

Ühe muutuja matemaatiline analüüs

Praktikumiülesannete kogu

2023. a. kevadsemester

Valminud Hariduse Infotehnoloogia Sihtasutuse IT Akadeemia programmi toel.

1. Järjestatud korpuse omadused

1. Aksioomidest (A1)–(A4) lähtudes tõestage, et

- 1) nullelement 0 on igas korpuses F üheselt määratud;
- 2) iga $a \in F$ korral on vastandelement $-a$ üheselt määratud;
- 3) võrrandil $a + x = b$ on korpuses F parajasti üks lahend $x := b - a$;
- 4) $-(a + b) = -a - b$.

2. Aksioomidest (M1)–(M4) lähtudes tõestage, et

- 1) ühikelement 1 on igas korpuses F üheselt määratud;
- 2) iga $b \neq 0$ korral on pöördelement b^{-1} üheselt määratud;
- 3) kui $a \neq 0$, siis võrrandil $a \cdot x = b$ on korpuses F parajasti üks lahend $x := b \cdot a^{-1}$;
- 4) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

3. Korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et korpuses F kehtivad järgmised väited:

- 1) $0a = 0$ iga $a \in F$ korral;
- 2) kui $ab = 0$, siis kas $a = 0$ või $b = 0$ (s.t. $F \setminus \{0\}$ ei sisalda nullitegureid);
- 3) $(-a)b = -(ab)$ kõikide $a, b \in F$ korral, muuhulgas $(-1)b = -b$;
- 4) $(-a)(-b) = ab$ kõikide $a, b \in F$ korral.

4. Järjestatud korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et järjestatud korpuses F kehtivad järgmised väited:

- | | |
|--|---|
| 1) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$, | 5) $[0 < a < b, 0 < c < d] \Rightarrow ac < bd$, |
| 2) $[a < b, c < 0] \Rightarrow ac > bc$, | 6) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$, |
| 3) $a^2 > 0$ iga $a \in F \setminus \{0\}$ korral, muuhulgas $1 > 0$, | 7) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$, |
| 4) $[a < b, c < d] \Rightarrow a + c < b + d$, | 8) kui $a < b$, siis $a < 2^{-1}(a + b) < b$,
kus $2 := 1 + 1$. |

5. Olgu $F = \{0, 1\}$, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele liitmisele ja korrutamisele, välja arvatud $1 + 1 = 0$. Näidata, et F on korpus. Kas F on ka järjestatud korpus?

6*. Olgu $F = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele liitmisele ja korrutamisele. Näidata, et F on korpus. Kas F on ka järjestatud korpus tavalise reaalarvude järjestuse suhtes?

7*. Olgu $\mathbb{C}$ kompleksarvude hulk, kus tehted on defineeritud vastavalt tavalisele kompleksarvude liitmisele ja korrutamisele. Näidata, et $\mathbb{C}$ on korpus. Kas korpuses $\mathbb{C}$ saab defineerida järjestuse nii, et $\mathbb{C}$ oleks järjestatud korpus?

2. Alumine ja ülemine raja.

- 8.** Tõestage, et järjestatud korpus F ei leidu vähimat positiivset elementi.
- 9.** Tõestage, et alamhulga ülemine raja järjestatud korpus on üheselt määratud (eeldusel, et ta on olemas).
- 10.** Tõestage, et kui järjestatud korpus alamhulgas on suurim (vähim) element, siis see on selle hulga ülemine (alumine) raja.
- 11.** Tõestage, et kui $a = \sup X$, siis alamhulk $Y := \{\lambda x + 1 : x \in X\}$ on iga $\lambda > 0$ korral ülalt tõkestatud ning $\sup Y = \lambda a + 1$.
- 12.** Olgu $X \neq \emptyset$ ja $Y \neq \emptyset$ sellised reaalarvude hulgad, et $x \leq y$ kõikide $x \in X$ ja $y \in Y$ korral. Tõestage, et X on ülalt ja Y on alt tõkestatud ning $\sup X \leq \inf Y$.
- 13.** Leidke $\min X$, $\max X$, $\inf X$ ja $\sup X$, kui

$$\begin{aligned} 1) X &:= [-1, 0) \cup [1, 2), & 3) X &:= \left\{ \frac{(-1)^n n - 1}{n + 2} : n \in \mathbb{N} \right\}, & 5) X &:= \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}, \\ 2) X &:= \left\{ \frac{2n + 1}{2n + 3} : n \in \mathbb{N} \right\}, & 4) X &:= \left\{ \sqrt{x^2 + 1} - x : x \in \mathbb{R} \right\}, & 6) X &:= \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}. \end{aligned}$$

vspace-2mm

- 14.** Olgu X ja Y täieliku järjestatud korpus F mittetühjad alamhulgad. Tõestage järgmised väited.

- Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.
- Kui X ja Y on alt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y$ alt tõkestatud ning $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.
- Kui X on ülalt ja Y alt tõkestatud, siis on hulk $X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$.
- Kui X on alt ja Y ülalt tõkestatud, siis on hulk $X - Y := \{x - y : x \in X, y \in Y\}$ alt tõkestatud ning $\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$.
- Olgu X ja Y sellised hulgad, mille kõik elemendid on mittenegatiivsed. Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X \cdot Y := \{xy : x \in X, y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ning $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$.

- 15*.** Leidke järgmised suurused:

$$\sup \{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor : n \in \mathbb{N} \}, \quad \sup \left\{ \frac{(n + m)^2}{2nm} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- 16*.** Olgu $\mathbf{I}$ mingi indeksite hulk (lõplik või lõpmatu). Olgu $A = \{a_\iota : \iota \in \mathbf{I}\}$ ja $B = \{b_\iota : \iota \in \mathbf{I}\}$ mingid reaalarvude hulgad. Näidata, et

$$\sup \{a_\iota + b_\iota : \iota \in \mathbf{I}\} \leq \sup A + \sup B,$$

$$\inf \{a_\iota + b_\iota : \iota \in \mathbf{I}\} \geq \inf A + \inf B.$$

Millistel tingimustel kehtib ülaltoodud võrratustes võrdus? Tuua näide hulkadest, mille korral võrratus range.

3. Arvjadad. Jada piirväärtuse definitsioon ja omadused

17. Tõestage, et kui $x_n \rightarrow 0$ ja (y_n) on tõkestatud jada, siis $x_n y_n \rightarrow 0$.

18. Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow b$, siis

1) $x_n + y_n \rightarrow a + b$;

4) $\lambda x_n \rightarrow \lambda a$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ puhul;

6) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ($b \neq 0, y_n \neq 0$).

2) $x_n - y_n \rightarrow a - b$;

5) $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$ ($a \neq 0, x_n \neq 0$);

3) $x_n y_n \rightarrow ab$;

19. Koondugu jada (x_n) ja hajugu jada (y_n) . Mida võib öelda jadade $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ koonduvuse kohta? Tooge sobivaid näiteid.

20. Hajugu mõlemad jadad (x_n) ja (y_n) . Kas jadad $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ samuti hajuvad? Tooge sobivaid näiteid.

21. Kehtigu $\lim_n x_n = 0$ ning hajugu jada (y_n) . Kas kehtib ka $\lim_n x_n y_n = 0$? Tooge sobivaid näiteid.

22. 1) Olgu $N \in \mathbb{N}$ ja olgu (x_n) selline jada, et $x_n = a$ iga $n \geq N$ korral. Näidake, et $\lim_n x_n = a$.

2) Tooge näide hajuvast jadast (x_n) , kus $x_n = a$ lõpmata paljude indeksite n korral.

23. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \sqrt{2n}} = 0$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}} = 0$;

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 3}{10n - 3} = \frac{1}{2}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + 5n} = 0$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 5}{8n - 3} = \frac{1}{2}$;

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \infty$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n}{2 + n} = 7$;

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 8}{n^2 - 25} = 0$;

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n + 3} = \infty$.

24. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, tõestage, et järgmiseid piirväärtuseid ei leidu.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + (-1)^n$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n + (-2)^n$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

25*. Olgu $x_1 = 4, x_2 = 1$ ja $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$, kui $n \geq 2$. Kas jada (x_n) on koonduv? Põhjendage. Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

26*. Olgu $x_1 = A, x_2 = B$, kus $0 < B < A$. Kehtigu seos $\frac{2}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}$ iga $n \geq 2$ korral. Tõestage, et jada (x_n) koondub ja leidke selle piirväärtus.

4. Jada piirväärtuse omadused ja arvutamine

- 27.** 1) Tõestage, et kui $\lim_n x_n = a$, siis $\lim_n |x_n| = |a|$.
 2) Veenduge, et vastupidine väide on üldjuhul väär.
 3) Tõestage, et $\lim_n x_n = 0$ parajasti siis, kui $\lim_n |x_n| = 0$.
- 28.** Tõestage, et $\lim_n |x_n| = \infty$ parajasti siis, kui $\lim_n \frac{1}{x_n} = 0$.
- 29.** Tõestage, et arvjada (x_n) on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $K > 0$, et $|x_n| \leq K$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.
- 30.** 1) Olgu $\lim_n x_n = a > 0$. Näidake, et leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n > 0$ iga $n \geq N$ korral.
 2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide juhul $a < 0$.
- 31.** Veenduge, et kui $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow a$, siis ka $z_n \rightarrow a$, kus $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$, s.t.

$$z_n := \begin{cases} x_k, & \text{kui } n = 2k - 1, \\ y_k, & \text{kui } n = 2k. \end{cases}$$

- 32.** Olgu $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$. Veenduge, et $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ ning $\lim_n \min\{x_n, y_n\} = \min\{a, b\}$.
- 33.** Tõestage, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral leidub ratsionaalarvude jada (x_n) omadusega $x_n \rightarrow a$. (Kasutage asjaolu, et $\mathbb{Q}$ on tihe korpuses $\mathbb{R}$.)
- 34.** Leida järgmiste jadade piirväärtused:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - (-1)^n$; | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{1,1^n} + \sqrt[n]{3}$; | 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n + \frac{1}{(-2)^n}$; |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n - 3}{(3n + 2)^2}$; | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{(1 - 2n)^2}$; | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - n)$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} + n^2 \sin n\pi$; | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 1}{3^n - 2}$; | 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n(n+1)} - n)$. |

- 35.** Leidke järgmiste jadade piirväärtused:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$; | 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n + 2}$; | 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$; |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{n}$; | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n + 5}$; | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+2]{n^2 + 4n - 2}$. |

- 36*.** Olgu $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Leidke piirväärtus $\lim_n x_n$.

- 37*.** Olgu $a > 1$ ning $k \in \mathbb{N}$. Näidata, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

- 38*.** Olgu $a \in \mathbb{R}$. Arvutage piirväärtus

$$\lim_n \frac{1}{n} \left(\left(a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right).$$

5. Monotoonsusprintsip. Cauchy kriteerium. Osajadad

- 39.** Rahuldagu jada (x_n) iga naturaalarvu n korral seost $x_{n+1} = \frac{8}{x_n}$. Kas jada (x_n) on koonduv? Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 40.** Jada (x_n) on defineeritud järgmiselt: $x_1 = \frac{3}{2}$ ja $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$, kui $n \in \mathbb{N}$. Uurige jada (x_n) koonduvust. Kui jada koondub, siis leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 41.** Kasutades Cauchy kriteeriumi, näidake, et jada $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$ on koonduv.
- 42.** Kasutades Cauchy kriteeriumi, näidake, et jada $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ on hajuv.
- 43.** Kasutades Cauchy kriteeriumi, näidake, et jada $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ on koonduv.
- 44.** 1) Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) ja (x_{n_k}) on jada (x_n) osajada, siis $x_{n_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$).
2) Tooge näide hajuvast jadast, millel on koonduv osajada.
- 45.** Tooge näide arvjadast (x_n) , mille osapiirväärtuste hulk oleks antud arvuhulk $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.
- 46.** Tooge näide arvjadast (x_n) , mille osapiirväärtuste hulgas esineks kõik arvud arvjadast $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Milliseid osapiirväärtusi omab jada (x_n) kindlasti veel?
- 47.** Tooge näited järgmistest arvjadadest (x_n) :
- 1) millel puuduksid lõplikud osapiirväärtused,
 - 2) millel oleks üks lõplik osapiirväärtus, ent mis poleks koonduv jada,
 - 3) mille osapiirväärtuste hulk oleks lõpmatu,
 - 4) mille osapiirväärtuste hulk oleks $\mathbb{R}$.
- 48.** Leidke järgmiste jadade osapiirväärtuste hulk.
- 1) $x_n = \frac{2 + (-1)^n n}{3 + n} + \sin \frac{n\pi}{4}$,
 - 2) $x_n = \left(\cos \frac{2n\pi}{3} \right)^n$,
 - 3) $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, \dots$,
 - 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$,
 - 5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$,
 - 6) $x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2 \cdot (-1)^n$.
- 49*.** Jada (x_n) on defineeritud järgmiselt: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ ja $x_{n+2} = \frac{1}{3} (1 + x_{n+1} + x_n^3)$, kui $n \in \mathbb{N}$. Kas jada (x_n) on koonduv? Põhjendage. Kui jada koondub, siis leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 50*.** Rahuldagu jada (a_n) liikmed järgmisi tingimusi: $0 < a_n < 1$ ja $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$, kui $n \in \mathbb{N}$. Kas jada (a_n) on koonduv? (Põhjendage!) Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6. Piirväärtus tüüpi 1^∞ . Alumine ja ülemine piirväärtus

51. Leidke järgmiste jadade piirväärtused:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} + \sqrt[n]{2n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+3}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2+1}.$$

52. Olgu $k, m \in \mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{mn}$.

53. Olgu (x_n) tõkestatud jada. Tõestage, et $\lim_n x_n = \sup \{\inf \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$ ja $\overline{\lim}_n x_n = \inf \{\sup \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

54. Tõestage, et $\inf_n x_n \leq \lim_n x_n \leq \overline{\lim}_n x_n \leq \sup_n x_n$.

55. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad, kusjuures iga n korral $x_n \leq y_n$. Tõestage, et $\lim_n x_n \leq \lim_n y_n$ ja $\overline{\lim}_n x_n \leq \overline{\lim}_n y_n$.

56. Olgu (x_n) tõkestatud jada.

1) Tõestage, et kui $c > 0$, siis $\lim_n (cx_n) = c \cdot \lim_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_n x_n$.

2) Tõestage, et kui $c < 0$, siis $\lim_n (cx_n) = c \cdot \lim_n x_n$ ja $\overline{\lim}_n (cx_n) = c \cdot \overline{\lim}_n x_n$.

57. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad. Tõestage, et

$$\lim_n x_n + \lim_n y_n \leq \lim_n (x_n + y_n) \leq \lim_n x_n + \overline{\lim}_n y_n \leq \overline{\lim}_n (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_n x_n + \overline{\lim}_n y_n.$$

Tooge näiteid, millal võrratused kehtivad rangete võrratustena.

58. Olgu jada (x_n) koonduv ning (y_n) tõkestatud. Tõestage, et $\overline{\lim}_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \overline{\lim}_n y_n$.

59. Leidke järgmiste jadade (x_n) jaoks $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\lim x_n$ ja $\overline{\lim}_n x_n$.

$$\begin{array}{lll} 1) x_n = 1 - \frac{1}{n}, & 4) x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}, & 8) x_n = n^{-n}, \\ 2) x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right), & 5) x_n = \frac{(-1)^n n}{((-1)^n + 2)n + 3}, & 9) x_n = \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{n\pi}{4}, \\ 3) x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, & 6) x_n = \frac{n - 10,2}{n(2 + (-1)^n)}, & 10) x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n. \end{array}$$

60*. Olgu antud jadad (x_n) ja (y_n) , kus $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, ning $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ ja $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, kui $n \in \mathbb{N}$. Tõestage, et $\lim x_n = \lim y_n$ (seda piirväärtust nimetatakse ka arvude a ja b aritmeetilis-geomeetriliseks keskmiseks).

61*. Olgu (a_n) positiivsete liikmetega jada nii, et $\lim_n \frac{a_n}{n} = 0$ ja $\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \in \mathbb{R}$.

$$\text{Leidke } \lim_n \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n^2}.$$

62*. Olgu (a_n) jada, mille korral osajada $(a_{mk})_{k=1}^\infty$ koondub iga $m = 2, 3, 4, \dots$ korral. Kas sel-
lest järeldub, et jada (a_n) koondub?

7. Funktsiooni piirväärtuse definitsioon ja omadused

63. Veenduge, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eksisteerib, siis on ta üheselt määratud.

64. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui eksisteerivad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =: B$, siis $A \leq B$.

65. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq B$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui leidub lõplik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: A$, siis $A \leq B$.

66. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) =: A$, siis $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

67. Olgu f ja g määratud hulgal D ning olgu a hulga D kuhjumispunkt. Tõestage, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, siis

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda A \text{ (kus } \lambda \in \mathbb{R}),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = AB,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (kus } g(x) \neq 0 \forall x, B \neq 0).$$

68. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε - δ -definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x} = 1;$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^3 = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 1}{x + 5} = 1;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = 2;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = -4;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x - 3} = -9;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x + 2} = -1;$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -4+} \sqrt{x + 4} = 0;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2) = 10;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{8}{x - 3} = 2;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1-} \sqrt{1 - x} = 0.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3;$$

69. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{1}{2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{x + 1} = 3;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + 1} = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{3x + 2} = \frac{1}{3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{3x + 7} = \frac{5}{3};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x + 1} = -\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{3x + 2} = \frac{1}{3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 5}{3x + 1} = \frac{2}{3};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x} = -\infty.$$

70. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse definitsioonist, tõestage, et järgmiseid piirväärtuseid ei leidu:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}.$$

71*. Olgu $a, b > 0$. Leidke piirväärtused $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right]$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}$.

72*. Olgu $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tõkestatud igas lõplikus vahemikus (a, b) . Eeldame, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x + 1) - f(x)) = A \in \mathbb{R}. \text{ Näidata, et siis ka } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

8. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine. Funktsiooni pidevus.

73. Arvutage järgmised piirväärtused.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 15};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1-\sqrt{x+3}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{1 - \sqrt{x^2 + 1}};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+2x}}{1 - \sqrt{1+2x}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, n \in \mathbb{N}.$$

74. Arvutage järgmised piirväärtused.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 5x^4 + 1}{3x^5 + 2x^3 - 6};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{x + 5};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{5x^4 + x - 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{x + 5};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x + 2}{3x^2 + x - 6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 3x - \sqrt{2x}}} \right).$$

75. Arvutage järgmised ühepoolised piirväärtused.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{|x-2|};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{|3-x|}{3-x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2 - 4}{|x+2|};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{|x-2|};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{x-1};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2 - 4}{|x+2|};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{|3-x|}{3-x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{x-1};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 + 1}.$$

76. Tõestage, et kui funktsioonid $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidevad punktis $a \in D$, siis ka funktsioonid $f \pm g$, λf ja fg on punktis a pidevad.

77. Tõestage, et iga polünoom on kogu arvteljel $\mathbb{R}$ pidev funktsioon.

78. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellised pidevad funktsioonid, et $f(x) = g(x)$ iga $x \in \mathbb{Q}$ korral. Tõestage, et siis $f = g$, s.t. $f(x) = g(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

79. 1) Olgu funktsioon f pidev punktis a ja olgu $f(a) > 0$. Näidake, et siis leidub punkti a selline ümbrus, milles funktsiooni f väärtused on kõik positiivsed.

2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide olukorra $f(a) < 0$ kohta.

80. Funktsioon f on pidev intervallis $[0, \infty)$ ning $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Tõestage, et f on tõkestatud intervallis $[0, \infty)$.

81*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} - x \right)$.

82*. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$.

9. Elementaarfunktsioonid. Pöördfunktsioon. Elementaarfunktsioone sisaldavad piirväärtused.

83. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad:

- 1) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 3)$;
- 2) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{2+x}$;
- 3) $f(x) = \arccos \frac{2x}{x+1}$;
- 4) $f(x) = \sqrt{\ln \sin x}$;
- 5) $f(x) = \sqrt{2 \arctan x - 3}$;
- 6) $f(x) = \log_2(x - |x|)$.

84. Tõestage pidevuse ε - δ -definitsioonist lähtudes, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

- 1) $f(x) = \sqrt{x-2}$;
- 2) $f(x) = \cos x$;
- 3) $f(x) = \ln x$.

85. Millised järgnevatest on elementaarfunktsioonid?

- 1) $f(x) = \ln(\arctan(x^2 + 1))$;
- 2) $f(x) = |x|$;
- 3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0; \end{cases}$
- 4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$

86. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid:

- 1) $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$;
- 2) $f(x) = \arccos \frac{x^2}{4}, x \in [-2, 0]$;
- 3) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x < 1, \\ x^2, & \text{kui } 1 \leq x < 4, \\ 2^x, & \text{kui } x \geq 4. \end{cases}$

87. Lähtudes võrratustest $\sin x < x < \tan x$ ($0 < x < \pi/2$), tõestage, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

88. Näidata, et

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$.

89. Arvutage järgmised piirväärtused.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 5x}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\arcsin 5x}$,
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin 2x}$,
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \frac{x}{2})^2}{2x^2}$,
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

90. Arvutage järgmised ühepoolsed piirväärtused.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|\sin x|}$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|\sin x|}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) |\tan x|$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) |\tan x|$.

91*. Olgu D mingi intervall. Öeldakse, et funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on *kumer*, kui mistahes arvude $x, y \in D$ ja mistahes arvu $\lambda \in [0, 1]$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(Piltlikult öeldes tähendab funktsiooni f kumerus seda, et f graafik on nõgus.)

Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Kas sellest, et f on kumer lõigus $[a, b]$ järeldub, et f on pidev lõigus $[a, b]$?

10. Elementaarfunktsioone sisaldavad piirväärtused. Ekvivalentsed suurused. Landau sümbolid.

92. Arvutage järgmised piirväärtused.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^x$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{3x^2}$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1-} (\sin x)^{\frac{x}{x-1}}$,
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2+} \left(\frac{x-2}{2x^2-3x-2} \right)^{\ln \frac{x-2}{x+1}}$,
- 7) $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{10^{\frac{\cos x}{x+1}}}{5^{\frac{\sin x}{x+1}}}$,
- 8) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 2} \right)^x$.

93. Teha kindlaks, kas vaadeldavas protsessis $\alpha = o(\beta)$, $\beta = o(\alpha)$ või $\alpha \sim \beta$.

- 1) $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n!}$, kui $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\alpha(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$, $\beta(x) = \frac{1}{x}$, kui $|x| \rightarrow \infty$;
- 3) $\alpha(x) = x^3 - 1$, $\beta(x) = \sqrt[3]{x-1}$, kui $x \rightarrow 1$;
- 4) $\alpha(x) = \sin x + \tan 2x$, $\beta(x) = 3x$, $x \rightarrow 0$;
- 5) $\alpha(x) = \sqrt[n]{1+x} - 1$, $\beta(x) = \frac{x}{n}$, kui $x \rightarrow 0$;
- 6) $\alpha(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, $\beta(x) = \frac{1}{x^2}$, kui $|x| \rightarrow \infty$.

94. Leida C ja k nii, et vaadeldavas protsessis $\alpha \sim C\beta^k$.

- 1) $\alpha_n = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^3 + 2}}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$, kui $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\alpha(x) = \sin x - \tan x$, $\beta(x) = x$, kui $x \rightarrow 0$;
- 3) $\alpha(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x-1}}$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow 0$;
- 4) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow 0$;
- 5) $\alpha(x) = \ln(e^x + 1)$, $\beta(x) = x$, kui $x \rightarrow \infty$;
- 6) $\alpha(x) = \ln(e^x + 1)$, $\beta_n = e^x$, kui $x \rightarrow -\infty$.

95. Arvutage järgmised piirväärtused, võimalusel kasutades ekvivalentseid suuruseid.

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - \sqrt[3]{x+1})}{(x^2+x) \ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)}$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+\sin x}\right)$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-\sin x} - \sqrt[4]{1+\sin x}}{x}$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+2x+15} \arctan \frac{2x+4}{x^2+x-2}$,
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$.

96*. Leida piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right)$.

11. Katkevad funktsioonid. Ühtlane pidevus.

97. Määrake katkevuse liik ja kõrvaldage (kui võimalik) funktsiooni katkevus punktis $x = 0$.

- | | | |
|-------------------------------------|---|----------------------------|
| 1) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$; | 3) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; | 5) $f(x) = (1+x)^{1/x}$; |
| 2) $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$; | 4) $f(x) = \frac{\arcsin x}{2 \tan 5x}$; | 6) $f(x) = \ln \sin x $. |

98. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leq 1, \\ x^3, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ | 3) $f(x) = \begin{cases} \ln x , & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } x = 0, \\ x^2 + 1, & \text{kui } 1 < x < 2, \\ 5, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$ |
| 2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 3-ax^2, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ | 4) $f(x) = \frac{ 3x-2 }{3x-2}$. |

99. Tõestage, et Dirichlet' funktsioon $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ ei ole pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

100. Tõestage, et seosega $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ määratud funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ainult punktis $a = 0$.

101. Tooge näited funktsioonidest $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis üheski punktis $a \in \mathbb{R}$ ei ole pidev, kuid

- 1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(x)^2$, on pidev funktsioon;
- 2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, on pidev funktsioon;
- 3) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, pole samuti pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

102. Näidake, et kui $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis ka seosega $g(x) := |f(x)|$ määratud funktsioon $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev. Tooge näide selle kohta, et vastupidine väide on väär.

103. Olgu $f(x) := 2^k - 1$, kui $x \in [k-1, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Uurige selle funktsiooni pidevust.

104. Millised järgmistest funktsioonidest on ühtlaselt pidevad hulgas X ? Põhjendada.

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = 3 \sin x - 4 \cos x$, $X = \mathbb{R}$; | 5) $f(x) = \ln(2x+3) + \frac{2x^2-1}{x^3+1}$, $X = (0, 10)$; |
| 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $X = [0, \infty)$; | |
| 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $X = (0, \infty)$; | 6) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $X = [-\pi, \pi]$; |
| 4) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $X = (-1, 1)$; | 7) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. |

105*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pidev monotoonne funktsioon ning olgu jada (x_n) tõkestatud. Tõestage, et kui f on kasvav, siis $\lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right)$ ning kui f on kahanev, siis $\lim_n f(x_n) = f\left(\overline{\lim_n x_n}\right)$.

106*. Tõestage, et **ei leidu** pidevat funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis saavutaks kõik oma väärtused täpselt kaks korda.

12. Diferentseeruvad funktsioonid

107. Tuletise definitsioonist lähtudes leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

- | | | |
|-------------------|---------------------------|------------------------|
| 1) $f(x) = x^2$; | 4) $f(x) = \cos x$; | 7) $f(x) = \sqrt{x}$; |
| 2) $f(x) = x^3$; | 5) $f(x) = \frac{1}{x}$; | 8) $f(x) = b^x$; |
| 3) $f(x) = x^n$; | 6) $f(x) = e^x$; | 9) $f(x) = \log_a x$. |

108. Tõestage, et kui funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.

109. Tõestage, et kui funktsioonid f ja g on punktis a diferentseeruvad, siis

- $\lambda f + \mu g$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on punktis a diferentseeruv ja $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;
- fg on punktis a diferentseeruv ja $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- kui lisaks $g(a) \neq 0$, siis $\frac{f}{g}$, on punktis a diferentseeruv ja $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

110. Kasutades pöördfunktsiooni tuletise leidmise valemit, leida tuletis funktsioonidest

- | | | |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1) $f(x) = \ln x$; | 2) $f(x) = \arcsin x$; | 3) $f(x) = \arctan x$. |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|

111. Näidake, et funktsioon $y = |x|$ ei ole punktis $x = 0$ diferentseeruv.

112. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x^2 + lx, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$ Milliste konstantide k ja l korral on f diferentseeruv?

113. Tooge näide mittediferentseeruvast funktsioonist f , mille korral funktsioon $g(x) = f(x)^2$ on diferentseeruv.

114. Funktsioon $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv paarisfunktsioon lõigul $[-1, 1]$. Leidke $f'(0)$.

115. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $f(x) = \sin^3 x$; | 4) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; | 7) $f(x) = \frac{e^x}{x} + \sqrt{2x}$; |
| 2) $f(x) = \ln \tan x$; | 5) $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$; | 8) $f(x) = (\cos x) \cdot \tan x$; |
| 3) $f(x) = 2^{\cos x}$; | 6) $f(x) = e^x \sin x$; | 9) $f(x) = x^a x^x$ ($a > 0$). |
| 10) $f(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$; | 14) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$; | |
| 11) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$; | 15) $f(x) = x \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) - \sqrt{1+x^2}$; | |
| 12) $f(x) = \ln \left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}} \right)$; | 16) $f(x) = \ln(1+4x^2) + \arctan 2x$; | |
| 13) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$; | 17) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; | |

116*. Tooge näide funktsioonist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis on diferentseeruv täpselt ainult punktides $a = 0$ ja $a = 1$. (Mujal ei tohi f olla diferentseeruv: veenduge ka selles.)

117*. Olgu f diferentseeruv vahemikus $(a, a + \delta)$ ($\delta > 0$) ning eeldame, et leidub piirväärtus (lõplik või lõpmatu) $A := \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$.

- Tõestage, et kui f on paremalt pidev punktis a , siis $f'_+(a) = A$.
- Kas on võimalik, et $f'_+(a) \in \mathbb{R}$, aga $f'_+(a) \neq A$?
- Kas on võimalik, et $f'_+(a) = \infty$, aga $f'_+(a) \neq A$?

13. Funktsiooni tuletise arvutamine. Kõrgemat järku tuletised.

118. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

a1) $f(x) = x^x$;

a2) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;

b1) $f(x) = |x|$;

b2) $f(x) = x|x|$;

b3) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2, & \text{kui } x < 1, \\ x^2 + 1, & \text{kui } x \geq 1; \end{cases}$

b4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 2, \\ x^3 - 4, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$

b5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ \sin x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

b6) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } x < 0, \\ x^4, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

a3) $f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{(x^2 + 4)^5 (3x - 1)^8}{(6x^3 + 1)^2 e^{\sin 5x}}}$;

b7) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x < 0, \\ \tan x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

b8) $f(x) = \begin{cases} (5 - x)^2, & \text{kui } x > 1, \\ e^{1-x^2} + 15, & \text{kui } x \leq 1; \end{cases}$

b9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$

b10) $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{kui } x \geq 0, \\ \frac{2^x}{\sqrt{1+3x^2}}, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$

119. Leidke f'' , kui

1) $f(x) = e^{-x^2}$;

4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

7) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ 2x^3, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

2) $f(x) = x^2 \ln x$;

5) $f(x) = x|x|$;

8) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ x^3 + 1, & \text{kui } x \geq 0. \end{cases}$

3) $f(x) = e^x \cos x$;

6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ x^3, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

120. Olgu f ja g n korda diferentseeruvad punktis x . Leidke valem $(f(x)g(x))^{(n)}$ arvutamiseks.

121. Olgu f kolm korda diferentseeruv punktis x . Leidke $(f^3(x))'''$.

122*. Olgu $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$ Leida $f^{(n)}(0)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

123*. Olgu $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ kus n on mingi naturaalarv. Missuguste n väärtuste

korral funktsioon on

a) pidev;

b) diferentseeruv punktis 0;

c) pidevalt diferentseeruv?

124*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida $(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$.

14. Puutuja ja normaal. Funktsiooni monotoonsus ja ekstreemumid

125. Leidke joonel $y = x^3$ sellised punktid, milles puutuja on paralleelne lõikajaga läbi punktide $(-1, -1)$ ja $(2, 8)$.

126. Leidke nurk, mille moodustab x -teljega funktsiooni $y = \sin x$ graafikule punktis $(0, 0)$ tõmmatud puutuja.

127. Leidke parameeter a , mille korral kõverad $y = ax^2$ ja $y = \ln x$ puutuvad.

128. Paraboolile $y = ax^2$ langeb ülalt valguskiir paralleelselt y -teljega. Valguskiire peegeldudes tema nurk parabooli normaalgiga muutub vastassuunaliseks. Leidke punkt y -teljel, mida peegeldunud valguskiir läbib.

129. Olgu D mingi intervall, $a \in D^\circ$, ning olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Olgu f pidev punktis a ning leidugu selline $\delta > 0$, et f on diferentseeruv vahemikes $(a - \delta, a)$ ja $(a, a + \delta)$. Tõestage järgmised väited.

- 1) Kui iga $x \in (a - \delta, a)$ korral $f'(x) > 0$ ja iga $x \in (a, a + \delta)$ korral $f'(x) < 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne maksimum.
- 2) Kui iga $x \in (a - \delta, a)$ korral $f'(x) < 0$ ja iga $x \in (a, a + \delta)$ korral $f'(x) > 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne miinimum.

130. Veenduge, et funktsioon f rahuldab lõigus $[a, b]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi tingimusi, ja leidke arv c keskväärtusvalemis $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$:

- 1) $f(x) = 3x^2 - 5$ ja $[a, b] = [-2, 0]$;
- 2) $f(x) = \ln x$ ja $[a, b] = [1, e]$.

131. Tõestage, et kui funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $f'(x) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis $f(x) = Ce^x$, kus C on mingi konstant.

132. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsusepiirkonnad ja ekstreemumkohad:

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|--|
| 1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$, | 4) $f(x) = \ln x $, | 7) $f(x) = x x $, |
| 2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$, | 5) $f(x) = e^x + 5x$, | 8) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, |
| 3) $f(x) = x^2 e^{-x}$, | 6) $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$, | 9) $f(x) = \sqrt{(1 + 2x^2) 1 - x^2 }$. |

133. Leidke funktsiooni $f(x) = \max\{2|x|, |1 + x|\}$ lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid.

134*. Olgu paraboolil $y = ax^2$ valitud punktid A_1, A_2 ja A_3 . Olgu k_1 paraboolile punktis A_1 tõmmatud puutuja tõus ning olgu k_{12}, k_{13} ja k_{23} vastavalt lõikajate A_1A_2, A_1A_3 ja A_2A_3 tõusud. Tõestage, et $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$.

135*. Olgu funktsioon f pidevalt diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kas iga $c \in (a, b)$ korral leiduvad $x_1, x_2 \in (a, b)$ nii, et $x_1 < c < x_2$ ja $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$?

15. L'Hospitali reegel ja Taylori valem

136. Arvutage piirväärtused

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right);$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x;$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x;$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0+} (2x)^{\sin x};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{x-1}};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{\cos x}}{x + \sin x};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, a > 1.$

137. Lähtudes Taylori valemist, esitage polünoom $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ avaldise $x - 1$ astmete lineaarse kombinatsioonina.

138. Leidke funktsiooni $f(x) = \ln(x+1)$ Taylori valem punktis $a = 0$. Hinnake absoluutset viga lõigus $[0, 1]$ juhul $n = 9$.

139. Leidke funktsiooni $f(x) = e^x$ Taylori valem punktis $a = 0$. Leidke n , mis lõigus $[-1, 1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

140. Leidke funktsiooni $f(x) = \cos x$ Taylori valem punktis $a = 0$. Leidke n , mis lõigus $[-1, 1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

141. Hinnake absoluutset viga järgmistes ligikaudsetes valemities:

- 1) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},$ kui $|x| \leq \frac{1}{2};$
- 2) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},$ kui $0 \leq x \leq 1;$
- 3) $\arctan x \approx \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2},$ kui $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2};$
- 4) $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}},$ kui $|x| \leq \delta, \delta \ll a.$

142*. Olgu $x \geq 0$. Näidata, et $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, kus $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$ ning $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}$

ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$

143*. Leida C ja n nii, et $\tan(\sin x) - \sin(\tan x) \sim Cx^n$ protsessis $x \rightarrow 0$.

144*. Olgu f kaks korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0, \infty)$ ning kehtigu koondumised $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} xf''(x) = 0$. Tõestage, et $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = 0$.

Näpunäide: Kasutage Taylori valemit $f(x+1)$ avaldamiseks $f(x)$ ja tema tuletiste kaudu.

16. Funktsiooni uurimine

145. Tõestage võrratused

$$1) e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$4) \ln(1+x) \leq x \quad (x > -1),$$

$$2) x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0),$$

$$5) 2x \arctan x \geq \ln(1+x^2),$$

$$3) x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x \quad (0 < x \leq 1),$$

$$6) 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}.$$

146. Leidke järgmiste funktsioonide kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning graafiku käänupunktid.

$$1) f(x) = x^4 - 6x^2,$$

$$2) f(x) = e^{-x^2},$$

$$3) f(x) = \arctan x - x.$$

147. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

$$1) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x - 3},$$

$$2) f(x) = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right),$$

$$3) f(x) = \frac{x}{\ln|x|}.$$

148. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsuspiirkonnad, ekstreemumpunktid ning kumerus- ja nõgususpiirkonnad ja graafiku käänupunktid, samuti asümptoodid. Skitseerida nende andmete põhjal funktsiooni graafik.

$$1) f(x) = xe^{-x},$$

$$3) f(x) = \sin x + \cos^2 x,$$

$$5) f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$2) f(x) = \ln(1+e^x),$$

$$4) f(x) = x \arctan x,$$

$$6) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}.$$

149*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kolm korda pidevalt diferentseeruv funktsioon. Näidata, et leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et $f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0$.

150*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kumerad funktsioonid. Missugustel tingimustel on liitfunktsioon $h = f \circ g$, $h(x) = f(g(x))$ ka kumer funktsioon?

17. Integraali definitsioon. Integreeruvad funktsioonid

151. Leidke järgmised integraalid vahetult Riemanni integraali definitsiooni põhjal (kuna integrandid on pidevad antud piirkondades, siis võib eeldada, et need integraalid eksisteerivad).

$$1) \int_0^5 3 \, dx, \quad 2) \int_0^2 x \, dx, \quad 3) \int_2^3 x^2 \, dx, \quad 4) \int_0^3 e^x \, dx.$$

152. Olgu $a > 0$ ning olgu f lõigus $[-a, a]$ integreeruv funktsioon. Tõestage integraali definitsiooni kasutades, et

$$1) \text{ kui } f \text{ on paaritu, siis } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0;$$
$$2) \text{ kui } f \text{ on paaris, siis } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

153. Tõestage, et kui integreeruv funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on paaritu, siis funktsioon $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ on paaris. Kas kehtib ka vastupidine väide?

154. Olgu f lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon. Tõestage, et $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$.

155. Tõestage, et iga tõkestatud funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korral $I^* - I_* = \inf\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}$, kus I^* ja I_* on funktsiooni f Darboux' ülem- ja alamintegraal lõigus $[a, b]$ ja $\mathfrak{T}$ on lõigu $[a, b]$ alajaotuste hulk.

156. Tõestage, et järgmised funktsioonid ei ole integreeruvad lõigus $[0, 1]$.

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 3) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

157. Veenduge, et sinc-funktsioon

$$\operatorname{sinc} x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \in [a, b] \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

on lõigus $[a, b]$ integreeruv.

158. Tooge näide mitteintegreeruvast funktsioonist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv.

159*. Leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

160*. Vaatleme funktsiooni $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, kus

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kui } x = \frac{1}{n} \text{ mingi } n \in \mathbb{N} \text{ korral,} \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kas f on integreeruv lõigus $[0, 1]$?

18. Integraali arvutamine

161. Leidke järgmised integraalid.

- | | | |
|---|--|---|
| a1) $\int_1^2 5x\sqrt{x} dx;$ | a5) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x dx}{(\cos x)^2 (\sin x)^2};$ | a8) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2 + 1};$ |
| a2) $\int_1^1 10^x dx;$ | a6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + (\cos x)^2}{1 + \cos 2x} dx;$ | a9) $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx;$ |
| a3) $\int_{\pi/2}^{-1} (\cos x - 3 \sin x) dx;$ | a7) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx;$ | a10) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4 dx}{\sqrt{1 - x^2}};$ |
| a4) $\int_0^1 (2^x e^x + \ln 2) dx;$ | b10) $\int_0^1 e^{-2x+3} dx;$ | b19) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x + 1};$ |
| b1) $\int_{\pi/24}^{\pi/16} \frac{dx}{(\cos 4x)^2};$ | b11) $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}};$ | b20) $\int_0^1 \frac{\arctan^3 x dx}{1 + x^2};$ |
| b2) $\int_1^2 e^{5x} dx;$ | b12) $\int_0^{2/3} \frac{dx}{9x^2 + 4};$ | b21) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx;$ |
| b3) $\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx;$ | b13) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$ | b22) $\int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx;$ |
| b4) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (\tan x - \cot x) dx;$ | b14) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1};$ | b23) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x};$ |
| b5) $\int_0^{1/2} \frac{8 dx}{1 + 4x^2};$ | b15) $\int_{-1}^1 x\sqrt{1 - x^2} dx;$ | b24) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x};$ |
| b6) $\int_{-2}^{-1} (3x + 5)^4 dx;$ | b16) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx;$ | b25) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$ |
| b7) $\int_1^2 \frac{dx}{2x - 1};$ | b17) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\tan x dx}{(\cos x)^2};$ | b26) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + (\cos x)^2};$ |
| b8) $\int_3^4 \sqrt[3]{7 - 2x} dx;$ | b18) $\int_0^{\ln \pi - \ln 2} e^x \cos e^x dx;$ | b27) $\int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx;$ |
| b9) $\int_0^1 \cos(1 - 2x) dx;$ | c3) $\int_0^3 \ln(x + 3) dx;$ | c5) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx;$ |
| c1) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx;$ | c4) $\int_0^1 x e^{-x} dx;$ | c6) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx;$ |
| c2) $\int_0^{\pi} x \cos x dx;$ | | |
| d1) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^{2019} (\tan x)^2 + x + 1) dx;$ | d2) $\int_{-\pi}^{\pi} (2x - 1 + x (\sin x)^{2020}) dx.$ | |

162. Arvutage antud joontega piiratud tasandilise kujundi pindala.

- | | |
|--|---|
| 1) $y = x^2$ ja $x + y = 2;$ | 3) $y = x^2$ ja $y = x^3;$ |
| 2) $x = \frac{1}{e}, x = e, y = 0$ ja $y = \ln x ;$ | 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$ |

163*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pidev ja perioodiline funktsioon perioodiga T . Näidata, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral funktsioon $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ on esitatav lineaarse funktsiooni ja perioodilise funktsiooni summana.

19. Integreeruvate funktsioonide omadused

164. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon ning olgu $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Tõestage, et kui $\int_a^b f(x) dx = 0$, siis $f = 0$.

165. Olgu $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ning olgu $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Tõestage, et $f = g$.

166. Olgu funktsioonid $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruvad. Tõestage, kui $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

167. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruvad ning $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx =: I$. Tõestage, et kui $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis ka $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv ning $\int_a^b h(x) dx = I$.

168. Olgu $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ning leidugu punkt $x_0 \in [a, b]$ nii, et $f(x_0) < g(x_0)$. Tõestage, et $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$.

169. Tehke kindlaks, kumb arvudest on suurem.

$$1) \int_0^1 \sin x^2 dx \text{ ja } \int_0^1 x^2 dx, \quad 2) \int_0^2 e^{x^2} dx \text{ ja } \int_0^2 x dx, \quad 3) \int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \text{ ja } \int_2^5 \frac{dx}{x-1}.$$

170. Tõestage, et $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2$.

171. a) Teha kindlaks, kas $\int_0^{10\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ on positiivne või negatiivne.

b) Leida võimalikult täpsed hinnangud (alt ja ülevalt) sellele integraalile.

172*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Tõestage võrratused

$$\frac{3^n}{n+1} \leq \int_0^1 (x^2 + x + 1)^n dx \leq \frac{3^{n+1} - 1}{2n+2}.$$

20. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem. Päratu integraali arvutamine

173. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemist lähtudes tõestage, et kui f on lõigus $[a, b]$ pidev, siis $\left(\int_x^b f(t) dt\right)' = -f(x)$, $x \in [a, b]$.

174. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$\begin{aligned} 1) F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t}, x > -1; & 3) F(x) &= \int_{x^2}^2 \frac{dt}{\ln t}, x > 1; & 5) F(x) &= \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt, x \in \mathbb{R}; \\ 2) F(x) &= \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt, x \in \mathbb{R}; & 4) F(x) &= \int_x^{2x} (\ln t)^2 dt, x > 0; & 6) F(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{e^{x^2}} \frac{t}{\ln t} dt, x > 1. \end{aligned}$$

175. Olgu funktsioonid f ja g tõkestatud ning integreeruvad lõigus $[a, b]$ ning olgu g monotoonne vahemikus (a, b) . Näidata, et siis leidub $c \in [a, b]$ nii, et

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+) \int_a^c f(x) dx + g(b-) \int_c^b f(x) dx.$$

176. Arvutage päratu integraali väärtus:

$$\begin{aligned} a1) \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}, & \quad a3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \arctan^2 x}, & a5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2+1}, \\ a2) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx, & \quad a4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}, & a6) \int_{-\infty}^0 x e^x dx; \\ b1) \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx; & \quad b5) \int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}; & b9) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}; \\ b2) \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx; & \quad b6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx; & b10) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \\ b3) \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx; & \quad b7) \int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx; & b11) \int_0^1 \ln x dx. \\ b4) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}; & \quad b8) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}; & b12) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx. \end{aligned}$$

177*. Olgu f lõigus $[0, 1]$ pidevalt diferentseeruv. Tõestage, et leidub arv $\delta \in (0, 1)$ nii, et

$$\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(\delta).$$

178*. Olgu f reaalteljel pidev funktsioon. Leidke piirväärtus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx$.

21. Päratu integraali koonduvuse uurimine

179. Milliste q väärtuste korral koondub päratu integraal

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^q}; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{x^q}; \quad 3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^q}.$$

180. Olgu $a > 0$. Kasutades päratute integraalide võrdluslauset, tõestage, et kui leiduvad sellised arvud $K > 0$ ja $q > 1$, et $0 \leq f(x) \leq \frac{K}{x^q}$ ($x \in [a, \infty)$), siis päratu integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ koondub.

181. Sõnastage ja tõestage eelmise väitega analoogiline väide tõkestamata funktsiooni päratu integraali $\int_a^b f(x) dx$ kohta.

182. Sõnastage ja tõestage kahe eelmise väitega analoogilised väited päratute integraalide hajuvuse kohta.

183. Uurige järgmiste päratute integraalide koonduvust.

$$\begin{array}{lll} \text{a1)} \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}}; & \text{a3)} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^2}; & \text{a5)} \int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx; \\ \text{a2)} \int_1^{\infty} \frac{(x^2+1) \arctan x dx}{x^4+x^2+1}; & \text{a4)} \int_0^{\infty} \frac{|\cos x| dx}{x^2+1}; & \text{a6)} \int_0^{\infty} \frac{(\cos x)^2 dx}{x^4+1}; \\ \text{b1)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; & \text{b3)} \int_0^3 \frac{|\sin x|}{\sqrt{3-x}} dx; & \text{b5)} \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}\sqrt{x-2}}; \\ \text{b2)} \int_{-1}^1 \frac{x + \cos x}{\sqrt[5]{x^3}} dx; & \text{b4)} \int_0^2 \frac{dx}{(x^2-4x+3)^3}; & \text{b6)} \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}. \end{array}$$

184*. Olgu funktsioonid $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sellised, et $f(x) \geq 0$ ja $g(x) > 0$, kui $x \in [a, \infty)$. Eeldame, et integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ hajub. Tõestage, et vähemalt üks integraalidest $\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ ja $\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx$ hajub.

185*. Olgu $0 < a < b$. Tõestage, et päratu integraal $\int_0^{\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$ koondub.

Näpunäide. Avaldage $\arctan bx - \arctan ax$ ühe arkustangensina. Pange tähele, et lõigus $[0, 1]$ on tegu Riemanni integraaliga.

22. Arvread

186. Tõestage, et kui rida $\sum_k u_k$ koondub, siis $\lim_k u_k = 0$.

187. Koondugu read $\sum_k u_k$ ja $\sum_k v_k$ vastavalt summaks u ja v . Tõestage, et read $\sum_k (u_k + v_k)$ ja $\sum_k \lambda u_k$ koonduvad vastavalt summaks $u + v$ ja λu ($\lambda \in \mathbb{R}$).

188. Tõestage, et rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \geq 0$, koondub parajasti siis, kui tema osasummade jada

$\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)$ on tõkestatud. Tooge näide hajuvast reast, mille osasummade jada on tõkestatud.

189. Tõestage, et kui rida koondub absoluutselt, siis ta koondub.

190. Leidke rea summa:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)},$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1},$

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} \right),$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)},$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$

8) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(5a)^k} - \frac{1}{6^{k+1}} \right).$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)},$

6) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{4^k},$

9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}.$

191*. Leidke rea $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ summa.

Näpunäide: Püüdke osasummad teisendada teleskoopsummadeks.

192*. Olgu f kahanev hulgas $[0, \infty)$ ning koondugu päratu integraal $\int_0^{\infty} f(x) dx$. Tõestage, et

$$\lim_{h \rightarrow 0+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Leidke selle tulemuse abil piirväärtus $\lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{1 + h^2 n^2}.$

Näpunäide: Argumenteerige sarnaselt integraaltunnuse tõestusega.

23. Arvridade koonduvuse uurimine

193. Põhjendage järgmiste ridade hajuvust:

$$1) \sum_k \frac{k}{100k+1}, \quad 2) \sum_k (-1)^k, \quad 3) \sum_k \frac{1}{k}, \quad 4) \sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad 5) \sum_k \tan \frac{\pi}{k+2}.$$

194. Uurige järgmiste ridade koonduvust:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}, & \quad 4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^{55}}{2k^3 + k^2 + 1}, & \quad 7) \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \tan \frac{\pi}{3^k}, \\ 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)5^k}, & \quad 5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+10)}}, & \quad 8) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}} \right), \\ 3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - 1}, & \quad 6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10000k + 1}, & \quad 9) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k^2}, \\ 10) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^k}, & \quad 13) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e} \sin \frac{\pi}{k}, & \quad 16) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{2} \right)^k, & \quad 19) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}, \\ 11) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}, & \quad 14) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}, & \quad 17) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, & \quad 20) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+2)}, \\ 12) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k-1} \right)^k, & \quad 15) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{3} \right)^k, & \quad 18) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!}; & \quad 21) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k+1}. \end{aligned}$$

195. Uurige järgmiste väidete kehtivust.

- 1) Kui rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, koondub, siis rida $\sum_k \frac{1}{u_k}$ hajub.
- 2) Kui rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, hajub, siis rida $\sum_k \frac{1}{u_k}$ koondub.

196*. Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum_k (-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub. Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast $\sum_k (-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub, kusjuures $u_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

197*. Tooge näide koonduvast mittenegatiivsete liikmetega reast $\sum_n a_n$, mille korral tingimus $\lim_n n a_n = 0$ ei kehti.

24. Funktsionaaljaded.

198. Leidke funktsionaaljada (f_k) koonduvuspiirkond D ja piirväärtus $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} 1) f_k(x) = x^k, & 3) f_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k, & 5) f_k(x) = \sin \frac{x}{k}, \\ 2) f_k(x) = \frac{1}{1+kx}, & 4) f_k(x) = \frac{kx}{1+kx+x}, & 6) f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}. \end{array}$$

199. Otsustage, kas funktsionaaljada (f_k) koondub ühtlaselt antud intervallis.

$$\begin{array}{ll} 1) f_k(x) = x^k, D = [0, 1]; & 5) f_k(x) = 2 \sin \frac{x}{k}, D = \mathbb{R}; \\ 2) f_k(x) = x^k, D = [0, a], 0 < a < 1; & 6) f_k(x) = \frac{1}{1+kx}, D = [0, 1]; \\ 3) f_k(x) = x^k - x^{k+1}, D = [0, 1]; & 7) f_k(x) = k \left(\sqrt{x + \frac{1}{k}} - \sqrt{x} \right), D = (0, \infty). \\ 4) f_k(x) = \frac{2}{k} \sin kx, D = \mathbb{R}; & \end{array}$$

200. Leidke funktsionaaljada koonduvuspiirkond D . Kas funktsionaaljada koondub ühtlaselt oma koonduvuspiirkonnas?

$$\begin{array}{lll} 1) f_k(x) = x^k - x^{2k}; & 3) f_k(x) = k \sin \frac{x}{k}; & 5) f_k(x) = \frac{2kx}{1+k^2x^2}. \\ 2) f_k(x) = \frac{1}{k} e^{kx}; & 4) f_k(x) = \frac{\sqrt{k^2x^2+1}}{k}; & 6) f_k(x) = \arctan kx. \end{array}$$

201*. Uurida funktsionaaljada $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k \sin x}$ koonduvust ja ühtlast koonduvust intervallis $(0, \pi)$.

202*. Kui funktsionaaljada (f_n) koondub hulgal A ühtlaselt funktsiooniks f , siis kirjutame $f_n \rightrightarrows_A f$. Kas iga hulga $A \subset \mathbb{R}$, funktsionaaljadade (f_n) ja (g_n) (kus $f_n, g_n: A \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) ja funktsioonide $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ korral kehtivad implikatsioonid

$$1) f_n \rightrightarrows_A f, g_n \rightrightarrows_A g \Rightarrow f_n + g_n \rightrightarrows_A f + g; \quad 2) f_n \rightrightarrows_A f, g_n \rightrightarrows_A g \Rightarrow f_n \cdot g_n \rightrightarrows_A f \cdot g?$$

203*. Ütleme, et hulgal A määratud funktsionaaljada (f_n) koondub pidevalt hulgal A funktsiooniks f , kui iga $x \in A$ ja iga jada (x_n) korral hulgast A korral kehtib implikatsioon

$$\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_n f_n(x_n) = f(x).$$

Tõestage, et kui $f_n \rightrightarrows_A f$ ja funktsioonid f_n on pidevad hulgas A , siis (f_n) koondub pidevalt hulgas A . Kas kehtib ka vastupidine väide?

25. Funktsionaalrea koonduvus.

204. Leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A . Arvutage funktsionaalrea summa.

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1},$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} (\ln x)^k,$$

$$5) \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(1+x^2))^k,$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k,$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} (kx)^k,$$

$$6) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)}.$$

205. Leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x},$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k},$$

$$6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^k)}{k},$$

$$2) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x},$$

$$7) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k}.$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2x-1}},$$

$$5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^k},$$

206. Näidake, et funktsionaalrida koondub ühtlaselt antud intervallis.

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, [-1, 1];$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin kx)^2}{\sqrt{k^3+1}}, (-\infty, \infty);$$

$$7) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + \arccos x}, [-1, 1];$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k^3}, [-3, 3];$$

$$5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}, [0, 4];$$

$$8) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k^2 x^2}}{k \sqrt{k}}, (-\infty, \infty).$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}, (-\infty, \infty);$$

$$6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}}, (-\infty, \infty);$$

207. Leidke funktsionaalrea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2+\sin 2x}$ ühtlase koonduvuse piirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

208*. Uurida funktsionaalrea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ koonduvust ja ühtlast koonduvust intervallis $[0, \infty)$.

209*. Leidke (sõltuvalt p väärtusest) ridade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

26. Funktsionaalrea summa omadused.

210. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$1) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{3^k}, \quad 2) f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{x}{k}}{(k-2)k}, \quad 3) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan kx}{k^2 + 1}.$$

211. Leidke järgmised piirväärtused. Põhjendage tehtavad sammud.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 x}}{2^k}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(k+1)}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^x}.$$

212. Arvutage järgmised integraalid. Põhjendage tehtavad sammud.

$$1) \int_2^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{-n} \right) dx, \quad 2) \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) dx, \quad 3) \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n \cos nx}{5^n} \right) dx.$$

213. Arvutage järgmised tuletised. Põhjendage tehtavad sammud.

$$1) f'(0), \text{ kui } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \arcsin \frac{x}{n}; \quad 2) f^{(17)}(3), \text{ kui } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(n-1)!} (x-3)^n;$$

214. Kas rea $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ summa on määratud ja pidev kogu reaalteljel? Kas summa on ka diferentseeruv kogu reaalteljel?

215*. Leidke $\lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Põhjendage.

216*. Olgu funktsioonid $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sellised, et funktsionaalrida $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^2$ koondub punktiviisi hulgas A tõkestatud funktsiooniks f . ning Tõestage, et kui arvrada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ koondub, siis funktsionaalrida $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ koondub ühtlaselt hulgas A .

27. Astmereal. Tayloriga ja Maclaurini rida

217. Leidke astmereal koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A . Leidke ka astmereal summa.

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k,$$

$$5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k(k+1)},$$

$$8) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!},$$

$$9) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k2^k}.$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} kx^k,$$

$$7) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$10) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k+1}}{k3^k}$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} k!x^k,$$

218. Leidke järgmised summad. Põhjendage tehtavad sammud.

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k},$$

$$3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!},$$

$$5) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k},$$

$$4) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!},$$

$$6) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}.$$

219. Arendage järgmised funktsioonid f Maclaurini reaks ning leidke suurimad intervallid, kus f võrdub rea summaga. Leidke $f^{(5)}(0)$.

$$1) f(x) = e^{2x};$$

$$6) f(x) = \frac{x^9}{1-x};$$

$$10) f(x) = \sqrt{1-x};$$

$$2) f(x) = e^{-x^2};$$

$$7) f(x) = \frac{1}{2-x};$$

$$11) f(x) = \arcsin x;$$

$$3) f(x) = \sin \frac{x}{2};$$

$$8) f(x) = \frac{5-2x}{6-5x+x^2};$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$4) f(x) = (\cos x)^2;$$

$$5) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$9) f(x) = \ln(8+x);$$

220. Arvutage ligikaudu järgmised integraalid täpsusega ε .

$$1) \int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx, \varepsilon = 10^{-4};$$

$$2) \int_0^1 e^{-x^2} dx, \varepsilon = 10^{-3};$$

$$3) \int_0^{1/2} \frac{e^x - 1}{x} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

221*. Kasutades astmeridu ja/või funktsionaalridu leida ligikaudu integraal $\int_0^1 x^x dx$ täpsusega 10^{-3} .

Vastused ja lahendusvihjed

1. 1) Oletage, et a_1 ja a_2 on F nullelemendid ning vaadeldge summat $a_1 + a_2$; 2) oletage, et b_1 ja b_2 on a vastandelemendid ning vaadeldge summat $(b_1 + a) + b_2$; 3) näidake, et kui x rahuldab seost $a + x = b$, siis $x = b - a$ ning kui $x = b - a$, siis x rahuldab seost $a + x = b$; 4) näidake, et $(a + b) + (-a - b) = 0$.

2. Lahendusvõtted on analoogilises ülesandega 1.

3. Vt. loengukonspektis Lause 1.1.

4. 1) kasutage liitmise monotoonsust; 2) kasutage korrutamise monotoonsust, korrutades võrduse $a < b$ pooli elemendiga $-c > 0$ (miks kehtib $-c > 0$?); 3) muuhulgas kasutage korrutamise monotoonsust; 4) $a + c < b + c < b + d$; 5) $ac < bc < bd$; 6) näidake, et $a^{-1} \leq 0$ annab vastuolu; 7) kasutage ülesannet 6) ja korrutamise monotoonsust; 8) tarvis on näidata, et $a + a < a + b < b + b$.

9. Oletage, et hulga X ülemised rajad on a ja b , siis kehtib $a < b$ või $a > b$. Kui näiteks $a < b$, saame vastuolu sellega, et b on hulga X vähim ülemine tõke.

10. Olgu a hulga X suurim element, siis $a \in X$ ja $x \leq a$ iga $x \in X$ korral. Arvu a jaoks on $\sup X$ mõlemad tingimused täidetud (kontrollige!).

11. Hulga Y ülemiseks tõkkeks sobib $\lambda a + 1$. Lisaks sellele, olgu $b < \lambda a + 1$, siis $\lambda^{-1}(b - 1) < a$, mistõttu leidub x_0 omadusega $\lambda^{-1}(b - 1) < x_0$. Seega $b < \lambda x_0 + 1 =: y_0$.

12. Kõigepealt saame, et iga $y \in Y$ korral kehtib $\forall x \in X \ x \leq y$. Seega iga $y \in Y$ korral $\sup X \leq y$. Järelikult $\sup X \leq \inf Y$.

Alternatiiv: Kuna X ja Y on mittetühjad, siis hulkadele X ja Y leiduvad vastavalt ülemine ja alumine tõke.

Olgu $a := \sup X$ ja $b := \inf Y$. Oletame, et $a > b$, siis arvu $\frac{a+b}{2}$ jaoks leiduvad $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$ omadusega

$$x_0 > \frac{a+b}{2} > y_0, \text{ vastuolu.}$$

13. 1) Kuna $-1 \in X$ ja $-1 \leq x$ iga $x \in X$ korral, siis $\min X = -1$ ja seega ülesande 10 põhjal $\inf X = -1$.

Iga $x \in X$ korral kehtib $x \leq 2$. Kui $c < 2$, siis juhul $c < 0$ võime võtta $1 \in X$, siis $1 > c$; juhul $0 \leq c < 2$ valime $\frac{c+2}{2} \in X$, $\frac{c+2}{2} > c$. Seega $\sup X = 2$. Kui leiduks $\max X$, siis ülesande 10 põhjal $\max X = 2$, aga $2 \notin X$.

2) Kuna $2n+1 < 2n+3$, siis $\frac{2n+1}{2n+3} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Näitame, et $\sup X = 1$. Olgu $c < 1$. Näitame, et leidub $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2n+1}{2n+3} > c. \text{ võrratus on samaväärne võrratusega } 2n+1 > c(2n+3) \Leftrightarrow 2n(1-c) > 3c-1 \Leftrightarrow n > \frac{3c-1}{2-2c}.$$

Archimedese printsiibi tõttu selline n leidub. Kuna $1 \notin X$ (miks?), siis $\max X$ ei leidu.

Näitame, et $\min X = \frac{3}{5}$. Esiteks, $\frac{3}{5} \in X$ (võttes $n = 1$). Teiseks, iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\frac{2n+1}{2n+3} \geq \frac{3}{5}$, sest see on

$$\text{samaväärne võrratusega } 5(2n+1) \geq 3(2n+3) \text{ ehk } 4n \geq 4, \text{ mis ilmselt kehtib. Seega } \min X = \inf X = \frac{3}{5}.$$

3) $\sup X = 1$, $\max X$ ei eksisteeri, $\inf X = -1$, $\min X$ ei eksisteeri;

4) $\sup X = \infty$, $\max X$ ei eksisteeri, $\inf X = 0$, $\min X$ ei eksisteeri;

5) $\sup X = \infty$, $\max X$ ei eksisteeri, $\inf X = 0$, $\min X$ ei eksisteeri;

6) $\sup X = \sqrt{2}$, $\max X$ ei eksisteeri, $\inf X = -\sqrt{2}$, $\min X$ ei eksisteeri.

14. Vt. loengukonspektis Lause 1.4.

17. Leidugu $K > 0$ omadusega $|y_n| \leq K$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Valige koondumise $\lim_n x_n = 0$ arvu ε rolli meie ε/K .

18. 1) ja 2) $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$; 3) jada (x_n) on tõkestatud, seega mingi $K > 0$ korral $|x_n| \leq K$, edasi tasub vahele $x_n y_n - ab$ liita-lahutada $b x_n$; 4) kasutage ülesannet 3); 5) tõestage, et leidub N omadusega $n \geq N \Rightarrow |x_n| \geq \frac{|a|}{2}$, arvestades seost $a \neq 0$; 6) kasutage ülesandeid 3) ja 5).

19. ja 21. $(x_n + y_n)$ hajub, muidu $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ koonduks; valides $x_n \rightarrow 0$ ja (y_n) hajuv tõkestatud, on $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$, aga nt. $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$, on $x_n \cdot y_n = n$ hajuv.

20. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, siis $x_n + y_n = 0$, $x_n \cdot y_n = -1$; $x_n = (-1)^n$, $y_n = n(-1)^n$, siis $x_n + y_n = (n+1)(-1)^n$, $x_n \cdot y_n = n$.

22. 1) jada piirväärtuse definitsioonis sobib N rolli eelduses antud arv N ; 2) $(x_n) = (a, a+1, a, a+1, a, \dots)$.

23. Siin on toodud üks võimalik suurusele ε vastav N ; see pole üheselt määratud. 1) $N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rceil + 1$;

2) $N = \left\lceil \frac{3}{5\varepsilon} \right\rceil + 1$; 3) $N = \left\lceil \frac{14}{\varepsilon} \right\rceil + 1$; 4) $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$; 5) $N = \left\lceil \frac{13}{16\varepsilon} + \frac{3}{8} \right\rceil + 1$; 6) $N = \left\lceil \frac{3}{10} + \frac{3}{20\varepsilon} \right\rceil + 1$; 7)

$N = \left\lceil 8 + \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$; 8) $N = \lfloor M+2 \rfloor$; 9) $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{M^2-1}{2} \right\rceil, 1 \right\}$ (või $N = \left\lceil \frac{M^2}{2} \right\rceil + 1$).

24. 1) Oletage, et piirväärtus on $a \in \mathbb{R}$, valige $\varepsilon = 1$ ja jõudke vastuoluni. Lõpmatute piirväärtuste välis-
tamiseks võib valida näiteks $M = 4$ (või suurema). 2) Analoogiline eelnevaga. 3) Oletades, et piirväärtus
on $a \in \mathbb{R}$, valides $\varepsilon = 1/2$ (või väiksema), saame vastuolu, vaadeldes $n = m^2 - 1$ ja $n = m^2$ piisavalt suure m
korral.

27. a) Tarvis läheb võrratust $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$; b) $(-1)^n$; c) $|x_n| < \varepsilon$ ja $||x_n|| < \varepsilon$ on samaväärsed
tingimused.

29. Kui jada (x_n) on tõkestatud, siis mingite $m, M \in \mathbb{R}$ korral $m \leq x_n \leq M$; tähistame $K = \max\{|m|, |M|\} + 1$,
siis $-K < -|m| \leq m \leq x_n \leq M \leq |M| < K$. Kui $|x_n| \leq K$, siis sobivad $m = -K$, $M = K$.

30. 1) valige jada piirväärtuse definitsioonis näiteks $\varepsilon = a$; 2) valige $\varepsilon = -a$.

31. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Eeldused $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow a$ annavad arvud K_1 ja K_2 nii, et $k \geq K_1 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$ ja
 $k \geq K_2 \Rightarrow |y_k - a| < \varepsilon$. Tähistame $N = 2 \max\{K_1, K_2\}$. Kui $n \geq N$ ja $n = 2k$, siis $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$; kui
 $n = 2k - 1$, siis $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$.

32. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Koondumise $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ kontrollimiseks vaatleme kõigepealt juhtu
 $a < b$, siis $\max\{a, b\} = b$. Kasutades $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$ definitsioone, leidke N omadusega: kui $n \geq N$,

siis $x_n < \frac{a+b}{2} < y_n$. Seega, kui $n \geq N$, siis $\max\{x_n, y_n\} = y_n$. Nüüd koondumise $\lim_n y_n = b$ põhjal leidke
 $N_1 \geq N$, et $|y_n - b| < \varepsilon$.

Juhul $a = b$ leidke antud koondumiste põhjal N , et kui $n \geq N$, siis $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|y_n - a| < \varepsilon$.

Alternatiiv: tõestage ja kasutage seoseid $\max\{u, v\} = \frac{u+v}{2} + \frac{|u-v|}{2}$, $\min\{u, v\} = \frac{u+v}{2} - \frac{|u-v|}{2}$, kus $u, v \in \mathbb{R}$.

33. Iga n korral saab leida ratsionaalarvu x_n näiteks a ja $a + \frac{1}{n}$ vahelt.

34. 1) ∞ ; 2) $\frac{1}{9}$; 3) 0; 4) 1; 5) $\frac{1}{8}$; 6) 0; 7) ei leidu; 8) $\frac{1}{2}$; 9) ∞ .

35. 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1; 5) 3; 6) 1.

39. Jada on kujul $a, \frac{8}{a}, a, \frac{8}{a}, \dots$, seega jada koondub parajasti siis, kui $a = \frac{8}{a}$ ehk $x_1 = a = \pm 2\sqrt{2}$.

40. Näidata, et jada on tõkestatud ja kasvav, siis monotoonsusprintsipi tõttu jada koondub. Kui $\lim x_n = a$,
siis $a = \frac{a}{2} + 1$ ehk $a = 2$.

41. Hinnata $|x_n - x_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left| \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^m}$.

42. Kui $2^k < n < 2^{k+1}$, siis saame hinnata $\frac{1}{n} > \frac{1}{2^{k+1}}$.

43. Kui $2^k < n < 2^{k+1}$, siis saame hinnata $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{2^{2k}}$.

44. 1) kasutage jada piirväärtuse definitsiooni ja seost $n_k \geq k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral; 2) $(-1)^n$.

45. $x_{mp+k} = a_k$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \dots, p\}$.

46. $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \dots$, kindlasti esinevad (x_n) osapiirväärtustena jada (a_n) kõik osapiirväärtused.

47. 1) (n) ; 2) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots$; 3) ja 4) $\mathbb{Q}$ kõik elemendid jadana.

48. 1) $\{0, 1, 2, -1 \pm \sqrt{2}/2\}$ (pange tähele, et need on osajadade (x_{8k+p}) , kus $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, piirväärtused); 2) $\{0, 1\}$; 3) $\{0\}$; 4) $\{0, 1\}$ (pange tähele, et iga reaalarvu $\alpha \in [0, 1]$ korral saab hulga $\left\{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ valida ratsionaalarvu $\frac{k}{n}$ nii, et $\left|\frac{k}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n}$); 6) $\{1, 5\}$.

51. 1) $e^4 + 1$ (võib vaadelda eraldi juhte $n = 2k$ ja $n = 2k + 1$); 2) $1/e$; 3) 0 .

52. $e^{m/k}$.

53. Tähistame $u_k = \inf\{x_n : n \geq k\}$. Tõestage, et jada (u_k) on kasvav ja tõkestatud. Seega see jada on koonduv ja piirväärtus on $\sup\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ (miks?), nagu vaja.

54. Võrratuse $\inf_n x_n \leq \liminf_n x_n$ tõestamiseks pange tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{x_k : k \geq n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks parema poole piirväärtus on lõplik?)

55. Olgu jada (y_n) osajada (y_{n_k}) selline, et $\lim y_{n_k} = \liminf_n y_n$. Nüüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. On jäänud kirjutada, et $\liminf_n x_n \leq \liminf_j x_{n_{k_j}} \leq \liminf_j y_{n_{k_j}} = \liminf_n y_n$.

Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \inf\{y_k : k \geq n\}$ kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)

56. Konstandiga korrutamine ei mõjuta (osa)jada koonduvust.

Alternatiiv: uurige $\inf\{cx_k : k \geq n\}$ ja $c \cdot \inf\{x_k : k \geq n\}$ või $c \cdot \sup\{x_k : k \geq n\}$ vahekorda.

57. Olgu jada $(x_n + y_n)$ osajada $(x_{n_k} + y_{n_k})$ selline, et $\lim(x_{n_k} + y_{n_k}) = \liminf_n (x_n + y_n)$. Nüüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. Siis jada $(y_{n_{k_j}})$ on samuti koonduv. On jäänud kirjutada, et $\liminf_n x_n + \liminf_n y_n \leq \liminf_j x_{n_{k_j}} + \liminf_j y_{n_{k_j}} = \liminf_j (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) = \liminf_n (x_n + y_n)$.

Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k : k \geq n\} + \inf\{y_k : k \geq n\} \leq \inf\{x_k + y_k : k \geq n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)

Teine võrratus järeldub esimesest, kui vaadelda $\liminf_n (x_n + y_n) - \liminf_n y_n = \liminf_n (x_n + y_n) + \liminf_n (-y_n) \leq \liminf_n x_n$.

Näideteks sobivad: $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$ ning $x_n = y_n = (-1)^n$.

58. Kasutage seda, et $\lim_n x_n = \liminf_n x_n = \limsup_n x_n$.

59. 1) $0, 1, 1, 1$; 2) $-3\frac{1}{2}, 5, -2, 2$; 3) $-1, 1\frac{1}{2}, 0, 1$; 4) $0, 2, 0, 2$; 5) $-\infty, \infty, -\infty, \infty$; 6) $-165, 21\frac{2}{3}, 1, 3$; 7) $-\infty, -1, -\infty, -\infty$; 8) $0, 1, 0, 0$; 9) $-e, e, -e, e$; 10) $0, e, 1/e, e$.

63. Oletage, et $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, kus $A < B$. Funktsiooni piirväärtuse definitsioonis valige

$\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ ning seeläbi leidke x omadusega $f(x) < \frac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.

64. Oletage, et $A > B$. Valige antud koondumiste definitsioonides $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ ning leidke $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus$

$\{a\}$ omadusega $g(x) < \frac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.

65. Kasutage ülesannet 64.

66. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke δ nii, et kui $0 < |x - a| < \delta$, siis $A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$.

67. Kasutage funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 18.

68. 1) $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$; 2) $\delta = \varepsilon^3$; 3) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; 4) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; 5) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{15}\right\}$; 6) $\delta = \varepsilon$; 7) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; 8) $\delta = \min\left\{1, \frac{7\varepsilon}{2}\right\}$;

9) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{22}\right\}$; 10) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; 11) $\delta = \min\left\{1, \frac{3\varepsilon}{2}\right\}$; 12) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; 13) $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$; 14)

$\delta = 2\varepsilon$; 15) $\delta = \varepsilon^2$; 16) $\delta = \varepsilon^2$.

69. 1) $D = \frac{1}{4\varepsilon}$; 2) $D = \frac{5}{9\varepsilon}$; 3) $D = \frac{5}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}$; 4) $D = \frac{5}{\varepsilon} + 1$; 5) $D = \frac{32}{3\varepsilon}$; 6) $D = \frac{17}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$; 7) $D = \max\{1, 2E\}$; 8) $D = E$; 9) $D = E$.

73. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) $2\frac{1}{24}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{12}$; 8) $\frac{2}{3}$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) -2 ; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $-\frac{1}{12}$; 14) $4\frac{4}{27}$; 15) $\frac{1}{n}$.

74. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0; 3) ∞ ; 4) 1; 5) -1 ; 6) -1 ; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 1; 9) 0.

75. 1) 1; 2) -1 ; 3) -1 ; 4) 1; 5) $-\infty$; 6) ∞ ; 7) 4; 8) -4 ; 9) ∞ .

76. Kasutage funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 18.

77. Tõestage, et $g(x) = x^n$ on pidev, $n \in \mathbb{N}$.

78. Olgu $x \in \mathbb{R}$, siis leidub jada $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ omadusega $\lim_n x_n = x$. Seega $f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n) = g(x)$.

79. Kasutage pidevuse definitsiooni, võttes vastavalt $\varepsilon = f(a)$ või $\varepsilon = -f(a)$.

80. Koondumine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ annab arvu $D > 0$ omadusega $x > D \Rightarrow c-1 < f(x) < c+1$. Kuna f on pidev lõigus $[0, D+1]$, siis on ta selles lõigus tõkestatud, mistõttu leiduvad m ja M omadusega $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [0, D+1]$. Kokkuvõttes on $\min\{m, c-1\}$ ja $\max\{M, c+1\}$ arvud, mille vahel on f kõik väärtused intervallis $[0, \infty)$.

84. 1) kui $a = 2$, siis $\delta = \varepsilon^2$, kui $a > 2$, siis $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{a-2}$; 2) kasutada võrratust $|\sin x| \leq |x|$, $\delta = \varepsilon$; 3) kasutada võrratust $\ln(1+x) \leq x$, $\delta = \varepsilon \cdot a$.

85. 1) jah; 2) jah: $f(x) = \sqrt{x^2}$; 3) ei, sest f pole pidev oma määramispiirkonnas; 4) jah: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$.

87. Kuna $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, siis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Seega $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

89. 1) 1; 2) $\frac{7}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 5; 5) $\frac{7}{5}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{8}$; 8) -2 ; 9) 0.

90. 1) 1; 2) -1 ; 3) 0; 4) 1; 5) 1; 6) -1 .

92. 1) e; 2) $\frac{1}{e}$; 3) e; 4) e^6 ; 5) ∞ ; 6) ∞ ; 7) 0; 8) e^5 .

93. 1) $\beta = o(\alpha)$; 2) $\alpha = o(\beta)$; 3) $\alpha = o(\beta)$; 4) $\alpha \sim \beta$; 5) $\alpha \sim \beta$; 6) $\alpha \sim \beta$.

94. Parameetrite C ja k otsimiseks tasub avaldise asendada vaadeldavas protsessis ekvivalentsete suurustega. 1) Näitame, et kui $n \rightarrow \infty$, siis $n^2 + 1 \sim n^2$ ehk $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$. Protsessis $n \rightarrow \infty$

saame analoogiliselt teel veel, et $\sqrt{n^3 + 2} \sim n^{3/2}$, seega $\frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^3 + 2}} \sim n^{1/2}$, kust saame $C = 1$, $k = -\frac{1}{2}$. Ka

järgmiste ülesannete lahendusvihjetes mainitud ekvivalentsid tõestatakse, näidates, et vastavate suuruste jagatiste piirväärtus antud protsessis on üks. 2) Kui $x \rightarrow 0$, siis $\sin x - \tan x \sim \sin x(\cos x - 1) =$

$-2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2} \sim -\frac{1}{2} x^3$. Seega $C = -\frac{1}{2}$, $k = 3$. 3) $C = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$, $k = \frac{1}{5}$. 4) Kui $x \rightarrow 0$, siis $\sqrt{x} \sim x + \sqrt{x}$, seega

$x^{1/4} \sim \sqrt{x + \sqrt{x}} \sim x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$, kust saame $C = 1$, $k = \frac{1}{8}$. 5) Kui $x \rightarrow \infty$, siis $\ln(e^x + 1) \sim \ln e^x = x$, seega $C = 1$, $k = 1$. 6) $C = 1$, $k = 1$.

95. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{7}{12}$; 5) 2; 6) $\frac{a^2}{b^2}$.

97. 1) I liiki katkevus; 2) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = \frac{\pi}{2}$; 3) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = 0$; 4) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = \frac{1}{10}$; 5) kõrvaldatav katkevus, $f(0) = e$; 6) II liiki katkevus.

98. 1) pidev kogu reaalteljel; 2) kui $a = 1$, siis pidev kogu reaalteljel, vastasel korral katkev punktis 1 ja pidev mujal; 3) katkev punktides 0 ja 1, mujal pidev; 4) katkev punktis $x = \frac{2}{3}$, mujal pidev.

99. Olgu $a \in \mathbb{Q}$. Leidke jada $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ omadusega $\lim_n x_n = a$. Funktsiooni f pidevuse tõttu $0 = \lim_n 0 = \lim_n f(x_n) = f(a) = 1$, vastuolu. Analoogiline arutelu sobib juhtumil $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

100. Funktsioon f on pidev punktis 0, sest $-|x| \leq f(x) \leq x$; edasi kasutage ülesannet 66. Näitamaks, et f on katkev igas punktis $a \neq 0$, saab kasutada ülesande 99 lahenduse ideed.

101. 1), 2) kasutage Dirichlet' funktsiooni; 3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{2}, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

102. Kasutage võrratust $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$. Vastupidise väite vääramiseks vaadeldge funktsiooni $2D(x) - 1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

103. f on pidev kõigis vahemikes $(k-1, k)$, kus $k \in \mathbb{Z}$, paremalt pidev kõigis punktides $k \in \mathbb{Z}$ ja ei ole vasakult pidev üheski punktis $k \in \mathbb{Z}$.

104. 1) Ühtlaselt pidev (kasutada definitsiooni ning võrratust $|\sin x| \leq |x|$). 2) Ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Kui vähemalt üks arvudest $x, x' \in [1, \infty)$, siis saab hinnata $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leq |x - x'|$. Kui $x, x' \in [0, 1]$, siis Cantori teoreemi põhjal leidub $\delta_1 > 0$ nii, et kui $|x - x'| < \delta_1$, siis $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \varepsilon$. Kokkuvõttes võime valida $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$. 2) Pole ühtlaselt pidev (analoogiline konsekti näitega 3.7). 4) Pole ühtlaselt pidev (vt. konsekti näide 3.7). 5) Ühtlaselt pidev, sest funktsioon on lõigus $[0, 10]$ pideva funktsiooni ahend. 6) Ühtlaselt pidev (Cantori teoreem) 7) Ühtlaselt pidev kuna f on pidev (peale katkevuse kõrvaldamist nullpunktis) ja $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 1$ (vt. konsekti Lause 3.29).

107. 1) $(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$; 2) $(x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$; 3) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$;

4) $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}$; 5) $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{x-a}{ax}$; 6) $e^x - e^a = e^a \cdot (e^{x-a} - 1)$, koondumises

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ tehke muutuva vahetus $\ln(1+x) = t$ (siis $x \rightarrow 0$ tähendab, et $t \rightarrow 0$); 7) $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$; 8) $b^x - b^a = b^a \cdot (b^{x-a} - 1)$.

108. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0$.

111. Kuna $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$, siis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ei eksisteeri.

112. $f'_-(0) = l$, $f'_+(0) = k$. Tuletis $f'(0)$ eksisteerib parajasti juhul $k = l$.

113. Dirichlet' funktsioon.

115. 1) $3(\sin x)^2 \cos x$; 2) $\frac{1}{\sin x \cos x}$; 3) $-2^{\cos x} (\ln 2) \cdot \sin x$; 4) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; 5) $-\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$; 6) $e^x \cdot (\sin x + \cos x)$;

7) $\frac{(x-1)e^x}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$; 8) $-(\sin x) \cdot \tan x$; 9) $a^x x^{a-1} (x \ln a + a)$; 10) $\frac{2}{(x^2+1)^2}$; 11) $-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1}$; 12) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; 13)

$\frac{1-x^2}{1+x^4}$; 14) $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$; 15) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 16) $\frac{8x+2}{4x^2+1}$; 17) $\arcsin x$.

118. a1) $x^x(1 + \ln x)$; a2) $(\cos x)^{\sin x} \left((\cos x) \ln \cos x - \frac{(\sin x)^2}{\cos x} \right)$;

a3) $\sqrt[3]{\frac{(x^2+4)^5(3x-1)^8}{9(6x^3+1)e^{\sin 5x}}} \cdot \left(\frac{10x}{x^2+4} + \frac{24}{3x-1} - \frac{36x^2}{6x^3+1} - 5 \cos 5x \right)$;

b1) $\operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$; b2) $2|x|$; b3) $\begin{cases} 3x^2-1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 2x, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ b4) $\begin{cases} 2x, & \text{kui } x < 2, \\ 3x^2, & \text{kui } x > 2; \end{cases}$ b5) $\begin{cases} 2x, & \text{kui } x < 0, \\ \cos x, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$

b6) $\begin{cases} -\sin x, & \text{kui } x < 0, \\ 4x^3, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$ b7) $\begin{cases} \cos x, & \text{kui } x < 0, \\ \frac{1}{(\cos x)^2}, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$ b8) $\begin{cases} 2(x-5), & \text{kui } x > 1, \\ -2xe^{1-x^2}, & \text{kui } x < 1; \end{cases}$

$$\text{b9)} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{array} \right. \quad \text{b10)} \left\{ \begin{array}{ll} x^{x+1} \left(\frac{x+1}{x} + \ln x \right), & \text{kui } x > 0, \\ \frac{2^x}{\sqrt{3x^2+1}} \left(\ln 2 - \frac{3x}{3x^2+1} \right), & \text{kui } x < 0; \end{array} \right.$$

$$119. 1) 2e^{-x^2}(2x^2-1); 2) 3+2\ln x; 3) -2e^x \sin x; 4) \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{array}{ll} -2, & \text{kui } x < 0, \\ 2, & \text{kui } x > 0; \end{array} \right. 6) \left\{ \begin{array}{ll} 2, & \text{kui } x < 0, \\ 6x, & \text{kui } x > 0; \end{array} \right.$$

$$7) \left\{ \begin{array}{ll} 6x, & \text{kui } x < 0, \\ 12x, & \text{kui } x \geq 0; \end{array} \right. 8) 6x, \text{ kui } x \neq 0.$$

$$125. (-1, -1), (1, 1).$$

$$126. \text{ Kui } f(x) = \sin x, \text{ siis } f'(0) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}.$$

$$127. a = \frac{1}{2e}.$$

$$128. y = \frac{1}{4a}.$$

$$129. \text{ Kasutage funktsiooni monotoonsuse tunnuseid intervallide } (a-\delta, a] \text{ ja } [a, a+\delta) \text{ jaoks.}$$

$$130. 1) c = -1; 2) c = e - 1.$$

$$131. \text{ Vaadeldge funktsiooni } g(x) = \frac{f(x)}{e^x} \text{ ning n\u00e4idake, et } g'(x) = 0 \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

$$132. 1) f \text{ on rangelt kahanev intervallis } \left[0, \frac{1}{2}\right], \text{ rangelt kasvav intervallis } \left[\frac{1}{2}, \infty\right), \text{ range lokaalne miini-}$$

$$\text{mum punktis } \frac{1}{2}; 2) f \text{ on rangelt kasvav intervallides } (-\infty, -1] \text{ ja } [4, \infty), \text{ rangelt kahanev intervallis } [-1, 4],$$

$$\text{range lokaalne maksimum punktis } -1, \text{ range lokaalne miinimum punktis } 4; 3) f \text{ on rangelt kahanev inter-}$$

$$\text{vallides } (-\infty, 0] \text{ ja } [2, \infty), \text{ rangelt kasvav intervallis } [0, 2], \text{ range lokaalne miinimum punktis } 0, \text{ range}$$

$$\text{lokaalne maksimum punktis } 2; 4) f \text{ on rangelt kahanev intervallis } (-\infty, 0) \text{ ja rangelt kasvav intervallis}$$

$$(0, \infty); 5) f \text{ on rangelt kasvav kogu reaalteljel; 6) } f \text{ on rangelt kasvav intervallides } \left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right] \text{ ja } [1, \infty),$$

$$\text{rangelt kahanev intervallides } \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right] \text{ ja } (-\infty, -1], \text{ ranged lokaalsed maksimumid punktides } \frac{1}{2k},$$

$$\text{kus } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \text{ ranged lokaalsed miinimumid punktides } \frac{1}{2k+1}, \text{ kus } k \in \mathbb{Z}; 7) f \text{ on rangelt kasvav kogu}$$

$$\text{reaalteljel. 136. 3), 4), Kasutage l'Hospitali reeglit; 6), 10), 7), 8) kasutage eksponent- ja logaritmifunktsiooni pidevust}$$

$$\text{ja l'Hospitali reeglit; 12) taandage murdu avaldisega } x \text{ ning kasutage seda, et } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ (miks?); 14)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0; 15) \ln^2 a.$$

$$137. (x-1)^5 + 3(x-1)^4 + 3(x-1)^3.$$

$$138. \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}}, \text{ kus } \xi \in (0, x), \text{ ja } \left| -\frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}} \right| \leq \frac{1}{10}.$$

$$139. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ kus } \xi \text{ asub } 0 \text{ ja } x \text{ vahel; } \left| \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}, \text{ saame, et}$$

$$\frac{e}{(6+1)!} < 0,001.$$

$$141. 1) \text{ Taylori valemi kohaselt } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{(\cos \xi)x^5}{120}, \text{ kus } \xi \text{ asub } 0 \text{ ja } x \text{ vahel, seega } \left| \frac{(\cos \xi)x^5}{120} \right| \leq \frac{1}{3840};$$

$$2) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac{5}{2}}}, \text{ kus } \xi \text{ asub } 0 \text{ ja } x \text{ vahel, seega } \left| \frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{1}{16}.$$

$$145. 1) \text{ Uurige funktsiooni } f(x) = e^x - (1+x); 2) \text{ uurige funktsioone } f(x) = x - \sin x \text{ ja } g(x) = \sin x -$$

$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$; 3) uurige funktsioone $f(x) = x - \arctan x$ ja $g(x) = \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$; 4) näidake, et $f(x) = x - \ln(1+x)$ on hulgas $(-1, 0]$ kahanev ja hulgas $[0, \infty)$ kasvav ning $f(0) = 0$; 5) ja 6) analoogilised ülesandega 4), miinimumkohaks mõlemal 0.

151. Kuna antud funktsioonid on integreeruvad, võib integraali leida konkreetsetele (näiteks ühtlastele) alajaotustele vastavate integraalsummade piirväärtusena.

152. Integraali võib arvutada teatud konkreetsete alajaotuste T kaudu, kus $\lambda(T) \rightarrow 0$ (miks?). Eeldusel, et alajaotuse T jaotuspunktid ning valitud punktid ξ_k on nullpunkti suhtes sümmeetrilised, saame juhul 1) $\sigma(T) = 0$ ja juhul 2), et $\sigma(T) = 2\sigma'(T)$, kus $\sigma'(T)$ on lõigu $[0, a]$ alajaotusele vastav integraalsumma.

154. Tehes teisenduse $x \mapsto a + b - x$, peegeldatakse lõigu $[a, b]$ kõik punktid keskpunkti $\frac{a+b}{2}$ suhtes.

155. Näidake, et arv $I^* - I_*$ rahuldab arvuhulga $\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}$ infimumi nõudeid.

156. 1) $S(T) = 1$, $s(T) = 0$. 2) Oletades, et f on integreeruv, peab vahe $S(T) - s(T)$ olema väike ka ühtlase

alajaotuse $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, korral, kui n on piisavalt suur. Saame, et $S(T) = 2$ ja $s(T) = \frac{0}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{2n} \leq \frac{1}{2}$. Seega $S(T) - s(T) \geq 1$. 3) Kasutage ül. 2) lahenduse ideed ja võrdust $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

157. sinc on pidev.

158. $f(x) = 2D(x) - 1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

161. a1) $8\sqrt{2} - 2$; a2) $\frac{99}{10 \ln 10}$; a3) -4 ; a4) $\frac{2e-1}{1+\ln 2} + \ln 2$; a5) 0; a6) $\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$; a7) $1 - \frac{\pi}{4}$; a8) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$; a9)

$1 - \frac{\pi}{2}$; a10) π ; b1) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}$; b2) $\frac{e^5}{5}(e^5 - 1)$; b3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b4) $\ln \frac{2}{\sqrt{3}}$; b5) π ; b6) $\frac{11}{5}$; b7) $\ln \sqrt{3}$; b8) 0; b9) $\sin 1$;

b10) $\frac{e}{2}(e^2 - 1)$; b11) $\frac{\pi}{4}$; b12) $\frac{\pi}{24}$; b13) $\ln 2$; b14) $\frac{\ln 9}{3}$; b15) 0; b16) $\frac{\pi}{2}$; b17) 0; b18) $1 - \sin 1$; b19) $\ln 2 - \frac{1}{2}$;

b20) $\frac{\pi^4}{1024}$; b21) $\frac{2}{3}$; b22) $\frac{\pi}{2}$; b23) 1; b24) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; b25) $\frac{1}{2}$; b26) $\frac{\pi}{4}$; b27) $-\arctan \frac{\pi}{4}$; c1) 2π ; c2) -2 ; c3)

$6 \ln 6 - 3 \ln 3 - 3$; c4) $1 - \frac{2}{e}$; c5) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$; c6) -2π ; d1) $\pi^2 + 1$; d2) $2\pi^2 + \frac{1}{2}$.

162. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $2 - \frac{2}{e}$; 3) $\frac{1}{12}$.

164. Oletame, et leidub punkt $x_0 \in [a, b]$ nii, et $f(x_0) > 0$. Kui $x_0 \in (a, b)$, siis f pidevuse tõttu leidub $\delta > 0$ omadusega $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. (Analoogiliselt käitume juhul, kui $x_0 = a$ või $x_0 = b$.)

Integraali aditiivsust ja monotoonsust kasutades leidke, et $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \delta f(x_0) > 0$.

Vastuolu.

165. Rakendage ülesannet 164 funktsiooni $g - f$ jaoks.

166. a) Olgu f Darboux' integraalid I_* ja I^* ning g jaoks J_* ja J^* . Eeldusel $I_* = I^*$ ja $J_* = J^*$ ning $f \leq g$ on vaja näidata, et (näiteks) $I_* \leq J_*$. Saame, et $s_f(T) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \right) \Delta x_k$,

millest järeldub vajalik võrratus.

b) Tähistame $A = \int_a^b f(x) dx$ ja $B = \int_a^b g(x) dx$. Oletage, et $A > B$ ning kasutage integreeruvuse definitsioone, valides $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Leidke konkreetne (näiteks võrdsete pikkustega alalõikudega) alajaotus

T ja konkreetne punktide ξ_k valik, mille korral $\sigma_f(T, \xi) > \sigma_g(T, \xi)$. See annab vastuolu, sest tingimus $f(x) \leq g(x)$ annab $\sigma_f(T, \xi) \leq \sigma_g(T, \xi)$ iga alajaotuse T korral.

167. a) Olgu f, g ja h Darboux' integraalid I_* ja I^* , J_* ja J^* ning K_* ja K^* . Eeldused on, et $I_* = I^* = K_* = K^* = I$ ning $f \leq h \leq g$. Kuna $s_f(T) \leq s_h(T) \leq s_g(T)$, siis $I_* \leq J_* \leq K_*$, analoogiliselt leiame, et $I^* \leq J^* \leq K^*$. Siit järeldub vajalik tulemus $J_* = I = J^*$.

b) Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke $\delta > 0$ omadusega: kui $\lambda(T) < \delta$, siis $I - \varepsilon < \sigma_f(T, \xi) \leq \sigma_h(T) \leq \sigma_g(T) < I + \varepsilon$.

168. Rakendage ülesannet 165.

169. 1) $\sin x^2 \leq x^2$, $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{2} = 1$; 2) $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \geq x$, $e^4 > 2$; 3) $\ln x \leq x - 1$, $\ln 2 < \ln e = 1$.

170. $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x \leq 2$.

173. Diferentseerige valemit $\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$ muutuja x järgi.

174. 1) $\frac{1}{1+x}$. 2) Kuna funktsioon $F(x) = \int_0^{2x} f(t) dt$ (ja seega ka tuletisfunktsioon F') ei sõltu sellest, kuidas on defineeritud $f(0)$ (tähtis on ainult, et f oleks integreeruv lõigus otspunktidega 0 ja $2x$), siis valime

f nii, et ta oleks pidev: $f(x) = \operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$ (Sageli kõrvaldatava katkevuse korral in-

tegrandi kirjapanekul katkevuse kõrvaldamist eraldi ära näitama ei hakata.) Saame, et $F'(x) = 2 \operatorname{sinc} 2x$. 3) $-\frac{x}{\ln x}$. 4) $2(\ln 2x)^2 - (\ln x)^2$. 5) $-e^{(\sin x)^2} \cos x - e^{(\cos x)^2} \sin x$.

176. a1) $\frac{1}{8}$; a2) $\frac{1}{2}$; a3) $\frac{2}{\pi}$; a4) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; a5) integraal hajub; a6) -1 ; b1) $1 + \frac{\pi}{2}$; b2) $-\frac{4}{3}$; b3) $\frac{102}{7}$; b4) $\sqrt{3}$; b5) $\frac{1}{\ln 2}$; b6) integraal hajub; b8) π ; b9) integraal hajub; b10) π ; b11) -1 .

179. 1) $q > 1$; 2) $q < 1$; 3) mitte ühegi q väärtuse korral.

180. Arvutage $\int_a^\infty \frac{K dx}{x^q}$.

181. Kui f on tõkestamata punkti b vasakpoolses ümbruses, siis on majorant $\frac{K}{(b-x)^q}$.

182. Vaadelda tuleb olukorda $0 \leq \frac{K}{x^q} \leq f(x)$, kus q on selline, et $\int_a^\infty \frac{K dx}{x^q}$ hajub. Analooiliselt juhul, kus päratu integraal leitakse lõigus $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

183. a1) koondub; a2) koondub; a3) hajub; a4) koondub; a5) hajub; a6) koondub; b1) koondub; b2) koondub; b3) koondub; b4) hajub; b5) koondub; b6) hajub.

186. $u_k = s_k - s_{k-1}$.

187. Avaldage osasummad $\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$.

188. Osasummade jada on kasvav; $(-1)^n$.

189. Kasutage Cauchy kriteeriumit ja kolmnurga võrratust.

Alternatiiv: koondugu rida $\sum_k 2|u_k|$, siis $0 \leq u_k + |u_k| \leq 2|u_k|$ ja I võrdluslause tõttu koondub ka rida

$\sum_k (u_k + |u_k|)$, millest järeldub rea $\sum_k u_k$ koonduvus.

190. 1) kasutage seost $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, summa on 1; 2) $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$, summa on $\frac{11}{18}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 2; 6) 12; 7) $\frac{3}{4}$; 8) eeldusel, et $|a| > \frac{1}{5}$ on summa $\frac{45a+1}{25a-5}$; 9) 1.

193. 1) $\lim_k \frac{k}{100k+1} = \frac{1}{100} \neq 0$; 2) $\lim_k |(-1)^k| = 1 \neq 0$, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;

alternatiiv: jada $((-1)^k)$ hajub, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;

alternatiiv: osasummade jada on $(-1, 0, -1, \dots)$, mis hajub; 3) tähistame $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; oletades, et $\lim_n s_n = s$,

kehtib $0 = \lim_n (s_{2n} - s_n) \geq \frac{1}{2}$, vastuolu; 4), 5) analoogiline ülesandega 3).

194. 1) koonduv (I või II VL); 2) koonduv (I või II VL); 3) koonduv (I või II VL); 4) koonduv (II VL); 5) hajuv (II VL); 6) hajuv (II VL); 7) koonduv (II VL); 8) hajuv (II VL); 10) koonduv (Cauchy või d'Alembert); 9) hajuv (Cauchy või d'Alembert); 11) koonduv (Cauchy või d'Alembert); 12) koonduv (Cauchy või d'Alembert); 13) hajuv (II VL); 14) koonduv (d'Alembert); 15) koonduv (d'Alembert); 16) hajuv (d'Alembert); 17) koonduv (d'Alembert); 18) koonduv (d'Alembert); 19) koonduv (Leibniz); 20) koonduv (Leibniz); 21) hajuv $\lim_k \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$.

195. 1) Väide kehtib. Näidake, et kui $\lim_k u_k = 0$, siis jada liikmetega $\frac{1}{u_k}$ on tõkestamata. Seega see jada

hajub ning ei kehti rea koonduvuse tarvilik tingimus $\lim_k \frac{1}{u_k} = 0$. 2) Väide ei kehti: kontranäiteks sobib $u_k = 1, k \in \mathbb{N}$.

198. 1) $D = (-1, 1], f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-1, 1), \\ 1, & \text{kui } x = 1; \end{cases}$ 2) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 3) $D = \mathbb{R}, f(x) = e^x$;

4) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 5) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$; 6) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$.

199. 1) ei; 2) jah; 3) jah; 4) jah; 5) ei; 6) ei; 7) ei.

204. 1) $D = A = (-1, 1), S(x) = \frac{x}{1-x}$; 2) $D = A = (0, \infty), S(x) = \frac{x-1}{2}$; 3) $D = A = \left(\frac{1}{e}, e\right), S(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x}$; 4)

$D = A = \{0\}, S(x) = 0$; 5) $D = A = [0, \sqrt{e-1}), S(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1-\ln(1+x^2)}$; 6) $D = A = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}, S(x) = \frac{1}{x}$.

205. 1) $D = A = (1, \infty)$; 2) $D = (0, \infty), A = (1, \infty)$; 3) $D = \left(\frac{1}{2}, \infty\right), A = (1, \infty)$; 4) $D = A = (-1, 1)$; 5) $D = A = \mathbb{R}$;

6) $D = A = (-1, 1)$; 7) $D = A = \mathbb{R}$.

206. 1) $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$; 4) $\left|\frac{(\sin kx)^2}{\sqrt{k^3+1}}\right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\left|\frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}\right| \leq \frac{1}{k^2}$; 6) $\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}}\right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 7) $\left|\frac{1}{2^k + \arccos x}\right| \leq \frac{1}{2^k}$;

8) $\left|\frac{e^{-k^2 x^2}}{k\sqrt{k}}\right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

207. $D = \mathbb{R}, A = \emptyset$. Kõigepealt liita rea liikmed paarikaupa.

211. 1) Rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{2}$; 2) rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{3}$; 3) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \infty)$, piirväärtus on 1.

212. 1) Rida koondub ühtlaselt hulgas $[\ln 2, \ln 3]$, integraal on $\frac{1}{2}$; võib ka leida $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

ning võtta sellest integraal antud rajades; 2) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \pi]$, integraal on $\frac{5\pi}{2}$.

213. 3) Rida ise koondub punktiviisi ja tuletiste rida koondub ühtlaselt hulgas $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f'(0) = -2$; tuletis on 2) Rida ise ja tuletiste rida koondub ühtlaselt igal pool; $f^{(17)}(3) = 68$.

214. Rida ise ja tuletiste rida koondub ühtlaselt kogu reaalteljel (kasutada Weierstrassi tunnust), seega summa on pidev ja pidevalt diferentseeruv.

217. 1) $D = A = (1, 3), S(x) = \frac{1}{3-x}$; 2) $D = [-1, 1), A = (-1, 1), S(x) = -\ln(1-x)$; 3) $D = A = (-1, 1), S(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$; 4) $D = A = \{0\}, S(x) = 0$; 5) $D = A = [0, 2], S(x) = 1 - \frac{x-2}{x-1} \ln(2-x)$; 6) $D = A = \mathbb{R}, S(x) =$

$$e^{x+2}-1; 7) D = A = \mathbb{R}, S(x) = \operatorname{sh} x^2; 8) D = (-1, 1), A = (-1, 1), S(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|; 9) D = [-4, 0), A = (-4, 0),$$

$$S(x) = \ln \left(-\frac{2}{x} \right).$$

218. 1) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$,

$$\text{siis } \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \text{ Niisiis antud rea summa on } 2. 2) \text{ Funktsionaalrida } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \text{ on ast-}$$

$$\text{merida koonduvusvahemikuga } (-1, 1). \text{ Saame, et kui } x \in (-1, 1), \text{ siis } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.$$

$$\text{Niisiis antud rea summa on } 6. 3) e^3. 5) \sin \frac{\pi}{2} = 1. 6) \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\textbf{219.} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}, \mathbb{R}; 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \mathbb{R}; 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!}, \mathbb{R}; 4) 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}, \mathbb{R}, \text{ ka-}$$

$$\text{sutada valemit } (\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2}; 5) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, (-1, 1); 6) \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+9}, (-1, 1); 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, (-2, 2); 8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n, (-2, 2); 9) \ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n8^n}, (-8, 8].$$