y)$ ja $b = u_y(x, y)$.

Olgu f defineeritud punkti $z = x + iy$ mingis ümbruses ja olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Teoreem 5 (Piisavad tingimused diferentseeruvuseks). *Kui funktsioonid u ja v on diferentseeruvad punktis (x, y) ja $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ ning $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis $z = x + iy$.*

Tõestus. Tähistame $h = h_1 + ih_2$, $\Delta f = f(z + h) - f(z)$, $\Delta u = u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y)$, $\Delta v = v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y)$. u ja v diferentseeruvusest saame, et $\Delta u = u_x h_1 + u_y h_2 + \alpha$ ja $\Delta v = v_x h_1 + v_y h_2 + \beta$, kus $\alpha, \beta \in o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$ protsessis $h_1, h_2 \rightarrow 0$. Nüüd

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{h} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{h_1 + ih_2} = \frac{u_x h_1 + u_y h_2 + \alpha + i(v_x h_1 + v_y h_2 + \beta)}{h_1 + ih_2} \\ &= \frac{u_x h_1 - v_x h_2 + i(v_x h_1 + u_x h_2)}{h_1 + ih_2} + \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \frac{h_1 - ih_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= u_x + iv_x + o(1) \cdot O(1) \quad \text{protsessis } h_1, h_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Seega leidub $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$.

Järeldus 1. *Kui $f = u + iv$ on diferentseeruv punktis $z = x + iy$, siis $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$.*

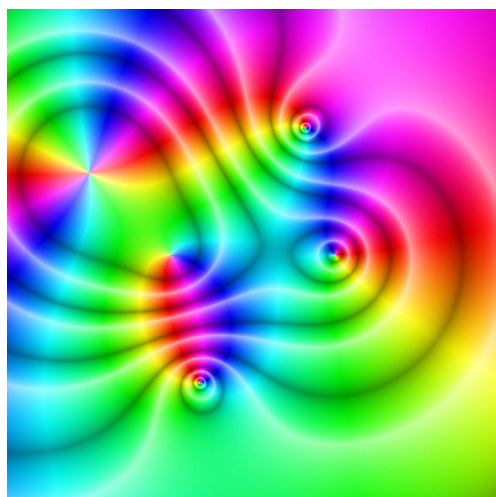
Järeldus 2. *Kui funktsioonidel u ja v leiduvad pidevad osatuletised punktis (x, y) ja $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ ning $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$, siis funktsioon f on diferentseeruv punktis $z = x + iy$.*

2.6 Funktsioonide visuaalne kujutamine

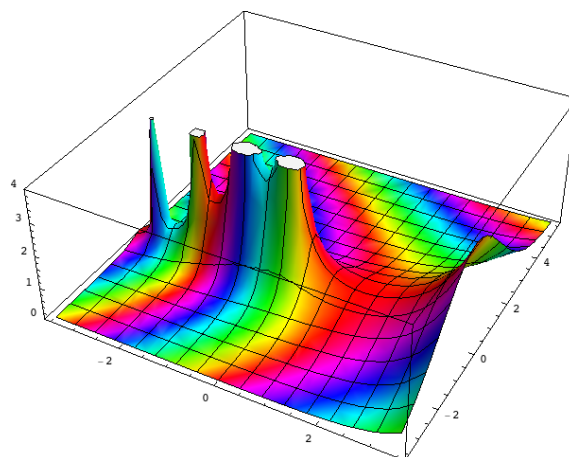
Kuidas kujutada piltlikult ette kompleksmuutuja funktsiooni?

Kolmemõõtmelist graafikut saab joonistada funktsiooni reaalosast või imaginaarosast, moodulist või argumendist.

Värvigraafik: värvitoon kujutab argumenti, heledus moodulit.

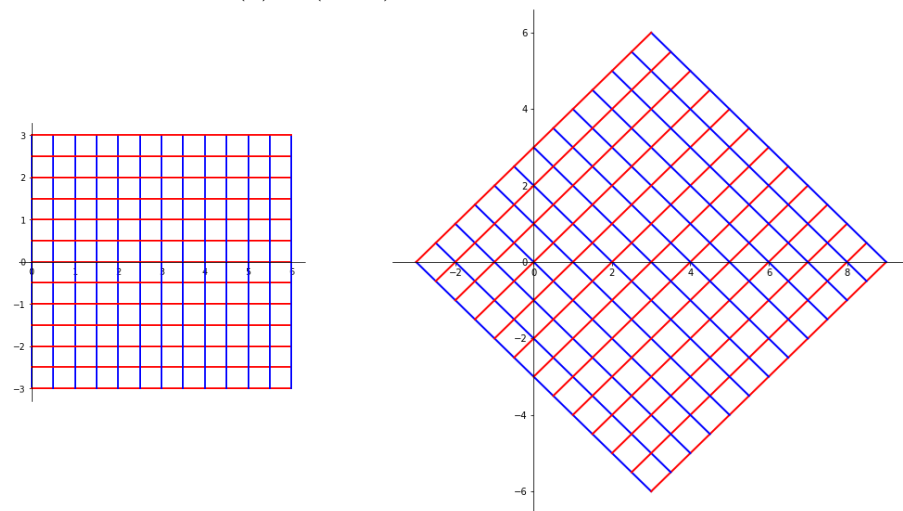


Mooduli graafik, kus värvitoon kujutab argumenti.



Tehakse ka jooniseid, kus ühel tasandil on originaalide hulk (võib-olla koos mingi võrgustikuga) ja teisel kujutiste hulk. Seda saab eelkõige teha väikeste hulkade ja “ilusate” funktsioonide puhul, kus funktsioon on (enam-vähem) üksühene.

Näide. Funktsioon $f(z) = (1 + i)z - 3i$.



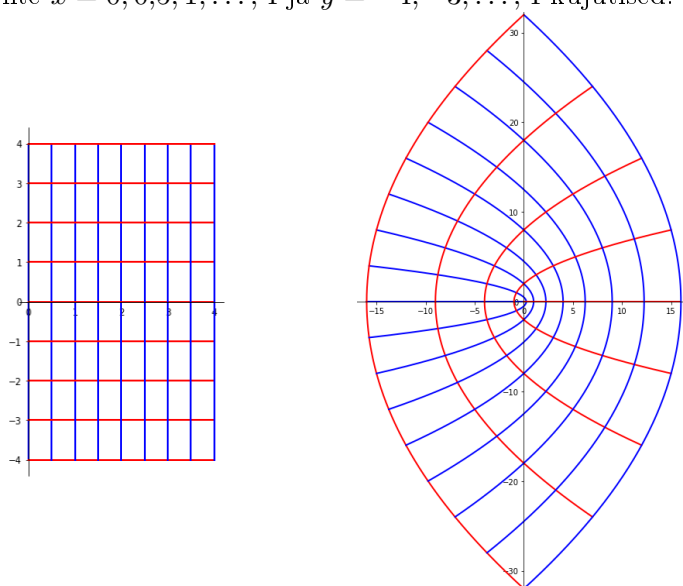
Peatükk 3

Elementaarfunktsioonid

3.1 Astmefunktsioon $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

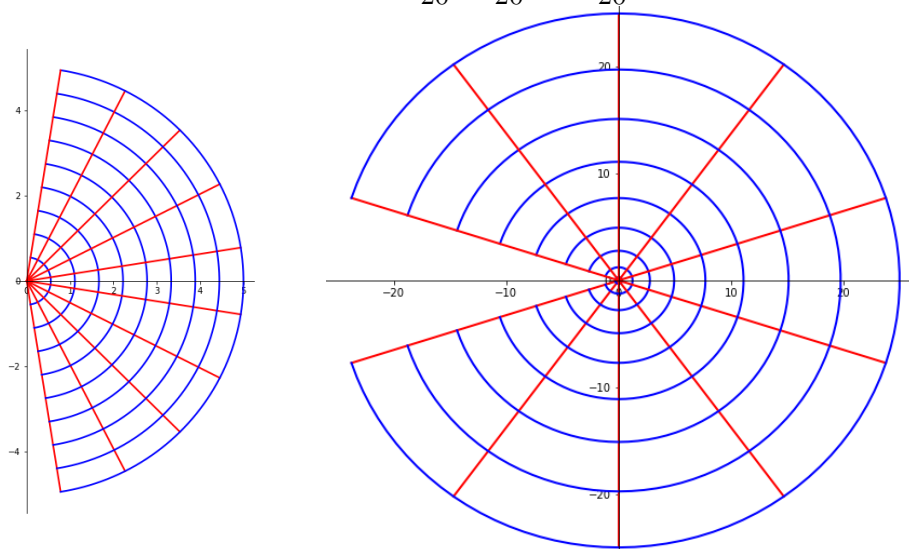
Erijuht: ruutfunktsioon $f(z) = z^2$.

Joonte $x = 0, 0,5, 1, \dots, 4$ ja $y = -4, -3, \dots, 4$ kujutised.

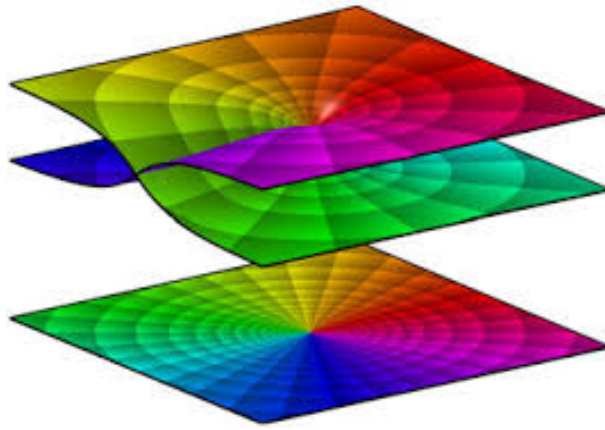


Ruutfunktsioon eksponentkujul: $z = re^{i\varphi} \Rightarrow z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$.

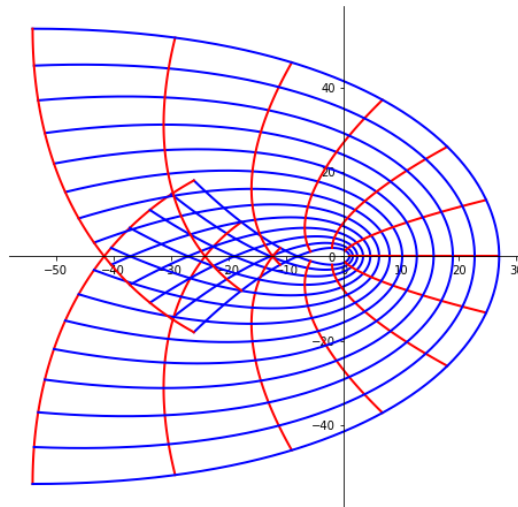
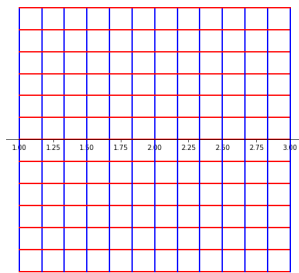
Joonte $r = 0,5, 1, \dots, 5$ ja $\varphi = -\frac{9\pi}{20}, -\frac{7\pi}{20}, \dots, \frac{9\pi}{20}$ kujutised.



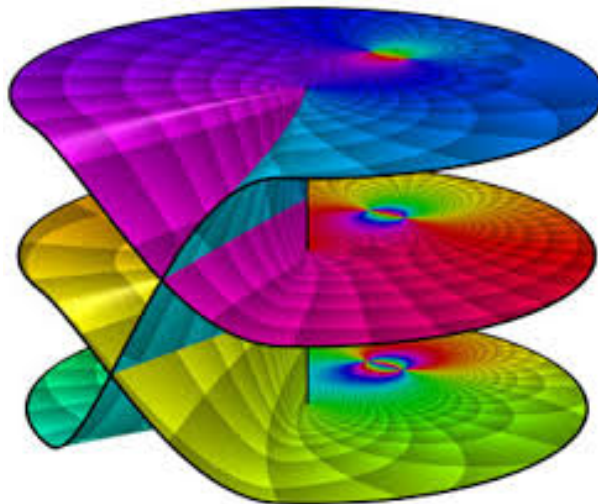
Ruutfunktsiooni väärtuste Riemanni pind



Kuupfunktsoon $f(z) = z^3$.
 Joonte $x = 1, \dots, 3$ ja $y = -3, \dots, 3$ kujutised.



Kuupfunktsooni väärtuste Riemanni pind



3.2 Juurfunktsioon $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$

Definitsioon. Kompleksarvu z n astme juureks nim. kompleksarvu w , mille puhul $w^n = z$.

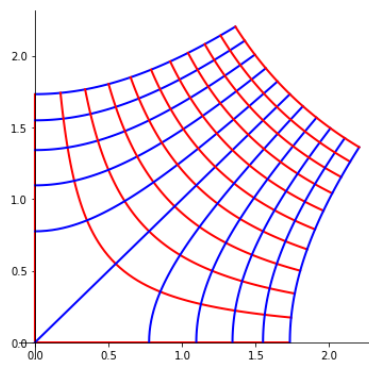
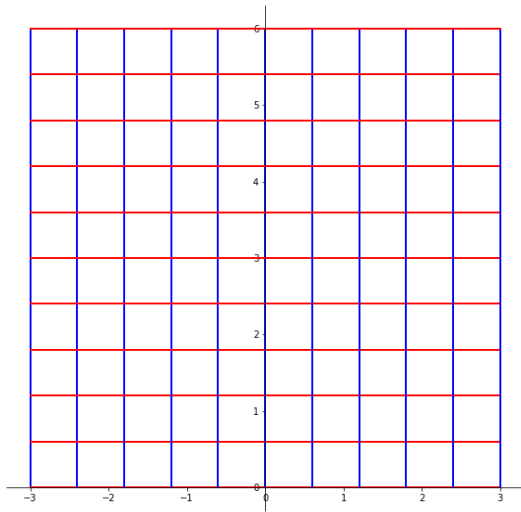
Olgu $z = re^{i\varphi}$ ja $w = Re^{i\theta}$. Siis $w^n = z \Leftrightarrow R^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}$
 $\Leftrightarrow R^n = r, n\theta = \varphi + 2k\pi \Leftrightarrow R = \sqrt[n]{r}, \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$

ehk $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg } z}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$.

Juurfunktsiooni **peaharu**: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}}$.

NB! Ettevaatust kirjutistega kujul $z^{\frac{m}{n}}$! Funktsioonid $f(z) = \sqrt[n]{z^m}$ ja $g(z) = (\sqrt[n]{z})^m$ on üldiselt erinevad, eriti kui juure all mõistame juure peaharu. Kui eeldame, et murd $\frac{m}{n}$ on taandatud ja juure all mõistame kõiki juure väärtusi, siis need funktsioonid ühtivad.

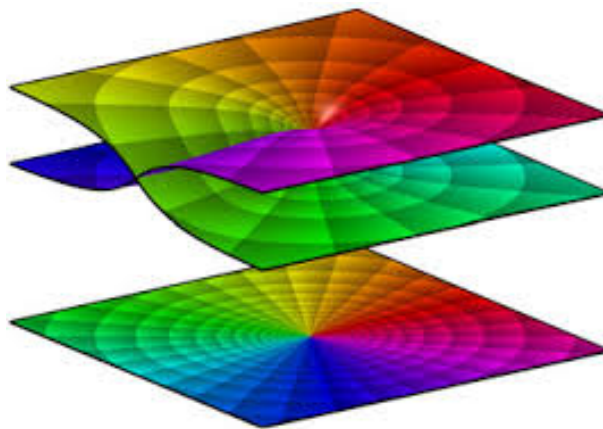
Ruutjuur: joonte $x = -3, \dots, 3$ ja $y = 0, \dots, 6$ kujutised.



Definitsioon. Funktsiooni **hargnemispunktideks** nim. punkte, mille mingis ümbruses ümber selle punkti liikudes liigume mitmese funktsiooni ühelt harult teisele.

Funktsiooni $f(z) = \sqrt[n]{z}$ hargnemispunktideks on 0 ja ∞ . Need on n järku hargnemispunktid, s.t. n korda ümber selle punkti liikudes jõuame funktsiooni esialgse haru juurde tagasi.

Ruutjuure originaalide Riemanni pind



3.3 Eksponentfunktsioon $f(z) = e^z$

Miks on mõistlik defineerida $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (Euleri valem)?

Reaalar'vulisel juhul on teada eksponentfunktsiooni astmerida: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Asendame siia x asemele iy :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y.$$

Defineerime $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Omadused:

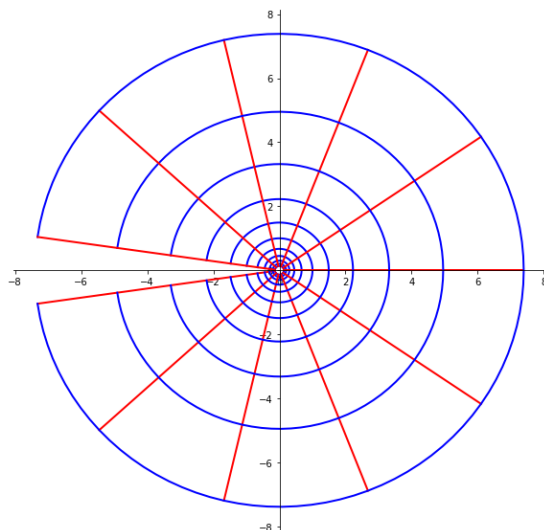
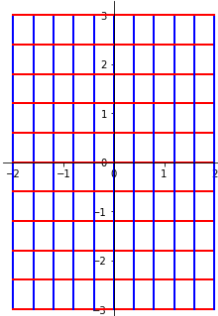
1. $|e^{x+iy}| = e^x$, $\text{Arg } e^{x+iy} = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $e^{z+2\pi i} = e^z$.
3. $(e^z)' = e^z$.

Tõestus. $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$

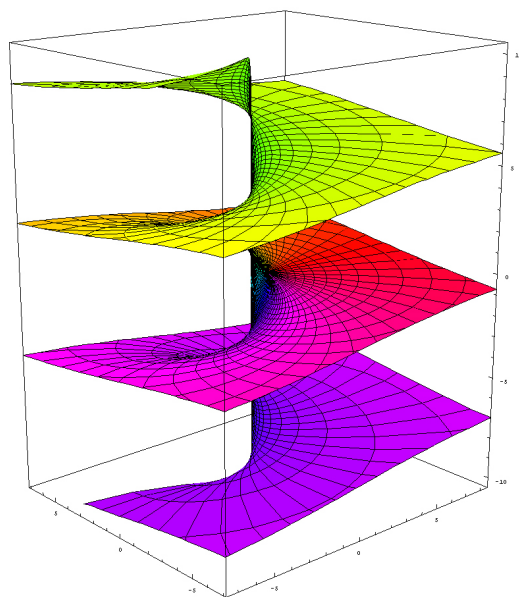
Cauchy-Riemanni võrranditest $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + e^x \sin y$.

4. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Eksponentfunktsioon: joonte $x = -2, \dots, 2$ ja $y = -3, \dots, 3$ kujutised.



Eksponentfunktsiooni väärtuste Riemanni pind



3.4 Logaritmfunksioon $f(z) = \text{Ln } z$

Definitsioon. Kompleksarvu z **logaritmiks** $\text{Ln } z$ nim. kompleksarvu w , mille puhul $z = e^w$.

Olgu $z = re^{i\varphi}$ ning olgu $w = u + iv$. Siis

$$z = e^w \Leftrightarrow re^{i\varphi} = e^{u+iv} \Leftrightarrow e^u = r, v = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

seega $\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$.

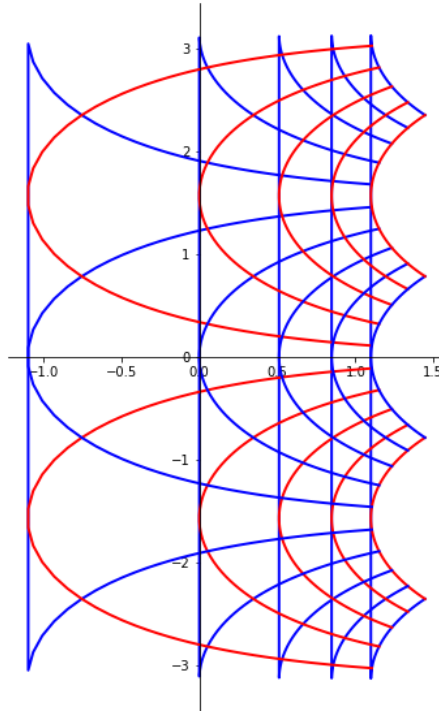
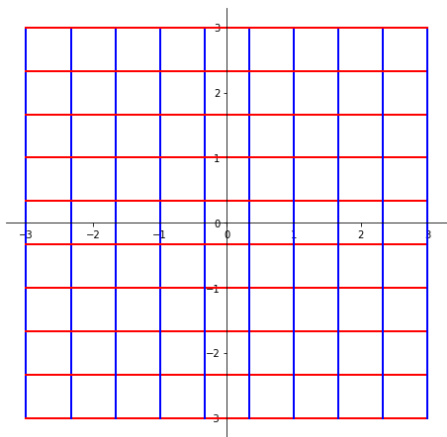
Logaritmfunksioon on mitmene funktsioon. Selle peaharuks on $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Funktsiooni $f(z) = \text{Ln } z$ hargnemispunktideks on 0 ja ∞ . Need on lõpmatut järku ehk logaritmilist tüüpi hargnemispunktid.

Omadused:

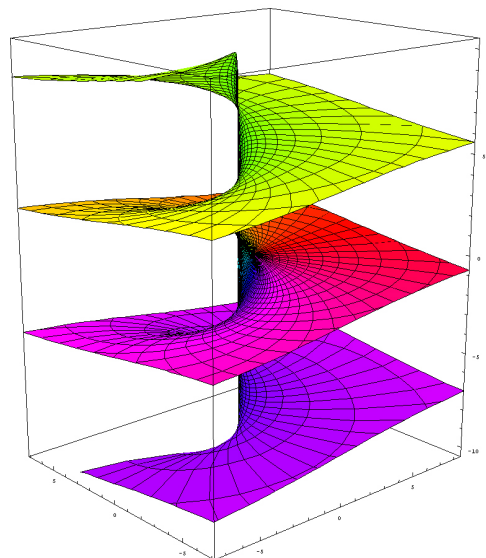
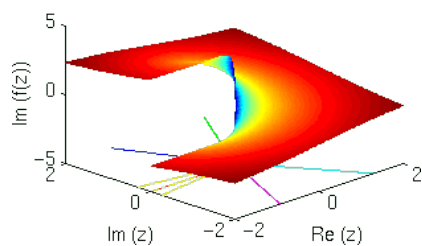
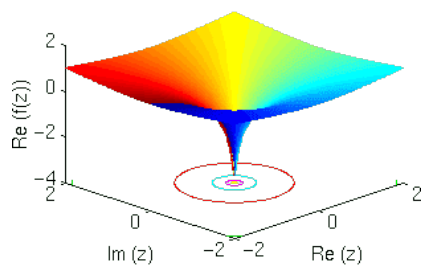
1. $e^{\text{Ln } z} = z$, $\text{Ln } e^z = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$, ei kehti peaharu korral!
3. $(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$.

Logaritmifunktsioon (peaväärtus): joonte $x = -3, \dots, 3$ ja $y = -3, \dots, 3$ kujutised.



Logaritmifunktsiooni peaväärtuse reaali- ja imaginaarosa graafikud
 $f(z) = \log(z)$

Logaritmifunktsiooni originaalide Riemanni pind



3.5 Üldine astmefunktsioon $f(z) = z^A$, $A \in \mathbb{C}$

Definitsioon. Üldiseks astmefunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $f(z) = z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}$.

Olgu $A = a + ib$. Kuna $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, siis $z^{a+ib} = e^{a \ln |z| - b \operatorname{Arg} z} e^{i(a \operatorname{Arg} z + b \ln |z|)}$.

Kui $A = n \in \mathbb{N}$, siis $z^A = z^n$. Kui $A = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, siis $z^A = \sqrt[n]{z}$.

Kui $A \notin \mathbb{Z}$, siis üldine astmefunktsioon on mitmene funktsioon. Selle peaharuks on $f(z) = z^A = e^{A \ln z}$.

- $z^A z^B = z^{A+B}$ kehtib peaharu korral, aga mitte üldise astmefunktsiooni korral, sest $e^{A \ln z} e^{B \ln z} = e^{(A+B) \ln z}$.
- $z_1^A z_2^A = (z_1 z_2)^A$ kehtib üldise astmefunktsiooni korral, aga mitte peaharu korral, sest $e^{A \operatorname{Ln} z_1} e^{A \operatorname{Ln} z_2} = e^{A(\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2)} = e^{A \operatorname{Ln}(z_1 z_2)}$.

3.6 Pöördväärtuse funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$

See on määratud iga $z \neq 0$ korral. Tavaliselt vaadeldakse seda täielikul komplekstasandil, siis defineeritakse $f(0) = \infty$ ja $f(\infty) = 0$.

Sirgete ja ringjoonte ühine üldvõrrand: $az\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + b = 0$, kus $A \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|A|^2 - ab > 0$.

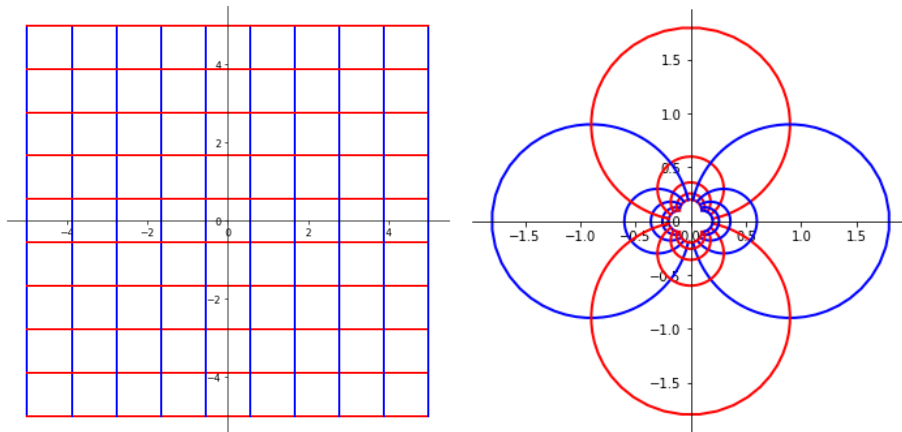
Kui originaalide tasandil on antud selle võrrandiga kirjeldatav sirge või ringjoon, siis kujutiste tasandil sellele vastab joon

$$a \frac{1}{w} \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \bar{A} \frac{1}{w} + A \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + b = 0 \quad \text{ehk} \quad bw\bar{w} + Aw + \bar{A}\bar{w} + a = 0,$$

mis on ka kas sirge või ringjoon. Seega funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$ teisendab täielikul komplekstasandil sirged ja ringjooned sirgeteks ja ringjoonteks. Sirgeteks kujutuvad täpselt need sirged ja ringjooned, mis läbivad punkti $z = 0$ (siis $b = 0$). Sirged kujutuvad sirgeteks või ringjoonteks, mis läbivad punkti $w = 0$.

Funktsiooni $f(z) = \frac{1}{z}$ pöördfunktsiooniks on funktsioon $g(w) = \frac{1}{w}$.

Pöördväärtuse funktsioon: joonte $x = -5, \dots, 5$ ja $y = -5, \dots, 5$ kujutised.



3.7 Murdlineaarne funktsioon $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$

Kirjutame murdlineaarse funktsiooni kujul

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = f_3(f_2(f_1(z))), \quad \text{kus } f_1(z) = cz + d, \quad f_2(w) = \frac{1}{w} \text{ ja } f_3(\zeta) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\zeta.$$

Murdlineaarne funktsioon teisendab täielikul komplekstasandil sirged ja ringjooned sirgeteks ja ringjooneteks. Sirgeteks kujutuvad täpselt need sirged ja ringjooned, mis läbivad punkti $z = -\frac{d}{c}$.

Murdlineaarse funktsiooni $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pöördfunktsiooniks on samuti murdlineaarne funktsioon $g(w) = \frac{b-dw}{cw-a}$.

3.8 Trigonomeetrilised funktsioonid

Kuna $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ja $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, siis

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{ja} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Defineerime

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ja} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

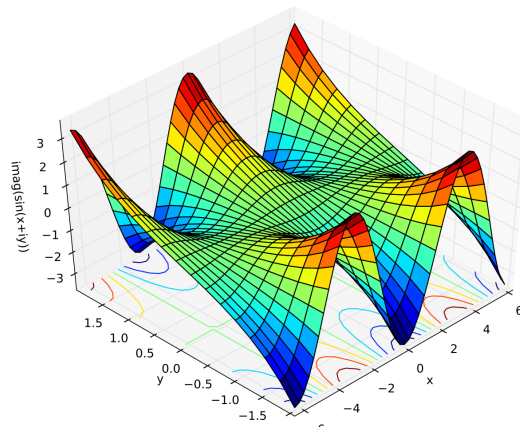
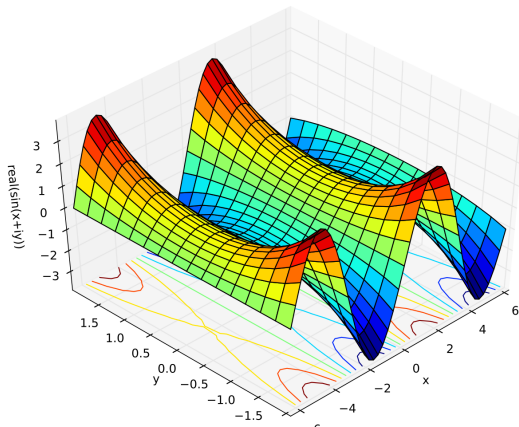
Omadused.

1. $\sin z$ ja $\cos z$ on 2π -perioodilised.
2. $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

NB! Ei kehti $|\sin z| \leq 1$ ja $|\cos z| \leq 1$!

Defineerime $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ ja $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Siinuse reaali- ja imaginaarosa graafikud.



3.9 Hüperboolsed funktsioonid

Defineerime hüperboolse siinuse $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ja hüperboolse koosinuse $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Omadused.

1. $\operatorname{sh} z$ ja $\operatorname{ch} z$ on $2\pi i$ -perioodilised.
2. $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.
3. $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

Defineerime hüperboolse tangensi $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ ja hüperboolse kootangensi $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.
[Seos trigonomeetriliste funktsioonidega.](#)

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= -i \sin iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{th} z &= -i \tan iz, & \operatorname{cth} z &= i \cot iz.\end{aligned}$$

3.10 Arkusfunktsioonid

Arkusfunktsioonid on defineeritud kui trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid:

$$\begin{aligned}w &= \operatorname{Arcsin} z \Leftrightarrow z = \sin w \\ w &= \operatorname{Arccos} z \Leftrightarrow z = \cos w \\ w &= \operatorname{Arctan} z \Leftrightarrow z = \tan w \\ w &= \operatorname{Arccot} z \Leftrightarrow z = \cot w\end{aligned}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

Mitmesed funktsioonid!

3.11 Areafunktsioonid

Areafunktsioonid on defineeritud kui hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid:

$$\begin{aligned}w &= \operatorname{Arsh} z \Leftrightarrow z = \operatorname{sh} w \\ w &= \operatorname{Arch} z \Leftrightarrow z = \operatorname{ch} w \\ w &= \operatorname{Arth} z \Leftrightarrow z = \operatorname{th} w \\ w &= \operatorname{Arcth} z \Leftrightarrow z = \operatorname{cth} w\end{aligned}$$

Mitmesed funktsioonid!

Peatükk 4

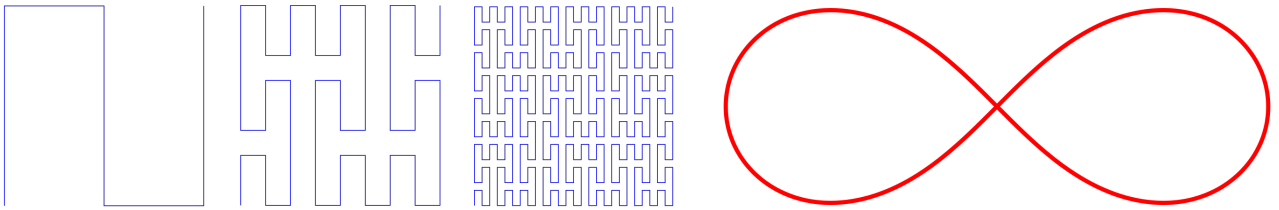
Integraal kompleksmuutuja funktsioonist

4.1 Integraali mõiste ja omadused

Definitsioon. Lihtsaks Jordani jooneks nim. punktihulka $\{z = z(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ koos suunaga (järjestusega). Siin $z = z(t)$ on pidev funktsioon ning $z(t_1) \neq z(t_2)$, kui $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$. Erandina on lubatud $z(\alpha) = z(\beta)$, sel juhul joont nimetame kinniseks. Suund on defineeritud nii, et $z(t_1) \prec z(t_2) \Leftrightarrow t_1 < t_2$.

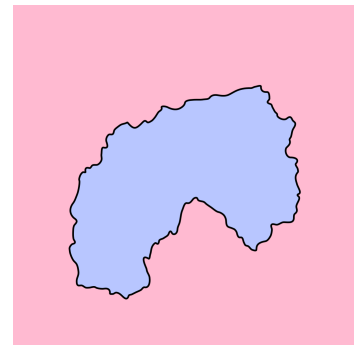
Kordsed punktid pole lubatud, sest

- muidu oleksid jooned ka näiteks ruumi täitvad jooned (Peano joon, Hilberti joon jms., mis täidavad kogu ühikruudu);
- tahame vältida ka näiteks ∞ -kujulisi kõveraid, mis jagavad tasandi rohkem kui kaheks osaks.



Teoreem 6 (Jordani kõvera teoreem). Kui γ on lihtne kinnine Jordani joon, siis ta jagab kogu komplekstasandi kaheks sidusaks osaks. Üks neist on tõkestatud ja teine tõkestamata.

Kui joon on mingi piirkonna raja, siis vähimisi loetakse tema positiivseks suunaks seda suunda, milles liikudes piirkond jääb vasakule. Vastupidi, kui on antud joon mingi suunaga, siis tema sisemuseks loetakse seda tasandi osa, mis jääb joont mööda positiivses suunas liikudes (lokaalselt) vasakule.



Definitsioon. Lihtsat Jordani joont nim. siledaks, kui z' on pidev lõigul $[\alpha, \beta]$. Joont, mis on jaotatav lõplikuks arvuks siledateks osadeks, nim. tükiti siledaks.

Olgu $F(t) = U(t) + iV(t)$ kompleksväärtustega reaalmuutuja funktsioon, mis on pidev lõigul $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ (s.t. $U, V: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidevad).

Definitsioon. Funktsiooni F integraaliks lõigul $[\alpha, \beta]$ nim. suurust

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt.$$

Omadused:

- 1) $\operatorname{Re} \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} F(t) dt, \quad \operatorname{Im} \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} F(t) dt,$
- 2) $\int_{\alpha}^{\beta} AF(t) dt = A \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt,$
- 3) $\int_{\alpha}^{\beta} (F_1(t) + F_2(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F_1(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} F_2(t) dt,$
- 4) $\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt.$

Tõestus. Olgu $\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = Re^{i\varphi}$. Siis

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| = e^{-i\varphi} \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \operatorname{Re} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\varphi} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} (e^{-i\varphi} F(t)) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt.$$

Olgu f pidev tükiti siledal joonel $\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$.

Definitsioon. Funktsiooni f integraaliks üle kõvera γ nim. suurust

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Omadused:

1) Seos teist liiki joonintegraaliga: olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ning olgu $\gamma_{\mathbb{R}}$ joonele γ vastav joon reaalsel tasandil. Siis

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Tõestus. Olgu $z(t) = x(t) + iy(t)$. Siis

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} (u(x, y) + iv(x, y))(x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} ((u(x, y)x'(t) - v(x, y)y'(t)) + i(v(x, y)x'(t) + u(x, y)y'(t))) dt \\ &= \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned}$$

2) Integraal ei sõltu joone γ parametriseringust.

3) Aditiivsus: kui $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, kusjuures γ_1 lõpp-punkt on γ_2 alguspunkt, siis

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4) Lineaarsus: $\int_{\gamma} Af(z) + Bg(z) dz = A \int_{\gamma} f(z) dz + B \int_{\gamma} g(z) dz.$

5) Joone suuna muutus: koosnegu $-\gamma$ samadest punktidest, mis γ , aga vastupidises järjekorras. Siis

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

6) Integraali mooduli hindamine:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|, \quad \text{kus } |dz| = |z'(t)| dt.$$

Järeldus 3. Kui $|f(z)| \leq M$ tükiti siledal joonel γ , siis $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq Ms_{\gamma}$, kus s_{γ} on joone γ pikkus.

Näide. Olgu γ ringjoon raadiusega $r > 0$ ja keskpunktiga $a \in \mathbb{C}$. Arvutada $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n}$, kus $n \in \mathbb{N}$.

Parametriseerime ringjoone: $z = a + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Siis

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{it} dt}{r^n e^{int}} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-1)t} dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n-1)t) - i \sin((n-1)t)] dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{kui } n = 1, \\ 0, & \text{kui } n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 Cauchy teoreem

Teoreem 7 (Cauchy 1). Olgu f ja f' pidevad ühelisidusus piirkonnas D . Siis $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga kinnise tükiti sileda $\gamma \subset D$ korral.

Teoreem 8 (Greeni valem). Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ lahtine ühelisidus piirkond ja olgu $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ kinnine tükiti sileda rajajoonega L hulk. Kui $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ning $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ on sellised pidevad funktsioonid, millel on hulgas $\mathcal{G}$ pidevad osatuletised F_y ja G_x , siis kehtib valem $\int_L F dx + G dy = \iint_{\mathcal{G}} (G_x - F_y) dx dy$, kus joonintegraal on võetud raja positiivses suunas.

Tõestus. Olgu $f = u + iv$. Cauchy-Riemanni võrrandid: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Siis

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} u dx - v dy + i \int_{\gamma_{\mathbb{R}}} v dx + u dy = \iint_{\mathcal{G}} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\mathcal{G}} (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

4.2.1 Pidevus kuni rajani

Olgu $D \subset \mathbb{C}$ piirkond ning olgu $A, B \in \overline{D}$.

Definitsioon. Punktide A ja B vaheliseks **kauguseks mööda piirkonda** D nimetatakse suurust $\varrho_D(A, B) = \inf_{\gamma} s_{\gamma}$, kus γ on punkte A ja B ühendav tükiti sile joon piirkonnas D .

Siin võib võtta joonteks γ ka punkte A ja B ühendavad murdjooned piirkonnas D . $\overline{D}^{\varrho_D}$ on piirkonna D sulund kauguse ϱ_D suhtes.

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **kuni rajani pidevaks** piirkonnas D , kui iga $A \in \overline{D}^{\varrho_D}$ korral $\lim_{\varrho_D(z, A) \rightarrow 0} f(z) = f(A)$.

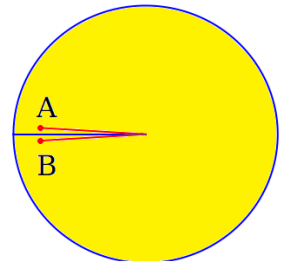
Kui $A \in D$ või $A \in \partial D$ pole raja kordne punkt, siis $\lim_{\varrho_D(z, A) \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow A} f(z)$.

Näide. $f(z) = \sqrt{z}$ peaharu on kuni rajani pidev komplekstasandil, millest on välja jäetud reaaltelje negatiivne osa.

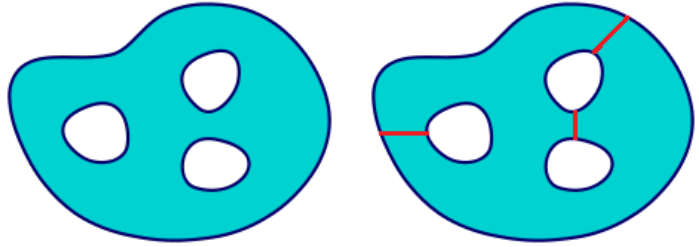
Teoreem 9 (Cauchy 2). Olgu f regulaarne ühelisidusus piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Kui rajal on kordseid osi, siis siin tuleb võtta integraal mõlemas suunas.

Teoreem 10 (Cauchy 3). Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, kus integraal on võetud raja positiivses suunas.



Tõestus. Ühendame rajaosad nii, et saame ühelisidusa piirkonna. Rakendame saadud piirkonnas Cauchy teoreemi. Integraalid üle lisatud rajaosade tuleb võtta mõlemas suunas, need koonduvad.



4.3 Algfunktsioon. Newton-Leibnizi valem

Definitsioon. Funktsiooni F nim. funktsiooni f **alfunktsiooniks** piirkonnas D , kui selles piirkonnas $F' = f$.

Teoreem 11 (Newton-Leibniz). Olgu F regulaarne tükiti sileda joone γ mingis ümbruses. Siis

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(B) - F(A),$$

kus A ja B on vastavalt joone γ algus- ja lõpp-punkt.

Tõestus. Olgu $\gamma: z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ sile. Siis

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ z)'(t) dt.$$

Tähistame $(F \circ z)(t) = U(t) + iV(t)$. Siis

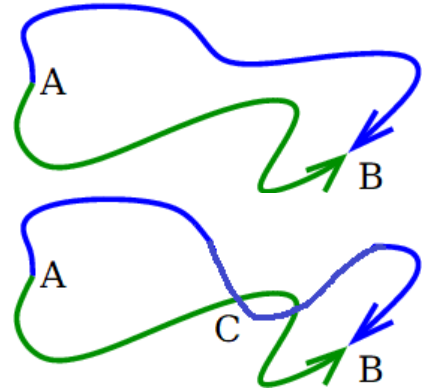
$$\int_{\alpha}^{\beta} (F \circ z)'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (U'(t) + iV'(t)) dt = U(t)|_{\alpha}^{\beta} + iV(t)|_{\alpha}^{\beta} = F(B) - F(A).$$

Teoreem 12 (Integraali sõltumatus integreerimisteest). Olgu f pidev piirkonnas D ning olgu $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga kinnise tükiti sileda $\gamma \subset D$ korral. Siis iga tükiti sileda joone Γ korral piirkonnas D integraal $\int_{\Gamma} f(z) dz$ ei sõltu joonest Γ , vaid ainult selle otspunktidest.

Tõestus. Olgu γ_1 ja γ_2 kaks kõverat punktist A punkti B . Eeldame, et nad ei lõiku. Siis $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ on kinnine kõver, seega

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Kui γ_1 ja γ_2 lõikuvad, siis kasutame induktsiooni. Olgu n lõikepunkti korral teoreem tõestatud. Olgu C kõverate esimene lõikepunkt mööda γ_1 liikudes. Siis integraal A -st C -ni on sama mööda mõlemat kõverat, ning integraal C -st B -ni on sama induktsiooni eelduse tõttu.



Märkus. Teoreemi eeldused on täidetud, kui f on regulaarne tõkestatud ühelisidusas piirkonnas D .

Kui integraal ei sõltu joonest γ , vaid ainult selle otspunktidest A ja B (mingis kindlas piirkonnas), siis kirjutame $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_A^B f(z) dz$.

Teoreem 13 (Algfunktsiooni olemasolu). Olgu f pidev piirkonnas D ning olgu $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga kinnise tükiti sileda $\gamma \subset D$ korral. Olgu $z_0 \in D$. Defineerime $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$. Siis F on f algfunktsioon piirkonnas D .

Tõestus. Näitame, et $F'(z) = f(z)$ iga $z \in D$ korral. Olgu $z \in D$ ja olgu $r > 0$ nii väike, et $B(z, r) \subset D$. Olgu $|h| < r$. Siis

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta \quad \text{ja} \quad f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\zeta.$$

Seega
$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta.$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna f on pidev punktis z , siis leidub $\delta > 0$ nii et kui $|\zeta - z| < \delta$, siis $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Kui $|h| < \min\{r, \delta\}$, siis

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| < \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

Seega $F'(z) = f(z)$.

4.4 Cauchy valem. Cauchy tüüpi integraalid

Teoreem 14 (Cauchy valem). Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

Tõestus. Olgu $z \in D$ fikseeritud. Kui $\overline{B}(z, r) \subset D$, siis funktsioon $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ on regulaarne ja pidev kuni rajani piirkonnas $D \setminus \overline{B}(z, r)$, seega Cauchy teoreemi kohaselt $\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, kus $C_r = S(z, r)$, läbitud positiivses suunas.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Valime $r > 0$ nii väikese, et $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, kui $|\zeta - z| = r$. Siis

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon 2\pi r = \varepsilon.$$

Olgu funktsioon f pidev tükiti siledal joonel Γ .

Definitsioon. Funktsiooni kujul

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma$$

nim. **Cauchy tüüpi integraaliks**.

Teoreem 15 (Cauchy tüüpi integraali regulaarsus). Olgu funktsioon f pidev tükiti siledal joonel Γ ning olgu

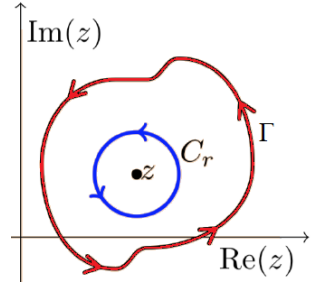
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

Siis F on kuitahes palju kordi diferentseeruv ning

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

Tõestus. Väide kehtib, kui $n = 0$.

Olgu F n korda diferentseeruv, $n \in \mathbb{N}_0$. Olgu $z \notin \Gamma$ fikseeritud. Valime $\delta > 0$ nii, et $B(z, 2\delta) \cap \Gamma = \emptyset$. Olgu $|h| < \delta$. Siis



$$\begin{aligned}
& \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta \\
&= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}} \right) - \frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}} \right] d\zeta \\
&= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{n+1}{(\zeta-w)^{n+2}} dw - \frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} dw \right] d\zeta \\
&= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} \int_z^w \frac{n+2}{(\zeta-\tau)^{n+3}} d\tau dw \right] d\zeta.
\end{aligned}$$

Selle moodulit saame hinnata suurusega

$$\frac{(n+2)!}{2\pi} \int_{\Gamma} |f(\zeta)| \frac{1}{|h|} |h|^2 \frac{1}{\delta^{n+3}} |d\zeta| \rightarrow 0, \text{ kui } h \rightarrow 0.$$

Teoreem 16 (Regulaarse funktsiooni lõpmatu diferentseeruvus). *Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis f on kuitahes palju kordi diferentseeruv piirkonnas D ning*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D.$$

Tõestus. Cauchy valem: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, kui $z \in D$. Kasutame Cauchy tüüpi integraali regulaarsust.

Järeldus 4 (Cauchy võrratus). *Olgu f regulaarne ringis $B(z, R)$ ning pidev kuni rajani. Olgu $|f(\zeta)| \leq M$, kui $|\zeta-z| = R$. Siis $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}$.*

Tõestus. $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{S(z,R)} \frac{M}{R^{n+1}} |d\zeta| = \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R = \frac{n!M}{R^n}$.

4.5 Liouville'i ja Morera teoreemid. Algebra põhiteoreem

Teoreem 17 (Liouville). *Kui funktsioon f on regulaarne ja tõkestatud kogu komplekstasandil, siis f on konstantne.*

Tõestus. Olgu $|f(z)| \leq M$ iga $z \in \mathbb{C}$ korral. Cauchy võrratus: kui f regulaarne ringis $B(z, R)$ ning pidev kuni rajani ja $|f(\zeta)| \leq M$, kui $|\zeta-z| = R$, siis $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}$.

Võttes siin $n = 1$ ja $z \in \mathbb{C}$ suvalise, saame $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$, mis kehtib iga $R > 0$ korral. Lastes $R \rightarrow \infty$, saame $f'(z) = 0$ iga $z \in \mathbb{C}$ korral. Seega f on konstantne.

Teoreem 18 (Algebra põhiteoreem). *Igal kompleksarvuliste kordajatega mittekonstantsel polünoomil on vähemalt üks kompleksarvuline nullkoht.*

Tõestus. Olgu $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ mingi polünoom, kusjuures $n \geq 1$ ja $a_n \neq 0$. Oletame, et tal pole ühtki nullkohta. Siis funktsioon $g(z) = \frac{1}{P(z)}$ on regulaarne kogu komplekstasandil. Kuna

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}} = 0,$$

siis leidub $R > 0$ nii, et $|g(z)| < 1$ kui $|z| > R$. Kuna $|g(x+iy)|$ on pidev kahe muutuja funktsioon kinnises ringis $\overline{B}(0, R)$, siis ta on seal ka tõkestatud. Seega g on regulaarne ja tõkestatud kogu komplekstasandil. Liouville'i teoreemi põhjal ta on konstantne. Järelikult ka $P(z) = \frac{1}{g(z)}$ on konstantne, vastuolu.

Teoreem 19 (Morera). *Olgu f pidev piirkonnas D ning olgu $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga kinnise joone γ puhul selles piirkonnas. Siis f on regulaarne selles piirkonnas.*

Tõestus. Teoreemi eeldustel integraal sellest funktsioonist ei sõltu integreerimisteest. Olgu $z_0 \in D$ fikseeritud. Defineerime $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$. Siis $F'(z) = f(z)$ iga $z \in D$ korral, seega F on regulaarne piirkonnas D .

Nüüd regulaarse funktsiooni lõpmatu diferentseeruvuse tõttu leidub $F''(z) = f'(z)$ iga $z \in D$ korral, seega ka f on regulaarne piirkonnas D .

4.6 Parameetrist sõltuvad integraalid

Parameetrist sõltuv integraal on integraal kujul

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta, \quad z \in D,$$

kus Γ on mingi tükiti sile kõver komplekstasandil, D on mingi hulk komplekstasandil (näiteks piirkond või ka mingi kõver), ning f on kahe kompleksmuutuja funktsioon hulgal $\Gamma \times D$.

Meid huvitavad küsimused:

- kui f on pidev, kas siis ka F on pidev;
- kui f on regulaarne, kas siis ka F on regulaarne ja kas võib diferentseerida integraali märgi all;
- kas integraalis $\int_C \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta dz$, kus C on mingi tükiti sile kõver hulgas D , võib integreerimisjärjekorda vahetada.

Teoreem 20 (Parameetrist sõltuva integraali regulaarsus). Olgu $D \subset \mathbb{C}$ piirkond ning olgu Γ mingi tükiti sile joon. Olgu f pidev kahe kompleksmuutuja funktsioon hulgas $\Gamma \times D$. Eeldame, et iga fikseeritud $\zeta \in \Gamma$ korral $f(\zeta, \cdot)$ on regulaarne piirkonnas D . Siis funktsioon

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta, \quad z \in D$$

on regulaarne piirkonnas D ning $F'(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta$.

Tõestus. Olgu $z \in D$. Siis leidub $r > 0$ nii, et $\overline{B}(z, r) \subset D$. Kuna f on pidev kinnises hulgas $\Gamma \times \overline{B}(z, r)$, siis on ta seal ka ühtlaselt pidev.

Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Siis leidub $\delta > 0$ nii, et kui $|h| < \delta$, siis $|f(\zeta, z+h) - f(\zeta, z)| < \varepsilon/s_{\Gamma}$ iga $\zeta \in \Gamma$ korral. Siis

$$|F(z+h) - F(z)| = \left| \int_{\Gamma} (f(\zeta, z+h) - f(\zeta, z)) d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{s_{\Gamma}} s_{\Gamma} = \varepsilon,$$

seega F on pidev iga $z \in D$ korral.

Olgu $z \in D$. Siis leidub $r > 0$ nii, et $B(z, r) \subset D$. Olgu C kinnine kõver piirkonnas $B(z, r)$. Siis

$$\int_C F(z) dz = \int_C \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta dz = \int_{\Gamma} \int_C f(\zeta, z) dz d\zeta = 0,$$

Cauchy teoreemi põhjal, kuna $f(\zeta, \cdot)$ on regulaarne piirkonnas $B(z, r)$ iga $\zeta \in \Gamma$ korral. Nüüd Morera teoreemist järeldub, et ka F on regulaarne piirkonnas $B(z, r)$. Kuna $z \in D$ oli suvaline, siis F on regulaarne kogu piirkonnas D .

Olgu $z \in D$. Valime $r > 0$ nii, et $\overline{B}(z, r) \subset D$. Olgu $C_r = \{w \in \mathbb{C}: |w - z| = r\}$ ringi positiivses suunas. Regulaarse funktsiooni tuletise valemi järgi

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{F(w)}{(w-z)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\int_{\Gamma} f(\zeta, w) d\zeta}{(w-z)^2} dw \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta, w)}{(w-z)^2} dw d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta. \end{aligned}$$

4.6.1 Päratu parameetrist sõltuv integraal

Olgu joon Γ lõpmatu pikkusega. Eeldame, et iga tema lõpliku pikkusega osa on tükiti sile. Olgu tema alguspunkt A ning olgu Γ_s joone Γ osa, mille alguspunkt on A ja pikkus on s . Olgu f pidev joonel Γ .

Definitsioon. Kui leidub piirväärtus $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_s} f(z) dz$, siis seda nim. funktsiooni f **päratuks integraaliks üle joone Γ** , tähistatakse $\int_{\Gamma} f(z) dz$. Kui see piirväärtus on lõplik, siis öeldakse, et **päratu integraal koondub**.

Olgu nüüd f pidev hulgal $\Gamma \times D$, kus Γ on mingi lõpmatu pikkusega joon ning D on piirkond kompleksstasandil.

Definitsioon. Kui leidub piirväärtus $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z) d\zeta$, siis seda nim. funktsiooni f **päratuks parameetrist sõltuvaks integraaliks üle joone Γ** , tähistatakse $\int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$. Kui see piirväärtus on lõplik, siis öeldakse, et **päratu parameetrist sõltuv integraal koondub**.

Eeldame, et päratu integraal $F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ koondub iga $z \in D$ korral.

Definitsioon. Öeldakse, et päratu integraal $F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ **koondub ühtlaselt hulgal D** , kui $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0: \left| F(z) - \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z) d\zeta \right| < \varepsilon \forall s > M \forall z \in D$.

Teoreem 21 (Weierstrassi koonduvustunnus). Eeldame, et leidub selline funktsioon $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, et

$$|f(\zeta, z)| \leq g(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma, \quad \forall z \in D$$

ning päratu integraal $\int_{\Gamma} g(\zeta) |d\zeta|$ koondub. Siis päratu integraal $\int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ koondub ühtlaselt hulgal D .

Teoreem 22. Olgu Γ lõpmatu pikkusega joon, mille iga lõplik osa on tükiti sile ning olgu $D \subset \mathbb{C}$ mingi piirkond. Olgu f pidev hulgal $\Gamma \times D$ ning koondugu päratu integraal $F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ ühtlaselt igas kinnises piirkonnas $D' \subset D$. Siis F on pidev hulgas D .

Tõestus. Olgu $z_0 \in D$. Valime $r > 0$ nii, et $\overline{B}(z_0, r) \subset D$. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Ühtlase koonduvuse tõttu hulgas $\overline{B}(z_0, r)$ leidub $M > 0$ nii, et kui $s > M$, siis $\left| F(z) - \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z) d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall s > M \quad \forall z \in \overline{B}(z_0, r)$.

Olgu $s > M$. Kuna f on ühtlaselt pidev hulgas $\Gamma_s \times \overline{B}(z_0, r)$, siis leidub $0 < \delta < r$ nii, et kui $|h| < \delta$, siis $|f(\zeta, z_0 + h) - f(\zeta, z_0)| < \frac{\varepsilon}{3s}$. Siis

$$\begin{aligned} |F(z_0 + h) - F(z_0)| &\leq \left| F(z_0 + h) - \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z_0 + h) d\zeta \right| + \left| \int_{\Gamma_s} (f(\zeta, z_0 + h) - f(\zeta, z_0)) d\zeta \right| \\ &\quad + \left| F(z_0) - \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z_0) d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Märkus. Siin piirkonna D võib asendada ka mingi pideva joonega C .

Teoreem 23. Olgu Γ lõpmatu pikkusega joon, mille iga lõplik osa on tükiti sile ning olgu C mingi tükiti sile kõver. Olgu f pidev hulgal $\Gamma \times C$ ning koondugu päratu integraal $F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ ühtlaselt hulgas C . Siis

$$\int_C F(z) dz = \int_C \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta dz = \int_{\Gamma} \int_C f(\zeta, z) dz d\zeta.$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Valime $M > 0$ nii, et iga $s > M$ ja iga $z \in C$ korral

$$\left| F(z) - \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z) d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{sC}.$$

Olgu $s > M$. Siis

$$\begin{aligned} \left| \int_C F(z) dz - \int_{\Gamma_s} \int_C f(\zeta, z) dz d\zeta \right| &= \left| \int_C F(z) dz - \int_C \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z) d\zeta dz \right| \\ &\leq \int_C \left| F(z) - \int_{\Gamma_s} f(\zeta, z) d\zeta \right| |dz| < \frac{\varepsilon}{s_C} s_C = \varepsilon. \end{aligned}$$

Teoreem 24 (Päratu parameetrist sõltuva integraali regulaarsus). *Olgu Γ lõpmatu pikkusega joon, mille iga lõplik osa on tükiti sile ning olgu D mingi piirkond. Olgu f pidev hulgal $\Gamma \times D$ ning eeldame, et iga fikseeritud $\zeta \in \Gamma$ korral $f(\zeta, \cdot)$ on regulaarne piirkonnas D . Eeldame, et päratu integraal $F(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta$ koondub ühtlaselt igas kinnises piirkonnas $D' \subset D$. Siis F on regulaarne hulgas D ning $F'(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta$.*

Tõestus. F on pidev piirkonnas D . Olgu $z \in D$. Siis leidub $r > 0$ nii, et $B(z, r) \subset D$. Olgu C kinnine kõver piirkonnas $B(z, r)$. Siis

$$\int_C F(z) dz = \int_C \int_{\Gamma} f(\zeta, z) d\zeta dz = \int_{\Gamma} \int_C f(\zeta, z) dz d\zeta = 0.$$

Morera teoreemist järeldub, et F on regulaarne piirkonnas $B(z, r)$, seega ka piirkonnas D .

Olgu $z \in D$. Valime $r > 0$ nii, et $\overline{B}(z, r) \subset D$. Siis

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{F(w)}{(w-z)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\int_{\Gamma} f(\zeta, w) d\zeta}{(w-z)^2} dw \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta, w)}{(w-z)^2} dw d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta. \end{aligned}$$

Näide. Seosega $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ määratud Euleri Γ -funktsioon on regulaarne pooltasandis $\operatorname{Re} z > 0$ (siin t^{z-1} all mõistame selle peaharu, ehk $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$).

Iga kinnine piirkond, mis sisaldub pooltasandis $\operatorname{Re} z > 0$, sisaldub mingis kinnises piirkonnas $D_{\alpha, R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha, |z| \leq R\}$, kus $\alpha > 0$ ja $R > 0$. Näitame, et integraal koondub ühtlaselt igas piirkonnas $D_{\alpha, R}$. Iga $z \in D_{\alpha, R}$ korral $|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\ln t}| = e^{(\operatorname{Re} z - 1)\ln t} = t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq \begin{cases} t^{\alpha-1}, & t \leq 1, \\ t^R, & t > 1. \end{cases}$

Olgu $g(t) = e^{-t} \begin{cases} t^{\alpha-1}, & t \leq 1, \\ t^R, & t > 1. \end{cases}$ Siis $|t^{z-1} e^{-t}| \leq g(t) \forall z \in D_{\alpha, R}, \forall t \in (0, \infty)$ ja

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^R dt.$$

Kuna $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/2} t^R = 0$, siis $\exists M > 0$: $e^{-t/2} t^R < M \forall t \geq 1$. Seega

$$\int_0^{\infty} g(t) dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt + \int_1^{\infty} M e^{-t/2} dt = \frac{1}{\alpha} + \frac{2M}{\sqrt{e}}.$$

Weierstrassi tunnuse tõttu integraal $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ koondub ühtlaselt igas piirkonnas $D_{\alpha, R}$, seega ka igas kinnises piirkonnas, mis sisaldub pooltasandis $\operatorname{Re} z > 0$.

Iga $t \in (0, \infty)$ korral funktsioon $t^{z-1} e^{-t} = e^{(z-1)\ln t} e^{-t}$ on regulaarne pooltasandis $\operatorname{Re} z > 0$. Seega ka Euleri Γ -funktsioon $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ on regulaarne pooltasandis $\operatorname{Re} z > 0$.

Gammafunktsiooni omadusi:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$;
2. $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Peatükk 5

Analüütilised funktsioonid

5.1 Arvread

Definitsioon. Arvreaks nimetatakse lõpmatut summat $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, $u_k \in \mathbb{C}$. Arvrea osasummaks nimetatakse lõplikku summat $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Definitsioon. Arvrida nimetatakse koonduvaks, kui tema osasummade jadal leidub lõplik piirväärtus, vastasel juhul nimetatakse arvrida hajuvaks. Koonduva arvrea osasummade jada piirväärtust nimetatakse selle rea summaks.

Lause 2. Olgu $u_k = a_k + ib_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Siis rida $\sum_k u_k$ koondub parajasti siis, kui koonduvad read $\sum_k a_k$ ja $\sum_k b_k$.

Lause 3 (Rea koonduvuse tarvilik tunnus). Kui rida $\sum_k u_k$ koondub, siis $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$.

Tõestus. Kuna $u_k = S_k - S_{k+1}$, siis $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - S_{k-1}) = 0$.

Lause 4 (Cauchy kriteerium ridade jaoks). Rida $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon.$$

Definitsioon. Arvrida $\sum_k u_k$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks ehk mooduli järgi koonduvaks, kui rida $\sum_k |u_k|$ koondub.

Lause 5 (Absoluutselt koonduva rea koonduvus). Iga absoluutselt koonduv arvrida on koonduv.

Tõestus. Olgu rida $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absoluutselt koonduv.

$$\text{Olgu } \varepsilon > 0. \text{ Siis } \exists N \in \mathbb{N}: m > n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m |u_k| < \varepsilon, \text{ seega ka } \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k| < \varepsilon.$$

Lause 6 (Positiivsete ridade võrdlustunnus). Olgu $0 \leq u_k \leq v_k$ iga $k \geq N$ korral. Siis

a) kui rida $\sum_k v_k$ koondub, siis rida $\sum_k u_k$ koondub.

b) kui rida $\sum_k u_k$ hajub, siis rida $\sum_k v_k$ hajub.

Lause 7 (d'Alemberti koonduvustunnus). Kui leidub piirväärtus $D = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|$ ning $D < 1$, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub absoluutselt. Kui $D > 1$, siis rida hajub.

Lause 8 (Cauchy koonduvustunnus). Kui $C = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|u_k|} < 1$, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub absoluutselt. Kui $C > 1$, siis rida hajub.

Ülemise piirväärtuse definitsioon: $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq k} x_m = \max\{a : a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}\}$.

5.2 Funktsionaalread

Olgu funktsioonid f_k määratud hulgas D .

Definitsioon. Funktsionaalreaks nim. lõpmatut summat $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, $z \in D$.

Definitsioon. Funktsionaalrida nim. koonduvaks hulgas D , kui ta koondub iga $z \in D$ korral.

Kui funktsionaalrida koondub hulgas D , siis on iga $z \in D$ korral määratud selle rea summa ehk hulgal D on määratud funktsioon f , mida nim. selle rea summaks.

Koonduvus hulgas D funktsiooniks f tähendab, et

$$\forall z \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Definitsioon. Funktsionaalrida nim. ühtlaselt koonduvaks hulgas D , kui $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon \forall z \in D$.

Teoreem 25 (Weierstrassi tunnus). Olgu f_k , $k \in \mathbb{N}$ määratud hulgas D . Kui $|f_k(z)| \leq a_k$, $k \in \mathbb{N}$ iga $z \in D$ korral ning rida $\sum_k a_k$ koondub, siis rida $\sum_k f_k(z)$ koondub ühtlaselt ning absoluutselt hulgas D .

Tõestus. Teoreemi eeldustest ja positiivsete ridade võrdlusausest järeldub, et iga fikseeritud $z \in D$ korral rida $\sum_k f_k(z)$ koondub absoluutselt, seega ka koondub. Olgu tema summa $f(z)$. Olgu $\varepsilon > 0$.

Cauchy kriteeriumi põhjal $\exists N \in \mathbb{N} : m > n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m a_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Siis

$$\left| \sum_{k=0}^m f_k(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Minnes siin piirile $m \rightarrow \infty$, saame $\left| f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Teoreem 26 (Funktsionaalrea summa pidevus). Olgu $D \subset \mathbb{C}$ hulk, mille iga punkt on ühtlasi tema kuhjumispunkt. Hulgas D ühtlaselt koonduva pidevate funktsioonide rea summa on pidev hulgas D ning

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z_0) \quad \forall z_0 \in D.$$

Tõestus. Olgu $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$. Olgu $\varepsilon > 0$. Valime $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall z \in D$. Olgu $z \in D$ fikseeritud. Lõplik summa $\sum_{k=0}^n f_k(z)$ on pidev, seega

$$\exists \delta > 0: \zeta \in D, |\zeta - z| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(\zeta) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nüüd kui $\zeta \in D$, $|\zeta - z| < \delta$, siis

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \left| f(\zeta) - \sum_{k=0}^n f_k(\zeta) \right| + \left| \sum_{k=0}^n f_k(\zeta) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| + \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Teoreem 27 (Funktsionaalrea summa integreeruvus). Kui funktsioonid f_k on pidevad tükiti siledal joonel Γ ning rida $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ koondub ühtlaselt joonel Γ , siis $\int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} f_k(z) dz$.

Tõestus. Olgu $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$. Siis f on pidev joonel Γ , seega ka integreeruv.

Olgu $\varepsilon > 0$. Valime $N \in \mathbb{N}$: $n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{s_{\Gamma}} \quad \forall z \in \Gamma$. Nüüd

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma} f_k(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| |dz| < \frac{\varepsilon}{s_{\Gamma}} s_{\Gamma} = \varepsilon,$$

seega $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} f_k(z) dz$.

Märkus. Siin piisaks ka eeldusest, et funktsioonid f_k on integreeruvad, siis saaksime ka, et rea summa integreeruv joonel Γ .

Teoreem 28 (Weierstrassi teoreem funktsionaalrea summa diferentseeruvusest). Olgu f_k regulaarsed tõkestatud piirkonnas D ning pidevad kuni tükiti sileda rajani Γ . Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ koondub ühtlaselt rajajoonel Γ , siis

- 1) see rida koondub kogu piirkonnas D funktsiooniks f ;
- 2) f on regulaarne piirkonnas D ning $f^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(z)$ iga $z \in D$ korral.

Tõestus. Cauchy valemi põhjal $f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$.

Iga fikseeritud $z \in D$ korral $|\zeta - z| > \delta > 0 \quad \forall \zeta \in \Gamma$, seega rida $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z}$ koondub ühtlaselt rajajoonel Γ . Rida võib integreerida liikmeti, seega rida koondub iga $z \in D$ korral. Tähistame

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Seega f avaldub Cauchy tüüpi integraalina, järelikult ta on regulaarne piirkonnas D ning

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta.$$

See rida koondub ühtlaselt joonel Γ , seega võime rida liikmeti integreerida:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(z).$$

5.3 Astmeread

Definitsioon. Astmereaks punktis $a \in \mathbb{C}$ nim. funktsionaalrida kujul $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, kus $c_n \in \mathbb{C}$.

Definitsioon. Astmerea punktis a koonduvusringiks nim. suurimat ringi $B(a, R)$, kus astmerida koondub; selle ringi raadiust nim. astmerea koonduvusraadiuseks.

Teoreem 29 (Cauchy-Hadamard). Astmerida koondub absoluutselt ringis $B(a, R)$ ja hajub väljaspool ringi $\overline{B(a, R)}$, kus $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ (siin võib olla ka $R = 0$ või $R = \infty$).

Tõestus. 1) Olgu $|z-a| < R$. Kuna $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = \frac{|z-a|}{R} < 1$, siis $\exists q \in (0, 1)$ ja $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < q$, kui $n \geq N$. Seega $|c_n(z-a)^n| < q^n$, kui $n \geq N$. Kuna rida $\sum q^n$ koondub, siis ka astmerida koondub punktis z .

2) Olgu $|z-a| > R$. Kuna $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = \frac{|z-a|}{R} > 1$, siis leidub osajada nii, et $|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > 1$, seega rea üldliige ei koondunud nulliks.

Järeldus 5. Iga $r < R$ korral astmerida koondub ühtlaselt ja absoluutselt ringis $\overline{B(a, r)}$.

Tõestus. Olgu $0 < r < R$. Siis iga $z \in \overline{B(a, r)}$ korral $|c_n(z-a)^n| \leq |c_n|r^n$. Kuna $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|r^n} = \frac{r}{R} < 1$, siis rida $\sum c_n r^n$ koondub, seega Weierstrassi tunnuse põhjal $\sum c_n(z-a)^n$ koondub ühtlaselt ja absoluutselt ringis $\overline{B(a, r)}$.

Järeldus 6. Astmerea summa on regulaarne ringis $B(a, R)$ ning astmerida võib oma koonduvusringis liikmeti diferentseerida ja integreerida.

Tõestus. Iga $z \in B(a, R)$ korral leidub r : $|z-a| < r < R$. Astmerida koondub ühtlaselt ringis $\overline{B(a, r)}$, seega ta on regulaarne punktis z ning rida võib liikmeti diferentseerida.

Olgu γ mingi tükiti sile kõver ringis $B(a, R)$. Siis leidub $r < R$ nii, et $\gamma \subset \overline{B(a, r)}$. Seega astmerida koondub ühtlaselt joonel γ ning rida võib liikmeti integreerida.

5.4 Tayloriga rida

Olgu f regulaarne punktis a .

Definitsioon. Astmerida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ nimetatakse funktsiooni f Tayloriga rida punktis a .

Teoreem 30 (Astmerea ühesus). Iga astmerida punktis a , mille koonduvusraadius on positiivne, on oma summa Tayloriga rida.

Tõestus. Olgu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = f(z)$. Võttes $z = a$ saame $c_0 = f(a)$. Diferentseerime rida liikmeti:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z-a)^{n-1} = f'(z)$. Võttes siin $z = a$ saame $c_1 = f'(a)$. Diferentseerides m korda liikmeti saame

$\sum_{n=m}^{\infty} c_n n(n-1) \cdots (n-m+1)(z-a)^{n-m} = f^{(m)}(z)$, seega $c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$.

Järeldus 7. Kui funktsioon on arendatav positiivse koonduvusraadiusega astmeritta punktis a , siis see arendus on ühene.

Järeldus 8 (Cauchy võrratus). Olgu f regulaarne ringis $B(a, R)$ ning pidev kuni rajani. Siis f Tayloriga rida punktis a kordajate jaoks kehtib võrratus $|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$, $M = \max_{|z-a|=R} |f(z)|$.

Tõestus. Meil oli tõestatud Cauchy võrratus: kui f regulaarne ringis $B(z, R)$ ning pidev kuni rajani ja $|f(\zeta)| \leq M$, kui $|\zeta - z| = R$, siis $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}$. Võtame $z = a$ ja kasutame seost $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

5.5 Analüütilised funktsioonid

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse **analüütiliseks** punktis a , kui ta on punkti a mingis ümbruses arendatav astmeritta punktis a .

Mingis punktis analüütiline funktsioon on ka regulaarne selles punktis.

Teoreem 31 (Regulaarse funktsiooni analüütilisus). *Punktis a regulaarne funktsioon on analüütiline punktis a , kusjuures tema Taylori rida punktis a koondub suurimas ringis $B(a, R)$, milles funktsioon on regulaarne.*

Tõestus. Olgu f regulaarne punktis a . Olgu $R = \sup\{r: f \text{ on regulaarne ringis } B(a, r)\}$. Siis f on regulaarne ringis $B(a, R)$.

Olgu $z \in B(a, R)$ ning olgu $|z - a| < r < R$. Siis $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Arendame ritta $\frac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n.$$

$$\text{Seega } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta.$$

Rida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ koondub ühtlaselt ringjoonel $S(a, r)$, sest $\left| \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M|z-a|^n}{r^{n+1}}$, kus $M = \max_{\zeta \in S(a, r)} |f(\zeta)|$, seega võime rida liikmeti integreerida:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

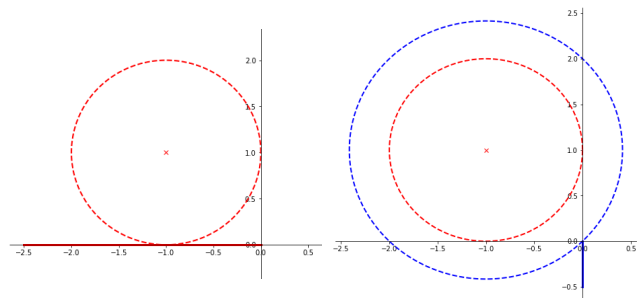
$$\text{Järelikult } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \text{ kus}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Saadud astmerida koondub ringis $B(a, R)$ funktsiooniks f . Teatud juhtudel võib astmerea koonduvusraadius olla suurem, kuid kui f pole regulaarne suuremas ringis, siis astmerea summa selles suuremas ringis ei ole f . Ringi rajajoonele leidub kindlasti punkte, kus f pole regulaarne.

Näide. $f(z) = \ln z$, $a = -1 + i$.

Funktsioonil on hüpe reaaltelje negatiivsel osal, seega suurim ring, kus f on regulaarne, on $B(-1+i, 1)$. Logaritmfunksiooni haru, millel on hüpe mööda imaginaartelje negatiivset osa, ühtib punkti $-1+i$ ümbruses funktsiooniga f , seega ka tema Taylori rida selles punktis on sama. See funktsioon on regulaarne ringis $B(-1+i, \sqrt{2})$, seega ka Taylori rea koonduvusraadius on $\sqrt{2}$. Kuna $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$, siis koonduvusraadius ei saa olla suurem.



5.6 Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem

n astme polünoom on üheselt määratud oma väärtustega $n+1$ punktis. Kas analüütiline funktsioon, kui “loenduva astmega polünoom”, on üheselt määratud oma väärtustega loendavas arvus punktides?

Näide. $f(z) = \sin z$: $f(z) = 0$, kui $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teoreem 32 (Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem). Olgu f ja g analüütilised piirkonnas D ning võrdsed hulgal $E \subset D$, millel on vähemalt üks kuhjumispunkt piirkonnas D . Siis f ja g on võrdsed hulgas D .

Tõestus. Üldisust kitsendamata eeldame, et $g \equiv 0$. Olgu $a \in D$ hulga E kuhjumispunkt. Olgu $B(a, R)$ suurim ring keskpunktiga a , kus f on regulaarne. Näitame, et $f \equiv 0$ ringis $B(a, R)$.

Olgu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Valime $(z_k) \subset E \setminus \{a\}$ nii, et $z_k \rightarrow a$. Siis $f(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_k-a)^n = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Läheme piirile $k \rightarrow \infty$, saame $c_0 = 0$. Seega $f(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_k-a)^n = (z_k-a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_k-a)^{n-1} = 0$.

Jagame (z_k-a) -ga ja läheme piirile $k \rightarrow \infty$, saame $c_1 = 0$.

Kui $c_n = 0, n = 0, \dots, m$, siis $f(z_k) = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n(z_k-a)^n = (z_k-a)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_k-a)^{n-m-1} = 0$.

Jagame $(z_k-a)^{m+1}$ -ga ja läheme piirile $k \rightarrow \infty$, saame $c_{m+1} = 0$.

Seega $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ehk $f \equiv 0$ ringis $B(a, R)$.

Olgu nüüd $b \in D$ suvaline. Näitame, et $f(b) = 0$. Olgu $B(a, R)$ suurim ring keskpunktiga a , kus f on regulaarne. Kui $b \in B(a, R)$, siis $f(b) = 0$.

Kui $b \notin B(a, R)$, siis ühendame a ja b piirkonda D kuuluva pideva lihtsa joonega γ . Olgu $a_1 \in \gamma$ selline, et $|a_1 - a| = R$. Olgu $E_1 = E \cup B(a, R)$. Siis $f(z) = 0$, kui $z \in E_1$ ja a_1 on E_1 kuhjumispunkt.

Olgu $B(a_1, R_1)$ suurim ring keskpunktiga a_1 , kus f on regulaarne. Kui $b \in B(a_1, R_1)$, siis $f(b) = 0$.

Kui $b \notin B(a_1, R_1)$, siis valime $a_2 \in \gamma$ selline, et $|a_2 - a_1| = R_1$ (kui neid on mitu, siis valime mööda joont γ kaugeima). Olgu $E_2 = E_1 \cup B(a_1, R_1)$. Siis $f(z) = 0$, kui $z \in E_2$ ja a_2 on E_2 kuhjumispunkt.

Olgu $B(a_2, R_2)$ suurim ring keskpunktiga a_2 , kus f on regulaarne. Kui $b \in B(a_2, R_2)$, siis $f(b) = 0$. Jne.

Lõpliku arvu sammude järel jõuame olukorrani kus $b \in B(a_n, R_n)$, seega $f(b) = 0$. (Kui $\forall n \in \mathbb{N} \quad b \notin B(a_n, R_n)$, siis $\exists a_* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Kuna $a_* \in \gamma \subset D$, siis $\exists r > 0: B(a_*, r) \subset D$. Siis $\exists n \in \mathbb{N}: |a_n - a_*| < r/2$, seega $R_n > r/2$ ja a_{n+1} peaks asuma joont γ mööda kaugemal kui a_* , vastuolu.)

Järeldus 9. Funktsioonid $e^z, \sin z, \cos z, \tan z, \dots$ on ühesed sellised analüütilised funktsioonid, mis reaalteljel langevad kokku vastavate reaalmuutujate funktsioonidega. Funktsioonid $\ln z$ ja $\sqrt[n]{z}$ peaosa on samuti ühesed sellised analüütilised funktsioonid, mis reaaltelje positiivsel osal langevad kokku vastavate reaalmuutujate funktsioonidega ning mille väljalõige paikneb piki reaaltelje negatiivset osa.

Järeldus 10. Komplekstasandil kehtivad kõik reaalmuutuja analüüsist tuttavad analüütilised valemid.

NB! Ettevaatust multifunktsioonidega ja nende harudega! Tavaliselt on võimalik leida mingi piirkond, kus valemid konkreetse haru jaoks kehtivad. Multifunktsioonide puhul tihti kehtib võrduse asemel võrdus konkreetsetele punktidele vastavate väärtuste hulkade mingite alamhulkade vahel.

Näiteks $\ln(z_1 z_2) \neq \ln z_1 + \ln z_2$, kuid seos kehtib, kui $\operatorname{Re} z_1, z_2 > 0$.

NB! Ei kehti valemid, mis sisaldavad absoluutväärtust. Samuti ei kehti võrratused.

5.7 Analüütilise funktsiooni nullkohad

Definitsioon. Arvu z_0 nim. funktsiooni f nullkohaks, kui $f(z_0) = 0$. Arvu z_0 nimetatakse funktsiooni f n järku nullkohaks, kui $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ ja $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Lause 9. Analüütilisel funktsioonil f on punktis z_0 n järku nullkoht parajasti siis, kui $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kus φ on analüütiline punktis z_0 ja $\varphi(z_0) \neq 0$.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu funktsioonil f n järku nullkoht punktis z_0 . Siis

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

$$\text{kus } \varphi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-n} \text{ ja } \varphi(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Piisavus. Olgu $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kus $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ ja $c_0 = \varphi(z_0) \neq 0$. Siis

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+n}.$$

Teoreem 33 (Analüütilise funktsiooni nullkohtade arv kinnises piirkonnas). *Mittekonstantsel analüütilisel funktsioonil on kinnises tõkestatud piirkonnas ülimalt lõplik arv nullkohti.*

Tõestus. Kui funktsioonil oleks lõpmatu arv nullkohti kinnises tõkestatud piirkonnas, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal leiduks neil kuhjumispunkt funktsiooni analüütilisuse piirkonnas (mis on alati lahtine). Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreemi põhjal on siis funktsioon konstantselt null.

Järeldus 11 (Analüütilise funktsiooni nullkohtade arv piirkonnas). *Piirkonnas D mittekonstantsel analüütilisel funktsioonil on ülimalt loenduv arv nullkohti selles piirkonnas.*

Tõestus. Olgu $D_n = \{z \in D : |z| \leq n, d(z, \Gamma) \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis D_n on kinnine tõkestatud piirkond iga $n \in \mathbb{N}$ korral, seega funktsioonil f on ülimalt lõplik arv nullkohti selles piirkonnas. Olgu N_n funktsiooni nullkohtade hulk kinnises piirkonnas D_n . Siis $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ on funktsiooni f nullkohtade hulk piirkonnas D , mis on ülimalt loenduv.

Järeldus 12 (Analüütilise funktsiooni nullkohtade isoleeritus). *Mittekonstantse analüütilise funktsiooni nullkohad on isoleeritud, s.t. iga nullkoha jaoks leidub selle nullkoha ümbrus, mis ei sisalda teisi selle funktsiooni nullkohti.*

Tõestus. Olgu z_0 mingi funktsiooni f nullkoht. Valime kinnise ringi $\overline{B}(z_0, r)$ funktsiooni analüütilisuse piirkonna sees. Siis funktsioonil on selles ringis ülimalt lõplik arv nullkohti $z_0, z_1, \dots, z_n$.

Kui $n = 0$, siis $B(z_0, r)$ ei sisalda teisi nullkohti. Kui $n > 0$, siis valime $r_1 = \min_{k=1, \dots, n} |z_k - z_0|$. Siis $B(z_0, r_1)$ ei sisalda teisi nullkohti.

Peatükk 6

Analüütilise funktsiooni iseärased punktid. Laurent'i rida

6.1 Laurent'i rida

Mingi funktsiooni Taylori rida koondub selleks funktsiooniks suurimas ringis, kus funktsioon on regulaarne. Vahel on vaja funktsiooni arendada ritta, mis koonduks kusagil kaugemal, või siis sellise punkti ümbruses, kus funktsioon pole regulaarne.

Definitsioon. Kahepoolsest lõpmatu rea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$ summaks nimetatakse ridade $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ja $\sum_{n=-\infty}^{-1} u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{-m}$ summat, eeldusel, et mõlemad summad koonduvad. Sel juhul kahepoolsest lõpmatut rida nim. koonduvaks, vastasel juhul hajuvaks.

Teoreem 34 (Funktsiooni Laurent'i rida). Olgu funktsioon f regulaarne rõngas $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ (siin võib olla $r = 0$ või $R = \infty$). Siis

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad z \in D, \quad \text{kus} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad r < \rho < R.$$

Tõestus. Olgu $z \in D$. Valime r_1 ja R_1 nii, et $r < r_1 < |z - a| < R_1 < R$.

Olgu $D_1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta - a| < R_1\}$. Cauchy valem piirkonnas D_1 :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, R_1)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r_1)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

Kui $\zeta \in S(a, R_1)$, siis $\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$, seega

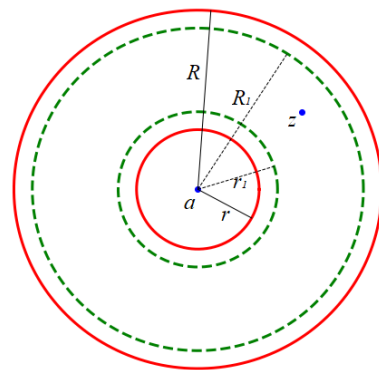
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

see rida koondub ühtlaselt joonel $S(a, R_1)$ ka pärast korrutamist avaldisega $f(\zeta)$.

Kui $\zeta \in S(a, r_1)$, siis $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1$, seega

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}},$$

see rida koondub ühtlaselt joonel $S(a, r_1)$ ka pärast korrutamist avaldisega $f(\zeta)$.



Asendades need esialgsesse integraali saame

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, R_1)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r_1)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, R_1)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r_1)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, R_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, r_1)} f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta \end{aligned}$$

Paneme tähele, et integraalid võib asendada integraaliga üle $S(a, \rho)$, kus $r < \rho < R$ on suvaline. Seega

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{kus } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

Märkus. Kui f on ka pidev kuni rajani rõngas D , siis võib võtta $r \leq \rho \leq R$.

Järeldus 13 (Cauchy võrratus). Olgu f regulaarne rõngas D . Olgu $M_\rho = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$, $r < \rho < R$. Siis funktsiooni f Laurent'i rea rõngas D kordajate jaoks kehtib võrratus $|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ iga $r < \rho < R$ korral. Kui f on ka pidev kuni rajani rõngas D , siis võime võtta $r \leq \rho \leq R$.

Tõestus. $|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_\rho}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M_\rho}{\rho^n}.$

Definitsioon. Rida $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in D$, kus $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a, \rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$, $r < \rho < R$, nim. funktsiooni f Laurent'i reaks rõngas D .

Definitsioon. Laurent'i rea osa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ nim. Laurent'i rea korrapäraseks e. regulaarseks osaks, osa $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ nim. Laurent'i rea peaosaks.

Definitsioon. Laurent'i rea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ koonduvusrõngaks nim. suurimat rõngast $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$, kus rida koondub.

Laurent'i rea koonduvuspiirkond on alati rõngas, sest

- korrapärane osa on astmerida, selle koonduvuspiirkond on ring;
- peaosas võime teha muutujavahetuse $\zeta = \frac{1}{z-a}$, siis

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \zeta^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \zeta^m,$$

see on samuti astmerida, mille koonduvuspiirkond on ring $|\zeta| < \frac{1}{r}$ ehk $|z-a| > r$.

Funktsiooni f Laurent'i rida koondub funktsiooniks f suurimas rõngas ümber punkti a funktsiooni iseärasuste vahel, kus funktsioon on regulaarne.

Teoreem 35 (Laurent'i rea regulaarsus). Laurenti rida koondub ühtlaselt ja absoluutselt igas kinnises hulgas oma koonduvusrõnga sees. Laurent'i rida on regulaarne oma koonduvusrõngas ning teda võib selles rõngas liikmeti diferentseerida ja integreerida.

Tõestus. Olgu Laurent'i rea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ koonduvusrõngas $D = \{z \in \mathbb{C}: r < |z-a| < R\}$ ning olgu $D_1 \subset D$ mingi kinnine hulk. Siis leiduvad r_1 ja R_1 nii, et $r < r_1 < R_1 < R$ ja $D_1 \subset \{z \in \mathbb{C}: r_1 \leq |z-a| \leq R_1\}$.

Rea korrapärane osa koondub ühtlaselt ringis $|z-a| \leq R_1$ ja rea peaosa $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\zeta^m$ koondub ühtlaselt ringis $|\zeta| \leq \frac{1}{r_1}$ ehk $|z-a| \geq r_1$.

Ühtlaselt koonduvat funktsionaalrida võib liikmeti diferentseerida ja integreerida.

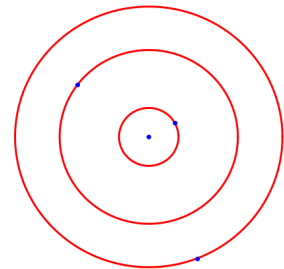
Teoreem 36 (Laurent'i rea ühesus). Iga rida kujul $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, mis koondub mingis rõngas, on oma summa Laurent'i rida selles rõngas.

Tõestus. Koondugu rida $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ mingis rõngas D ning olgu tema summa $f(z)$. Näitame, et siis $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a,\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$, kus $S(a,\rho)$ on mingi ringjoon rõnga D sees.

Kuna $\int_{S(a,\rho)} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$ ning ühtlaselt koonduvat rida võib liikmeti integreerida, siis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a,\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(a,\rho)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(\zeta-a)^{m-n-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{S(a,\rho)} c_m(\zeta-a)^{m-n-1} d\zeta = c_n. \end{aligned}$$

Märkus. Ühe punkti ümber võib olla mitu rõngast, kus saab funktsiooni arendada Laurent'i reaks. Kui meil rõngas on fikseeritud, siis rida on ühene.



6.2 Analüütilise funktsiooni iseärased punktid

Definitsioon. Punkti $a \in \mathbb{C}$ nimetatakse funktsiooni f **iseäraseks punktiks**, kui f pole regulaarne punktis a . Funktsiooni f iseärast punkti a nimetatakse **isoleeritud iseäraseks punktiks**, kui leidub punkti a ümbrus, kus pole teisi iseäraseid punkte peale punkti a .

Olgu punkt a funktsiooni f isoleeritud iseärase punkt.

Definitsioon. Punkti a nimetatakse funktsiooni f

- **kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks**, kui leidub lõplik $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$,
- **pooluseks**, kui $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$,
- **oluliselt iseäraseks punktiks**, kui ei leidu piirväärtust $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Näide. Punkt $z = 0$ on funktsiooni $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ kõrvaldatav iseärase punkt, funktsiooni $z \mapsto \frac{1}{z}$ poolus ja funktsiooni $z \mapsto e^{1/z}$ oluliselt iseärase punkt.

Näide. Punkt $z = 0$ on funktsioonide $\sqrt{z}$, $\ln z$, $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ iseärane punkt, kuid mitte isoleeritud (hargnemispunkt või pooluste kuhjumispunkt).

6.2.1 Funktsiooni isoleeritud iseärase punkti tüübi ja funktsiooni Laurent'i rea selle punkti ümbruses peaosa vaheline seos

Lause 10 (Kõrvaldatav iseärasus). *Olgu a funktsiooni f isoleeritud iseärane punkt ning olgu f tõkestatud punkti a mingis ümbruses. Siis funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav iseärasus ning funktsiooni f Laurent'i rida selle punkti ümbruses ei sisalda peaosa.*

Tõestus. Arendame funktsiooni f Laurent'i ritta punkti a ümbruses: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, kui $z \in B(a, r) \setminus \{a\}$.

Olgu $|f(z)| \leq M$ selles ümbruses. Siis Cauchy võrratuse põhjal saame, et $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n}$, kui $0 < \rho < r$. Kui $n < 0$, siis lastes $\rho \rightarrow 0$ saame, et $c_n = 0$. Seega funktsiooni f Laurent'i reas peaosa puudub.

Järelikult $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. See on astmerida, mis on regulaarne oma koonduvuspiirkonnas.

Seega $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ ehk tegu on kõrvaldatava iseärasusega.

Järeldus 14. *Kui funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav iseärasus, siis defineerides $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ saame uue funktsiooni, mis on regulaarne punktis a .*

Tõestus. Kui leidub lõplik piirväärtus $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, siis f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses. Seega tema Laurent'i rida punkti a ümbruses ei sisalda peaosa ehk $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. See on astmerida, mis on regulaarne oma koonduvuspiirkonnas.

Järeldus 15. *Funktsiooni f isoleeritud iseärane punkt a on kõrvaldatav iseärane punkt parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa puudub.*

Märkus. Tihti ei tehta vahet funktsioonil, millel on kõrvaldatav iseärasus mingis punktis ja funktsioonil, mis on saadud pärast selle kõrvaldatava iseärasuse kõrvaldamist. Nii öeldakse näiteks, et funktsioon $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ on regulaarne punktis 0.

Olgu funktsioonil f poolus punktis a , s.t. $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Siis funktsioonil $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ on kõrvaldatav iseärasus punktis a ning $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$. Defineerides $g(a) = 0$ saame punktis a regulaarse funktsiooni, millel on nullkoht selles punktis.

Lause 11. *Funktsioonil f isoleeritud iseärane punkt a on poolus parajasti siis, kui funktsioonil $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ on nullkoht punktis a .*

Definitsioon. Funktsiooni f pooluse järguks punktis a nimetatakse funktsiooni $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ nullkoha kordsust punktis a .

Lause 12. *Funktsiooni f isoleeritud iseärane punkt a on poolus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa sisaldab lõpliku positiivse arvu nullist erinevaid liikmeid, kusjuures pooluse järk on võrdne vähima astendajaga nullist erineva liikme astendaja vastandarvuga, s.t. funktsioonil f on punktis a m järku poolus parajasti siis, kui*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad z \in B(a, r) \setminus \{a\}, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu funktsioonil f m järku poolus punktis a . Siis $g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \varphi(z)$, kus φ on analüütiline punktis a ja $\varphi(a) \neq 0$. Seega funktsioon $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ on analüütiline punktis a ning $\psi(a) \neq 0$, järelikult

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \psi(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{m+k} (z-a)^k, \text{ kus } b_0 \neq 0.$$

Piisavus. Olgu $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in B(a, r) \setminus \{a\}$, $c_{-m} \neq 0$. Siis

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^{n+m} = \frac{1}{(z-a)^m} \psi(z),$$

kus ψ on analüütiline punktis a ja $\psi(a) \neq 0$. Seega funktsioon $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ on analüütiline punktis a ja $\varphi(a) \neq 0$ ning $g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \varphi(z)$, järelikult funktsioonil f on m järku poolus punktis a .

Järeldus 16. Funktsioonil f on punktis a m järku poolus parajasti siis, kui $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$ punkti a mingis ümbruses, kus ψ on analüütiline punktis a ning $\psi(a) \neq 0$.

Teoreem 37 (Iseärase punkti tüübi ja Laurent'i rea peaosa vaheline seos). Olgu funktsioonil f punktis $a \in \mathbb{C}$ isoleeritud iseärasus. Siis

- i) funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav iseärasus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa puudub;
- ii) funktsioonil f on punktis a poolus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa sisaldab lõpliku positiivse arvu nullist erinevaid liikmeid, kusjuures pooluse järk on võrdne vähima astendajaga nullist erineva liikme astendaja vastand arvuga;
- iii) funktsioonil f on punktis a oluline iseärasus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa sisaldab lõpmatu arvu nullist erinevaid liikmeid.

6.2.2 Funktsiooni käitumine olulise iseärasuse ümbruses

Teoreem 38 (Casorati-Weierstrass (Sohhotski)). Olgu funktsioonil f punktis $a \in \mathbb{C}$ oluline iseärasus. Siis iga $A \in \overline{\mathbb{C}}$ korral leidub selline jada (z_n) , et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Tõestus. 1) Olgu $A = \infty$. Kuna f ei ole tõkestatud üheski ringis $B(a, \frac{1}{n})$, siis $\forall n \in \mathbb{N} \exists z_n \in B(a, \frac{1}{n}) : |f(z_n)| > n$. Siis $z_n \rightarrow a$ ja $f(z_n) \rightarrow \infty$.

2) Olgu $A \in \mathbb{C}$. Kui $\forall n \in \mathbb{N} \exists z_n \in B(a, \frac{1}{n}) : f(z_n) = A$, siis väide kehtib.

Kui $\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in B(a, \frac{1}{N}) \setminus \{a\} f(z) \neq A$, siis defineerime $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$. Nüüd g on regulaarne piirkonnas $B(a, \frac{1}{N}) \setminus \{a\}$ ning tal on punktis a oluline iseärasus.

Osa 1) põhjal leidub jada (z_n) nii, et $z_n \rightarrow a$ ja $g(z_n) \rightarrow \infty$. Siis $f(z_n) = A + \frac{1}{g(z_n)} \rightarrow A$.

Teoreem 39 (Picardi Suur Teoreem). Olgu funktsioonil f punktis $a \in \overline{\mathbb{C}}$ oluline iseärasus. Siis leidub selline $B \in \mathbb{C}$, et iga $A \in \mathbb{C} \setminus \{B\}$ korral leidub selline jada (z_n) , et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ja $f(z_n) = A$.

Näide. $e^{1/z}$, $a = 0$. Siin $B = 0$. Iga $A \neq 0$ korral võime lahendada võrrandi $e^{1/z} = A$:

$$\frac{1}{z} = \text{Ln } A \Leftrightarrow z = \frac{1}{\text{Ln } A} = \frac{1}{\ln |A| + i \arg A + 2n\pi i}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Olgu $z_n = \frac{1}{\ln |A| + i \arg A + 2n\pi i}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis $z_n \rightarrow 0$ ja $f(z_n) = A$.

6.2.3 Funktsiooni käitumine lõpmatuspunktis

Definitsioon. Kui f on regulaarne piirkonnas $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, R)}$, siis öeldakse, et funktsioonil f on lõpmatuspunktis isoleeritud iseärasus. Iseärasuse tüüp defineeritakse samamoodi kui lõpliku punkti korral: lõpmatuspunkti nimetatakse funktsiooni f

- kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks, kui leidub lõplik $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$,
- pooluseks, kui $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$,
- oluliselt iseäraseks punktiks, kui ei leidu piirväärtust $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Teeme muutujavahetuse $z = \frac{1}{\zeta}$ ja tähistame $F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Siis $z \rightarrow \infty \Leftrightarrow \zeta \rightarrow 0$ ning kui f on regulaarne lõpmatuse ümbruses, siis F on regulaarne 0 ümbruses (välja arvatud nullpunkt ise).

Funktsiooni f iseärasuse tüüp lõpmatuspunktis on sama mis funktsiooni F iseärasuse tüüp nullpunktis, sest $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} F(\zeta)$.

Olgu funktsiooni f Laurent'i rida lõpmatuse ümbruses $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Siis funktsiooni F Laurent'i rida nullpunkti ümbruses on $F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \zeta^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$.

Siin peaosas on $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_{-n} \zeta^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n}$ ja korrapärane osa on $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} \zeta^n = \sum_{n=-\infty}^0 c_n \zeta^{-n}$.

Seega ka funktsiooni f jaoks lõpmatuspunkti ümbruses defineeritakse Laurent'i rea peaosas kui $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ ning korrapärane osa: $\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$.

Iseärase punkti tüübi ja Laurent'i rea peaosas vahel kehtib samasugune seos nagu lõpliku punkti puhul: kõrvaldatava iseärasuse korral peaosas puudub, pooluse puhul on peaosas lõplik arv nullist erinevaid liikmeid ning olulise iseärasuse korral lõpmatu arv nullist erinevaid liikmeid.

Kui funktsioonil f on lõpmatuspunktis kõrvaldatav iseärasus, siis defineerime $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ning ütleme, et f on regulaarne lõpmatuspunktis.

Teoreem 40 (Liouville). Kui funktsioon on regulaarne täielikul komplekstasandil, siis ta on konstantne.

Tõestus. Kuna f on regulaarne lõpmatuspunktis, siis leiduvad $R > 0$ ja $M_1 > 0$ nii, et $|f(z)| \leq M_1$, kui $|z| > R$.

Kuna f on pidev kinnises tõkestatud piirkonnas $\overline{B(0, R)}$, siis leidub $M_2 > 0$ nii, et $|f(z)| \leq M_2$, kui $|z| \leq R$.

Seega funktsioon on regulaarne ja tõkestatud kogu komplekstasandil, järelikult Liouville'i teoreemi kohaselt ta on konstantne.

6.3 Lihtsamad analüütiliste funktsioonide klassid

Definitsioon. Kogu komplekstasandil regulaarset funktsiooni nimetatakse täisfunktsiooniks (entire function).

Kui f on täisfunktsioon, siis on 3 võimalust:

1. kui funktsioon on regulaarne lõpmatuspunktis, siis ta on konstantne;
2. kui funktsioonil on lõpmatuspunktis poolus, siis ta on polünoom;

3. kui lõpmatuspunktis on oluline iseärasus, siis nimetatakse funktsiooni **täistranssendentseks funktsiooniks** (näiteks e^z , $\sin z$, $\cos z$).

Teoreem 41 (Picardi Väike Teoreem). *Kui f on mittekonstantne täisfunktsioon, siis kas $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ või $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ mingi $a \in \mathbb{C}$ korral.*

Tõestus. Meil on 2 võimalust:

- 1) kui f on polünoom, siis iga $w \in \mathbb{C}$ korral leidub z : $f(z) = w$ (algebra põhiteoreem);
- 2) kui lõpmatuspunktis on oluline iseärasus, siis väide järelneb Picardi suurest teoreemist.

Definitsioon. Funktsiooni, mille kõik komplekstasandil asuvad iseärased punktid on poolused, nimetatakse **meromorfseks**.

Näide. Ratsionaalfunktsioonid; $\tan z$, $\tanh z$; üldisemalt funktsioonid kujul $\frac{f}{g}$, kus f ja g on täisfunktsioonid.

Lause 13 (Meromorfse funktsiooni pooluste arv). *Meromorfse funktsioonil võib tõkestatud piirkonnas olla ainult lõplik arv pooluseid; kogu komplekstasandil võib pooluste arv olla loenduv.*

Tõestus. Kui tõkestatud piirkonnas oleks lõpmatu arv pooluseid, siis oleks neil vähemalt üks kuhjumispunkt komplekstasandil. See kuhjumispunkt on iseärane punkt, mis pole isoleeritud.

Kui igas ringis $B(0, n)$ on ainult lõplik arv pooluseid, siis kogu komplekstasandil saab neid olla maksimaalselt loenduv arv (lõplike hulkade loenduv ühend).

Teoreem 42. *Kui funktsiooni f kõik iseärased punktid täielikul komplekstasandil on poolused, siis f on ratsionaalfunktsioon.*

Tõestus. Kui pooluseid oleks lõpmatu arv, siis neil oleks (vähemalt lõpmatu) kuhjumispunkt. Seega on pooluseid lõplik arv. Olgu funktsiooni poolused (v.a. lõpmatuspunkt) $a_1, \dots, a_n$. Olgu nende pooluste ümbruses funktsiooni f Laurent'i ridade peaosad $g_j(z) = \sum_{k=-m_j}^{-1} c_{kj}(z - a_j)^k$, $j = 1, \dots, n$, kus $m_1, \dots, m_n$ on vastavalt nende pooluste järgud. Siis iga $j = 1, \dots, n$ korral g_j on regulaarne täielikul komplekstasandil, välja arvatud punkt a_j .

Olgu lõpmatuse ümbruses funktsiooni f Laurent'i rea peosa $g_\infty(z) = \sum_{k=1}^m c_j z^k$. Siis funktsioonil

$h(z) = f(z) - g_\infty(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z)$ on kõrvaldatavad iseärasused punktides $a_1, \dots, a_n$ ning ∞ , mujal on h regulaarne. Kõrvaldades iseärasused saame regulaarse funktsiooni täielikul komplekstasandil. Seega $h(z) \equiv C$ ning $f(z) = C + g_\infty(z) + \sum_{j=1}^n g_j(z)$.

Peatükk 7

Resiidide teooria

7.1 Resiidi mõiste. Resiidide teooria põhiteoreem

Kui funktsioon f on regulaarne ühelisidusas piirkonnas D , siis $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga sellesse piirkonda kuuluva kinnise joone γ korral (Cauchy teoreem). Kui funktsioonil f on iseäraseid punkte hulgas D , siis see üldiselt ei kehti. Kas ka sellisel juhul saab integraale üle kinnise kõvera kuidagi lihtsamalt arvutada?

Definitsioon. Funktsiooni f **resiidiks** funktsiooni isoleeritud iseärases punktis $a \in \overline{\mathbb{C}}$ nim. suurust $\text{res}[f(z); a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$, kus γ on punkti a sellise ümbruse raja, mis ei sisalda teisi funktsiooni f iseäraseid punkte.

Olgu f regulaarne hulgas $\overline{B}(a, r) \setminus \{a\}$ ning olgu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ punkti a ümbruses. Siis

$$\int_{S(a,r)} f(z) dz = \int_{S(a,r)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Kui $a \in \mathbb{C}$ on funktsiooni f isoleeritud iseärane punkt, siis $\text{res}[f(z); a] = c_{-1}$. Seega kui $\text{res}[f(z); a] \neq 0$, siis funktsioonil on punktis a kas poolus või oluline iseärasus.

Kui f on regulaarne mingis lõpmatus ümbruses, siis piisavalt suure R korral

$$\int_{S(0,R)} f(z) dz = \int_{S(0,R)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n dz = 2\pi i c_{-1},$$

aga lõpmatuspunkti raja korral tuleks integraal võtta vastassuunas. Seega $\text{res}[f(z); \infty] = -c_{-1}$. Kui $\text{res}[f(z); \infty] \neq 0$, siis funktsioonil f võib olla mistahes isoleeritud iseärane punkt, samuti võib funktsioon olla regulaarne lõpmatuses.

Teoreem 43 (Resiidide teooria põhiteoreem). Olgu funktsioon f regulaarne tõkestatud piirkonnas D , välja arvatud lõplik arv punkte $a_1, \dots, a_n$, ning pidev kuni piirkonna tükiti sileda rajani Γ . Siis

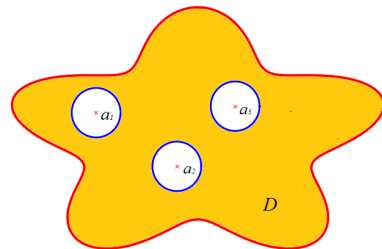
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z); a_k].$$

Tõestus. Lõikame piirkonnast välja iseärase punktide väikesed ümbrused $B(a_k, r_k)$, mis üksteisega ei lõiku. Ülejäänud piirkonnas kasutame Cauchy teoreemi:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{S(a_k, r_k)} f(z) dz.$$

Resiidi definitsiooni kasutades saame

$$\int_{S(a_k, r_k)} f(z) dz = 2\pi i \text{res}[f(z); a_k].$$



Järeldus 17. Olgu funktsioon f regulaarne kogu komplekstasandil, välja arvatud lõplik arv punkte $a_1, \dots, a_n$. Siis

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); a_k] + \operatorname{res}[f(z); \infty] = 0.$$

Tõestus. Valime $R > 0$ nii, et $|a_k| < R$, $k = 1, \dots, n$. Siis $\int_{S(0,R)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); a_k]$.

Teiselt poolt $\int_{S(0,R)} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{res}[f(z); \infty]$. Seega $\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); a_k] + \operatorname{res}[f(z); \infty] = 0$.

7.2 Resiidide arvutamine

7.2.1 Resiidi arvutamine 1. järku pooluse korral

Olgu funktsioonil f punktis a esimest järku poolus. Siis funktsiooni Laurent'i rida punkti a ümbruses on kujul $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z)$, kus φ on regulaarne punkti a ümbruses. Seega $c_{-1} = (z-a)f(z) + (z-a)\varphi(z)$. Minnes siin piirile $z \rightarrow a$, saame

$$c_{-1} = \boxed{\operatorname{res}[f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)}.$$

Kui f on kujul $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, kus funktsioonil h on 1. järku nullkoht punktis a ja $g(a) \neq 0$, siis $\operatorname{res}\left[\frac{g(z)}{h(z)}; a\right] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$, seega

$$\boxed{\operatorname{res}\left[\frac{g(z)}{h(z)}; a\right] = \frac{g(a)}{h'(a)}}.$$

7.2.2 Resiidi arvutamine kõrgemat järku pooluse korral

Olgu funktsioonil f punktis a m järku poolus ($m > 1$). Siis funktsiooni Laurent'i rida punkti a ümbruses on kujul

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z),$$

kus φ on regulaarne punkti a ümbruses. Seega

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \varphi(z).$$

Võtame $m-1$ korda tuletist:

$$((z-a)^m f(z))^{(m-1)} = c_{-1}(m-1)! + ((z-a)^m \varphi(z))^{(m-1)}.$$

Minnes siin piirile $z \rightarrow a$, saame

$$c_{-1} = \boxed{\operatorname{res}[f(z); a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} ((z-a)^m f(z))^{(m-1)}}.$$

7.2.3 Resiidi arvutamine olulise iseärasuse korral

Olgu funktsioonil f punktis a oluline iseärasus. Lihtsat valemit pole, arendada funktsioon Laurent'i ritta punkti a ümbruses või kasutada resiidi teooria põhiteoreemi järeldust.

7.2.4 Resiidi arvutamine lõpmatuspunktis

Olgu f regulaarne lõpmatuses. Siis funktsiooni Laurent'i rida lõpmatuspunkti ümbruses on kujul

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n.$$

Seega

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \quad \text{ja} \quad c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - c_0).$$

Kuna $\text{res}[f(z); \infty] = -c_{-1}$, siis

$$\boxed{\text{res}[f(z); \infty] = - \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(f(z) - \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f(\zeta) \right)}.$$

7.3 Resiidide kasutamine integraalide arvutamisel

7.3.1 Resiidide teooria põhiteoreemi otsene rakendamine

Olgu funktsioon f regulaarne kinnise tükiti sileda kõveraga Γ piiratud tõkestatud piirkonnas, välja arvatud lõplik arv isoleeritud iseäraseid punkte $a_1, \dots, a_n$ (ükski iseärane punkt ei asu kõveral Γ). Siis

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z); a_k].$$

Kui väljaspool kõverat Γ asub ainult lõplik arv isoleeritud iseäraseid punkte $b_1, \dots, b_m$, siis

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \left(\sum_{k=1}^m \text{res}[f(z); b_k] + \text{res}[f(z); \infty] \right).$$

Näide. $\int_{S(0, \frac{3}{2})} \frac{z dz}{(z-2)(z^6-1)} = -2\pi i (\text{res}[f(z); 2] + \text{res}[f(z); \infty]) = -2\pi i \left(\frac{2}{63} + 0 \right) = -\frac{4\pi i}{63}.$

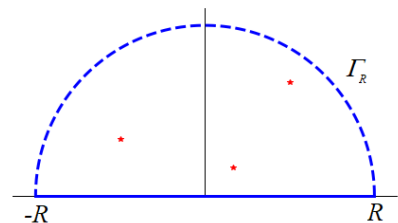
7.3.2 Integraalid üle reaaltelje

Olgu F integreeruv üle reaaltelje. Siis $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(x) dx$. Olgu F regulaarne ülemisel pooltasandil, välja arvatud lõplik arv iseäraseid punkte $a_1, \dots, a_n$ ning pidev kuni reaalteljeni. Olgu $R > 0$ selline, et $|a_k| < R$, $k = 1, \dots, n$. Olgu Γ_R ringjoone $|z| = R$ ülemisel pooltasandil asuv osa. Siis

$$\int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[F(z); a_k].$$

Seega

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[F(z); a_k] - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz.$$



Erijuht: integraal ratsionaalfunktsioonist. Olgu $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kus P ja Q on polünoomid. Olgu $Q(x) \neq 0$, kui $x \in \mathbb{R}$, ning $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ (need tingimused on tarvilikud ja piisavad selleks, et $\frac{P(x)}{Q(x)}$ oleks integreeruv üle reaaltelje). Siis

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \frac{1}{|z|^2} \left| \frac{z^2 P(z)}{Q(z)} \right| |dz| \leq \frac{1}{R^2} M \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0, \quad \text{kui } R \rightarrow \infty,$$

sest $\frac{z^2 P(z)}{Q(z)}$ on tõkestatud lõpmatus ümbruses.

Olgu Q nullkohad ülemisel pooltasandil $a_1, \dots, a_n$. Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k \right].$$

Näide. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \pi i (\operatorname{res}[f(z); i] + \operatorname{res}[f(z); 2i]).$

$$\operatorname{res}[f(z); 2i] = \frac{1}{(z^2+1)^2(z+2i)} \Big|_{z=2i} = \frac{1}{36i},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z); i] &= \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)} \right)' \Big|_{z=i} = \left(\frac{-2}{(z+i)^3(z^2+4)} + \frac{-2z}{(z+i)^2(z^2+4)^2} \right) \Big|_{z=i} \\ &= \left(\frac{-2}{-8i \cdot 3} + \frac{-2i}{-4 \cdot 9} \right) \Big|_{z=i} = \frac{1}{12i} - \frac{1}{18i} = \frac{1}{36i}. \end{aligned}$$

Seega $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \pi i \left(\frac{1}{36i} + \frac{1}{36i} \right) = \frac{\pi}{18}.$

Näide. Leida $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + x + 1}.$

Funktsiooni isäärased punktid on $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Esimene idee:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + x + 1} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} \left[\frac{\cos z}{z^2 + z + 1}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right] - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\cos z \, dz}{z^2 + z + 1}.$$

Aga $|\cos z| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right| \geq \frac{|e^{-iz}| - |e^{iz}|}{2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, kui $z = x + iy$, mis läheb suureks, kui y on suur.

Teine idee: $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$ ning $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ ülemises pooltasandis. Siis

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} \, dz}{z^2 + z + 1} \right| \leq \int_{\Gamma_R} \left| \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} \right| |dz| \leq \frac{1}{R^2 - R - 1} \pi R \rightarrow 0, \text{ kui } R \rightarrow \infty.$$

Seega

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + x + 1} = \operatorname{Re} \left(2\pi i \cdot \operatorname{res} \left[\frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right] \right) = \operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{e^{-\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}i} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2} \cos \frac{1}{2}.$$

Näide. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}.$

Juba teame, et $\sin z$ läheb suureks, kui $\operatorname{Im} z$ läheb suureks. Seega proovime kasutada $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.
Probleem: integraali alla jääb $\frac{e^{ix}}{x}$, mis käitub nulli ümbruses nagu $\frac{1}{x}$, seega pole integreeruv. Võime kasutada $\sin x = \operatorname{Im} (e^{ix} - 1)$. Siis

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{ix} - 1) \, dx}{x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(- \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(e^{iz} - 1) \, dz}{z} \right) \quad (\text{ositi: } u = \frac{1}{z}, \, dv = e^{iz} dz) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{iz} e^{iz} \Big|_R^{-R} - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} \, dz}{iz^2} + \ln z \Big|_R^{-R} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (0 + 0 + \pi i) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Integraalide $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{i\lambda x} \, dx$ arvutamisel võib kasutada Jordani lemmat.

Lemma 1 (Jordan). Olgu $R_0 > 0$ ja $a \in \mathbb{R}$ ning $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Im} z > -a\}$. Olgu f analüütiline piirkonnas D . Tähistame $M_R = \sup_{z \in \gamma_R} |f(z)|$, kus $\gamma_R = \{z \in D : |z| = R\}$ ja $R > R_0$. Kui $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$, siis

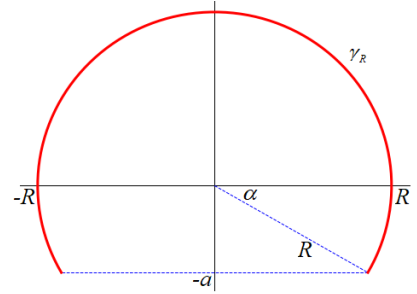
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0 \quad \text{iga } \lambda > 0 \text{ korral.}$$

Tõestus. Olgu $a > 0$. Olgu $\alpha = \arcsin \frac{a}{R}$. Siis x -teljest allpool olevate osade jaoks

$$\left| \int_{\gamma'} e^{i\lambda z} f(z) dz \right| \leq e^{a\lambda} M_R \alpha R \rightarrow 0, \quad \text{kui } R \rightarrow \infty.$$

Olgu $z = Re^{i\varphi}$. Ülemises pooltasandis kasutame seost $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$, kui $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Siis

$$\left| e^{i\lambda z} \right| = e^{-\lambda R \sin \varphi} \leq e^{-\frac{2\lambda R \varphi}{\pi}}.$$



Seega

$$\left| \int_{\gamma} e^{i\lambda z} f(z) dz \right| \leq 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R \varphi}{\pi}} d\varphi = 2M_R R \frac{\pi}{2\lambda R} (1 - e^{-\lambda R}) \rightarrow 0, \quad \text{kui } R \rightarrow \infty.$$

7.3.3 Integraalid perioodilistest funktsioonidest üle perioodi

Vaatleme integraale kujul $\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx$. Teeme muutujavahetuse $z = e^{ix}$. Siis

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dx = \frac{dz}{iz},$$

samuti

$$\cos nx = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin mx = \frac{1}{2i} \left(z^m - \frac{1}{z^m} \right), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Tähistame

$$g(z) = f \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \cdot \frac{1}{iz}.$$

Siis

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx = \int_{S(0,1)} g(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [g(z); a_k],$$

kus $a_1, \dots, a_n$ on funktsiooni g iseärased punktid ühikringis.

Näide. Leiame $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{5 - 4 \cos 2x}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{5 - 4 \cos 2x} &= \int_{S(0,1)} \frac{\frac{1}{4} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right)^2}{\left(5 - 2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right) iz} dz = \int_{S(0,1)} \frac{(z^{12} + 2z^6 + 1) dz}{4(-2z^4 + 5z^2 - 2) iz^5} \stackrel{\zeta = z^2}{=} 2 \int_{S(0,1)} \frac{(\zeta^6 + 2\zeta^3 + 1) d\zeta}{8(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2) i\zeta^3} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(\operatorname{res} \left[\frac{\zeta^6 + 2\zeta^3 + 1}{(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2)\zeta^3}; 2 \right] + \operatorname{res} \left[\frac{\zeta^6 + 2\zeta^3 + 1}{(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2)\zeta^3}; \infty \right] \right). \\ \operatorname{res} \left[\frac{\zeta^6 + 2\zeta^3 + 1}{(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2)\zeta^3}; 2 \right] &= \frac{\zeta^3 + 2 + \frac{1}{\zeta^3}}{-4\zeta + 5} \Big|_{\zeta=2} = \frac{8 + 2 + \frac{1}{8}}{-8 + 5} = -\frac{27}{8}, \\ \operatorname{res} \left[\frac{\zeta^6 + 2\zeta^3 + 1}{(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2)\zeta^3}; \infty \right] &= \operatorname{res} \left[\frac{\zeta^3}{-2\zeta^2 + 5\zeta - 2}; \infty \right]. \end{aligned}$$

Kuna

$$\frac{\zeta^3}{-2\zeta^2 + 5\zeta - 2} = -\frac{\zeta}{2} + \frac{5\zeta^2 - 2\zeta}{2(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2)} = -\frac{\zeta}{2} - \frac{5}{4} + \frac{21\zeta - 21}{4(-2\zeta^2 + 5\zeta - 2)} = -\frac{\zeta}{2} - \frac{5}{4} - \frac{21}{8} \frac{1}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

siis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 3x \, dx}{5 - 4 \cos 2x} = -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{27}{8} + \frac{21}{8} \right) = \frac{3\pi}{8}.$$

7.4 Logaritmiline resiid. Nullkohtade arvu määramine

7.4.1 Logaritmilise resiidi mõiste. Argumendi printsiip

Definitsioon. Funktsiooni f **logaritmiliseks tuletiseks** nimetatakse avaldist $\frac{f'}{f}$.

Kui fikseerida $z \in \mathbb{C}$ ja $f(z) \neq 0$, siis saab leida Ln haru, mis on analüütiline $f(z)$ ümbruses. Siis $(\text{Ln } f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Definitsioon. Funktsiooni f **logaritmiliseks resiidiks** nimetatakse tema logaritmilise tuletise $\frac{f'}{f}$ resiidi.

Funktsiooni $\frac{f'}{f}$ iseärased punktid on funktsiooni f iseärased punktid ja funktsiooni f nullkohad.

Lause 14. a) Kui funktsioonil f on m järku nullkoht punktis a , siis $\text{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = m$.

b) Kui funktsioonil f on m järku poolus punktis a , siis $\text{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = -m$.

Tõestus. a) Olgu $f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$, kus φ on regulaarne punktis a ning $\varphi(a) \neq 0$. Siis

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - a)^{m-1} \varphi(z) + (z - a)^m \varphi'(z)}{(z - a)^m \varphi(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Seega $\text{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = m$.

b) Olgu $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - a)^m}$, kus ψ on regulaarne punktis a ning $\psi(a) \neq 0$. Siis

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m(z - a)^{-m-1} \psi(z) + (z - a)^{-m} \psi'(z)}{(z - a)^{-m} \psi(z)} = -\frac{m}{z - a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Seega $\text{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = -m$.

Teoreem 44 (Funktsiooni nullkohtade ja pooluste arv). Olgu funktsioon f regulaarne tõkestatud piirkonnas D , välja arvatud lõplik arv pooluseid, ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Eeldame, et funktsioonil f pole nullkohti rajajoonel Γ . Siis $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$, kus N on funktsiooni f nullkohtade arv ja P on pooluste arv piirkonnas D , loetud koos kordsustega.

Tõestus. Olgu f nullkohad piirkonnas D $a_1, \dots, a_p$ kordsustega $n_1, \dots, n_p$ ning olgu f poolused piirkonnas D $b_1, \dots, b_q$ kordsustega $m_1, \dots, m_q$. Siis resiidide teooria põhiteoreemist saame

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^p \text{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a_k \right] + \sum_{k=1}^q \text{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; b_k \right] = \sum_{k=1}^p n_k - \sum_{k=1}^q m_k = N - P.$$

Olgu funktsioon f pidev joonel Γ ning eeldame, et $f(z) \neq 0$ joonel Γ .

Definitsioon. Funktsiooni f **argumendi muuduks** üle (kinnise) joone Γ nimetatakse funktsiooni argumendi $\text{Arg } f(z)$ väärtuse muutu joone Γ täielikul läbimisel positiivses suunas, kusjuures kasutatakse $\text{Arg } f(z)$ sellist haru, mis jääb joone Γ läbimisel pidevaks (välja arvatud võib-olla kinnise joone korral üks punkt, mille loeme algus- ja lõpp-punktiks), tähistatakse $\Delta_{\Gamma} \text{Arg } f(z)$.

Järeldus 18 (Argumendi printsiip). *Teoreemi eeldustel on funktsiooni f argumendi muut joone Γ täielikul läbimisel 2π korda suurem kui funktsiooni piirkonnas D asuvate nullkohtade ja pooluste arvu vahe (loetud koos kordsustega), ehk*

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) = N - P.$$

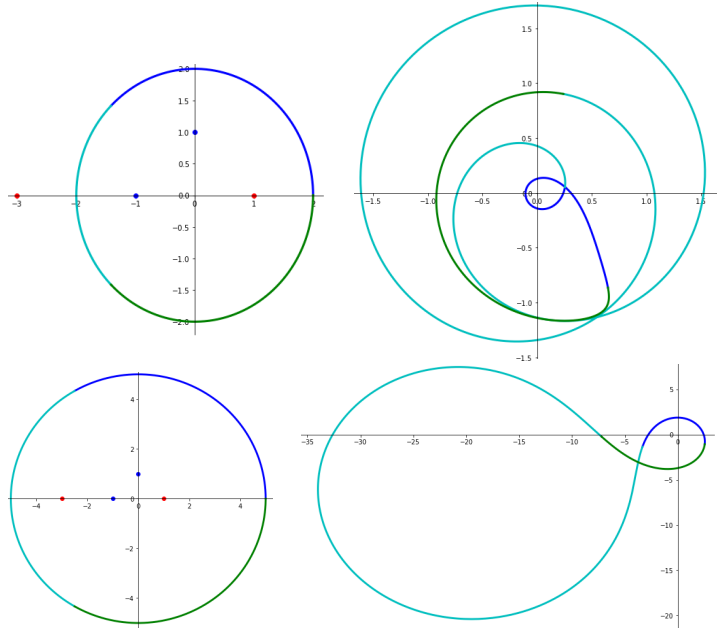
Tõestus. $\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ln} f(z) \Big|_{\Gamma} = (\ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)) \Big|_{\Gamma} = i \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z).$

Seega $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$

Näide. $f(z) = \frac{(z+1)^3(z-i)^2}{(z+3)^3(z-1)}, \Gamma = S(0, 2).$

Joonisel on originaalide tasand, kus funktsiooni poolused on tähistatud punasega ja nullkohad sinisega, ning kujutiste tasand. Näha on, et joone Γ kujutis teeb 4 ringi ümber nullpunkti positiivses suunas, seega $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) = 8\pi$. Joone Γ sisemusse jääb üks kolmekordne ja üks kahekordne nullkoht ning üks poolus, seega $N - P = 3 + 2 - 1 = 4$.

Järgmistel joonistel on sama funktsioon, aga $\Gamma = S(0, 5)$. Nüüd $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) = 2\pi$ ja $N - P = 3 + 2 - 3 - 1 = 1$.



Teoreem 45 (Rouche). *Olgu funktsioonid f ja g regulaarsed tõkestatud piirkonnas D ning pidevad kuni tükiti sileda rajani Γ , kusjuures iga $z \in \Gamma$ korral kehtib võrratus $|g(z)| < |f(z)|$. Siis on funktsioonidel f ja $f + g$ ühepalju nullkohti piirkonnas D , loetud koos kordsustega.*

Tõestus. Eeldustest järeldub, et $f(z) \neq 0$ ja $f(z) + g(z) \neq 0$, kui $z \in \Gamma$.

$$\operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) = \operatorname{Arg} \left(f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right).$$

Kuna $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$, siis $1 + \frac{g(z)}{f(z)} \in B(1, 1)$, seega $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$. Järelikult $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) = \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z)$. Kuna kummalgi funktsioonil pooluseid pole, siis on nende nullkohtade arvud võrdsed (loetud koos kordsustega).

Näide. Leida funktsiooni $F(z) = e^{iz} + 3iz^5$ nullkohtade arv ühikringis.

Kui $|z| = 1$, siis $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y} \in [e^{-1}, e]$ ja $|3iz^5| = 3$. Valime $f(z) = 3iz^5$ ja $g(z) = e^{iz}$. Siis ühikringjoonel $|z| = 1$ $|f(z)| = 3 > e \geq |g(z)|$.

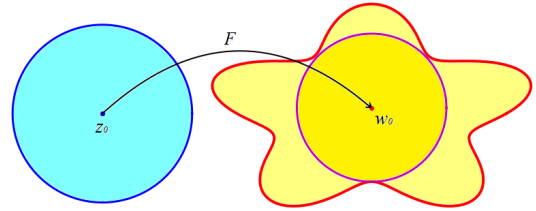
Rouche teoreemi eeldused on täidetud, seega funktsioonidel f ja $F = f + g$ on ühepalju nullkohti ühikringis. Kuna funktsioonil f on 5 nullkohta, siis ka funktsioonil F on 5 nullkohta ühikringis.

7.5 Analüütilise funktsiooni pööramine

Teoreem 46 (Analüütilise funktsiooni pööramine). *Olgu F analüütiline punkti z_0 ümbruses. Siis F on pööratav punkti z_0 mingis ümbruses parajasti siis, kui $F'(z_0) \neq 0$.*

Tõestus. Eeldame, et F pole konstantne. Olgu $w_0 = F(z_0)$. Kuna funktsiooni $f(z) = F(z) - w_0$ nullkohad on isoleeritud, siis $\exists r > 0$: $f(z) \neq 0$, kui $z \in B(z_0, 2r)$.

Tähistame $\delta = \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\} > 0$. Siis iga $w \in B(w_0, \delta)$ korral on funktsioonidel $f(z)$ ja $f(z) - (w - w_0)$ sama palju nullkohti ringis $B(z_0, r)$, sest rajal $|z - z_0| = r$ kehtib $|f(z)| \geq \delta > |w - w_0|$.



Piisavus. Olgu $F'(z_0) \neq 0$. Siis funktsioonil f on üks ühekordne nullkoht ringis $B(z_0, r)$, seega iga $w \in B(w_0, \delta)$ korral on funktsioonil $f(z) - (w - w_0) = F(z) - w$ täpselt üks nullkoht ringis $B(z_0, r)$, seega $\exists F^{-1}: B(w_0, \delta) \rightarrow B(z_0, r)$.

Tarvilikkus. Olgu F pööratav z_0 mingis ümbruses, s.t. $\exists \varepsilon, \gamma > 0: \forall w \in B(w_0, \varepsilon) \exists! z \in B(z_0, \gamma): F(z) = w$. Oletame vastuväiteliselt, et $F'(z_0) = 0$. Valime $r < \gamma$ nii, et funktsioonil F' pole rohkem nullkohti ringis $B(z_0, r)$. Valime vastava $\delta > 0$. Võime võtta $\delta \leq \varepsilon$.

Nüüd funktsioonil $f(z) = F(z) - w_0$ on üks vähemalt kahekordne nullkoht ringis $B(z_0, r)$, seega iga $w \in B(w_0, \delta)$ korral on funktsioonil $f(z) - (w - w_0) = F(z) - w$ kas vähemalt kaks nullkohta (vastuolu pööratavusega) või üks vähemalt kahekordne nullkoht (vastuolu r valikuga).

Järeldus 19. *Mittekonstantne analüütiline funktsioon kujutab lahtise hulga lahtiseks hulgaks ja piirkonna piirkonnaks.*

Tõestus. Olgu F analüütiline lahtises hulgas D . Olgu $z_0 \in D$ ning $w_0 = F(z_0)$. Kuna funktsiooni $f(z) = F(z) - w_0$ nullkohad on isoleeritud, siis $\exists r > 0: f(z) \neq 0$, kui $z \in B(z_0, 2r)$. Olgu $\delta := \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\} > 0$. Siis iga $w \in B(w_0, \delta)$ korral on funktsioonidel $f(z)$ ja $f(z) - (w - w_0)$ sama palju nullkohti ringis $B(z_0, r)$.

Kuna funktsioonil $f(z) = F(z) - w_0$ on vähemalt üks nullkoht, siis iga $w \in B(w_0, \delta)$ korral leidub $z \in B(z_0, r): F(z) = w$. Seega $F(D)$ on lahtine.

Olgu D piirkond, s.t. lahtine sidus hulk. Kuna $F(D)$ on lahtine ning pidev funktsioon kujutab pideva joone pidevaks jooneks, siis $F(D)$ on ka sidus. Järelikult $F(D)$ on piirkond.

Järeldus 20. *Analüütilise funktsiooni pöördfunktsioon on analüütiline.*

Tõestus. Olgu $F: D \rightarrow G = f(D)$ analüütiline ja pööratav. Näitame kõigepealt, et F^{-1} on pidev. Olgu $w_0 \in G$ ja olgu $F(z_0) = w_0$. Teoreemi tõestuses sai näidatud, et iga piisavalt väikese $r > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $w \in B(w_0, \delta) \Rightarrow F^{-1}(w) \in B(z_0, r)$, see ongi pidevuse definitsioon.

Kuna regulaarsus ja analüütilisus on samaväärsed, siis piisab näidata, et F^{-1} on diferentseeruv igas hulga G punktis. Olgu $b \in G$ ning olgu $a \in D: F(a) = b$. Siis

$$(F^{-1})'(b) = \lim_{w \rightarrow b} \frac{F^{-1}(w) - F^{-1}(b)}{w - b}.$$

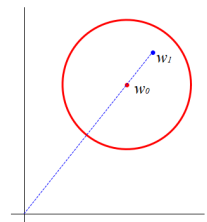
Tähistame $z = F^{-1}(w)$. Kuna F^{-1} on pidev, siis $w \rightarrow b \Rightarrow z \rightarrow a$. Seega

$$(F^{-1})'(b) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{F(z) - F(a)} = \frac{1}{F'(a)}.$$

7.6 Mooduli maksimumi ja miinimumi printsiibid

Teoreem 47 (Mooduli maksimumi printsiip). *Olgu f mittekonstantne analüütiline funktsioon piirkonnas D . Siis $|f|$ ei saavuta oma maksimumi piirkonnas D .*

Tõestus. Oleme näidanud, et $f(D)$ on lahtine hulk. Kui f saavutaks oma mooduli maksimumi punktis $z_0 \in D$ ning $w_0 = f(z_0)$, siis $\exists \delta > 0: B(w_0, \delta) \subset f(D)$. Alati leidub $w_1 \in B(w_0, \delta): |w_1| > |w_0|$. Aga $w_1 \in f(D)$, seega $\exists z_1: f(z_1) = w_1$. Siis $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$, vastuolu.

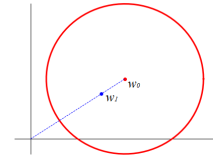


Järeldus 21. *Tõkestatud piirkonnas analüütiline ja kuni rajani pidev funktsioon saavutab oma mooduli maksimumi rajal.*

Tõestus. Kinnises tõkestatud piirkonnas pidev funktsioon saavutab oma ekstreemumid selles piirkonnas.

Teoreem 48 (Mooduli miinimumi printsiip). Olgu f mittekonstantne analüütiline funktsioon piirkonnas D , millel pole nullkohti piirkonnas D . Siis $|f|$ ei saavuta oma miinimumi piirkonnas D .

Tõestus. Analoogiliselt mooduli maksimumi printsiibi tõestusele, kui f saavutaks oma mooduli miinimumi punktis z_0 ning $w_0 = f(z_0)$, siis $\exists \delta > 0: B(w_0, \delta) \in f(D)$. Kui $w_0 \neq 0$, siis leidub $w_1 \in B(w_0, \delta): |w_1| < |w_0|$. Siis $|f(z_1)| = |w_1| < |w_0| = |f(z_0)|$, vastuolu.



Järeldus 22. Tõkestatud piirkonnas analüütiline ja kuni rajani pidev funktsioon, millel pole nullkohti piirkonnas D , saavutab oma mooduli miinimumi rajal.

Tõestus. Kinnises tõkestatud piirkonnas pidev funktsioon saavutab oma ekstreemumid selles piirkonnas.

7.7 Harmoonilised funktsioonid

Olgu $D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$ piirkond. Tähistame vastavat komplekstasandi piirkonda D .

Definitsioon. Funktsiooni $u: D_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **harmooniliseks** piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$, kui ta on 2 korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$ ning $u_{xx} + u_{yy} = 0$ piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$.

Teoreem 49 (Reaal- ja imaginaarosa harmoonilisus). Olgu f analüütiline piirkonnas D . Siis funktsioonid $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ ja $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ on harmoonilised piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$.

Tõestus. Kuna $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$, siis Cauchy-Riemanni võrranditest f' jaoks saame, et $u_{xx} = -u_{yy}$ ja $v_{yy} = -v_{xx}$ ehk u ja v on harmoonilised.

Definitsioon. Piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$ harmoonilisi funktsioone u ja v , mis rahuldavad Cauchy-Riemanni võrrandeid selles piirkonnas, nimetatakse **kaasharmoonilisteks**.

NB! Funktsioonid u ja v on kaasharmoonilised $\Leftrightarrow v$ ja $-u$ on kaasharmoonilised.

Definitsioon. Harmoonilise funktsiooni u **kompleksseks potentsiaaliks** nimetatakse analüütilist funktsiooni f , mis rahuldab vaadeldavas piirkonnas seost $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.

Teoreem 50 (Kompleksse potentsiaali olemasolu). Olgu u harmooniline funktsioon ühelisidusas piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$. Siis leidub piirkonnas D analüütiline funktsioon f nii, et $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.

Tõestuse idee. Oletame, et selline f leidub. Siis f' saab avaldada u kaudu. Seega saab ka f defineerida u kaudu. Siis tuleb näidata, et kehtib $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.

Järeldus 23 (Kaasharmoonilise funktsiooni olemasolu). Igale ühelisidusas piirkonnas harmoonilisele funktsioonile saab leida selles piirkonnas kaasharmoonilise funktsiooni.

Tõestus. Olgu u harmooniline ühelisidusas piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$. Leiame tema kompleksse potentsiaali f . Siis $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ on funktsiooni u kaasharmooniline funktsioon.

Kompleksse potentsiaali leidumiseks on piirkonna ühelisidusus oluline eeldus.

Näide. Funktsioon $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ on harmooniline piirkonnas $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, selle kaasharmooniliseks funktsiooniks on $2 \operatorname{Arg}(x + iy)$ suvaline haru, kuid see on harmooniline ainult piirkonnas $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, kus γ on suvaline nullpunkti ja lõpmatuspunkti ühendav pidev joon.

Näide. Leida kaasharmooniline funktsioon funktsioonile $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Kui v on otsitav kaasharmoniline funktsioon, siis Cauchy-Riemanni võrranditest

$$v_y(x, y) = u_x(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Integreerime seda y suhtes lugedes x konstandiks:

$$v(x, y) = \int -\frac{2xy \, dy}{(x^2 + y^2)^2} = \int -\frac{x \, d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + C(x).$$

Seega $v_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + C'(x)$. Kuna $u_y(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ja Cauchy-Riemanni võrranditest $v_x = -u_y$, siis $C'(x) = 0$. Järelikult $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Vastav kompleksne potentsiaal on $f(z) = \frac{i}{z}$.

Harmonilistel funktsioonidel on mitmeid sarnaseid omadusi regulaarsete funktsioonidega.

Teoreem 51 (Ekstreemumi printsiip). *Olgu u mittekonstantne harmooniline funktsioon piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$. Siis u ei saavuta oma ekstremaalseid väärtusi piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et u saavutab oma ekstreemumi punktis $(x_0, y_0) \in D_{\mathbb{R}}$. Tähistame $z_0 = x_0 + iy_0$. Valime $r > 0$ nii, et $B(z_0, r) \subset D$. Leiame funktsiooni u kompleksse potentsiaali f ringis $B(z_0, r)$.

Funktsioon $g(z) = e^{f(z)}$ on regulaarne ringis $B(z_0, r)$ ning $|g(z)| = e^{u(x, y)}$. Kui u saavutab oma ekstreemumi punktis (x_0, y_0) , siis $|g|$ saavutab oma ekstreemumi punktis z_0 , vastuolu mooduli maksimumi/miinimumi printsiibiga.

Järeldus 24. *Tõkestatud piirkonnas harmooniline ja kuni rajani pidev funktsioon saavutab oma ekstremaalsed väärtused rajal.*

Tõestus. Kinnises tõkestatud piirkonnas pidev funktsioon saavutab oma ekstremaalsed väärtused. Kui ta ei saavuta neid piirkonna sees, siis ta peab need saavutama rajal.

Järeldus 25. *Kogu komplekstasandil harmooniline ja ülalt (või alt) tõkestatud funktsioon on konstantne.*

Tõestus. Olgu u ülalt tõkestatud kogu komplekstasandil. Leiame tema kompleksse potentsiaali f ning defineerime $g(z) = e^{f(z)}$. Siis $|g(z)| = e^{u(x, y)}$, seega g on tõkestatud kogu komplekstasandil. Liouville'i teoreemi põhjal g on konstantne. Seega ka u on konstantne.

Kui u on alt tõkestatud, siis kasutame eelmist tõestust $-u$ jaoks.

Järeldus 26. *Tõkestatud piirkonnas harmooniline ja kuni rajani pidev funktsioon on üheselt määratud oma väärtustega piirkonna rajajoonel.*

Tõestus. Olgu u harmooniline funktsioon tõkestatud piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$ ja pidev kuni rajani. Oletame, et v on harmooniline piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$ ja pidev kuni rajani ning rajal $u = v$. Siis $u - v$ on samuti harmooniline piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$ ja pidev kuni rajani ning rajal $u - v = 0$. Kuna $u - v$ saavutab oma ekstremaalsed väärtused rajal, siis $u - v = 0$ kogu piirkonnas.

Märkus. Tegelikult kehtib ka üldisem tulemus: piisavalt "ilus" (näiteks sileda rajaga või kumera) piirkonna puhul iga piirkonna rajal pideva funktsiooni g korral leidub piirkonnas harmooniline funktsioon u nii, et rajal kehtib $u = g$.

Märkus. Harmonilised funktsioonid defineeritakse ka üldisemalt. Olgu $D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ piirkond. Funktsiooni $u : D_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **harmooniliseks** piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$, kui ta on 2 korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$ ning $u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$ piirkonnas $D_{\mathbb{R}}$.

7.8 Analüütiline jätkamine

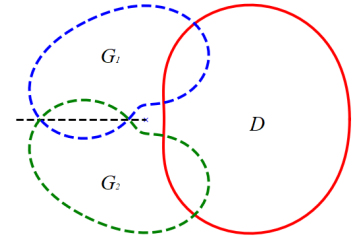
Definitsioon. Olgu funktsioonid f ja g analüütilised vastavalt piirkondades D ja G , kus $G \not\subset D$ ning $D \cap G \neq \emptyset$. Olgu $f(z) = g(z) \forall z \in D \cap G$. Siis öeldakse, et g on f vahetu analüütiline jätk piirkonnast D piirkonda G .

Näide. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in B(0, 1)$, $g(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Lause 15 (Analüütilise jätku ühesus). Olgu f analüütiline piirkonnas D ning olgu g_1 ja g_2 funktsiooni f vahetud jätkud piirkonda G . Siis $g_1 = g_2$ piirkonnas G .

Tõestus. Kuna $g_1 = g_2$ lahtisel hulgal $G \cap D$, siis analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreemi tõttu $g_1 = g_2$ piirkonnas G .

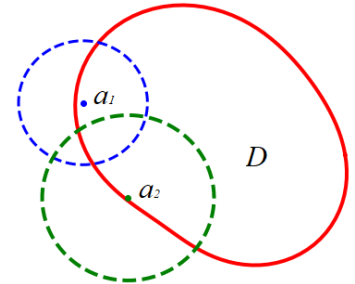
NB! Kui g_1 ja g_2 on funktsiooni f vahetud jätkud piirkondadesse G_1 ja G_2 ning $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, siis sellest ei järeldu, et $g_1 = g_2$ piirkonnas $G_1 \cap G_2$!



7.8.1 Jätkamine astmeridade abil

Olgu f analüütiline piirkonnas D . Valime $a \in D$ ning arendame f astmeritta punktis a . Olgu selle astmerea koonduvusraadius r . Kui $B(a, r) \setminus D \neq \emptyset$, siis see astmerida defineerib f analüütilise jätku ringi $B(a, r)$.

Protsessi võime jätkata.



Definitsioon. Olgu f analüütiline piirkonnas D . Piirkonda D nim. funktsiooni f loomuliku olemasolu piirkonnaks, kui mitte ühegi $z_0 \in D$ korral pole võimalik funktsiooni f arendada astmeritta selles punktis, mis koonduks ka väljaspool piirkonda D .

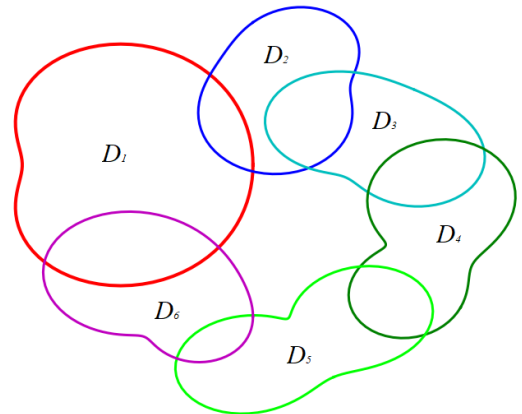
Näide. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ loomuliku olemasolu piirkond on $B(0, 1)$.

$\lim_{r \rightarrow 1-} f(re^{2\pi ip/q}) = \infty$, kui $p, q \in \mathbb{Z}$, sest kui $n \geq q$, siis $\frac{p}{q}n!$ on täisarv, seega

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} \right| \geq \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} - \left| \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} \right| \geq \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} - \sum_{n=1}^{q-1} r^{n!}.$$

Definitsioon. Olgu funktsioonid f_k , $k = 1, \dots, n$ analüütilised vastavalt piirkondades D_k ning olgu $D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n-1$. Olgu $f_k(z) = f_{k+1}(z) \forall z \in D_k \cap D_{k+1}$. Siis öeldakse, et f_n on f_1 analüütiline jätk piki piirkondade ahelat $D_1, \dots, D_n$.

Kui me jõuame mingil hetkel tagasi mõne varasema piirkonna juurde, siis ei pruugi funktsiooni väärtused seal samad tulla. Sel juhul tuleb mõelda nii, et need piirkonnad asuvad mingi Riemanni pinna erinevatel lehtedel.



7.8.2 Jätkamine valemite abil

Olgu f analüütiline piirkonnas D ning kehtigu piirkonnas D mingi valem kujul $f(z) = F(z, f(z+a))$, kus $z, z+a \in D$ ning F on analüütiline kogu komplekstasandil (või mingis piisavalt suures piirkonnas). Siis funktsioon $g(z) = F(z, f(z+a))$ on analüütiline piirkonnas $D_a = \{z \in \mathbb{C} : z+a \in D\}$ ning $g(z) = f(z)$, kui $z \in D \cap D_a$, seega g on f analüütiline jätk piirkonnale D_a .

Näide. Gammafunktsioon $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$, $\operatorname{Re} z > 0$. Siin $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x} = x^{\operatorname{Re} z - 1} e^{i \operatorname{Im} z \ln x}$.

Gammafunktsioon on regulaarne pooltasandil $\operatorname{Re} z > 0$ ning rahuldab võrrandit $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ehk $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$.

Olgu $g(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Siis $g(z) = \Gamma(z)$, kui $\operatorname{Re} z > 0$ ning g on regulaarne piirkonnas $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1, z \neq 0\}$. Seega g on Γ analüütiline jätk piirkonnale D . Samamoodi jätkates saame defineerida Γ jätku kogu komplekstasandile, välja arvatud punktid $0, -1, -2, \dots$

Teoreem 52 (Pidevusprintsip). Olgu funktsioonid f ja g analüütilised vastavalt piirkondades D ja G , kus $D \cap G = \emptyset$ ning pidevad kuni D ja G ühise tükiti sileda rajaosani γ . Kui $f(z) = g(z) \forall z \in \gamma$, siis funktsioon

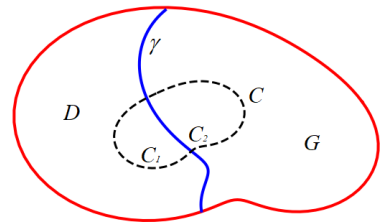
$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma, \\ g(z), & z \in G \end{cases}$$

on funktsioonide f ja g analüütiline jätk piirkonnale $D \cup G \cup \gamma$.

Tõestus. Näitame, et h on analüütiline piirkonnas $D \cup G \cup \gamma$. Morera teoreemi kohaselt on selleks vaja näidata, et integraal üle suvalise kinnise joone selles piirkonnas on null. Olgu C mingi kinnine joon selles piirkonnas. Kui $C \subset D \cup \gamma$ või $C \subset G \cup \gamma$, siis integraal on null Cauchy teoreemi kohaselt.

Kui osa kõverast C on piirkonnas D ja osa piirkonnas G , siis täiendame mõlemad (või kõik) osad joone γ osadega kinnisteks kõverateks, mis kuuluvad täielikult ühte piirkonnadest koos kõveraga γ . Siis

$$\int_C h(z) dz = \int_{C_1} h(z) dz + \int_{C_2} h(z) dz = 0.$$

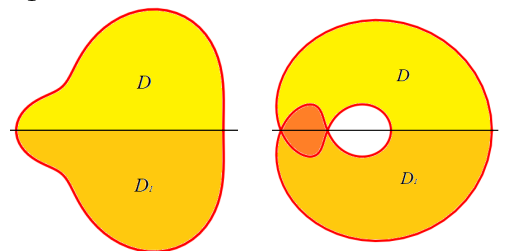


Teoreem 53 (Riemann-Schwarzi sümmeetriaprintsiip). Olgu f analüütiline piirkonnas D , mille raja sisaldab mingit reaaltelje lõiku γ ning olgu f pidev kuni rajaosani γ . Kui f väärtused on reaalsed rajaosal γ , siis saab funktsiooni f analüütiliselt jätkata piirkonda $D \cup D_1 \cup \gamma$, kus $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in D\}$ (vajadusel tuleb seda mõista mitmekordsena, s.t. Riemanni pinnana), kusjuures jätkuks on $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $z \in D_1$.

Tõestus. Näitame, et g on diferentseeruv piirkonnas D_1 . Olgu $a \in D_1$. Siis

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{a})}}{z - a} = \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{a}} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}} \right)} = \overline{f'(\bar{a})}.$$

Funktsioon g on ka pidev kuni ühise rajaosani γ ning kui $z \in \gamma$, siis $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(z)} = f(z)$. Pidevusprintsibi põhjal g on f analüütiline jätk piirkonnale D_1 .



Peatükk 8

Konformne kujutamine

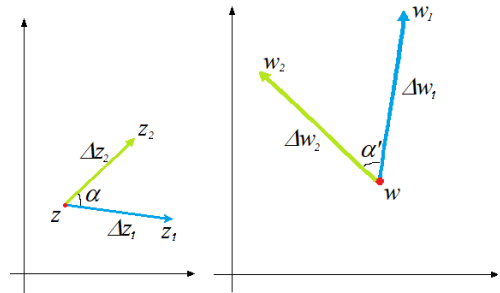
8.1 Konformse kujutuse mõiste ja põhiomadused

Definitsioon. Komplekstasandi mingi piirkonna üksühest kujutust nimetatakse **konformseks**, kui ta säilitab nurgad nii suuruse kui ka suuna poolest ning muudab mastaapi igas suunas ühte moodi.

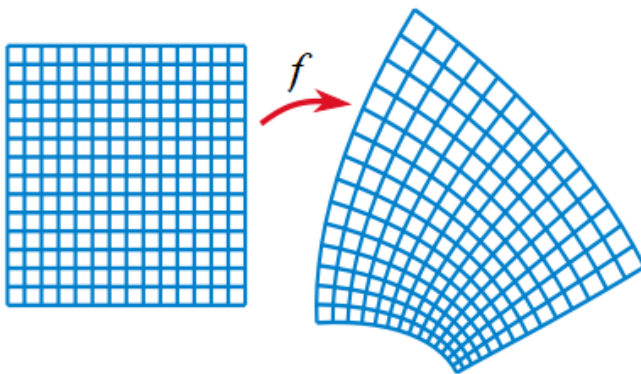
Olgu Δw argumenti muudule Δz vastav funktsiooni väärtuse muut punktis z .

Mastaabi muutus on selline $k > 0$, et $|\Delta w| = k|\Delta z| + o(|\Delta z|)$ protsessis $\Delta z \rightarrow 0$; k võib sõltuda punktist z , kuid ei sõltu suurusest Δz .

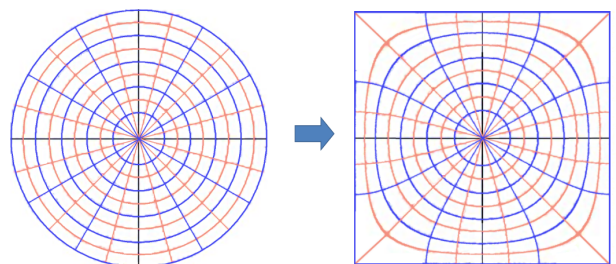
Nurkade säilivus: kui võtta kaks argumenti muutu Δz_1 ja Δz_2 ning neile vastavad funktsiooni väärtuse muudud Δw_1 ja Δw_2 , siis vektorite Δw_1 ja Δw_2 vaheline nurk α' avaldub kujul $\alpha' = \alpha + o(1)$, kui $\Delta z_1, \Delta z_2 \rightarrow 0$. See tähendab, et $\arg \Delta w$ mingi haru esitub kujul $\arg \Delta z + \beta + o(1)$ protsessis $\Delta z \rightarrow 0$. Arvu $\beta \in \mathbf{R}$ nimetatakse **tasandi pöördeks** selles punktis; β võib sõltuda punktist z , kuid ei sõltu suurusest Δz .



Näide konformsest kujutamisest:



Ühikringi konformne kujutamine ühikruuduks:



Teoreem 54. Kui f kujutab piirkonna D konformselt mingiks hulgaks G , siis f on regulaarne piirkonnas D ja $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$.

Tõestus. Olgu $f: D \rightarrow G$ konformne. Olgu $z \in D$. Siis

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w| e^{i \arg \Delta w}}{|\Delta z| e^{i \arg \Delta z}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(k|\Delta z| + o(|\Delta z|)) e^{i(\arg \Delta z + \beta + o(1))}}{|\Delta z| e^{i \arg \Delta z}} = k e^{i\beta}.$$

Seega f on diferentseeruv hulgas D . Kuna $k \neq 0$, siis ka $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$.

Järeldus 27. Kui f kujutab piirkonna D konformselt mingiks hulgaks G , siis G on piirkond.

Tõestus. Mittekongstantne analüütiline funktsioon kujutab piirkonna piirkonnaks.

Teoreem 55 (Üksühese vastavuse printsiip). Kui piirkonnas D regulaarne funktsioon kujutab piirkonna D üksüheselt piirkonnaks G , siis see kujutus on konformne.

Tõestus. Olgu $z \in D$. Kuna funktsioon on pööratav, siis $f'(z) \neq 0$. Tähistame $f'(z) = ke^{i\beta}$. Siis $\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \rightarrow k$, kui $\Delta z \rightarrow 0$, seega $|\Delta w| = k|\Delta z| + o(|\Delta z|)$ (mastaabi muutus).

Kuna $\text{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow \beta$, kui $\Delta z \rightarrow 0$ mingi Arg haru korral, siis $\text{Arg} \Delta w$ mingi haru esitub kujul $\arg \Delta z + \beta + o(1)$ protsessis $\Delta z \rightarrow 0$ (nurkade säilivus).

Järeldus 28. Konformse kujutuse pöördkujutus on konformne.

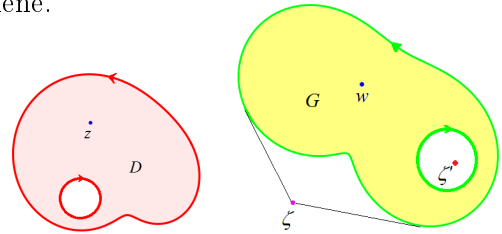
Tõestus. Pöördkujutus on üksühene ja regulaarne.

Järeldus 29. Kahe konformse kujutuse kompositsioon on konformne.

Teoreem 56 (Rajade vastavuse printsiip). Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni rajani Γ . Kui f kujutab Γ üksüheselt piirkonna G rajaks γ ja säilitab raja positiivse suuna, siis f kujutab piirkonna D konformselt piirkonnaks G .

Tõestus. Piisab näidata, et $f(D) = G$ ja $f: D \rightarrow G$ on üksühene.

1) Näitame, et $f(D) \subset G$. Olgu $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Defineerime $F_1(z) = f(z) - \zeta$. Kuna F_1 on regulaarne piirkonnas D , siis Argumendi printsiibi kohaselt tema nullkohtade arv on $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \text{Arg} F_1(z) = 0$. Seega $f(D) \subset \overline{G}$. Kuna f teisendab piirkonna piirkonnaks, siis $f(D) \subset G$.



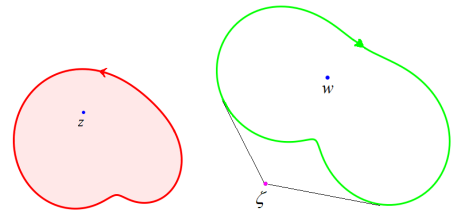
2) Näitame, et $f(D) = G$ ning f on üksühene. Olgu $w \in G$. Defineerime $F_2(z) = f(z) - w$. Kuna F_2 on regulaarne piirkonnas D , siis tema nullkohtade arv on $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \text{Arg} F_2(z) = 1$. Seega $\exists! z \in D: f(z) = w$.

Mis juhtub, kui joone Γ positiivsele suunale vastab joone γ negatiivne suund?

Siis pole võimalik, et f on regulaarne piirkonnas D .

Kui $w \in G$ ja $F_2(z) = f(z) - w$, siis tema nullkohtade arv miinus pooluste arv on $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \text{Arg} F_2(z) = -1$. Seega peab leiduma vähemalt üks poolus piirkonnas D .

Kui funktsioonil f on täpselt üks 1. järku poolus piirkonnas D , siis funktsioonil F_2 nullkohad puuduvad, seega $F(D) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{G}$.



Kui $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ ja $F_1(z) = f(z) - \zeta$, siis tema nullkohtade arv miinus pooluste arv on $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \text{Arg} F_1(z) = 0$.

Kuna funktsioonil on üks poolus piirkonnas D , siis peab tal olema ka üks nullkoht, seega $\exists! z \in D: f(z) = \zeta$.

Näide. Missuguseks hulgaks kujutab funktsioon $f(z) = \cos z$ hulga $D = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \text{Re } z < \pi, \text{Im } z > 0\}$?

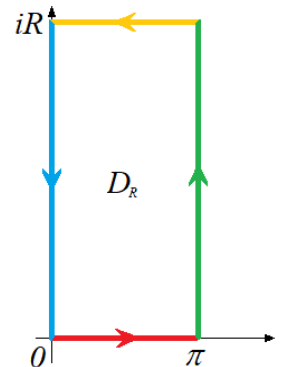
Siin võib probleemiks olla lõpmatuspunkt. Seega vaatleme piirkonna D asemel piirkonda $D_R = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \text{Re } z < \pi, 0 < \text{Im } z < R\}$, kus $R > 0$.

Funktsioon on regulaarne ja pidev kuni rajani piirkonnas D_R . Vaatleme raja kujutist:

1) Lõik $[0, \pi]$ kujutub lõiguks $[1, -1]$.

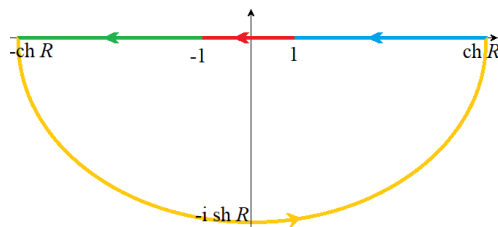
2) Lõigu $[\pi, \pi + iR]$ kujutis on $\cos(\pi + it) = -\text{ch } t$, $t \in [0, R]$ ehk lõik $[-1, -\text{ch } R]$.

3) Lõigu $[\pi + iR, iR]$ kujutis on $\cos(t + iR) = \cos t \text{ch } R - i \sin t \text{sh } R$, $t \in [\pi, 0]$ ehk ellipsi pooltelgedega $\text{ch } R$ ja $\text{sh } R$ kaar otspunktidega $-\text{ch } R$ ja $\text{ch } R$ alumises pooltasandis.



4) Lõigu $[iR, 0]$ kujutis on $\cos(it) = \operatorname{ch} t$, $t \in [R, 0]$ ehk lõik $[\operatorname{ch} R, 1]$.

Seega hulga D kujutis on alumine pooltasand.



8.2 Konformse kujutamise põhiülesanne

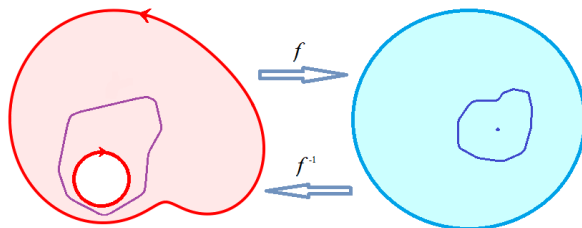
On antud piirkonnad D ja G . Leida piirkonna D konformne kujutus piirkonnaks G .

Teoreem 57 (Riemann: konformse kujutamise põhiülesande lahenduvus). Iga ühelisidusat piirkonda, mis pole kogu komplekstasand, saab konformselt kujutada ühikringiks.

Seda teoreemi me ei tõesta. Näitame vaid, et eeldused on vajalikud.

Ühelisidusus on vajalik: kui D on mitmelisidus, siis leidub kinnine joon γ , mille sisemuses on punkte, mis ei kuulu piirkonda D , selle joone kujutis on kinnine joon, mida saab pidevalt deformeerida punktiks.

Kui $D = \mathbb{C}$, siis tekib vastuolu Liouville'i teoreemiga.

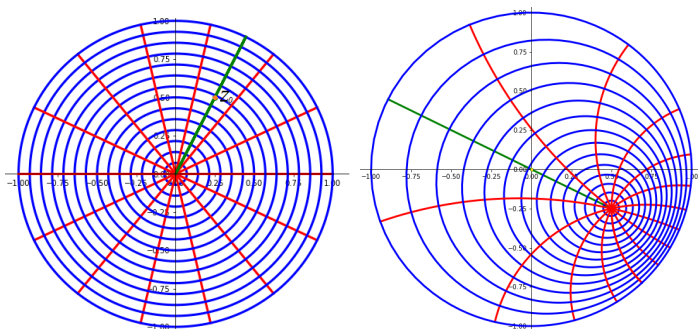


Konformne kujutus pole ühene (näiteks ühikringi pöörded).

Lemma 2 (Ühikringi kujutamine ühikringiks). Olgu antud $z_0 \in B(0, 1)$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Ühikringi saab konformselt kujutada ühikringiks nii, et punkt z_0 kujutub nullpunktiks ja tasandi pööre punktis z_0 on α .

Tõestus. Sobib funktsioon $f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$.

Näide. Ühikringi kujutamine ühikringiks nii, et $z_0 = \frac{1+2i}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Lemma 3 (Schwarz). Olgu f regulaarne ühikringis $B(0, 1)$, olgu $f(0) = 0$ ja $|f(z)| \leq 1$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. Siis $|f(z)| \leq |z|$ iga $z \in B(0, 1)$ korral.

Teoreem 58 (Konformse kujutuse ühesus). Olgu $D \subset \mathbb{C}$ ühelisidus piirkond, $D \neq \mathbb{C}$. Olgu antud $z_0 \in D$, $w_0 \in B(0, 1)$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Siis leidub täpselt üks funktsioon f , mis kujutab piirkonna D konformselt ühikringiks ning rahuldab $f(z_0) = w_0$ ja $\alpha \in \operatorname{Arg} f'(z_0)$.

Tõestus. Olemasolu. Riemanni teoreemist järeldeb, et leidub konformne $F: D \rightarrow B(0, 1)$. Vaja on näidata, et leidub ka selline konformne kujutus, mis rahuldab etteantud tingimusi.

Olgu $F(z_0) = \zeta_0$ ja olgu $\arg F'(z_0) = \alpha_0$. Ühikringi kujutamise lemma põhjal leiduvad $\varphi: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ nii, et $\varphi(\zeta_0) = 0$ ja $\arg \varphi'(\zeta_0) = -\alpha_0$ ja $\psi: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ nii, et $\psi(w_0) = 0$ ja $-\alpha \in \operatorname{Arg} \psi'(w_0)$. Nüüd $f = \psi^{-1} \circ \varphi \circ F$ rahuldab teoreemi tingimusi.

Ühesus. Oletame, et leidub 2 tingimustele vastavat kujutust f ja g . Olgu $H = \psi \circ g \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$. Siis $H: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ on konformne ning $H: 0 \mapsto w_0 \mapsto z_0 \mapsto w_0 \mapsto 0$ ja tasandi pööre vastavates punktides on $\alpha - \alpha + \alpha - \alpha = 0$. Seega $H(0) = 0$ ja $H'(0) \in \mathbb{R}_+$.

Nüüd Schwarzi lemmast järeldeb, et $|H(z)| \leq |z| \forall z \in B(0, 1)$. Samas ka $|H^{-1}(z)| \leq |z|$, ehk võttes $z = H(\zeta)$, saame $|\zeta| \leq |H(\zeta)| \forall \zeta \in B(0, 1)$. Kokkuvõttes $|H(z)| = |z| \forall z \in B(0, 1)$.

Defineerime $h(z) = \begin{cases} \frac{H(z)}{z}, & \text{kui } 0 < |z| < 1, \\ H'(0), & \text{kui } z = 0. \end{cases}$ Siis h on regulaarne ühikringis ja $|h(z)| = 1$, kui

$0 < |z| < 1$. Mooduli maksimumi printsiibi tõttu h on konstantne. Seega $h(z) = e^{i\beta}$ ja $H(z) = e^{i\beta}z$. Kuna $H'(0) \in \mathbb{R}_+$, siis $H(z) = z \ \forall z \in B(0,1)$. Järelikult

$$\psi(g(f^{-1}(\psi^{-1}(z)))) = z \quad \forall z \in B(0,1).$$

Tähistame $\zeta = f^{-1}(\psi^{-1}(z))$. Kuna z oli suvaline ja f ning ψ on konformsed kujutused, siis ka ζ on suvaline. Seega $g(\zeta) = f(\zeta) \ \forall \zeta \in D$.

Järeldus 30. Olgu D ja G ühelisidused piirkonnad, $D, G \neq \mathbb{C}$. Olgu antud $z_0 \in D$, $w_0 \in G$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Siis leidub täpselt üks funktsioon f , mis kujutab piirkonna D konformselt piirkonnaks G ning rahuldab $f(z_0) = w_0$ ja $\alpha \in \text{Arg } f'(z_0)$.

Tõestus. Olemasolu. Leidub $\varphi: D \rightarrow B(0,1)$ konformne, nii et $\varphi(z_0) = 0$ ja $\alpha \in \text{Arg } \varphi'(z_0)$ ja $\psi: G \rightarrow B(0,1)$ konformne, nii et $\psi(w_0) = 0$ ja $\arg \psi'(w_0) = 0$. Siis $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ rahuldab järelduse tingimusi.

Ühesus. Kui f ja g mõlemad rahuldaksid neid tingimusi, siis $H: D \rightarrow B(0,1)$, $H = \varphi \circ f^{-1} \circ g$ on konformne ning rahuldab tingimusi $H(z_0) = 0$ ja $\alpha \in \text{Arg } H'(z_0)$.

Järelikult $H(z) = \varphi(z) \ \forall z \in D$. Seega $\varphi(f^{-1}(g(z))) = \varphi(z) \ \forall z \in D$ ehk $g(z) = f(z) \ \forall z \in D$.

Järeldus 31. Kõik ühikringi konformsed kujutused iseendaks on mürdlineaarsed funktsioonid.

Märkus. “Ilusate” (näiteks tükiti sileda rajaga) piirkondade puhul on konformsed kujutused üldiselt pidevad kuni rajani, seega võime piirduda rajajoone kujutamisega (aga raja suund peab säilima).

Tingimusi, mis määravad konformse kujutuse üheselt, nimetatakse **normeerivateks tingimusteks**.

Konformse kujutuse määravad üheselt 3 reaalselt tingimust, näiteks

- ühe sisepunkti kujutis ja tasandi pööre;
- ühe sisepunkti ja ühe rajapunkti kujutis;
- 3 rajapunkti kujutis (need peavad olema õiges järjekorras).

Peatükk 9

Laplace'i ja Fourier' teisendus

9.1 Laplace'i teisenduse definitsioon

Olgu f määratud $[0, \infty)$, kas reaali- või kompleksarvuliste väärtustega. Eeldame, et

- 1) f on **tükiti pidev** $[0, \infty)$, s.t. igas $[0, \infty)$ lõplikus osalõigis on maksimaalselt lõplik arv katkevuspunkte,
- 2) f on **eksponentsiaalse kasvuga**, s.t. leiduvad $M > 0$ ja $a \in \mathbb{R}$ nii, et $|f(t)| \leq Me^{at}$ iga $t \geq 0$ korral.

Märkus. 1) võib asendada tingimusega

1') f on **integreeruv Riemanni päratu integraali mõttes** või **absoluutselt integreeruv Lebesgue'i integraali mõttes** igas $[0, \infty)$ lõplikus osalõigis.

Definitsioon. Arvu $a_0 = \inf\{a \in \mathbb{R} : \exists M > 0 : |f(t)| \leq Me^{at} \forall t \geq 0\}$ nimetatakse funktsiooni f **kasvu näitajaks**.

Näide. $f(t) = t^n$ kasvu näitaja on 0.

Kuna iga $\varepsilon > 0$ korral $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\varepsilon t}} = 0$, siis $\exists M = M(\varepsilon) > 0 : \frac{t^n}{e^{\varepsilon t}} \leq M$, seega $t^n \leq M(\varepsilon)e^{\varepsilon t}$.

Lemma 4. Olgu f' kasvu näitaja a_0 . Siis f on eksponentsiaalse kasvuga ning tema kasvu näitaja $a_1 \leq \max\{a_0, 0\}$.

Tõestus. Olgu $a > a_0$, siis $\exists M > 0 : |f'(t)| \leq Me^{at}$. Siis $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau$, seega

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(\tau)| d\tau \leq |f(0)| + \int_0^t Me^{a\tau} d\tau \leq |f(0)| + \begin{cases} \frac{M}{a}(e^{at} - 1) & a > 0, \\ Mt, & a = 0, \\ \frac{M}{a}(1 - e^{-at}), & a < 0. \end{cases}$$

$$\text{Järelikult } |f(t)| \leq \begin{cases} M'e^{at}, & a > 0, \\ M'(\varepsilon)e^{\varepsilon t} \forall \varepsilon > 0, & a = 0, \\ M', & a < 0. \end{cases}$$

Definitsioon. Funktsiooni f **Laplace'i teisendiks** nim. funktsiooni

$$\mathcal{L}[f](p) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Teoreem 59 (Laplace'i teisendi olemasolu). Olgu a_0 funktsiooni f kasvu näitaja. Siis integraal $\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ koondub absoluutselt piirkonnas $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a_0\}$ ning ühtlaselt piirkonnas $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq a\}$ iga $a > a_0$ korral.

Tõestus. Olgu $p = s + i\sigma$ ning olgu $s > a_0$. Siis $\exists b : a_0 < b < s$, $\exists M > 0 : |f(t)| \leq Me^{bt} \forall t \geq 0$. Siis

$$\int_0^\infty |e^{-pt} f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{bt} dt = M \frac{e^{(b-s)t}}{b-s} \Big|_{t=0}^\infty = \frac{M}{s-b}.$$

Olgu $a > a_0$, siis $\exists b: a_0 < b < a$. Kui $\operatorname{Re} p \geq a$, siis saame hinnata $|e^{-pt}f(t)| \leq Me^{-st}e^{bt} \leq Me^{-at}e^{bt}$ ja $\int_0^\infty Me^{-at}e^{bt}dt = \frac{M}{a-b}$. Weierstrassi tunnuse põhjal integraal koondub ühtlaselt piirkonnas $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p \geq a\}$.

Seega eksponentsiaalse kasvuga funktsiooni Laplace'i teisend on alati määratud mingis parempoolses pooltasandis $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > a_0\}$.

Teoreem 60 (Laplace'i teisendi regulaarsus). Olgu a_0 funktsiooni f kasvu näitaja. Siis tema Laplace'i teisend F on regulaarne piirkonnas $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > a_0\}$ ning $F'(p) = -\mathcal{L}[tf(t)](p)$.

Tõestus. Kasutame teoreemi päratu parameetrist sõltuva integraali regulaarsusest: Olgu Γ lõpmatu pikkusega joon, mille iga lõplik osa on tükiti sile ning olgu D mingi piirkond. Olgu f pidev hulgal $\Gamma \times D$ ning eeldame, et iga fikseeritud $\zeta \in \Gamma$ korral $f(\zeta, \cdot)$ on regulaarne piirkonnas D . Koondugu päratu integraal $F(z) = \int_\Gamma f(\zeta, z)d\zeta$ ühtlaselt igas kinnises piirkonnas $D' \subset D$. Siis F on regulaarne hulgas D ning $F'(z) = \int_\Gamma \frac{\partial f(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta$.

Praegu $\Gamma = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Fikseeritud t korral funktsioon $p \mapsto e^{-pt}f(t)$ on regulaarne ning integraal $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ koondub ühtlaselt piirkonnas $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p \geq a\}$ iga $a > a_0$ korral.

Seega võime diferentseerida integraali märgi all: $F'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial e^{-pt}f(t)}{\partial p} dt = - \int_0^\infty e^{-pt}tf(t)dt = -\mathcal{L}[tf(t)](p)$.

9.2 Laplace'i teisenduse omadused

Rahuldagu f ja g tingimusi 1) ja 2) ning olgu f kasvu näitaja a_0 ja g kasvu näitaja b_0 . Laplace'i teisendusel on järgmised omadused.

1. **Lineaarsus:** $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](p) = \alpha F(p) + \beta G(p)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \max\{a_0, b_0\}$.

2. **Sarnasus:** $\mathcal{L}[f(\lambda t)](p) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, $\lambda > 0$, $\operatorname{Re} p > \lambda a_0$.

Tõestus. $\mathcal{L}[f(\lambda t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(\lambda t)dt \stackrel{\tau=\lambda t}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-p\tau/\lambda}f(\tau)d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.

3. **Tuletise teisend:** kui $f^{(n)}$ rahuldab 1) ja 2) (kasvu näitaja a_n), siis

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \operatorname{Re} p > \max\{a_n, 0\}.$$

Tõestus. Kui $f^{(n)}$ rahuldab 1) ja 2), siis ka $f^{(n-1)}$ rahuldab 1) ja 2).

Matemaatiline induktsioon: valem kehtib, kui $n = 0$. Oletame, et kehtib mingi n korral. Siis

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n+1)}](p) &= \int_0^\infty \underbrace{e^{-pt}}_u \underbrace{f^{(n+1)}(t)dt}_{dv} = e^{-pt}f^{(n)}(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty pe^{-pt}f^{(n)}(t)dt \\ &= -f^{(n)}(0) + p\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^{n+1}F(p) - p^n f(0) - p^{n-1}f'(0) - \dots - f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

4. **Teisendi tuletis:** $F^{(n)}(p) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](p)$, $\operatorname{Re} p > a_0$.

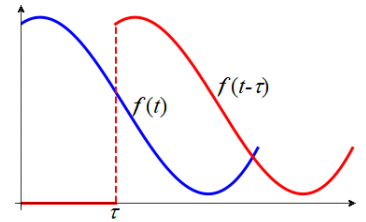
Tõestus. Induktsioon: juht $n = 1$ on juba tõestatud. Oletame, et valem kehtib mingi n korral. Siis

$$F^{(n+1)}(p) = (F^{(n)}(p))' = ((-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](p))' = (-1)^{n+1} \mathcal{L}[t^{n+1} f(t)](p).$$

5. Nihke teisend $\mathcal{L}[H(t-\tau)f(t-\tau)](p) = e^{-p\tau}F(p)$, $\tau > 0$, $\operatorname{Re} p > a_0$.

Siin H on Heaviside'i funktsioon, $H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Tõestus. $\mathcal{L}[H(t-\tau)f(t-\tau)](p) = \int_0^\infty e^{-pt}H(t-\tau)f(t-\tau)dt$
 $\stackrel{s=t-\tau}{=} \int_0^\infty e^{-p(s+\tau)}f(s)ds = e^{-p\tau}F(p).$



6. Teisendi nihe $F(p-\lambda) = \mathcal{L}[e^{\lambda t}f(t)](p)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + a_0$.

Tõestus. $F(p-\lambda) = \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}f(t)dt = \mathcal{L}[e^{\lambda t}f(t)](p).$

9.2.1 Konvolutsioon

Rahuldagu f ja g tingimusi 1) ja 2).

Definitsioon. Funktsioonide f ja g konvolutsiooniks nimetatakse funktsiooni

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Kui f ja g on integreeruvad igas $[0, \infty)$ lõplikus osalõigis (Riemanni või Lebesgue'i mõttes), siis konvolutsioon on defineeritud intervallis $[0, \infty)$.

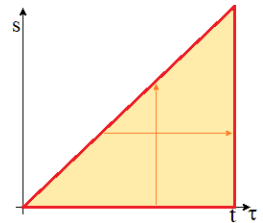
Konvolutsiooni omadusi

1. **Kommutatiivsus:** $f * g = g * f$.

Tõestus. Teeme definitsioonis muutujavahetuse $s = t - \tau$.

2. **Assotsiatiivsus:** $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Tõestus. $((f * g) * h)(t) = \int_0^t (f * g)(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t \int_0^\tau f(s)g(\tau-s)ds h(t-\tau)d\tau$
 $= \int_0^t f(s) \int_s^t g(\tau-s)h(t-\tau)d\tau ds$
 $= \int_0^t f(s) \int_0^{t-s} g(\sigma)h((t-s)-\sigma)d\sigma ds$
 $= \int_0^t f(s)(g * h)(t-s)ds = (f * (g * h))(t).$



3. **Distributiivsus:** $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Lemma 5. Kui f ja g rahuldavad 1) ja 2), siis ka $f * g$ rahuldab 1) ja 2).

Tõestus. 1) Vaatleme intervalli $[0, \infty)$ lõplikku osalõiku $[0, T]$. Siis

$$\begin{aligned} (f * g)(t) - (f * g)(t_0) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau - \int_0^{t_0} f(\tau)g(t_0-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_0} f(\tau)(g(t-\tau) - g(t_0-\tau))d\tau + \int_{t_0}^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Lõplikul lõigul on f ja g tõkestatud, seega

$$|(f * g)(t) - (f * g)(t_0)| \leq M_f \int_0^{t_0} |g(t-\tau) - g(t_0-\tau)| d\tau + |t - t_0| M_f M_g.$$

Lihtsuse mõttes olgu funktsioonil g üks katkevuspunkt a , siis g on ühtlaselt pidev $[0, a]$ ja $(a, T]$. Kui $t - \tau$ ja $t_0 - \tau$ kuuluvad mõlemad kas intervalli $[0, a]$ või $(a, T]$, siis $|g(t - \tau) - g(t_0 - \tau)| < \varepsilon$, kui $|t - t_0| < \delta$. Kui nad kuuluvad erinevatesse intervallidesse, siis $\tau \in [t_0 - a, t - a]$, selle lõigu pikkus on $|t - t_0|$. Seega

$$|(f * g)(t) - (f * g)(t_0)| \leq M_f t_0 \varepsilon + |t - t_0| \cdot 3M_f M_g.$$

2) Olgu f ja g kasvu näitajad a_0 ja b_0 . Olgu $a > a_0$ ja $b > b_0$. Siis

$$|(f * g)(t)| = \left| \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right| \leq M \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = M e^{bt} \begin{cases} \frac{e^{(a-b)t}}{a-b}, & a > b, \\ t, & a = b, \\ \frac{1}{b-a}, & b > a. \end{cases}$$

Seega $(f * g)$ kasvu näitaja ei ületa suurust $\max\{a_0, b_0\}$.

Teoreem 61 (Borel). *Rahuldagu f ja g tingimusi 1) ja 2). Siis $\mathcal{L}[f * g](p) = F(p)G(p)$.*

Tõestus. Fubini teoreem.: kui h on hulgal $X \times Y$ absoluutselt integreeruv funktsioon, siis

$$\int_X \int_Y h(x, y) dy dx = \int_Y \int_X h(x, y) dx dy.$$

Kasutame seda hulgal $[0, \infty) \times [0, \infty)$, defineerides $g(t) = 0$, kui $t < 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](p) &= \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt = \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-pt} g(t - \tau) dt d\tau \\ &\stackrel{s=t-\tau}{=} \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-p(\tau+s)} g(s) ds d\tau = \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-ps} g(s) ds = F(p)G(p). \end{aligned}$$

9.3 Fourier' teisendus

Olgu f reaali- või kompleksväärtustega funktsioon, mis on absoluutselt integreeruv üle $\mathbb{R}$ (kas Riemanni päratu integraali või Lebesgue'i mõttes).

Definitsioon. Funktsiooni f Fourier' teisendiks nimetatakse funktsiooni

$$\mathcal{F}[f](s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-isx} f(x) dx, \quad s \in \mathbb{R}.$$

See integraal on absoluutselt koonduv iga $s \in \mathbb{R}$ korral, sest $|e^{-isx} f(x)| = |f(x)|$, kui $s, x \in \mathbb{R}$, ja f on absoluutselt integreeruv.

NB! Kui Laplace'i teisendus on üldiselt erinevates allikates defineeritud samamoodi, siis Fourier' teisendust defineeritakse erinevates kohtades erinevalt, näiteks

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-isx} f(x) dx, & \hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-isx} f(x) dx, \\ \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{isx} f(x) dx, & \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi isx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Muutuja tähisena kasutatakse tihti s asemel ka ξ ja vahel isegi f .

Lemma 6 (Fourier' teisendi ühtlane pidevus). *Olgu f absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel. Siis $\hat{f}$ on ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Näitame, et $\exists \delta > 0: |s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| < \varepsilon$. Valime $R > 0$ nii, et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^\infty \right) |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Siis

$$|\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (e^{-is_1 x} - e^{-is_2 x}) f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |e^{-is_1 x} - e^{-is_2 x}| |f(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui $|s_1 - s_2| < \delta$ ja $|x| \leq R$, siis

$$|e^{-is_1x} - e^{-is_2x}| = \left| \int_{s_2x}^{s_1x} -ie^{-it} dt \right| < |(s_1 - s_2)x| < \delta R.$$

Valides nüüd δ nii, et $\delta R \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$, saame

$$|\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| < \delta R \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Teoreem 62 (Riemann-Lebesgue'i lemma). Olgu f absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel ning tükiti pidev. Siis $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$.

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Valime $R > 0$ nii, et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Siis

$$|\hat{f}(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-R}^R e^{-isx} f(x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Olgu $a_1, \dots, a_n$ funktsiooni f katkevuspunktid vahemikus $(-R, R)$ ning olgu $a_0 = -R$ ja $a_{n+1} = R$. Nüüd f on ühtlaselt pidev lõikudes $[a_j, a_{j+1}]$. Seega leidub $\delta > 0$ nii, et kui $x_1, x_2 \in [a_j, a_{j+1}]$ ja $|x_1 - x_2| < \delta$, siis $|f(x_1) - f(x_2)| < \sqrt{2\pi}\varepsilon/8R$. Valime lõikudes $[a_j, a_{j+1}]$ punktid $a_j = b_{j,0} < b_{j,1} < \dots < b_{j,m_j} = a_{j+1}$ nii, et $b_{j,k+1} - b_{j,k} < \delta$ ning defineerime lõigul $[-R, R]$ tükiti konstantse funktsiooni $g(x) = f(b_{j,k})$, kui $x \in [b_{j,k}, b_{j,k+1})$.

Siis $|f(x) - g(x)| < \sqrt{2\pi}\varepsilon/8R \forall x \in [-R, R] \setminus \{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ ja seega

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |e^{-isx}| |f(x) - g(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-R}^R e^{-isx} g(x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon}{8R} \cdot 2R + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} f(b_{j,k}) \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} e^{-isx} dx \right| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} |f(b_{j,k})| \left| \frac{e^{-isx}}{-is} \right|_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N \max_{j=0, \dots, n, k=0, \dots, m_j-1} |f(b_{j,k})| \frac{2}{|s|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

kui $|s|$ on piisavalt suur, nii et esimene liidetav on väiksem kui $\frac{\varepsilon}{2}$ (siin N on punktide $b_{j,k}$ arv).

9.3.1 Fourier' teisenduse omadused

Olgu f ja g integreeruvad kogu reaalteljel.

1. **Lineaarsus:** $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. **Sarnasus:** $\mathcal{F}[f(\lambda x)](s) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{s}{\lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

$$\textbf{Tõestus. } \mathcal{F}[f(\lambda x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(\lambda x) dx \stackrel{y=\lambda x}{=} \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy/\lambda} f(y) dy = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{s}{\lambda}\right).$$

3. **Tuletise teisend:** kui $f, \dots, f^{(n)}$ on abs. integreeruvad, siis $\mathcal{F}[f^{(n)}](s) = (is)^n \hat{f}(s)$.
4. **Teisendi tuletis:** kui $f, x^n f$ on abs. integreeruvad, siis $\hat{f}^{(n)}(s) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](s)$.

5. **Nihke teisend:** $\mathcal{F}[f(x-y)](s) = e^{-isy} \hat{f}(s)$, $y \in \mathbb{R}$.

6. **Teisendi nihe:** $\hat{f}(s-\sigma) = \mathcal{F}[e^{i\sigma x} f(x)](s)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Lause 16 (Tuletise teisend). Kui $f, \dots, f^{(n)}$ on abs. integreeruvad, siis $\mathcal{F}[f^{(n)}](s) = (is)^n \hat{f}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Tõestus. Abitulemused:

1) kui f' on integreeruv, siis f on pidev ning leiduvad lõplikud $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(sest $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)dy$);

2) kui f on integreeruv üle $\mathbb{R}$ ning leiduvad lõplikud $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, siis $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

$$\mathcal{F}[f'](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-isx}}_u \underbrace{f'(x)dx}_{dv} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-isx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} is e^{-isx} f(x) dx \right) = (is) \hat{f}(s).$$

$\mathcal{F}[f^{(n)}]$ jaoks rakendame mat. induktsiooni.

Lause 17 (Teisendi tuletis). Kui f ja xf on absoluutselt integreeruvad, siis $\hat{f}'(s) = \mathcal{F}[-ixf(x)](s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Tõestus. $\hat{f}'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h}$.

$$\frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} - \mathcal{F}[-ixf(x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) dx$$

Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Valime $R > 0$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| |x| dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

Kuna $|e^{-ihx} - 1| = \left| \int_0^{hx} -ie^{-it} dt \right| \leq |hx|$, siis

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) e^{-isx} f(x) \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| 2|x| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siis $\left| \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} - \mathcal{F}[-ixf(x)](s) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| \left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right| dx + \frac{\varepsilon}{2}$.

Kuna $e^{-ihx} - 1 = \int_0^{hx} -ie^{-it} dt = -ihx + \int_0^{hx} e^{-it}(t-hx)dt$, siis

$$\left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_0^{|hx|} (|hx| - t) dt = \frac{|h|x^2}{2}.$$

Seega

$$\left| \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} - \mathcal{F}[-ixf(x)](s) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| \frac{|h|x^2}{2} dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

kui $|h|$ on piisavalt väike.

Järeldus 32. Kui $f, x^n f$ on abs. integreeruvad, siis $\hat{f}^{(n)}(s) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](s)$.

9.3.2 Konvolutsioon

Olgu f ja g absoluutselt integreeruvad kogu reaalteljel.

Definitsioon. Funktsioonide f ja g konvolutsiooniks nimetatakse reaalteljel defineeritud funktsiooni

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

See on üldisem konvolutsiooni definitsioon. Laplace'i teisenduse juures toodud konvolutsiooni saame üldisest definitsioonist, kui loeme f ja g nulliks, kui $t < 0$.

Lemma 7 (Konvolutsiooni abs. integreeruvus). Kui f ja g on absoluutselt integreeruvad kogu reaalteljel, siis ka $f * g$ on absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel.

Tõestus. $\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)|dy dx.$

Fubini teoreem: mittenegatiivsete funktsioonide korral võib vahetada integreerimisjärjekorra. Seega

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Teoreem 63 (Konvolutsiooni Fourier' teisend). Olgu f ja g absoluutselt integreeruvad kogu reaalteljel. Siis

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}.$$

Tõestus. $\mathcal{F}[f * g](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy dx.$ Kuna integraali all on absoluutselt integreeruv funktsioon, siis võib vahetada integreerimisjärjekorra (Fubini t.)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)} g(x-y) dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(t) dt dy = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s). \end{aligned}$$

9.4 Laplace'i ja Fourier' teisenduse rakendusi

9.4.1 Harilikud lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Vaatleme lineaarset konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandit

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(t)$$

algtingimustega

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Lühidalt $L(D)y = f$, kus $L(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k$ ja $D = \frac{d}{dt}$.

Rakendame võrrandile Laplace'i teisendust:

$$L(p)Y(p) - Q(p) = F(p), \quad Q(p) = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{m=0}^{k-1} p^{k-m-1} y_m.$$

Siit saame avaldada $Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)} + \frac{Q(p)}{L(p)}.$

Tähistame $G(p) = \frac{1}{L(p)}$ ning $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)](t)$. Funktsiooni g nimetatakse ka diferentsiaalope-
raatori $L(D)$ **fundamentaallahendiks** või **Greeni funktsiooniks**, ta rahuldab võrrandit $L(D)g = 0$, kui $t > 0$ ning $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-2)}(0) = 0, g^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}.$

Olgu $Q(p) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k p^k$. Kuna $\mathcal{L}[g^{(k)}(t)] = p^k G(p)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, siis $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{L(p)}\right](t) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k g^{(k)}(t).$

Siis esialgse ülesande lahend on $y(t) = (f * g)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} q_k g^{(k)}(t).$

Märkus. Kui on vaja lahendada lihtsalt üks konkreetne võrrand, siis üldiselt ei ole vaja hakata fun-
damentaallahendit välja kirjutama ja pärast konvolutsiooni arvutama. Tavaliselt on lihtsam rakendada
esialgsele võrrandile Laplace'i teisendust, avaldada Y ning võtta pöördteisendus.

9.4.2 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Vaatleme lineaarset konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\&\quad \dots \\y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t)\end{aligned}$$

algtingimustega $y_1(0) = y_{01}, y_2(0) = y_{02}, \dots, y_n(0) = y_{0n}$. Lühidalt $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.

Rakendame Laplace'i teisendust:

$$p\mathbf{Y}(p) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{Y}(p) + \mathbf{F}(p) \Rightarrow \mathbf{Y}(p) = (pI - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{F}).$$

Maatriksit $\mathcal{L}^{-1}[(pI - \mathbf{A})^{-1}](t)$ tähistatakse $e^{\mathbf{A}t}$, seda saab arvutada ka kujul $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k$.

Esialgse ülesande lahendi saab siis kirjutada kujul $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau$.

9.4.3 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Vaatleme lainevõrrandit:

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Siin $u(x, t)$ kirjeldab näiteks lõpmatu keele kõrvalekallet tasakaaluasendist ajamomendil t punktis x , $f(x, t)$ on keelele mõjuv väline jõud. Keele algasend on $u_0(x)$ ning keele algkiirus on $u_1(x)$.

Eeldame, et $u(x, t)$ ja $f(x, t)$ on igal fikseeritud ajamomendil integreeruvad x järgi. Võtame Fourier' teisenduse x järgi:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{tt}(s, t) &= -c^2 s^2 \hat{u}(s, t) + \hat{f}(s, t), \quad s \in \mathbb{R}, t > 0, \\\hat{u}(s, 0) &= \hat{u}_0(s), \quad \hat{u}_t(s, 0) = \hat{u}_1(s), \quad s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nüüd võtame Laplace'i teisenduse t järgi:

$$p^2 U(s, p) - p\hat{u}_0(s) - \hat{u}_1(s) = -c^2 s^2 U(s, p) + F(s, p).$$

Seega $U(s, p) = \frac{p\hat{u}_0(s) + \hat{u}_1(s) + F(s, p)}{p^2 + c^2 s^2}$.

Kuna $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + c^2 s^2}\right](s, t) = \frac{\sin cst}{cs}$ ja $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + c^2 s^2}\right](s, t) = \cos cst$, siis

$$\hat{u}(s, t) = \cos cst \hat{u}_0(s) + \frac{\sin cst}{cs} \hat{u}_1(s) + \int_0^t \frac{\sin cs(t-\tau)}{cs} \hat{f}(s, \tau) d\tau.$$

Nihke teisendi omadusest $\mathcal{F}[f(x-y)](s) = e^{-isy} \hat{f}(s)$.

Praktikumist $\mathcal{F}[\chi_{[-a,a]}](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin as}{s}$, seega $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin cst}{cs}\right] = \sqrt{2\pi} \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}$.

Konvolutsiooni Fourier' teisendi valem: $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$.

Kokkuvõttes saame lahendi

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Üldisemalt: poolrühma teooria

Olgu V, V' mingid (funktsioonide) ruumid, olgu $A: V \rightarrow V'$ tõkestatud lineaarne operaator.

Näide. $D \subset \mathbb{R}^n$, $V = \{u \in C^2(D) \cap C(\overline{D}): u|_{\Gamma} = 0\}$, $V' = C(D)$, $Au = \Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$.

Olgu $f: [0, \infty) \rightarrow V'$. Otsime funktsiooni $u: [0, \infty) \rightarrow V$, mis rahuldaks võrrandit

$$u' = Au + f, \quad u(0) = u_0.$$

Rakendame Laplace'i teisendust: $pU - u_0 = AU + F$. Kui $pI - A$ on pööratav piisavalt suure reaalosaga p korral, siis saame avaldada $U = (pI - A)^{-1}(u_0 + F)$ (siin ühikoperaatorit I tuleks ka vaadelda tegutsevana ruumist V ruumi V' , tavaliselt $V \subset V'$).

Operaatorit $\mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}](t)$ tähistatakse e^{At} , seda saab leida näiteks Laplace'i teisenduse pööramise valemi abil (siis valemis esinevad funktsioonid on kompleksmuutuja funktsioonid, aga operaatorväärtustega). Esialgse ülesande lahendi saab siis kirjutada kujul

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau.$$

Operaatorite peret $\{e^{At}: t \in [0, \infty)\}$ nimetatakse (operaatorite) poolrühmaks, operaatorit A selle poolrühma generaatoriks.

9.4.4 Konvolutsioonitüüpi integraalvõrrandid

Volterra integraalvõrrand

$$\lambda u + \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t), \quad t > 0.$$

Integraalvõrrand on I liiki kui $\lambda = 0$, II liiki kui $\lambda \neq 0$.

Rakendame Laplace'i teisendust: $\lambda U(p) + K(p)U(p) = F(p)$, seega $U(p) = \frac{F(p)}{\lambda + K(p)}$.

Kui $\lambda = 0$ ja $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{K(p)} \neq 0$, siis (piisavalt siledat) originaali ei leidu.

Fredholmi integraalvõrrand kogu reaalteljel

$$\lambda u + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integraalvõrrand on I liiki kui $\lambda = 0$, II liiki kui $\lambda \neq 0$.

Rakendame Fourier' teisendust: $\lambda \hat{u}(s) + \sqrt{2\pi} \hat{k}(s) \hat{u}(s) = \hat{f}(s)$, seega $\hat{u}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{\lambda + \sqrt{2\pi} \hat{k}(s)}$.

Kui $\lambda = 0$ ja $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}(s)}{\hat{k}(s)} \neq 0$, siis (piisavalt siledat) originaali ei leidu.

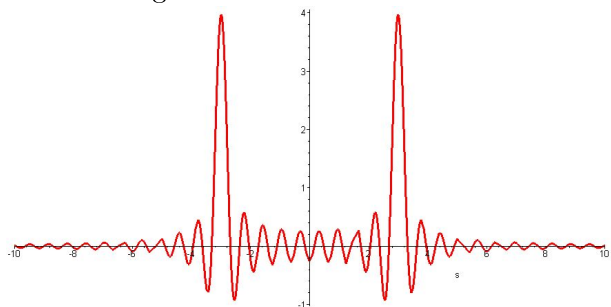
Kui mingi $s \in \mathbb{R}$ korral $\lambda + \sqrt{2\pi} \hat{k}(s) = 0$, siis iga f korral lahendit ei leidu.

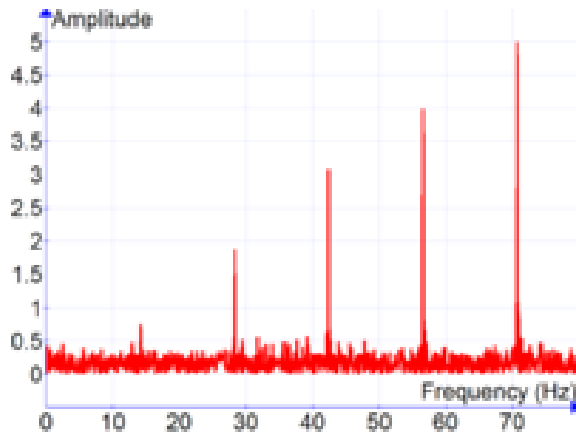
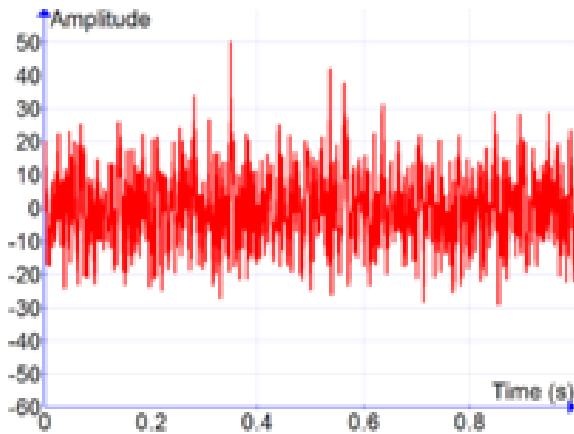
9.4.5 Signaalitöötlus

Antud mingi signaal $f(t)$, missugused on selles domineerivad sagedused?

Näide. $f(t) = \chi_{[-R, R]}(t) \sin \omega t$, $\omega = 3$, $R = 10$.

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(s - \omega)R}{s - \omega} + \frac{\sin(s + \omega)R}{s + \omega} \right).$$





9.4.6 Statistika

Olgu $f_X(x)$ reaalarvuliste väärtustega juhusliku suuruse X jaotuse tihedusfunktsioon. Selle juhusliku suuruse karakteristlik funktsioon on

$$E[e^{iXs}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} f_X(x) dx = \sqrt{2\pi} \hat{f}(-s).$$

Karakteristlik funktsioon on kasulik näiteks sõltumatute juhuslike suuruste summa uurimisel, sest sel juhul summa tihedusfunktsioon on liidetavate tihedusfunktsioonide konvolutsioon, seega summa karakteristlik funktsioon on liidetavate karakteristlike funktsioonide korrutis.

Karakteristlike funktsioonide abil tõestatakse näiteks tsentraalne piirteoreem.

9.5 Laplace'i ja Fourier' teisenduse pööramine

Teoreem 64 (Fourier' teisenduse pööramine). Olgu f tükiti pidev ja abs. integreeruv kogu reaalteljel. Siis igas punktis $y \in \mathbb{R}$, kus leiduvad lõplikud tuletise piirväärtused $f'(y+)$ ja $f'(y-)$, kehtib

$$\frac{1}{2}(f(y+) + f(y-)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \hat{f}(s) ds.$$

Tõestus. Asendame võrduse paremasse poolde $\hat{f}(s)$ definitsiooni ja jätame ära kordaja $\frac{1}{2\pi}$ ning piirväärtuse. Absoluutse integreeruvuse tõttu võime vahetada integreerimisjärjekorra (Fubini t.)

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R e^{iys} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-R}^R e^{i(y-x)s} ds dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left. \frac{e^{i(y-x)s}}{i(y-x)} \right|_{s=-R}^R dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2 \sin(y-x)R}{y-x} dx \stackrel{t=y-x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt + \int_0^{\infty} f(y+t) \frac{2 \sin tR}{t} dt \end{aligned}$$

Tähistame

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(y-t) - f(y-)}{t}, & 0 < t \leq 1, \\ \frac{f(y-t)}{t}, & t > 1. \end{cases}$$

Siis $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(y-t) - f(y-)}{t} = f'(y-)$, seega g on tõkestatud 0 parempoolses ümbruses. Kuna lõpmatuse ümbruses g käitub nagu $f(y-t)/t$, siis g on integreeruv $(0, \infty)$.

Riemann-Lebesgue'i lemma: kui f on absoluutselt integreeruv üle $\mathbb{R}$ ning tükiti pidev, siis $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$.

Seega $\int_0^\infty g(t) \sin tR dt \rightarrow 0$, kui $R \rightarrow \infty$. Järelikult

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty g(t) \sin Rt dt + \int_0^1 f(y-) \frac{2 \sin tR}{t} dt \right) \\ &= f(y-) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{2 \sin \tau}{\tau} d\tau = \pi f(y-). \end{aligned}$$

Samamoodi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(y+t) \frac{2 \sin tR}{t} dt = \pi f(y+).$$

Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \hat{f}(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt + \int_0^\infty f(y+t) \frac{2 \sin tR}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\pi f(y-) + \pi f(y+)) = \frac{1}{2} (f(y-) + f(y+)). \end{aligned}$$

Järeldus 33. Kui f ja g on tükiti pidevad ja reaalteljel absoluutselt integreeruvad ning igas punktis leiduvad lõplikud tuletiste ühepoolsed piirväärtused, ning nende Fourier' teisendid on võrdsed, siis f ja g on võrdsed, välja arvatud võib-olla katkevuspunktid.

Teoreem 65 (Laplace'i teisenduse pööramine). Olgu f tükiti pidev intervallis $[0, \infty)$. Olgu f eksponentsiaalse kasvuga ning olgu a_0 f kasvu näitaja. Olgu $F = \mathcal{L}[f]$. Kui mingi t korral leiduvad ühepoolsed tuletiste piirväärtused $f'(t+)$ ja $f'(t-)$, siis

$$\frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp$$

iga $c > a_0$ korral (nullpunktis tuleks võtta $f(0-) = 0$).

Tõestus. Defineerime $f(t) = 0$, kui $t < 0$. Olgu $c > a_0$. Kasutame Fourier' teisenduse pööramise teoreemi funktsiooni $e^{-ct} f(t)$ jaoks:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-ct} (f(t+) + f(t-)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{its} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ixs} e^{-cx} f(x) dx \right) ds \\ &\stackrel{p=c+is}{=} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{t(p-c)} \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx dp \\ &= e^{-ct} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{tp} F(p) dp. \end{aligned}$$

Järeldus 34. Kui f ja g on tükiti pidevad ja eksponentsiaalse kasvuga ning igas punktis leiduvad lõplikud tuletiste ühepoolsed piirväärtused, ning nende Laplace'i teisendid on võrdsed, siis f ja g on võrdsed, välja arvatud võib-olla katkevuspunktid.

9.6 Laplace'i teisenduse originaali olemasolu

Olgu antud funktsioon F , mis on regulaarne piirkonnas $\operatorname{Re} p > a$. Millal leidub $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, et $F = \mathcal{L}[f]$?

Teoreem 66 (Originaali olemasolu). Olgu F regulaarne piirkonnas $\operatorname{Re} p > a_0$. Eeldame, et

1) leidub $a_1 \geq a_0$ nii, et $\max_{|p|=r, \operatorname{Re} p \geq a_1} |F(p)| \rightarrow 0$, kui $r \rightarrow \infty$,

2) $\int_{-\infty}^\infty |F(c+is)| ds$ koondub iga $c \geq a_1$ korral.

Defineerime $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp$, $c \geq a_1$, $t \in \mathbb{R}$. Siis

- 1) $f(t) = 0$, kui $t < 0$,
- 2) leidub $M > 0$ nii, et $|f(t)| \leq Me^{a_1 t}$, kui $t \geq 0$,
- 3) f on pidev kogu reaalteljel,
- 4) $F = \mathcal{L}[f]$.

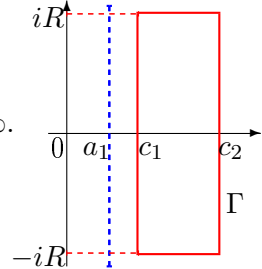
Tõestus. Defineerime $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp$, $c \geq a_1$, $t \in \mathbb{R}$. See integraal on absoluutselt koonduv. Näitame, et see definitsioon on korrektne, s.t. see integraal ei sõltu c -st. Olgu $c_1, c_2 \geq a_1$ ning $R > 0$. Olgu Γ ristkülik tippudega $c_1 \pm iR, c_2 \pm iR$.

Cauchy teoreemi põhjal $\int_{\Gamma} e^{pt} F(p) dp = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ristküliku horisontaalsetel külgedel $|p| \geq R$ ja $\operatorname{Re} p \geq a_1$, seega eelduse 1) põhjal

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} e^{(s \pm iR)t} F(s \pm iR) ds \right| \leq \max\{e^{c_1 t}, e^{c_2 t}\} \int_{c_1}^{c_2} |F(s \pm iR)| ds \rightarrow 0 \text{ kui } R \rightarrow \infty.$$

Seega

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_1-iR}^{c_1+iR} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_2-iR}^{c_2+iR} e^{pt} F(p) dp.$$



- 1) $f(t) = 0$, kui $t < 0$.

Olgu $c \geq a_1$ ning $R > |c|$. Olgu γ piiratud joontega $\operatorname{Re} p = c$ ja $|p| = R$ ($\operatorname{Re} p \geq c$). Cauchy teoreemi põhjal $\int_{\gamma} e^{pt} F(p) dp = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Olgu γ_R joone γ ringjoone kaarega määratud osa. Kui $t < 0$, siis Jordani lemma põhjal $\int_{\gamma_R} e^{pt} F(p) dp \rightarrow 0$, kui $R \rightarrow \infty$. Seega $\int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp \rightarrow 0$, kui $R \rightarrow \infty$ ja

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp = 0, \quad \text{kui } t < 0.$$

- 2) Leidub $M > 0$ nii, et $|f(t)| \leq Me^{a_1 t}$, kui $t \geq 0$.

Olgu $c = a_1$ ning $t > 0$. Siis

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ct} |F(c + is)| ds \leq Me^{a_1 t}.$$

- 3) f on pidev kogu reaalteljel.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp \stackrel{p=c-is}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c-is)t} F(c-is) ds,$$

seega $e^{-ct} f(t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[F(c-is)](t)$. Riemann-Lebesgue'i teoreemi põhjal on funktsioon $t \mapsto e^{-ct} f(t)$ pidev, seega on pidev ka f .

- 4) $F = \mathcal{L}[f]$.

Kui $c \geq a_1$, siis funktsioon $g(x) = F(c + ix)$, $x \in \mathbb{R}$ rahuldab Fourier' teisenduse pööramise teoreemi eeldusi (on pidevalt diferentseeruv ja integreeruv üle $\mathbb{R}$). Seega

$$\begin{aligned} F(c + iy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \hat{g}(s) ds = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F(c + ix) dx ds \\ &\stackrel{p=c+ix}{=} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-(p-c)s} F(p) dp ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{(c+iy)s} f(-s) ds \stackrel{t=-s}{=} \int_0^{\infty} e^{-(c+iy)t} f(t) dt = \mathcal{L}[f](c + iy). \end{aligned}$$

Järeldus 35. Olgu $F(p) = \sum_{k=1}^m a_k \frac{e^{-p\tau_k}}{p} + F_0(p)$, kus $\tau_k \geq 0$ ja F_0 rahuldab teoreemi eeldusi. Olgu $F_0 = \mathcal{L}[f_0]$. Siis f_0 on pidev ja eksponentsiaalse kasvuga ning $F = \mathcal{L}[f]$, kus $f(t) = \sum_{k=1}^m a_k H(t - \tau_k) + f_0(t)$.

Tõestus. $\mathcal{L}[H(t - \tau_k)](p) = \frac{e^{-p\tau_k}}{p}$.

9.7 Arendusteoreemid

Teoreem 67 (I arendusteoreem). Olgu F lõpmatuspunkti ümbruses esitatav Laurent'i reana $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$. Siis tema originaaliks on täisfunktsioon $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} t^k$.

Tõestus. Olgu $G(q) = F\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$. Siis G on regulaarne nulli mingis ümbruses. Cauchy võrratuse tõttu $\exists M, r > 0: |c_k| \leq Mr^k, k \in \mathbb{N}$. Olgu $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} t^k$. Kuna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{k!} t^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M \frac{r^{k+1}}{k!} |t|^k = Mre^{r|t|},$$

siis rida koondub igal pool ning f on eksponentsiaalse kasvuga. Kui $\operatorname{Re} p > r$, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} t^k e^{-pt}$ koondub ühtlaselt $[0, \infty)$, seega võib rida integreerida liikmeti. Järelikult

$$\mathcal{L}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} \mathcal{L}[t^k](p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Teoreem 68 (II arendusteoreem). Olgu F meromorfne ning regulaarne piirkonnas $\operatorname{Re} p > a_0$. Eeldame, et

1) leiduvad $R_1 < R_2 < \dots, R_n \rightarrow \infty$ nii, et $\max_{|p|=R_n} |F(p)| \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(c + is)| ds$ koondub iga $c \geq a$ korral.

Siis funktsiooni F originaal on $f(t) = \sum_k \operatorname{res}[e^{pt} F(p); p_k]$, kus resiidid on võetud kõigi F iseärase punktide suhtes ning $|p_1| \leq |p_2| \leq \dots$.

Tõestus. Olgu $c \geq a$ ning $R = R_n > |c|$. Olgu γ piiratud joontega $\operatorname{Re} p = c$ ja $|p| = R$ ($\operatorname{Re} p \leq c$). Resiidide teooria põhiteoreemi põhjal

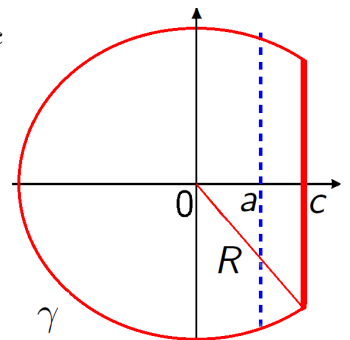
$$\int_{\gamma} e^{pt} F(p) dp = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}[e^{pt} F(p); p_k],$$

kus summa on võetud üle kõigi iseärase punktide $p_k \in B(0, R)$.

Teiselt poolt $\int_{\gamma} e^{pt} F(p) dp = \int_{c-ir}^{c+ir} e^{pt} F(p) dp + \int_{\gamma_R} e^{pt} F(p) dp$.

Jordani lemma põhjal viimane integraal koondub nulli, kui $t > 0$ ja $R \rightarrow \infty$. Seega

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-ir}^{c+ir} e^{pt} F(p) dp = \sum_k \operatorname{res}[e^{pt} F(p); p_k].$$



Peatükk 10

Riemanni dzeetafunktsioon

10.1 Riemanni dzeetafunktsiooni definitsioon

Tähistame $D_a = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a\}$, kus $a \in \mathbb{R}$.

Definitsioon. Riemanni dzeetafunktsioon on piirkonnas D_1 defineeritud võrdusega

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Siin n^s on defineeritud peaharuna, s.t. $n^s = e^{s \ln n} = n^{\sigma} e^{it \ln n}$, kus $s = \sigma + it$. Rida koondub absoluutselt piirkonnas D_1 ja ühtlaselt kinnises piirkonnas $\overline{D}_{1+\delta}$ iga $\delta > 0$ korral. Kuna $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ on regulaarsed kogu komplekstasandil ja rida koondub ühtlaselt piirkonnas $\overline{D}_{1+\delta}$ iga $\delta > 0$ korral, siis Riemanni dzeetafunktsioon on regulaarne piirkonnas D_1 .

10.1.1 Esitus lõpmatu korrutisena

Definitsioon. Lõpmatuks korrutiseks nim. avaldist $a_1 a_2 a_3 \cdots$, tähistatakse $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$. Lõpmatu korrutise

osakorrutiseks nim. korrutist $A_n = a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^n a_k$.

Definitsioon. Lõpmatu korrutise väärtuseks nim. tema osakorrutiste jada piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Kui lõpmatu korrutise väärtus on lõplik nullist erinev suurus, siis seda korrutist nim. koonduvaks, vastasel juhul hajuvaks.

Kui lõpmatu korrutis koondub, siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = 1$. Tavaliselt eeldatakse, et $a_k > 0$ (jättes vajadusel algusest ära lõpliku arvu tegureid). Kui $a_k \in \mathbb{C}$, siis tavaliselt eeldatakse, et $\operatorname{Re} a_k > 0$.

Lause 18. Lõpmatu korrutis $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$, kus $\operatorname{Re} a_k > 0$, koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$.

Tõestus. $\ln \prod_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \ln a_k$, kus vasakul pool on $\ln$ mingi haru.

Definitsioon. Lõpmatu korrutist $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ nim. absoluutselt koonduvaks, kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$ koondub absoluutselt.

Lause 19. Lõpmatu korrutis $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ koondub absoluutselt parajasti siis, kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ koondub absoluutselt.

Tõestus. Mõlemal juhul kehtib $\lim u_k = 0$. Kuna $|\ln(1+u_k)| \sim |u_k|$, kui $u_k \rightarrow 0$, siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1+u_k)|$ koondub parajasti siis, kui rida $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ koondub.

Lemma 8 (Euleri korrutis). Olgu $s \in D_1$ ning olgu $\mathbb{P}$ kõikide algarvude hulk. Siis $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

Tõestus. Kuna $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, siis $\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{2|n} \frac{1}{n^s}$. Seega $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{2 \nmid n} \frac{1}{n^s}$.

Nüüd $\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{2 \nmid n, 3|n} \frac{1}{n^s}$, seega $\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{2 \nmid n, 3 \nmid n} \frac{1}{n^s}$.

Jätkates $\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq p_k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = \sum_{2 \nmid n, \dots, p_k \nmid n} \frac{1}{n^s}$.

Minnes piirile $k \rightarrow \infty$, saame $\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) = 1$.

10.1.2 Dzeetafunktsiooni seos algarvude loendamise funktsiooniga

Definitsioon. Algarvude loendamise funktsiooniks nim. funktsiooni $\pi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0$, kus $\pi(x)$ on selliste algarvude arv, mis ei ületa arvu x .

Lause 20 (ζ ja π vaheline seos). Olgu $s \in D_1$. Siis $\text{Ln } \zeta(s) = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx$, kus vasakul on mingi Ln haru.

Tõestus. Kuna $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$ parajasti siis, kui n on algarv, siis

$$\begin{aligned} \text{Ln } \zeta(s) &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = - \sum_{n=2}^{\infty} (\pi(n) - \pi(n-1)) \ln \left(1 - \frac{1}{n^s}\right) \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \left(\ln \left(1 - \frac{1}{n^s}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \right) \quad \left(\ln \left(1 - \frac{1}{x^s}\right) \right)' = \frac{s}{x(x^s - 1)} \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s - 1)} dx = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx. \end{aligned}$$

10.2 Riemanni dzeetafunktsiooni analüütiline jätkamine

Lemma 9. Riemanni dzeetafunktsiooni saab analüütiliselt jätkata hulgale $D_0 \setminus \{1\}$.

Tõestus. Olgu $s \in D_1$. Kuna $2^{1-s} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s}$, siis $(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$. Kuna paremal pool olev summa koondub ühtlaselt piirkonnas D_δ iga $\delta > 0$ korral, siis parem pool on regulaarne piirkonnas D_0 . Seega võime jätkata

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad \text{kui } s \in D_0 \text{ ja } 2^{1-s} \neq 1 \text{ ehk } s \neq 1 + \frac{2k\pi}{\ln 2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Samamoodi saame näidata, et

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 3^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \text{kus } a_n = -2, \text{ kui } 3 \mid n \text{ ja } a_n = 1 \text{ muidu, ning } s \in D_0 \text{ ja } s \neq 1 + \frac{2k\pi}{\ln 3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nende hulkade ühend annab meile $D_0 \setminus \{1\}$.

Lemma 10. Riemanni dzeetafunktsioonil on punktis $s = 1$ esimest järku poolus ning $\operatorname{res}[\zeta(s); 1] = 1$.

Tõestus. $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s-1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2^{1-s} \ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

Teoreem 69. Riemanni dzeetafunktsiooni saab analüütiliselt jätkata kogu komplekstasandile, välja arvatud punkt $s = 1$, kasutades valemit

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Tõestus. Olgu $\operatorname{Re} s < 1$. Siis $(1-s) \in D_0$ ning parem pool on regulaarne, v.a. punkt 1. Kuna võrdus kehtib ribas $0 < \operatorname{Re} s < 1$, siis see valem defineerib ζ analüütilise jätku piirkonnale $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Punktis 0 on kõrvaldatav katkevus, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

10.2.1 Mõned väärtused

Definitsioon. Bernoulli arvud B_k , $k \in \mathbb{N}_0$ on defineeritud genereeriva funktsiooni kaudu:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k z^k}{k!}.$$

Saab näidata, et $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Siit saame, et

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

Samuti saab näidata, et $\zeta(-k) = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Siit $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ ehk "kõigi naturaalarvude summa on $-\frac{1}{12}$ ".

Kuna rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ koondub ühtlaselt piirkonnas $D_{1+\delta}$, kui $\delta > 0$, siis $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 1$.

10.3 Dzeetafunktsiooni nullkohad. Riemanni hüpotees

Näitasime, et $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ iga $s \in D_1$ korral, kusjuures see lõpmatu korrutis koondub absoluutselt. Seega dzeetafunktsioonil pole nullkohti piirkonnas D_1 .

Vaatleme funktsionaalvõrrandit $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$.

Definitsioon. Riemanni dzeetafunktsiooni [triviaalseteks nullkohtadeks](#) nim. nullkohti $s = -2, -4, -6, \dots$

Definitsioon. Riemanni dzeetafunktsiooni [kriitiliseks ribaks](#) nim. hulka $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$.

Lemma 11. Riemanni dzeetafunktsioonil pole mittetriviaalseid nullkohti väljaspool kriitilist riba.

Riemanni hüpotees (1859). Riemanni dzeetafunktsiooni kõik mittetriviaalsed nullkohad paiknevad joonel $\operatorname{Re} s = 1/2$.

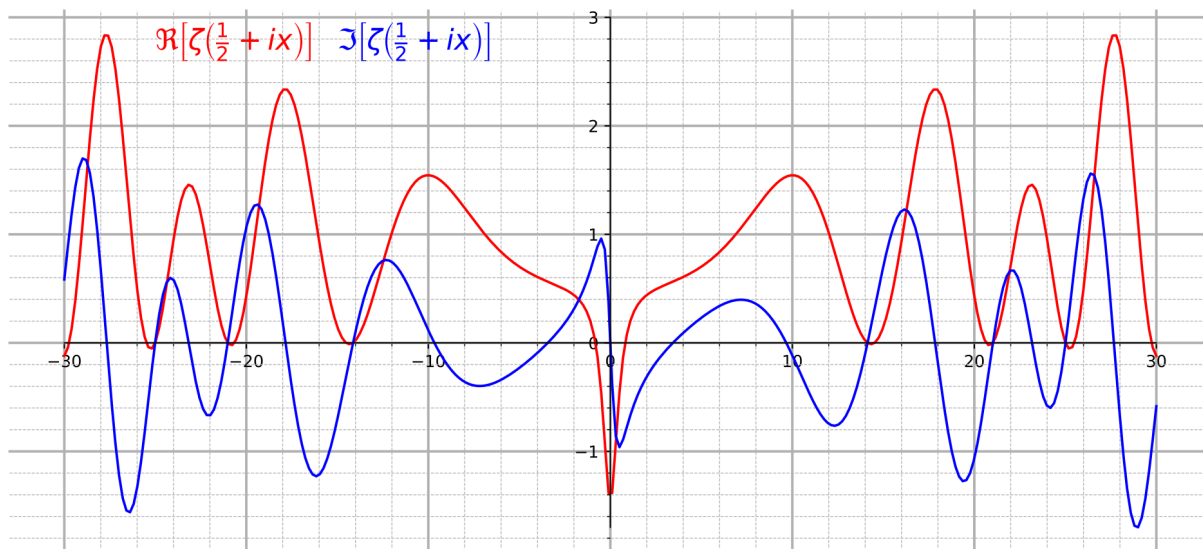
See on üks [Hilberti 23 probleemist](#), püstitatud aastal 1900. See on siia maani lahendamata (kokku on lahendamata 3 probleemi, lisaks mõned olid liiga ebamääraselt sõnastatud).

Aastal 2000 Clay Matemaatika Instituut püstitas 7 [millenniumiprobleemi](#), millest igaühe lahendamise eest on välja kuulutatud preemia 1 000 000 USD. Üks neist on Riemanni hüpotees.

Teoreem 70 (Hardy 1914). Riemanni dzeetafunktsioonil on lõpmata palju nullkohti, mis rahuldavad $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Praeguseks on leitud 12 363 153 437 138 nullkohta imaginaarosaga kuni 3 000 175 332 800, kõik need asuvad joonel $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Dzeetafunktsiooni reaali- ja imaginaarosa käitumine joonel $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.



Mõned tulemused, mis on saadud eeldusel, et Riemanni hüpotees kehtib

- $|\pi(x) - \operatorname{li} x| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln x$, kui $x \geq 2657$, kus $\operatorname{li} x = p.v. \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$.
- $\forall x \geq 2 \exists p \in \mathbb{P}: x - \frac{4}{\pi} \sqrt{x} \ln x < p \leq x$.
- $p_{k+1} - p_k = O(\sqrt{p_k} \ln p_k)$, kus p_k on k -s algarv.
- $\sigma(n) < e^\gamma n \ln \ln n$, kui $n > 5040$, kus $\sigma(n)$ on arvu n kõigi jagajate summa ning $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,57721$ (samaväärne Riemanni hüpoteesiga).