

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

V. Atleis T. Täht

Ü L E S A N D E I D

ÜLELIIDULISTELT MATEMAATIKA
OLÜMPIAADIDELT

TRÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatilise Spetsialise
matemaatika kateedri

Tallinn

1 9 7 9

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

V. Altleis T. Täht

ÜLESANDEID ÜLELIIDULISTELT MATEMAATIKA
OLÜMPIAADIDELT

TRÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise
metoodika kateeder

T a l l i n n
1 9 7 9

© Eesti NSV Haridusministeerium 1979

E E S S Õ N A

Käesolev ülesannetekogu sisaldab kolme üleliidulise kooliõpilaste matemaatikaolümpiaadi (1976, 1977, 1978.a.) ülesanded ning rida ülesandeid žürii materjalidest, kokku 115 ülesannet. Ülesannetele 1 - 95 on antud lahendused. Ülesannete 96 - 115 lahenduskäike pole esitatud osaliselt sellepärast, et kogumiku maht on piiratud, aga ka seetõttu, et kõikide ülesannete lahendused pole ülesannetekogu autoritele teada.

Ülesanded 112, 113, 114, 115, 96 a, 96 c on suhteliselt lihtsad. Ülesannete 96 b, 101 b, 103, 107, 108, 109, 110, 111 lahenduse idee ei ole aga autoritele teada. Autorid on tänuilnud, kui keegi lugejatest saadab mõne märgitud ülesande lahenduse või mõnele ülesandele lihtsama lahenduse aadressil: Tartu, 202400, TRÜ, matemaatilise statistika ja programmeerimise kateeder, V.Altleis. Ülejäänud lahendusteta ülesanded on keskmise raskusastmega.

Igal olümpiaadil lahendati ülesandeid kahel päeval, kusjuures kummalgi päeval oli lahendamiseks 4 - 5 tundi aega. X olümpiaadi teisel päeval esitati kõikidele osavõtjatele ja XI olümpiaadil 10. klassi õpilastele 3 rasket ülesannet arvestusega, et iga osavõtja lahendab keskmiselt ühe ülesande. Eri-nevalt X olümpiaadist hinnati XI olümpiaadil rohkem edasijõudmist ühes ülesandes kui mitme ülesande lihtsate alapunktide lahendamist.

Käesolev ülesannetekogu on mõeldud esmajoones matemaatikahuvilistele keskkooliõpilastele ja sobib seega kasutamiseks kooli matemaatikaringides.

Täname dotsent E.Mitti hinnaliste nõuannete ja märkuste eest. Samuti täname S.Härmi, kes osutas suurt abi käsikirja tehnilisel vormistamisel.

Autorid

1. mail 1978.a.

X ÜLELIIDULINE KOOLIÕPILASTE MATEMAATIKAOLÜMPIAAD

8. klass. Esimene päev

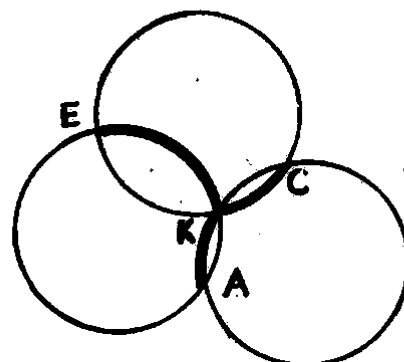
1. Oletame, et lauale on asetatud 50 kella. On teada, et kõik kellad käivad täpselt. Näidata, et leidub selline moment, millal kõikide kellade minutiosutite otspunktide kauguste summa laua keskpunktist on suurem kui kõikide kellade keskpunktide kauguste summa laua keskpunktist.

2. Ritta on kirjutatud järjest 1000 reaalarvu. Selle rea alla kirjutatakse uus rida järgmise reegli põhjal: iga arvu A alla kirjutatakse selline naturaalarv, mis näitab, mitu korda arv A esineb esimeses reas. Teisest reast saadakse analoogiliselt viisil kolmas rida: teise rea iga arvu B alla kirjutatakse selline naturaalarv, mis näitab, mitu korda arv B esineb teises reas. Seejärel konstrueeritakse analoogiliselt kolmandast reast neljas rida, neljandast viies jne.

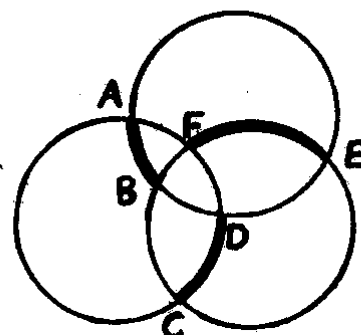
- Näidata, et leidub rida, mis langeb kokku talle järgneva reaga.
- Näidata, et 11. ja 12. rida ühtivad.
- Tuua sellise esialgse rea näide, mille korral kümnes rida ei võrdu üheistkümnenädaga.

3. Tasandil on antud 3 võrdse raadiusega ringjoont.

- Näidata, et kui kõik ringjooned lõikuvad ühes punktis (vt. joon. 1), siis kaarte AK, CK ja EK summa on 180° .
- Näidata, et kui ringjooned asetsevad nii, nagu joonisel 2, siis kaarte AB, CD ja EF summa on 180° .



Joonis 1.

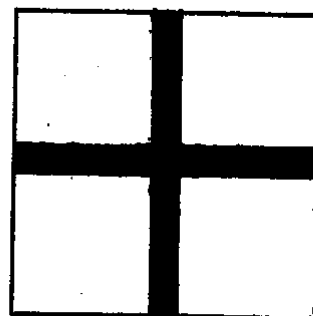


Joonis 2.

4. Naturaalarvud x_1 ja x_2 on väiksemad kui 10 000. Lähtudes antud arvudest konstrueeritakse jada $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$, kus arv x_3 on võrdne $|x_1 - x_2|$, arv x_4 on võrdne minimaalsega arvudest $|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|$, arv x_5 on minimaalne arvudest $|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_1 - x_4|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_4|, |x_3 - x_4|$ jne. (iga järgmine arv võrdub minimaalsega kõikide eelnevate arvude vahede absoluutväärtustest). Näidata, et $x_{21} = 0$.

8. klass. Teine päev

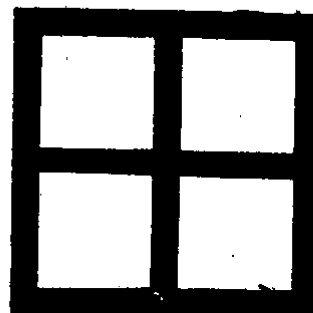
5. Malelaul, millel on 99×99 ruutu, on märgitud mingi kujund Φ , mille igas ruudus istub kärbes. Teatud ajamomendil tõusevad kõik kärbsed lendu ja maanduvad uuesti antud kujundi Φ ruutudele, kusjuures ühte ruutu võib sattuda mitu kärbest. On teada, et iga kaks kärbest naaberruutudest asuvad pärast maandumist jälle naaberruutudes või siis ühes ja samas ruudus (naaberruutudeks nimetatakse ruute, millel on ühine kas serv või tipp).



Joonis 3.

a) Olgu kujund Φ - "tsentraalne rist" (vt. joon. 3), s.t. keskmise horisontaali ja keskmise vertikaali ühend. Näidata, et sellisel juhul leidub kärbes, kes lendab kas samasse ruutu või naaberruutu.

b) Kas punkti a väide kehtib, kui kujund Φ on "akna raam" (vt. joon. 4), s.t. "tsentraalse risti" ja kõikide malelaua äärruutude ühend?



Joonis 4.

c) Kas punkti a väide kehtib, kui kujund Φ on kogu malelaud?

6. Nimetame kolmnurka "suureks", kui tema kõik küljed on pikemad kui 1. Olgu antud võrdkülgne kolmnurk ABC, mille külje pikkus on 5.

- a) Näidata, et kolmnurgast ABC saab välja lõigata 1000 "suurt" kolmnurka.
- b) Näidata, et kolmnurka ABC saab tervenisti lõigata 1000 "suureks" kolmnurgaks.
- c) Näidata, et kolmnurka ABC saab tervenisti lõigata 1000 "suureks" kolmnurgaks nii, et igal kahel kolmnurgal kas ei ole ühiseid punkte, või on ühine tipp, või on ühine külg.
- d) Tõestada väited b ja c juhul, kui ABC on korrapärane kolmnurk külje pikkusega 3.

7. Nimetame naturaalarvu "universaalseks", kui teatud numbrite mahatõmbamisega on võimalik temast saada mistahes etteantud üheksakohalist arvu, mille kõik numbrid on erinevad ja ei võrdu nulliga.

- a) Tuua näide "universaalsest" arvust, milles on $9^2 = 81$ numbrit.
- b) Tuua näide sellisest "universaalsest" arvust, milles on $9^2 - 9 + 1 = 73$ numbrit.
- c) Näidata, et iga "universaalse" arvu korral leidub selline number, mis esineb temas vähemalt üheksa korda.
- d) Proovige konstrueerida "universaalne" arv, milles oleks võimalikult vähe numbreid. (On teada, kuidas konstrueerida sellist arvu, milles on $9^2 - 2 \cdot 9 + 4 = 67$ numbrit.)

9. klass. Esimene päev

8. Vt. ül.3.

9. Kas on võimalik nummerdada kõik kuubi tipud numbri-
test 1 ja 2 moodustatud erinevate kolmekohaliste arvudega nii,
et iga kahe naabertipu juurde kirjutatud arvud erineksid vähe-
malt kahes numbrijärgus?

10. Vt. ül.4.

11. Tasandil on antud vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$, millede summa on $\vec{0}$. Tõestada, et

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|.$$

9. klass. Teine päev

12. Vt. ül.6.

13. Ringjoonele on paigutatud n reaalarvu ($n \geq 3$), millede summa on null. Üks neist arvudest on 1.

- a) Näidata, et leiduvad kaks naaberarvu, mis erinevad vähemalt $4/n$ võrra.
- b) Näidata, et leidub selline arv, mis erineb oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest vähemalt $8/n^2$ võrra.
- c) Hinnangut, mis on antud eelmises punktis, saab parandada. Püüdke asendada arv 8 mingi suurema arvuga nii, et väide b kehtiks endiselt kõigi naturaalarvulistele n korral.
- d) Näidata, et kui $n = 30$, siis leidub ringjoonel arv, mis erineb oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest mitte vähem kui $2/113$ võrra. Tuua näide kolmekümnest arvust ringjoonel, kus iga arv ei erine oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest mitte rohkem kui $2/113$ võrra.

14. Olgu antud naturaalarv N . Naturaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ nimetatakse "N-universaalseks", kui sellest jadast on võimalik teatud liikmete mahatõmbamisega saada arvude $1, 2, \dots, N$ kõik permutatsioonid (s.t. sellised jadad N elemendist, millesse iga arv $1, 2, \dots, N$ kuulub täpselt ühe korra). Näiteks jada $1, 2, 3, 1, 2, 1, 3$ on "3-universaalne", aga jada $1, 2, 3, 2, 1, 3, 1$ pole "3-universaalne", sest tema liikmete mahatõmbamisel ei ole võimalik saada permutatsiooni $3, 1, 2$. Käesoleva ülesande eesmärgiks on saada antud N jaoks kõige lühema "N-universaalse" jada liikmete arvu hinnang.

- a) Tuua näide "N-universaalsest" jadast, milles on N^2 liiget.
- b) Tuua näide sellisest "N-universaalsest" jadast, milles on $N^2 - N + 1$ liiget.

- c) Tõestada, et iga "N-universaalne" jada sisaldab vähemalt $N(N+1)/2$ liiget.
- d) Näidata, et kõige lühem "4-universaalne" jada koosneb 12 elemendist.
- e) Püüdkе leida antud N jaoks võimalikult lühike "N-universaalne" jada. (On teada, et saab konstrueerida sellise "N-universaalse" jada, milles on $N^2 - 2N + 4$ liiget.)

10. klass. Esimene päev

15. Olgu x_0 ja x_1 naturaalarvud, mis on väiksemad kui 1000, $x_2 = |x_0 - x_1|$, $x_3 = |x_1 - x_2|$, $x_4 = |x_2 - x_3|$ jne. Näidata, et vähemalt üks arvudest $x_2, x_3, \dots, x_{1500}$ on võrdne nulliga.

16. Korrapärases 1976-nurgas on tähistatud kõikide külgede keskpunkte ja kõikide diagonaalide keskpunkte. Milline on tähistatud punktide maksimaalne arv ühel ringjoonel?

17. Ruudukujulisele paberilehele on joonistatud n ristkülikut (ristkülikute küljed on paralleelsed paberilehe servadega), kusjuures iga kaks ristkülikut ei oma ühiseid sisepunkte. Tõestada, et kõikide nende ristkülikute väljalõikamisel ruudust jääb järele mitte rohkem kui $n + 1$ tükki.

18. Kolm jalakäijat liiguvad tasandil sirgjooneliselt ja konstantsete kiirustega. Algmomendil ei asu nad ühel sirgel. Tõestada, et nad saavad asetseda ühel sirgel mitte rohkem kui kahel korral.

19. Vt. ül.11.

10. klass. Teine päev

20. Korrapärase n-nurga keskpunkt on punktis O. Selle hulknurga tippudesse on kirjutatud arvud +1 ja -1. Ühel käigul lubatakse muuta märki kõikidel neil arvudel, mis asetsevad mingi korrapärase k-nurga (keskpunktiga punktis O) tippudes (sealjuures on lubatud ka 2-nurgad, kusjuures 2-nurga all mõistetakse lõiku keskpunktiga punktis O). Tõestada, et juhtudel a,

b ja c eksisteerib niisugune $+1$ ja -1 paigutus, et mitte ühegi arvu käikudega pole võimalik saada paigutust, kus kõik arvud on $+1$.

a) $n = 15$.

b) $n = 30$.

c) n on suvaline kahest suurem naturaalarv.

d) Püüdke leida suvalise n korral kõikvõimalike erinevate $+1$ ja -1 paigutuste arv, kus ühestki paigutusest pole võimalik saada mitte ühtegi teist paigutust ülaltoodud reeglit rakkudes. Näidata, et kui $n = 2^{100}$, siis selliseid paigutusi on 2^{480} .

21. Sfääril raadiusega 1 on fikseeritud suurring, mida nimetame ekvaatoriks. Kasutame ka teisi geograafilisi mõisteid nagu poolus, meridiaan, paralleel.

a) Defineerime sfääril funktsiooni f , mis seab igale sfääri punktile vastavusse selle punkti kauguse ruudu ekvatoriaaltasandist. Kontrollida, et funktsioonil f on järgmine omadus: kui M_1 , M_2 ja M_3 on kolme omavahel ristuva raadiuse otspunktid sfääril, siis

$$f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1. \quad (1)$$

Edaspidi (punktid b, c, d ja e) olgu f suvaline mittenegatiivne funktsioon sfääril, mis võrdub nulliga kõikides ekvaatori punktides ja mis rahuldab tingimust (1).

b) Olgu M ja N ühe meridiaani punktid, mis asetsevad põhjapooluse ja ekvaatori vahel. Tõestada, et kui punkt M on ekvatoriaaltasandist kaugemal kui punkt N , siis $f(M) \geq f(N)$.

c) Olgu M ja N suvalised sfääri punktid. Tõestada, et kui M on ekvatoriaaltasandist kaugemal kui N , siis $f(M) \geq f(N)$.

d) Tõestada, et kui M ja N asetsevad ühel paralleelil, siis $f(M) = f(N)$.

e) Tõestada, et funktsioon f langeb kokku punktis a kirjeldatud funktsiooniga.

22. Vt. ül.14.

XI ÜLELIIDULINE KOOLIÕPILASTE MATEMAATIKAOLÜMPIAAD

8. klass. Esimene päev

23. Tasandil on antud iseennast mittelõikav kinnine murdjoon, mille ükski 3 tippu ei asetse ühel sirgel. Murdjoone kaks lõli moodustavad "erilise" paari, kui nendest ühe pikendus lõikab teist, kusjuures nad ei tohi olla naaberlõlid. Tõestada, et "erilisi" paare on paarisarv.

24. Tasandil on antud n punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Iga punkti juurde on kirjutatud mingi reaalarv. On teada, et kui sirge läbib kahte või enam antud punktidest, siis kõikide sellele sirgele jäävate punktide juurde kirjutatud arvude summa on võrdne nulliga. Näidata, et kõik arvud on võrdsed nulliga.

25. Olgu antud kolmnurk ABC, mille ümber on joonestatud ringjoon. Lõik, mis ühendab kaarte AB ja AC keskpunkte, lõikab kolmnurga külgi AB ja AC punktides K ja L. Olgu kolmnurga siseringjoone keskpunkt punktis O. Näidata, et punktid A, K, L ja O asetsevad rombi tippudes.

26. Ringjoonele on asetatud musti ja valgeid nuppe. Esimesel käigul võetakse ringjoonelt ära kõik need mustad nupud, millel on valge naaber (kasvõi ainult ühel pool). Teisel käigul võetakse ära kõik valged nupud, millel on must naaber, kolmandal käigul võetakse jälle ära need valged nupud, millel on must naaber jne. Nii käiakse senikaua, kuni ringjoonele jäävad ainult ühte värvi nupud.

- a) Oletame, et algul oli ringjoonel 40 nuppu. Kas on võimalik, et pärast neljandat käiku jääb ringjoonele ainult üks nupp?
- b) Oletame, et algul oli ringjoonel 1000 nuppu. Mitu käiku on vaja sooritada minimaalselt, et ringjoonele jääks ainult üks nupp?

8. klass. Teine päev

27. Ümmarguse laua taga istuvad 7 päkapikku. Igaühel on kruus. Kruusidesse on valatud kokku 3 liitrit piima. Üks päkapikkudest valab oma piima võrdselt ülejäänud 6 kruusi. Seejärel teeb tema parempoolne naaber sedasama jne. Pärast seda, kui viimane, seitsmes päkapikk on oma piima ära jaotanud, on kõikides kruusides samapalju piima kui algul. Kui palju piima oli algul igas kruusis?

28. Nimetame $2n$ -kohalist arvu "eriliseks", kui ta on täisruut ja tema n esimesest numbrist ja n viimasest numbrist moodustatud arvud on täisruudud, kusjuures teine arv võib alata numbriga null, kuid ei tohi olla samaselt null.

a) Leida kõik 2- ja 4-kohalised "erilised" arvud.

b) Kas leidub 6-kohalisi "erilisi" arve? (Näidata, et neid kas ei leidu, või siis tuua sellise arvu näide.)

29. On antud positiivsete reaalarvude hulk $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. Selle hulga iga osahulga jaoks kirjutatakse välja temasse kuuluvate elementide summa (vaadeldakse summasid ühest, kahest, ..., n liidetavatest). Näidata, et kõik väljakirjutatud arvud saab jaotada n rühma nii, et igas rühmas suurima arvu suhe vähimasse ei ületa 2.

30. On antud 1000 piletit järjekorranumbritega 000, 001, ..., 999 ja 100 urni numbritega 00, 01, ..., 99. Piletit lubatakse lasta urni, kui urni numbrit on võimalik saada pileti järjekorranumbrist selle mingi numbri mahatõmbamisel. Tõestada, et

a) kõik piletid saab paigutada 50 urni,

b) kõiki pileteid ei saa paigutada vähem kui 40 urni,

c) kõikide piletite paigutamiseks läheb vaja vähemalt 50 urni.

9. klass. Esimene päev

31. Kolmnurkadel T_1 ja T_2 on ühine välisringjoon, kusjuures kolmnurga T_2 tipud asetsevad kolmnurga T_1 tippude vaheliste kaarte keskpunktides. Tõestada, et kuusnurga $T_1 \cap T_2$ vastastippe ühendavad diagonaalid on paralleelsed kolmnurga T_1 külgedega ja lõikuvad ühes punktis.

32. On antud lõpmatu jada $a_1, a_2, \dots$. On teada, et $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{n+1} - a_n)/2 = 0$. Näidata, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

33. Vt. ü1.23.

34. Teataval maal on igast linnast igasse linna võimalik sõita teisi linna läbimata. On teada iga sellise sõidu maksumus. Koostati kaks marsruuti läbi kõikide linnade. Esimest tüüpi marsruudil esimene linn valitakse suvaliselt, seejärel sõidetakse sellesse linna, kuhu sõit on kõige odavam. Edasi valitakse läbimata linnade hulgast jällegi see, kuhu sõit on kõige odavam (kui mingil sammul on mitu sellist linna, siis valitakse suvaliselt üks neist) jne. Teist tüüpi marsruudi korral valitakse esimene linn samuti suvaliselt, järgmiseks linnaks valitakse aga veel läbimata linnade hulgast see, kuhu sõit on kõige kallim. Tõestada, et esimest tüüpi marsruudi läbimine ei ole kallim kui teist tüüpi marsruudi läbimine.

9. klass. Teine päev

35. On antud ruuduline paberileht mõõtmetega 100×100 ruutu. Paberile on joonestatud teatav hulk iseennast mitte-lõikavaid murdjooni, mis kulgevad mööda ruutude külgesid. On teada, et mistahes kaks murdjoont ei oma ühiseid punkte. Murdjooned asuvad paberilehe sisemuses, kuid nende alg- ja lõpp-punktid paberilehe serval. Näidata, et peale antud ruudukujulise paberilehe tippude leidub veel sõlmpunkt (kas ruudu sisemuses või serval), mis ei kuulu ühelegi murdjoonele.

36. On antud naturaalarvud $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$. Summad $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ja $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ on omavahel võrdsed ja väiksemad kui mn. Näidata, et võrdukses

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

saab osa liidetavaid maha tõmmata nii, et võrdus jääb kehtima.

37. Tasandil on antud 1000 ruutu, kusjuures kõikide ruutude küljed on paralleelsed koordinaattelgedega. Olgu M nende ruutude keskpunktide hulk. Näidata, et on võimalik ära märgistada osa ruute nii, et hulga M iga element satub mitte vähem kui ühte ja mitte rohkem kui nelja märgistatud ruutu.

38. Laua! on kangkaal ja n erinevat kaaluvihti. Vihte asetatakse järjest kaalukaussidele, s.t. igal sammul võetakse laualt üks viht ja asetatakse ta ühele või teisele kaalukaussile (mitte tingimata vaheldumisi).

a) Tõestada, et vihte saab asetada sellises järjekorras, et algul vajub alla vasakpoolne kauss, seejärel parempoolne, siis jälle vasakpoolne jne.

Sellisele kaalumiste seeriale seame vastavusse n -tähtlise sõna VPVPVP..., kus V tähendab vasakpoolse, P - parempoolse kaalukaussi allavajumist.

b) Tõestada, et tähtedest V ja P moodustatud mistahes n -tähtlise sõna jaoks võib leida sellise kaalumiste seeria, mis vastaks antud sõnale.

10. klass. Esimene päev

39. Vt. ül.31.

40. Vt. ül.32.

41. Kumera hulktahuka M igast tipust väljub 3 serva. On teada, et hulktahuka iga tahu ümber saab joonestada ringjoone. Näidata, et kõik hulktahuka tipud asetsevad mingil sfääril.

42. On antud hulkliige $x^{10} + \alpha x^9 + \alpha x^8 + \dots + \alpha x + 1$. Isikud A ja B mängivad järgmist mängu. Algul asendab A mingi tärnikese reaalarvuga, seejärel asendab B mingi järelejäänud tärnikese reaalarvuga, siis asendab jälle A jne. (kokku 9 käiku). Kui saadud hulkliikmel puuduvad reaalsed nullkohad, siis loetakse võitjaks mängija A, kui aga sellel hulkliikmel on kasvõi üksainus reaalne nullkoht, siis loetakse võitjaks B. Kas B saab võita A igasuguse mängu korral?

43. Vt. ül.23.

10. klass. Teine päev

44. Vaatleme hulkliikmeid $P(x) = x^1 + a_1 x^{1-1} + \dots + a_1$ ja $Q(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k$. Ütleme, et need hulkliikmed kommuteeruvad, kui iga x korral kehtib võrdus $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

- Leida iga arvu α jaoks kõik hulkliikmed, mille aste ei ületa kolme ja mis kommuteeruvad hulkliikmega $x^2 - \alpha$.
- Olgu $P(x)$ ruutkolmliige ja k naturaalarv. Tõestada, et leidub mitte rohkem kui üks k -astme hulkliige, mis kommuteerub hulkliikmega $P(x)$.
- Leida kõik 4-nda ja 8-nda astme hulkliikmed, mis kommuteeruvad antud ruutkolmliikmega $P(x)$.
- Hulkliikmed $Q(x)$ ja $R(x)$ kommuteeruvad ühe ja sama ruutkolmliikmega $P(x)$. Tõestada, et nad kommuteeruvad ka omavahel.
- Tõestada, et leidub lõpmatu jada hulkliikmeid $P_2(x), P_3(x), \dots$, kus $P_k(x)$ on k -astme hulkliige ja $P_2(x) = x^2 - 2$, nii et iga kaks hulkliiget selles jadas kommuteeruvad.

45. Olgu A $2n$ -kohaline naturaalarv (esimene number ei ole null). Arvu A nimetatakse "eriliseks", kui ta on täisruut ja tema n erimesest ja n viimasest numbrist moodustatud arvud on samuti täisruudud. Sealjuures teine arv võib alata numbriga null, kuid ei tohi olla samaselt null.

- a) Leida kõik kahe- ja neljakohalised "erilised" arvud.
- b) Näidata, et leidub vähemalt üks 20-kohaline "eriline" arv.
- c) Näidata, et 100-kohaliste "eriliste" arvude arv ei ületa kümmet.
- d) Näidata, et leidub vähemalt üks 30-kohaline "eriline" arv.

46. Marslaste tähestik koosneb 10 tähest ja iga kolmetäheline sõna moodustab perekonnanime (s.t. et Marsil on täpselt 1000 erinevat perekonnanime). Marsil kehtivate seaduste põhjal peab marslase eesnimi olema kahetäheline ning ta peab olema saadav tema perekonnanimest ühe tähe mahatõmbamisel.

- a) Näidata, et saab moodustada nimekirja 50 eesnimest, et iga võimaliku perekonnanimega marslane võib valida endale ühe neist eesnimedest.
- b) Näidata, et sellises nimekirjas ei saa olla vähem kui 40 eesnime.
- c) Näidata, et selles nimekirjas on vähemalt 50 eesnime.
- d) Mõõdunud sajandil olid marslaste perekonnanimed neljatähelised ja kahetäheline eesnimi saadi sellest mingi kahe tähe mahatõmbamisel. Näidata, et mõõdunud sajandil sai läbi ajada 34 eesnimega.
- e) Leida minimaalne kahetäheliste eesnimede arv, mis kõlbaks juhul, kui marslaste perekonnanimi koosneb k tähest. Lahendada ülesanne juhul kui $k = 4, 5, 6$ jne.

XII ÜLELIIDULINE KOOLIÕPILASTE MATEMAATIKAOLÜMPIAAD

8. klass. Esimene päev

47. Tähistame sümboliga a_n täisarvu, mis on lähim arvule $\sqrt{n}$. Leida summa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}.$$

48. Nelinurga ABCD sees on valitud punkt M nii, et kujund ABMD on rööpkülik. Näidata, et kui $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$, siis $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

49. Näidata, et mitte ühegi naturaalarvulise m korral arv $1978^m - 1$ ei jagu arvuga $1000^m - 1$.

50. Tasandil on antud lõplik punktide hulk K_0 . Sellele lisatakse kõik punktid, mis on saadud kõikide antud hulga punktide ühekordsel peegeldamisel üksteise suhtes. Tähistame saadud hulga sümboliga K_1 . Analoogiliselt saadakse hulgast K_1 hulk K_2 , hulgast K_2 hulk K_3 jne.

a) Olgu K_0 kahepunktiline hulk (punktid A ja B), kusjuures punktide vaheline kaugus on 1. Millise vähima n korral leidub hulgast K_n punkt, mille kaugus punktist A on 1000?

b) Olgu K_0 ühikulise pindalaga võrdkülgse kolmnurga tippude hulk. Leida vähima kumera hulknurga pindala, mis sisaldab hulga K_n ($n = 1, 2, 3, \dots$ korral).

8. klass. Teine päev

51. Kolm automaati trükitavad kaartidele naturaalarvude paare. Automaadid töötavad järgmiselt. Esimene automaat, lugemad kaardi (a, b) , väljastab kaardi $(a+1, b+1)$. Teine automaat annab kaardi (a, b) põhjal välja kaardi $(a/2, b/2)$ (ta töötab ainult siis, kui a ja b on paarisarvud). Kolmas automaat annab kaartide (a, b) ja (b, c) põhjal välja kaardi (a, c) . Peale selle on teada, et kõik automaadid tagastavad läbiloetud kaardid.

Olgu algul antud kaart $(5,19)$. Kas on võimalik, kasutades automaate suvalises järjekorras, saada kaarti

a) $(1,50)$,

b) $(1,100)$?

c) Olgu algul antud kaart (a,b) , kusjuures $a < b$, aga tarvis on saada kaart $(1,n)$. Milliste n väärtuste korral on see võimalik?

52. Ringi raadiusega R on sisse joonestatud n -nurk, mille pindala on S . Igal n -nurga küljel on ära märgitud punkt. Näidata, et sellise hulknurga ümbermõõt, mille tippudeks on märgitud punktid, ei ole väiksem kui $2S/R$.

53. Malelaua (mõõtmetega $n \times n$ ruutu) nurka on asetatud nupp. Kaks mängijat nihutavad vaheldumisi seda nuppu mööda malelauda, kusjuures ühel käigul nihutatakse nupp lähteväljalt tema naaberväljale (s.t. väljale, millel on lähteväljaga ühine külg). Kui nupp on mingil väljal juba viibinud, siis teistkordselt käia sellele väljale pole lubatud. Võitjaks loetakse see mängija, kes käib viimasena.

a) Näidata, et kui n on paarisarv, siis alustaja saab alati võita, aga kui n on paaritu, siis saab võita tema partner.

b) Kes võidab, kui mängu algul nupp ei asetse malelaua nurgas, vaid tema naaberväljal?

54. Tasandil on antud lõplik hulk mittelõikuvaid lõike, kusjuures ükski lõikude paar ei asetse ühel sirgel. Kas on võimalik ühendada antud lõikude otspunktid omavahel sirglõikudega nii, et tekib iseendaga mittelõikuv murdjoon?

9. klass. Esimene päev

55. Vt. ül.47.

56. Vt. ül.48.

57. Laual on kaks kuhja tikke. Esimeses kuhjas on m , teises n tikku, kusjuures $m > n$. Kaks mängijat võtavad vaheldumisi kuhjadest tikke. Ühe käigu jooksul võtab mängija ühest kuhjast

suvalise (nullist erineva) arvu tikke, kuid nii, et tema poolt võetud tikkude arv on teise kuhja tikkude arvu kordne. Võitjaks loetakse see mängija, kes võtab mingist kuhjast viimase tiku.

a) Näidata, et kui $m > 2n$, siis alustaja saab alati võita.

b) Milliste reaalarvu α väärtuste korral kehtib järgmine väide: kui $m > \alpha n$, siis alustaja saab alati võita?

58. Näidata, et leidub selline lõpmatu tõkestatud jada x_n , et iga m ja k korral ($m \neq k$) kehtib võrratus

$$|x_m - x_k| \geq \frac{1}{|m - k|}.$$

9. klass. Teine päev

59. Vt. ül.51.

60. Vt. ül.52.

61. Reaalarvud $x_1, x_2, \dots, x_n$ asetsevad lõigul $[a, b]$, kus $0 < a < b$. Tõestada võrratus

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

62. On antud algarv $p > 3$. Vaatleme koordinaattasandil hulka M , mis koosneb sellistest täisarvuliste koordinaatidega punktidest (x, y) , kus $0 \leq x < p$ ja $0 \leq y < p$. Näidata, et hulgas M on võimalik ära märkida p erinevat punkti nii, et ükski nelik märgitud punktide hulgast ei ole rööpküliku tippudeks ja ükski kolmik ei asetse ühel sirgel.

10. klass. Esimene päev

63. Olgu $f(x) = x^3 - x + 1$. Näidata, et kõikide naturaalarvuliste m korral ($m > 1$) arvud $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$ on paarikaupa ühisteguriteta.

64. Näidata, et saab leida sellise reaalarvu A , et funktsiooni $y = A \cdot \sin x$ graafikusse saab sisse joonestada vähemalt

1978 paarikaupa mittekongruentset ruutu. (Ruutu nimetatakse sissejoonestatuks, kui kõik tema tipud kuuluvad graafikule.)

65. Olgu K_0 ühikulise ruumalaga korrapärase tetraeedri tippude hulk. Hulga K_0 lisatakse kõik need punktid, mis saadakse kõikide antud hulga punktide ühekordsel peegeldamisel üksteise suhtes. Tähistame saadud hulga sümboliga K_1 . Analoo- giliselt saadakse hulgast K_1 hulk K_2 , hulgast K_2 hulk K_3 jne.

- a) Vaatleme vähimat kumerat hulktahukat, mis hõlmab hulga K_1 kõik punktid. Mitu tahku on vaadeldaval hulktahukal? Millised on need tahud?
- b) Milline on selle hulktahuka ruumala?
- c) Leida vähima kumera hulktahuka ruumala, mis sisaldab hulga K_n kõik punktid ($n = 2, 3, 4, \dots$ korral).

66. Vt. ül.58.

10. klass. Teine päev

67. Vt. ül. 51.

68. Näidata, et iga tetraeedri jaoks võib leida kaks sel- list tasandit, et tetraeedri ristprojektsioonide pindalade su- he nendele tasanditele ei ole väiksem kui $\sqrt{2}$.

69. Olgu antud reaalarvud $a_1, a_2, \dots, a_n$. Defineerime $b_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_k)/k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$,

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2,$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2.$$

Näidata, et kehtib ahelvõrratus $C \leq D \leq 2C$.

70. Olgu $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Jada x_n iga liiget saab esitada kujul $x_n = r_n \sqrt{2} + s_n \sqrt{3} + t_n \sqrt{6} + q_n$, kus q_n, r_n, s_n ja t_n on täisarvud. Leida järgmised piirväärtused:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}.$$

71. Vt. ül.62.

ÜLESANDEID ŽÜRII MATERJALIDEST

72. Leida kõik naturaalarvud, mida ei saa esitada järjestikuste naturaalarvude summana.

73. Leida võrrandi $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$ kõik täisarvulised lahendid.

74. Nimetame naturaalarvu "tasakaalustatuks", kui tema mingi "algus" ühtib tema mingi "lõpuga" (näiteks 1971, 20320).

- a) Näidata, et "tasakaalustatud" arvude osa kõikide n -kohaliste arvude hulgas ei ületa $1/9$.
- b) Näidata, et võib leida sellise naturaalarvu, mis muutub "tasakaalustatuks", kui talle lõppu kirjutada suvaline numbritest 0, 1, 2, ..., 9.

75. Näidata, et kui n on naturaalarv, siis

$$a) \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right],$$

$$b) 0 < \sqrt{4n+2} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{16\sqrt{n^3}}.$$

76. Olgu $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$ ning m ja M vastavalt vähim ja suurim arvude $x_1, x_2, \dots, x_k$ hulgas. Tõestada, et

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leq -kmM.$$

77. On antud jada $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$, kus $a_k \geq (a_{k-1} + a_{k+1})/2$ $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ korral. Tõestada, et

$$\frac{1}{n+1}(a_0 + a_2 + \dots + a_{2n}) \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1})$$

ning leida, milliste jadade a_k korral kehtib võrdus.

78. Olgu p algarv, kusjuures $p > 5$. Esitame murru $1/p$ lõpmatu perioodilise kümnendmurruna ja vaatleme selle perioodi.

- a) Näidata, et perioodi kõigi numbrite summa jagub 9-ga.
- b) Näidata, et kui perioodi saab jaotada m "tükiks" nii, et igas "tükis" on k numbrit, siis saadud "tükide" summa ("tükke" vaadeldakse kümnendsüsteemi arvudena) jagub arvuga $99\dots 9$ (k üheksat).

79. Kas saab leida sellised reaalarvud a ja b , et $|a - b| \geq 1978$ ning et võrrandil $ax^2 + bx + ax + b = x$ puuduvad reaalsed lahendid?

80. Näidata, et kui $x > 0$, siis $e^x \geq x^e$.

81. Milline on võrrandi $e^x = ax^2 + bx + c$ maksimaalne lahendite arv (a, b, c - reaalarvud)?

82. Jada x_n on antud järgmiste rekurrentsete seostega: $x_{n+1} = x_n + (x_n - c)^2$, kui $n \geq 1$, ning $x_1 = 0$. Milliste c väärtuste korral jada x_n koondub?

83. Jadad a_n ja b_n on antud järgmiste seostega:
 $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1}$, $a_1 = 1$; $b_n = a_n/2^n$, $n \geq 1$. Näidata, et jada b_n koondub.

84. 12 % sfääri pinnast on värvitud mustaks. Näidata, et sellesse sfääri saab sisse kujundada risttahuka nii, et ükski tema tipp ei asu sfääri värvitud osal.

85. Malelaua ruutudele on kirjutatud 1, 2, 3, ..., 64 suvalises järjekorras. Näidata, et saab leida kolm 2×2 ruutu nii, et nendes ruutudes olevate arvude summa on suurem kui 100.

86. Näidata, et kui $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$, kus mitte kõik suurused x_i ja y_i ei ole nullid, siis

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{2}{3}.$$

87. Milliseid kuuekohalisi arve on rohkem: kas selliseid, mida saab esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena, või selliseid, mida ei saa esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena?

88. Lõpmatu suure ruudulise paberi igasse ruutu on kirjutatud musta värviga +1 või -1. Näidata, et kõikide ruutude külgedele saab kirjutada punase värviga +1 või -1 nii, et punaste arvude korrutis mööda suvalist kinnist kontuuri on võrdne kõikide selle kontuuri sees asuvate mustade arvude korrutisega.

89. On antud hulkliige $x^{10} + \overline{m}x^9 + \overline{m}x^8 + \dots + \overline{m}x + 1$. Isikud A ja B mängivad järgmist mängu. Algul asendab A mingi

tärnikese reaalarvuga, seejärel asendab B mingi järelejäänud tärnikese reaalarvuga, siis asendab jälle A jne. (kokku 9 käiku). Kui saadud hulkliikme kõik nullkohad on reaalsed, siis loetakse võitjaks B, kui aga sellel hulkliikmel on kasvõi üksainus kompleksne nullkoht, siis loetakse võitjaks A. Kas B saab võita A igasuguse mängu korral?

90. Nimetame arvu "täiuslikuks", kui tema kõikide tegurite summa on võrdne selle arvu kahekordsega. (Näiteks 6 ja 28 on "täiuslikud", sest et $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$ ja $2 \cdot 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$.) Näidata, et arv kujul $4n-1$ ei ole "täiuslik".

91. Ringi raadiusega 4 on joonestatud kolmnurk (tipud asuvad ringjoonel). Kolmnurka ja igasse segmenti on joonestatud siseringjooned. Näidata, et nende nelja ringjoone raadiuste summa ei ole suurem kui 5.

92. Näidata, et võrrandil $x! y! = z!$ on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid tingimusel et $x > 1$ ja $y > 1$.

93. Milline peab olema seos kolmnurga külgede vahel, et nurkade jaoks kehtiks võrdus $\alpha = 2(\beta - \gamma)$?

94. Milliste naturaalarvuliste N väärtuste jaoks leidub täisarvuliste kordajatega hulkliige $P_N(x)$, mis N erinevas täisarvulises punktis on võrdne N ja punktis $x = 0$ on võrdne nulliga?

95. a) Leida summa
$$U_N = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{C_n^k}.$$

b) Näidata, et
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

c) Näidata, et
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

96. Olgu c ja d reaalarvud.

a) Näidata, et kui jada a_n korral $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c a_{n-1}) = 0$ ja $|c| < 1$, siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Olgu $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k+1} + ca_{n-k}) = 0$.

Milliste c väärtuste korral on $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?

c) Analoogiline küsimus juhul, kui $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ca_{n-1} + da_{n-2}) = 0$ (leida kõikvõimalikud c ja d väärtused).

97. Korrapärase 1000-murga tippudesse on kirjutatud täisarvud, kusjuures on teada, et naaberarvud erinevad ühe võrra. Oletame, et algul on mingi tipu juurde asetatud 2 muppu. Kõik seisneb selles, et mõlemat muppu nihutatakse üheaegselt ja teineteisest sõltumatult nende naabertippudele (mööda ringjoont). Näidata, et nuppe saab nihutada niimoodi, et pärast iga käiku on nad võrdsete arvudega tippudes ja pärast viimast käiku diagonaali otspunktides.

98. Olgu antud tabel $n \times n$, mille igasse lahtrisse on kirjutatud arv 0 või 1. Ühel sammul muudetakse ühtedeks kõik need nullid, millised asuvad mingi sellise ristküliku neljandas tipus, mille kolmes ülejäänud tipus on ühed (vaadeldakse selliseid ristkülikuid, mille küljed on paralleelsed antud tabeli servadega). Maksimaalselt mitme sammu jooksul saab antud tabel muutuda?

99. Ringjoonel asetseb n numbrit (nullid ja ühed). Paarisammudel lühendatakse ühe võrra iga nullide seeriat, paaritutel sammudel - iga ühtede seeriat. Mitu käiku kulub minimaalselt, et ringjoonele ei jääks enam ühtegi numbrit?

100. Kas saab mingi puukujulise graafi iga lüli juurde kirjutada naturaalarvu ("kauguse") nii, et iga naturaalarvulise M korral, kus $1 \leq M \leq N$, leiduks parajasti üks paar graafi tippe, millede vaheline "kaugus" on M ?

101. Näidata, et valem $10k - 14 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 6 \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + 1$, kus k on täisarv, esitab kõik täisarvud, mis on ühisteguriteta arvuga 30.

b) Kas iga perioodilise täisarvude hulga korral eksisteerib teatavas mõttes analoogiline valem?

102. Mitmel erineval viisil saab 13 rohelisest ja 14 punasest kuubist (mõõtmega $1 \times 1 \times 1$) kokku panna kuubi (mõõtmega $3 \times 3 \times 3$), mille igas reas oleks paaritu arv rohelisi?

103. Lõpmatu suures ruudukujuliste kvartalitega linnas on sisse viidud ühesuunaline liiklus. On teada, et igale ristmikule saab sõita kahest suunast ja et igalt ristmikult saab ära sõita kahes suunas. Samuti on teada, et igalt ristmikult saab sõita mööda kinnist marsruuti. Näidata, et iga kahe ristmiku vahel saab sõita vähemalt ühes suunas.

104. Tetraeedri, mille külje pikkus on a , tasapinnaline lõige on nelinurk. Näidata, et selle nelimurga ümbermõõt on vähemalt $2a$ ning et see ei ületa $3a$.

105. Millisteks osadeks (mitu kaksnurka, kolmnurka, nelinurka, ...) jaotavad sfääri a) 4 b) 5 üldasendis ringjoont?

106. Mööda sfääri 3 suurringjoont liiguvad ühtlaselt kolm punkti. Millistel algtingimustel (kiirustel, algfaasidel) ei osutu nad kunagi ühel sirgel olevaiks?

107. Kolmnurga ABC küljel AB on valitud punkt K ja küljel BC punkt L nii, et kolmnurga siseringjoone keskpunkt asub lõigul KL. Punktidest K ja L on konstrueeritud küljega AC paralleelsed sirged, mis lõikavad külgi BC ja BA vastavalt punktides M ja N. Olgu nurkade BAC ja ACB nurgapoolitajate lõikepunktid lõikudega LN ja KM vastavalt B_1 ja B_2 . Näidata, et punktid B, B_1 ja B_2 asuvad ühel sirgel.

108. Näidata, et kui a, b, c ja d on positiivsed reaalarvud, siis $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + \dots + c^2d^2$.

109. Tasandile on paigutatud lõplik hulk lõike, mis on paralleelsed y -teljega. Näidata, et kui

- a) iga kolme neist saab lõigata sirgega, siis saab kõiki lõike lõigata mingi sirgega;
- b) iga nelja neist saab lõigata parabooliga, mille telg on paralleelne y -teljega, siis saab kõiki lõike lõigata mingi parabooliga.

110. Ruumis on antud 4 sirget, millel asuvad kuubi neli omavahel paarikaupa kiivset diagonaali. Näidata, et kui mingi sirge lõikab kolme nendest sirgetest, siis lõikab ta ka neljandat.

111. Näidata, et iga kumera hulktahuka jaoks saab leida sellise sidusa pinnalaotuse, mille suvalised 2 tahku ei kattu.

112. Paralleelsed lõigud AA_1 , BB_1 ja CC_1 ei asu ühel tasandil. Olgu tasandite A_1B_1C , B_1C_1A ja C_1A_1B lõikepunkt M_1 ja tasandite ABC_1 , BCA_1 ja CAB_1 lõikepunkt M . Näidata, et lõik MM_1 on paralleelne lähtelõikudega.

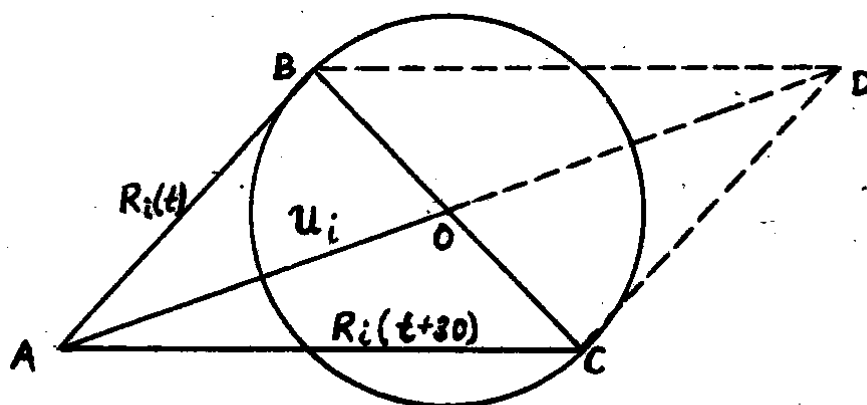
113. Ruudu ABCD küljel AD on fikseeritud punkt E. Leida külgedel AB ja BC punktid M ja K nii, et $MK \parallel CE$ ja nelinurga CEMK pindala oleks maksimaalne.

114. Punktidest A ja B alustasid sõitu (mitte üheaegselt) teineteisele vastu jalgrattur ja mootorrattur. Pärast kohtumist punktis C pöörduvad nad kohe ümber ja sõitsid tulnud teed tagasi. Lähtepunktidesse jõudes pöörduvad nad uuesti ümber ja sõitsid tagasi. Kohtudes punktis D, sõitsid nad jälle tagasi jne. Millises lõigu AB punktis toimub nende 1978. kohtumine?

115. Ruundulisele paberile on joonestatud ringjoon (ruudu külje pikkus 1), mille raadius on suurem kui 2. On teada, et see ringjoon ei läbi ühtegi sõlmpunkti, s.t. ruudu tippu. Nimetame sõlmpunkti rajapunktiks, kui kasvõi üks tema naabru- ses olevatest (s.t. kaugusel 1) sõlmpunktidest asub teisel pool ringjoont. Leida kõikide ringjoone sees olevate rajapunk- tide ja kõikide ringjoonest väljaspool olevate rajapunktide arvude vahe.

L A H E N D U S E D

1. Olgu t aeg minutites. Tähistame sümboliga $R(t)$ kõikide minutiosutite otspunktide kauguste summa laua keskpunktist ajamomendil t . Olgu U kõikide kellade keskpunktide kauguste summa laua keskpunktist A . Tähistame sümbolitega $R_i(t)$ ja U_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 50$) vastavalt i -nda kella minutiosuti otspunkti ja selle kella keskpunkti kauguse laua keskpunktist ajamomendil t . Kuna kellad käivad täpselt, siis ajamomentidel t ja $t+30$ on i -nda kella minutiosuti suund diametraalselt vastupidine (vt. joon. 5).



Joonis 5.

Täiendades kolmnurga ABC rööpküllikuks, saame kolmnurgast ACD seose

$$R_i(t+30) + R_i(t) > 2U_i.$$

Summeerides selle võrratuse vasakud ja paremad pooled i väärtuste $1, 2, 3, \dots, 50$ korral, saame tulemuseks:

$$R(t+30) + R(t) > 2U \quad \text{ehk} \quad [R(t+30) - U] + [R(t) - U] > 0.$$

Saadud võrratusest on näha, et iga t korral kas $R(t) > U$ või $R(t+30) > U$, mida oligi tarvis tõestada.

2. a) On ilmne, et teisest reast alates ükski arv ei ületa 1000 ja et ükski arv ei ületa tema alla kirjutatud arvu. Järelikult kolmanda rea arvude summa ei ole väiksem kui teise rea arvude summa jne., kusjuures iga summa ei ületa miljonit. Järelikult peab leiduma kaks järjestikust rida, kus arvude summa on võrdne, sest summad ei saa kogu aeg kasvada. Järelikult langevad need kaks järjestikust rida kokku.

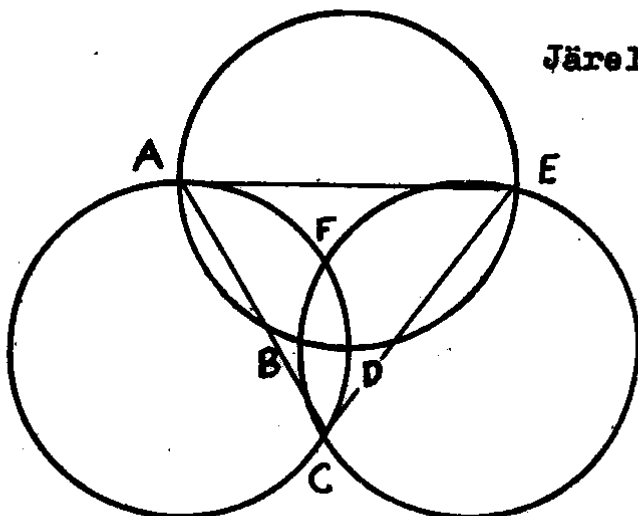
b) Näitame, et kui m -ndas reas ($m \geq 2$) arv ja tema kohale kirjutatud arv on erinevad, siis see arv ei ole väiksem kui 2^{m-2} . Kui $m = 2$, siis on see väide ilmne, kuna teises reas esinevad ainult naturaalarvud. Olgu see väide kontrollitud kõikide ridade korral, millede järjekorranumber on väiksem kui m . Olgu $(m-1)$ -es reas kirjutatud arv a ja tema alla kirjutatud arv b , kus $b > a$. Sel juhul on $(m-2)$ -es reas teatav arv ühesugustest arvudest rühmi, kusjuures igas rühmas on a arvu ja arvud erinevates rühmades on erinevad. Siit järeldub, et b jagub arvuga a , s.t. $b \geq 2a$. Peale selle vähemalt üks nendes rühmades sisalduvatest arvudest erineb arvust a ning järelikult induktsiooni eelduse põhjal on $a \geq 2^{(m-1)-2}$. Siis $b \geq 2a \geq 2^{m-2}$. Seega on meie väide tõestatud matemaatilise induktsiooni põhjal kõikide $m \geq 2$ korral. Kui oletada, et 11. ja 12. rida on erinevad, siis eelneva põhjal peab leiduma 12. reas arv, mis on suurem kui $2^{12-2} = 1024$. Kuid see on võimatu. Järelikult langevad üheteistkümnnes ja kaheteistkümnnes rida kokku.

c) Arvestades eelnevat, võib konstrueerida rea: 0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488. Siin arv 0 ja arv 1 esineb ühe korra, arv 2 kaks korda, arv 4 neli korda, ..., arv 256 esineb 256 korda, arv 488 esineb 488 korda. Kirjutades välja 2., 3., 4., ..., 11. rea, on lihtne näha, et 10. reas arv 256 esineb 512 korda ja arv 488 esineb 488 korda. 11. reas arv 512 esineb 512 korda ja arv 488 esineb 488 korda.

3. Esitame lahenduse ainult ülesandele b, ülesanne a lahendatakse analoogiliselt.

Et ringjoontel on võrdsed raadiused, siis kaared ABD ja AFD on kongruentsed.

Sama võib öelda ka kaarte EFB ja EDB ning CBF ja CDF kohta.



Joonis 6.

$$\begin{aligned} \text{Järelikult } \widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF} &= (\widehat{ABD} - \widehat{BD}) + \\ &+ (\widehat{CDF} - \widehat{DF}) + (\widehat{EFB} - \widehat{BF}) = \\ &= (\widehat{AFD} - \widehat{DF}) + (\widehat{CBF} - \widehat{BF}) + \\ &+ (\widehat{EDB} - \widehat{BD}) = \widehat{AF} + \widehat{BC} + \widehat{DE}. \end{aligned}$$

Vaatleme nüüd kolmnurga AEC nurki.

$$\begin{aligned} \text{Näeme, et } \widehat{CAE} &= \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = \\ &= (\widehat{CD} + \widehat{DE})/2, \quad \widehat{ACE} = (\widehat{AF} + \widehat{EF})/2, \\ \widehat{AEC} &= (\widehat{BC} + \widehat{AB})/2. \end{aligned}$$

Et kolmnurga sisenurkade summa on 180° , siis

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \widehat{CAE} + \widehat{ACE} + \widehat{AEC} = (\widehat{CD} + \\ &+ \widehat{DE} + \widehat{AF} + \widehat{EF} + \widehat{BC} + \widehat{AB})/2 = [(\widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF}) + (\widehat{AF} + \widehat{BC} + \widehat{DE})]/2 = \\ &= \widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF}. \end{aligned}$$

4. Tõestame arvud x_1, x_2 ja x_3 ümber nii, et nad asetseksid kahanevas järjekorras. Siis saadud jada võib erineda algjadast ainult kolme esimese liikme järjestuse poolest. On ilmne, et see jada on kahanev ($x_k \geq x_{k+1}$), sest et x_{k+1} leidmisel me kasutame kõiki neid vahesid, mida me kasutame x_k leidmisel ja veel täiendavalt vahesid $|x_k - x_i|$, kus $i = 1, 2, \dots, k-1$. Ilmneb, et iga $k > 1$ korral

$$x_k \geq x_{k+1} + x_{k+2},$$

sest vastasel juhul

$$x_{k+2} < x_k - x_{k+1} = |x_k - x_{k+1}|,$$

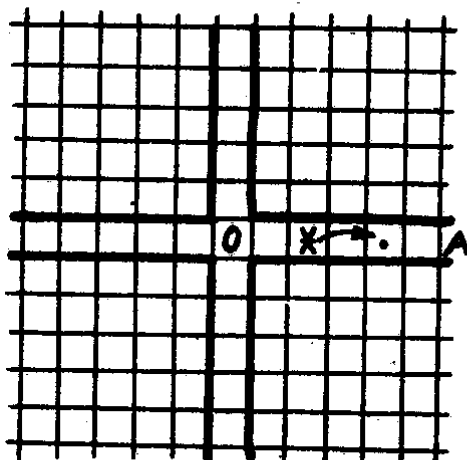
mis on aga võimatu. Oletame et $x_{21} \geq 1$. Siis loomulikult ka

$$\begin{aligned} x_{20} &\geq 1, \quad x_{19} \geq x_{20} + x_{21} \geq 2, \quad x_{18} \geq x_{19} + x_{20} \geq 3, \\ x_{17} &\geq x_{18} + x_{19} \geq 5, \quad x_{16} \geq 5 + 3 = 8, \quad x_{15} \geq 8 + 5 = 13, \quad x_{14} \geq 13 + 8 = 21, \\ x_{13} &\geq 21 + 13 = 34, \quad x_{12} \geq 34 + 21 = 55, \quad x_{11} \geq 55 + 34 = 89, \quad x_{10} \geq 89 + \\ &+ 55 = 144, \quad x_9 \geq 233, \quad x_8 \geq 377, \quad x_7 \geq 610, \quad x_6 \geq 987, \quad x_5 \geq 1597, \end{aligned}$$

$$x_4 \geq 2584, \quad x_3 \geq 4181, \quad x_2 \geq 6765 \quad \text{ja} \quad x_1 \geq 10\,947.$$

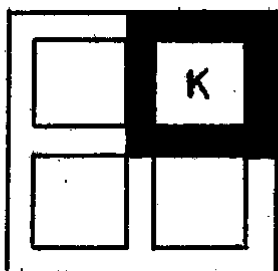
See on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult $x_{21} = 0$.

5. a) Vaatleme kärbest, kes istus malelaua keskpunktis 0. Kui ta laskus samasse ruutu, siis on ülesanne lahendatud. Oletame, et ta lendas paremale (ülejäänud juhud on analoogilised), s.t. suunas OA (vt. joon. 7). Valime nende kärbeste hulgast, kes istusid algul kujundi OA ruutudel ja lendasid paremale, kärbse X, kes asus algul kõige kaugemal punktist 0. Kui kärbes X lendas edasi ainult ühe ruudu võrra, siis on ülesanne lahendatud. Kui ta lendas edasi rohkem kui ühe ruudu võrra, siis tema parempoolne naaber ei saanud lennata vasakule, sest siis nad poleks enam naabrid. Samuti ei saanud ta parempoolne naaber lennata paremale, sest et X oli kõige parempoolsem kärbes, kes lendas suunas OA. Järelikult kärbse X parempoolne naaber jäi paigale.



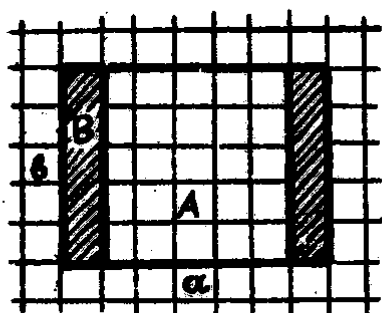
Joonis 7.

b) Kui kujund Φ on "akna raam", siis punkti a väide ei kehti. Et seda näidata, "organiseerime" kärbeste lennu kahes etapis. Esimesel etapil lendavad kõik kärbsed ruudukese K (vt. joon. 8) äärtele, kusjuures naabrid jäävad naabriteks või saavad ühele ruudule. Seda on võimalik saavutada, kui iga kärbes lendab näiteks talle lähimasse ruudukese K ääreruutu, ruudukese K ääreruutudel paiknevad kärbsed jäävad aga paigale. Teisel etapil lendab iga kärbes ruudukese K vastaspunkti (ruudukese K keskpunkti suhtes). On ilmne, et ka sellisel juhul naabrid jäävad naabriteks. Näitame, et nende kahe lennu tulemusena ükski kärbes ei jää paigale ega lenda naaberruutu.

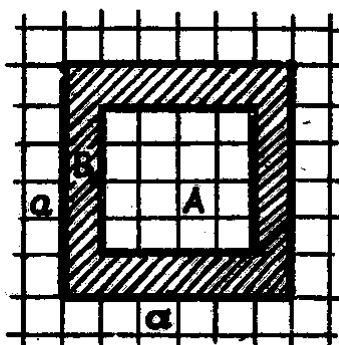


Joonis 8.

Tõepoolest, oletame et esimesel etapil lendab kärbes ruudust A ruutu B ja teisel etapil ruudust B ruutu C. Et runt C asub K rajajoonel, siis paigale saavad jääda ainult need kärbsed, kes asuvad K rajajoonel. Kuid see on võimatu, sest need kärbsed lendavad teisel etapil K rajajoonelt vastavatesse sümmeetrilistesse punktidesse. Järelikult ei jää ükski kärbes paigale. Kui oletada, et A ja C on naaberruudud, siis need kärbsed, kes



Joonis 9.



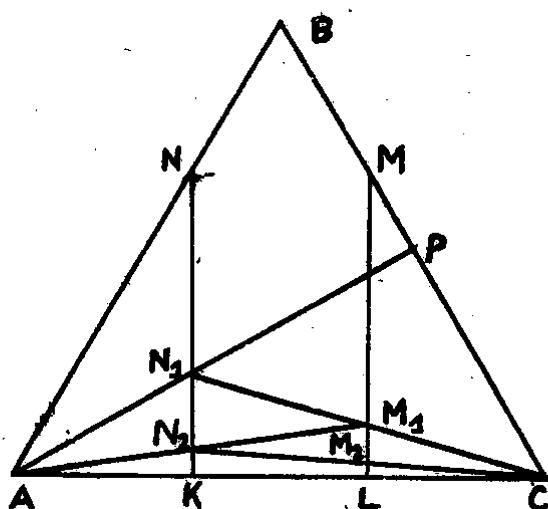
Joonis 10.

on ruutudes A ja C, lendavad esimesel etapil ruutudesse B ja C. Kuid B ja C on sümmeetrilised ruudud (ruudukese K keskpunkti suhtes) ja järelikult ei ole nad naaberruudud. Seega A ja C ei ole naaberruudud.

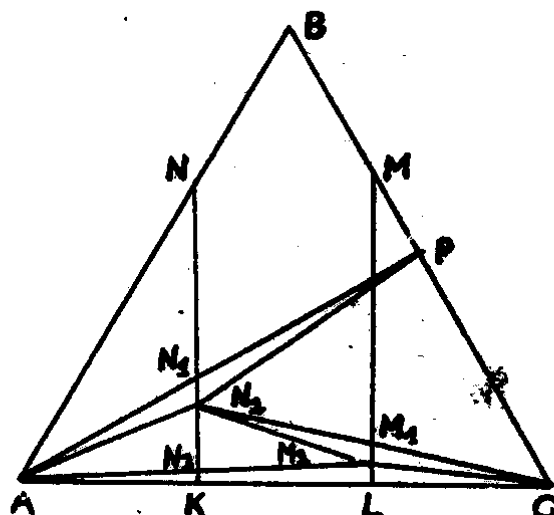
c) Kui kujund Φ on malelaud, siis punkti a väide kehtib. Selle näitamiseks defineerime "kauguse" järgmiselt: "kaugus" ruutude A ja B vahel on minimaalne malekuninga käikude arv, mis on vajalik selleks, et jõuda ruudult A ruudule B. Ülesande tingimustest järeldub, et "kaugus" kärbeste vahel pärast lendu ei suurene. Malelaua ruutudest koosnevat ristkülikut nimetame invariantseks, kui iga kärbes sellest ristkülikust osutub pärast lendu jälle selles ristkülikus olevaks. Näiteks kogu malelaud on invariantne ristkülik. Vaatleme minimaalse ruutude arvuga invariantset ristkülikut ja näitame, et tema vertikaalse ja horisontaalse serva pikkus ei ületa kahte. Siis iga kärbes sellest ristkülikust on pärast lendu kas naaberruudus või esialgses. Oletame vastuväiteliselt, et minimaalse invariantse ristküliku R mõõtmed on $a \times b$, kus $a \geq b$ ja $a > 2$. Näitame, et selle ristküliku sees saab valida veel väiksema invariantse ristküliku. Vaatleme algul juhtu, kus $a > b$. Nimetame ristküliku R rajaks tema kahe äärmise vertikaali ühendit (vt. joon. 9), ülejäänud osa nimetame sisemuseks. Märkime, et iga sisemi-

se ruudu kaugus ristküliku R suvalisest punktist on väiksem kui a . Kui kõik kärbsed ristküliku R sisemusest lendavad uuesti R sisemusse, siis R sisemus moodustabki uue invariantse ristküliku. Oletame nüüd, et ristküliku R mingist siseruudust A lendab kärbes rajaruutu B . Vaatleme nüüd ristkülikut M , mis on koostatud neist ristküliku R ruutudest, millede "kaugus" ruuduni B on väiksem kui a . Et kõik kärbsed olid enne lendu ruudust A mitte kaugemal kui $a-1$, siis nad kõik lendasid ristkülikusse M . Järelikult on M invariantne ristkülik. Et temas on ruute vähem kui ristkülikus R , siis sellel juhul on tõestatud, et R ei saa olla minimaalne invariantne ristkülik. On jäänud vaadelda veel juhtu, kus $a = b > 2$. Sel juhul nimetame rajaks kõiki antud ruudu äärruute (vt. joon. 10) ja sisemuseks ruudu ülejäänud osa. Ülesande lahendamiseks sellisel juhul sobivad samuti ülaltoodud arutlused.

6. Tõestame väited b ja c juhul, kui kolmnurga ABC külje pikkus on 3. See lahendus sobib ka juhul, kui külje pikkus on 5.



Joonis 11.



Joonis 12.

Punktis a esitatud väite kehtivus järeldub vahetult punkti b väite kehtivusest.

b) Olgu K ja L punktid, mis jaotavad külje AC kolmeks võrdseks osaks (joon. 11). Konstrueerime punktidest K ja L küljela AC ristsirged KN ja LM. Olgu

$$N_1 = [KN] \cap [AP], M_1 = [LM] \cap [CN_1], N_2 = [AM_1] \cap [KN], M_2 = [CN_2] \cap [LM] \text{ jne.}$$

Lähtekolmnurk ABC jaguneb sel juhul kolmnurkadeks ABP, CPN₁, AN₁M₁, CM₁N₂, AN₂M₂ jne. Kui valida punkt P nii, et BP = CP = 1,5, siis on kõik konstrueeritud kolmnurgad "suured", sest et kõikide kolmnurkade külgede projektsioonid küljele AC ei ole lühemad kui 1. Ülesande lahendusest ilmneb, et arvu 1000 asemele võib kirjutada suvalise naturaalarvu.

c) Antud väite tõestus on analoogiline punkti b väite tõestusega. Olgu punktid K, L ja P samad, mis punkti b tõestuses, KN ja LM külje AC ristsirged. $N_1 = [AP] \cap [KN]$ (joon. 12). Valime lõigul KN₁ punkti N₂ ja ühendame ta punktidega A, P ja C. Olgu $M_1 = [N_2C] \cap [ML]$. Lõigul LM₁ valime punkti M₂ ja ühendame ta punktidega A, N₂ ja C. Olgu $M_3 = [KN] \cap [AM_2]$. Lõigul KM₃ valime punkti M₄ ja ühendame ta punktidega A, M₂ ja C, jne. Seda protsessi jätkates saamegi kolmnurga ABC jaotuse "suurteks" kolmnurkadeks ABP, APN₂, CPN₂, AN₂M₂, CN₂M₂, ... ülesandes nõutud viisil. Ilmneb, et ka siin võib kolmnurkade arv olla suvaline.

7. Punktides a, b ja d püstitatud ülesannete lahendused on analoogilised ül. 14 punktide a, b ja e lahendustega.

c) Näitame matemaatilise induktsiooni meetodiga, et iga "N-universaalse" jada (vt. ül. 14 tekst) korral leidub selline jada liige, mis esineb selles jadas vähemalt N korda.

Tõepoolest, kui $N = 2$, siis väide kehtib. Oletame, et väide kehtib $N = M$ korral, s.t. igas "M-universaalses" jadas on selline element, mis esineb temas vähemalt M korda. Vaatleme suvalist "M+1 - universaalset" jada $a_1, a_2, \dots, a_L$. Olgu $n < L$ minimaalne selline indeks, et jadas $a_1, a_2, \dots, a_n$ esinevad kõik numbrid $1, 2, 3, \dots, M+1$. Siis on ilmne, et element a_n

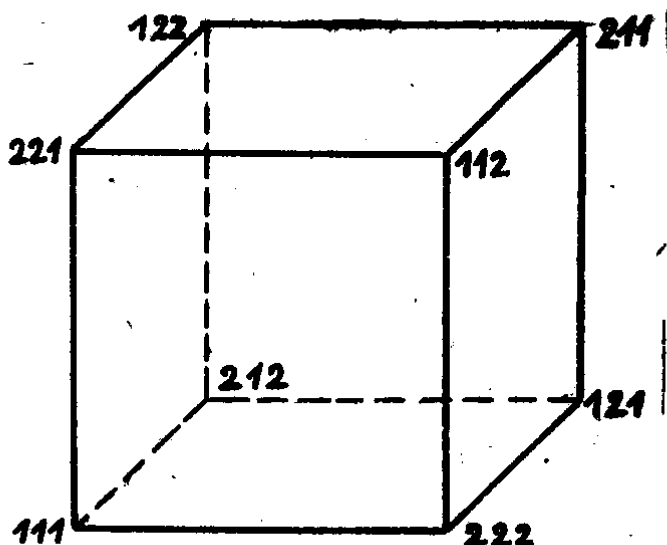
esineb jadas $a_1, a_2, \dots, a_n$ parajasti ühe korra. Vajaduse korral jada elemente ümber nummerdades on võimalik saavutada, et jada $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_L$ on " M -universaalne". Järelikult leidub selles jadas element q , mis esineb seal vähemalt M korra. Et jadas $a_1, a_2, \dots, a_n$ esinevad kõik liikmed $1, 2, \dots, M+1$, siis esineb seal ka element q . Järelikult jada $a_1, a_2, \dots, a_L$ on " $M+1$ - universaalne", sest element q esineb temas vähemalt $M+1$ korda.

Seega iga " N -universaalse" jada korral leidub selline element, mis esineb temas vähemalt N korda.

8. Vt. ül.3 lahendus.

9. On küll. Vt. joon.13.

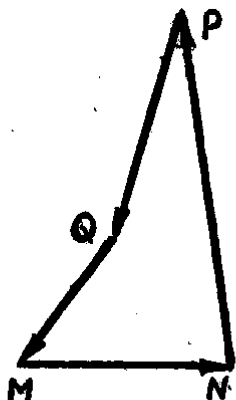
10. Vt. ül.4 lahendus.



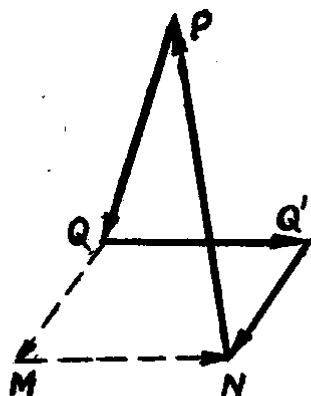
Joonis 13.

11. Valides tasandil järjestikku vektorid $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NP} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{c}$, $\overrightarrow{QM} = \vec{d}$, saame kinnise murdjoone, sest et $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. Muutes summas vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ järjekorda on võimalik saada erinevaid murdjooni. Antud ülesande seisukohalt ei ole oluline, millist murdjoont vaadelda, sest et tõestatav võrratus ei muutu, kui vektoreid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ paarikaupa ümber vahetada. Näitame, et nende murdjoonte seas on selliseid, mis lõikavad iseennast.

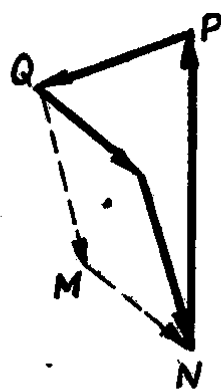
Tõepoolest, võtame vaatluse alla mingi murdjoone. Kui selle murdjoone testud tipp (näiteks Q) asub kolmnurga MNP sees (joon. 14), siis leiame punkti Q' nii, $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{MN}$. Siis $\overrightarrow{Q'N} = \overrightarrow{QM}$. Järelikult murdjoone $MNPQ$ võib asendada murdjoonega



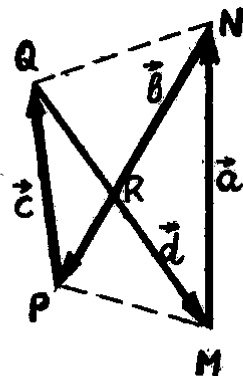
Joonis 14.



Joonis 15.



Joonis 16.



Joonis 17.

$NPQQ'$ (joon. 15). Kui $MNPQ$ on kumer murdjoon, siis algul teeme sellise konstruktsiooni, nagu on näidatud joonisel 16. Seega võib eeldada, et murdjoon $MNPQ$ lõikab iseennast. Olgu $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NP} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{c}$, $\overrightarrow{QM} = \vec{d}$. Olgu R lõikude NP ja MQ ühine punkt (joon. 17). Siis

$$|\overrightarrow{MR}| + |\overrightarrow{PR}| \geq |\overrightarrow{PM}| \quad \text{ja} \quad |\overrightarrow{NR}| + |\overrightarrow{QR}| \geq |\overrightarrow{QN}|.$$

Järelikult

$$|\overrightarrow{MR}| + |\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{NR}| + |\overrightarrow{QR}| \geq |\overrightarrow{PM}| + |\overrightarrow{QN}|.$$

Et

$$|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM}| = |\vec{c} + \vec{d}|, \quad |\overrightarrow{QN}| = |\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN}| = |\vec{d} + \vec{a}|$$

ja

$$|\overrightarrow{MR}| + |\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{NR}| + |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{QM}| + |\overrightarrow{NP}| = |\vec{b}| + |\vec{a}|,$$

$$\text{siis } |\vec{b}| + |\vec{a}| \geq |\vec{c} + \vec{d}| + |\vec{a} + \vec{d}|. \quad (1)$$

$$\text{Et } |\vec{a}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{c}| \quad \text{ning} \quad |\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{d}|, \quad \text{siis}$$

$$|\vec{a}| + |\vec{c}| \geq |\vec{b} + \vec{d}|. \quad (2)$$

Liites võrratused (1) ja (2), saame et

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|.$$

12. Vt. ül.6 lahendus.

13. Vaatleme lihtsuse mõttes juhtu, kus $n = 30$. Ülejäänud n väärtuste korral on lahendus analoogiline. Tähistame antud arvud sümbolitega $y_{-14}, y_{-13}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_{15}$, kus $y_0 = 1$.

a) Tähistame $\max_{-14 \leq k \leq 15} |y_{k+1} - y_k| = \alpha$.

Siis $|y_{k+1} - y_k| \leq \alpha$, kui $k = -14, -13, \dots, 14, 15$ (siin $y_{16} = y_{-14}$). Lähtudes arvust y_0 saame, et

$$\alpha \geq |y_0| - |y_{\pm 1}|, \text{ kui } s = \pm 1. \text{ Seega } y_{\pm 1} \geq 1 - \alpha.$$

Lähtudes võrratustest $|y_2 - y_1| \leq \alpha$ ja $|y_{-2} - y_{-1}| \leq \alpha$, saame, et $y_{\pm 2} \geq 1 - 2\alpha$. Analoogiliselt jätkates saame, et $y_k \geq 1 - |k|\alpha$, kui $k = -14, -13, \dots, 14, 15$. Et $\sum y_k = 0$, siis $0 = \sum y_k \geq 30 - 2(1 + 2 + \dots + 14)\alpha - 15\alpha = 30 - 15^2\alpha$. Järelikult $\alpha \geq 30/15^2 = 2/15$.

b) Antud juhul on vaja hinnata suurust $A = (y_{k+1} + y_{k-1})/2 - y_k$. Kerge on märgata, et

$$A = (y_{k+1} - y_k)/2 - (y_k - y_{k-1})/2.$$

Rakendame suuruse A hindamiseks ülesande a osa lahendust.

Tähistame $y_{k+1} - y_k = y'_k$, $\max_{-14 \leq k \leq 15} |y'_k| = \alpha$ (kui $k = 15$, siis

$y_{k+1} = y_{-14}$). Vaatleme jada $z_k = y'_k/\alpha$. Lihtne on veenduda, et $\sum z_k = 0$ ning et maksimaalne arvudest z_k on võrdne ühega. Punkti a põhjal $\alpha \geq 2/15$. Seega jada z_k jaoks saame (rakendades punktis a saadud tulemust), et

$$\max_k |z_{k+1} - z_k| \geq 2/15.$$

Seega

$$\max_k |y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}|/2 = \alpha/2 \cdot \max_k |z_k - z_{k-1}| \geq \alpha/15 \geq 2/225.$$

Osutub, et see hinnang on umbes 2 korda halvem kui parim hinnang.

c) Täpseima hinnangu saamise idee on lihtne: tuleb, lähtudes hinnangust $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\delta$, täpsemalt hinnata suurus $|y_{k+1} - y_k|$ ja seejärel hinnata suurus y_k (kasutades seda, et $y_0 = 1$). Lõpuks tuleb saada võrdusest $\sum y_k = 0$ hinnang suurusele δ . Enne kui asuda selle plaani realiseerimisele, märgime, et võib piirduda ainult sümmeetriliste jadade vaatlemisega (s.t. $y_k = y_{-k}$). Tõepoolest, jadast y_k , kus $\sum y_k = 0$ ja $y_0 = 1$ ning $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\delta$, võib saada sümmeetrilise jada z_k , kus $z_k = (y_k + y_{-k})/2$, mis rahuldab samuti kõiki neid tingimusi. Seega saame

$$y_0 - y_1 = (2y_0 - y_1 - y_{-1})/2 \leq \delta,$$

$$y_1 - y_2 = (2y_1 - y_0 - y_2) + (y_0 - y_1) \leq 2\delta + \delta = 3\delta,$$

$$y_2 - y_3 \leq 5\delta,$$

.....

$$y_6 - y_7 \leq 13\delta,$$

$$y_7 - y_8 \leq 15\delta,$$

$$y_8 - y_9 \leq 13\delta,$$

(1)

.....

$$y_{13} - y_{14} \leq 3\delta,$$

$$y_{14} - y_{15} \leq \delta.$$

Seitsmest esimesest võrratusest saame, et

$$y_k \geq 1 - k^2\delta, \text{ kui } 0 \leq k \leq 7,$$

ja ülejäänutest saame, et

$$y_k \geq 1 - \delta(7^2 + 8^2) + \delta(15 - k)^2, \text{ kui } 7 \leq k \leq 15.$$

Summeerides saadud võrratused kõikide k väärtuste korral (arvestades, et $y_k = y_{-k}$) saame, et $0 \geq 30 - 15(7^2 + 8^2)\delta$.

Järelikult $\delta \geq 2/113$.

Võib märkida, et punktide a ja b lahenduskäigud on lihtsalt üle kantavad juhule, kui n on suvaline kolmest suurem naturaal arv. Sellisel juhul on täpseimad hinnangud järgmised.

1) Naaberarvude maksimaalne vahe ei ole väiksem kui $4/n$ paarisarvulise n korral ning ei ole väiksem kui $4n/(n^2 - 1)$ paarituarvulise n korral.

2) Arvu maksimaalne erinevus oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest ei ole väiksem kui $16/n^2$, $16n/(n^3 + n - 2)$, $16/(n^2 + 4)$ või $16n/(n^3 + n + 2)$ vastavalt sellele, kas n annab neljaga jagades jäägi 0, 1, 2 või 3.

d) Sellise jada võib valida näiteks järgmiselt:

$y_k = 1 - 2k^2/113$, kui $0 \leq k \leq 8$; $y_k = -1 + 2(15 - k)^2/113$, kui $9 \leq k \leq 15$; $y_k = y_{-k}$, kui $0 \leq k \leq 15$; $y_{15} = y_{-15}$ (def.kohaselt). Lihtne on kontrollida, et $|(y_{k+1} - y_{k-1})/2 - y_k| = 2/113$ iga kolme järjestikuse arvu korral. Märgime, et see jada on saadud mitterangetest võrratustest (1), vaadeldes seal võrdusi ning võttes $\beta = 2/113$.

14. a) Kirjutades järjestikku N ühesugust rühma $(1, 2, \dots, N)$, saame "N-universaalse" jada, milles on N^2 liiget.

b) Kirjutame järjestikku $N - 1$ rühma $(1, 2, \dots, N)$ ja lõppu kirjutame arvu 1. Selles jadas on $N(N-1) + 1 = N^2 - N + 1$ liiget. Näitame, et see jada on "N-universaalne".

Olgu q suvaline arvude $1, 2, \dots, N$ permutatsioon kujul $(b_1, b_2, \dots, b_N)$. Kui $q = (N, N-1, N-2, \dots, 1)$, siis esimeses rühmas tõmbame maha kõik arvud, välja arvatud N ; teises rühmas kõik arvud, välja arvatud $N-1$ jne. Kui q ei ole vaadeldud kujul, siis teatava k korral peab olema $b_k < b_{k+1}$. Kui $i < k$, siis tõmbame i -ndas rühmas maha kõik arvud peale b_i ; k -ndas rühmas tõmbame maha kõik arvud, välja arvatud b_k ja b_{k+1} ; kui $m > k$, siis m -ndas rühmas tõmbame maha kõik arvud, välja arvatud b_{m+1} . Kõige lõpuks tõmbame maha kõige viimase arvu 1 ja saamegi permutatsiooni q kujul $b_1, b_2, \dots, b_N$.

c) Näitame, et kui $N \geq 2$, siis iga "N-universaalse" jada pikkus ei ole väiksem kui $(N^2 + 3N - 4)/2$. On ilmne, et kui arv N esineb esimest korda "N-universaalses" jadas k -nda liikmena,

siis see osa "N-universaalsest" jadast, mis jääb paremale arvust N, on "(N-1)-universaalne" jada. Tõepoolest, et saada suvaline arvuga N algav permutatsioon, tuleb maha kriipsutada kõik need jada elemendid, mis asetsevad arvust N vasakul.

Tõestame antud punktis püstitatud väite matemaatilise induktsiooni abil. Kui $N = 2$, siis väide on lihtsalt kontrollitav. Oletame, et väide kehtib $N = M$ korral. Olgu P suvaline "(M+1)-universaalne" jada kujul $a_1, a_2, \dots, a_L$. Kui mingi arv esineb jadas P ainult ühe korra, siis võib vajaduse korral tähistusi muutes saavutada olukorra, et see arv on M+1. Sellisel juhul arvust M+1 vasakule ja paremale jäävad osad moodustavad "M-universaalse" jada, mille pikkus induktsiooni eelduse kohaselt ei ole väiksem kui $(M^2 + 3M - 4)/2$. Järelikult jada P pikkus ei ole väiksem kui

$$1 + 2 \cdot (M^2 + 3M - 4)/2 \geq [(M+1)^2 + 3(M+1) - 4]/2.$$

Seega esineb iga arv jadas P vähemalt kaks korda. Olgu k vähim selline indeks, et arvude $a_1, a_2, \dots, a_k$ hulgas esinevad kõik arvud $1, 2, \dots, M+1$. Muutes vajaduse korral tähistusi (s.t. nummerdades arve $1, 2, \dots, M+1$ ümber), võib eeldada, et $a_k = M + 1$. Siis on ilmne, et kui $i < k$, siis $a_i \neq M + 1$. Arvust $M + 1$ vasakul esinevad kõik arvud $1, 2, \dots, M$, seega mitte vähem kui M arvu. Peale selle esineb jadas P vähemalt kaks arvu M+1. Kui need maha kriipsutada, siis jääb arvust a_k paremale "M-universaalne" jada. Siit tuleneb, et jada P pikkus ei ole väiksem kui

$$(M^2 + 3M - 4)/2 + M + 2 = [(M+1)^2 + 3(M+1) - 4]/2.$$

Järelikult on väide tõestatud.

d) Võttes eelmise punkti väites $N = 4$, saame et "4-universaalne" jada sisaldab vähemalt 12 liiget. Sellist näidet konstoreerida ei ole raske, "4-universaalne" on näiteks jada $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3$.

e) Oletame, et $1 \leq k \leq N$. Kirjutades jada $1, 2, 3, \dots, N$ järjest $k-1$ korda ja sinna järele veel rühma kujul $1, 2, 3, \dots, N-k+1$, saame jada pikkusega $Nk - k + 1$. Kui näiteks $N = 5$ ja $k = 3$,

siis saame jada $1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3$. Analoogiliselt punktiga b saab näidata, et sellest jadast võib teatarate liikmete mahatõmbamisega saada suvalise k -elemendilise jada arvudest $1, 2, \dots, N$, milles ükski liige ei esine rohkem kui üks kord. Sellist jada omadust nimetame " (N, k) -universaalseks".

Konstrueerime nüüd " N -universaalse" jada, mille pikkus on $N^2 - 2N + 4$. Selleks kirjutame jada $1, 2, \dots, N-1$ järjest $N-2$ korda ja sinna lõppu veel arvud 1 ja 2 . Peale selle kirjutame veel sellesse jadasse N korda arvu N järgmise reegli kohaselt: esimese arvu N kirjutame jada algusesse, teise arvu N kirjutame esimesse rühma pärast arvu $N-1$, kolmanda arvu N kirjutame teise rühma pärast arvu $N-2$ jne. Viimase arvu N kirjutame viimasesse rühma, arvude 1 ja 2 vahele. Sellisel juhul saame jada, mille pikkus on $(N-1)(N-2) + 2 + N = N^2 - 2N + 4$. Tähistame selle jada tähega P . Näitame, et jada P on " N -universaalne". Tõepoolest, olgu q suvaline arvude $1, 2, \dots, N$ permutatsioon ning olgu arv N jadas q k -ndal kohal. Arv N jaotab jada q kaheks osaks: vasakpoolseks (pikkusega $k-1$) ja parempoolseks (pikkusega $N-k$). Meil on vaja jadast P maha tõmmata osa liikmeid nii, et saaksime jada q . Tõmbame kõigepealt maha kõik arvud N , välja arvatud see, mille indeks on k . Arvust N vasakule jääb sellisel juhul " $(N-1, k-1)$ -universaalne" jada. Sellest on võimalik saada iga jada arvudest $1, 2, \dots, N-1$, mille pikkus on $k-1$ ja milles iga arv esineb maksimaalselt üks kord. Erijuhul on võimalik saada jadas q arvust N vasakul seisvat osa. Arvust N paremale jääb jada järgmisel kujul: algul on rühm arve $N-k+2, N-k+3, \dots, N-1$, siis $N-k-1$ rühma kujul $1, 2, \dots, N-1$ ning lõpuks arvud 1 ja 2 . Tähistades vajaduse korral arvud ümber, saab muuta seda jada " $(N-1, N-k)$ -universaalseks". Sellest jada P osast võib mahatõmbamisega saada jada q selle osa, mis asetseb arvust N paremal. Järelikult on konstrueeritud jada tõepoolest " N -universaalne".

15. Näitame matemaatilise indutsiooni meetodiga, et kui sellises jadas x_0 ja x_1 on väiksemad kui $2n$, siis vähemalt üks arvudest $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$ võrdub nulliga (ülesandes $n = 500$). Kui $n = 1$, siis on väide lihtsalt kontrollitav. Oletame, et k

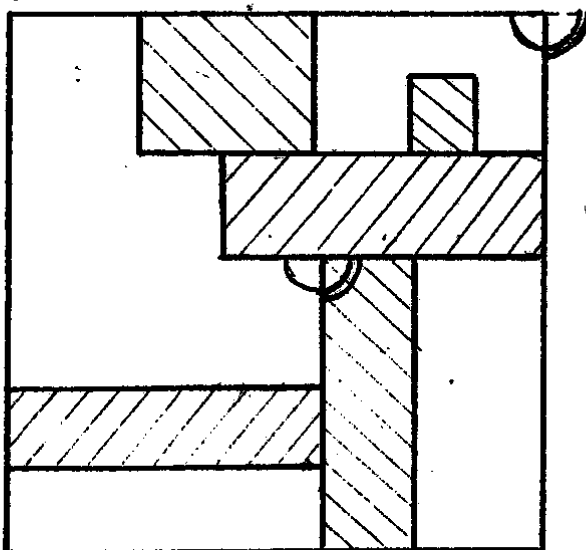
väärtuste $1, 2, \dots, n-1$ korral on väide tõestatud. Et $x_0 \leq 2n-1$, $x_1 \leq 2n-1$, $x_2 \geq 1$, siis $x_3 \leq 2n-2$ ja $x_4 \leq 2n-3$. Kui nüüd $x_3 < 2n-2$ ja $x_4 < 2n-2$, siis induktsiooni eeldusest järeldub antud väite õigsus. Kui $x_3 = 2n-2$, siis $x_2 = 1$, $x_1 = 2n-1$ ja $x_0 = 2n-2$. Jääb tõestada väite kehtivus ka sellel juhul. Tõepoolest, $x_3 = 2n-2$, $x_4 = 2n-3$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2n-4$, $x_7 = 2n-5$, $x_8 = 1, \dots$, $x_{3k} = 2n-2k, \dots$, $x_{3n} = 0$.

16. Olgu n paarisarv. Fikseerime mingi kõõlu ja vaatleme kõiki kõõle, mis on sama pikkusega. Kui fikseeritud kõõl on ringi diameeter, siis sama pikkusega kõõle on antud korrapäras-
ses n -nurgas $n/2$ ja nad lõikuvad ühes punktis. Kui fikseeritud kõõl ei ole ringi diameeter, siis sama pikkusega kõõle on n ja nende keskpunktid asuvad ringjoone keskpunktist võrdsel kaugusel. Järelikult saab kõik märgitud punktid, v.a. ringjoone keskpunkt, paigutada kontsentrilistele ringjoontele, kusjuures igal ringjoonel asetseb täpselt n punkti. Lihtne on näha, et selliseid ringjooni on $(n-2)/2$.

Näitame, et n on märgitud punktide maksimaalne arv ühel ringjoonel. Oletame, et on antud veel mingi ringjoon. Antud ringjooni lõikab ta maksimaalselt $2 \cdot (n-2)/2$ punktis, sest iga ringjoonega saab tal olla maksimaalselt kaks ühist punkti. Kui see ringjoon läbib antud ringjoonte ühist keskpunkti, siis ei saa temal asetseda rohkem kui $[2(n-2)]:$

$:2 + 1 = n-1$ märgitud punkti. Järelikult ei ületa märgitud punktide maksimaalne arv mistahes ringjoonel arvu n .

17. Oletame, et pärast ristkülikute väljalõikamist jäävad järele tükid $A_1, A_2, \dots, A_k$. On ilmne, et igal tükil A_i on vähemalt neli nurka, mille suurus on 90° . Järelikult tüki A_i kõikide 180° väiksemate sisenurkade juurde jäävate välisnurkade summa ei ole väiksem kui 360° .



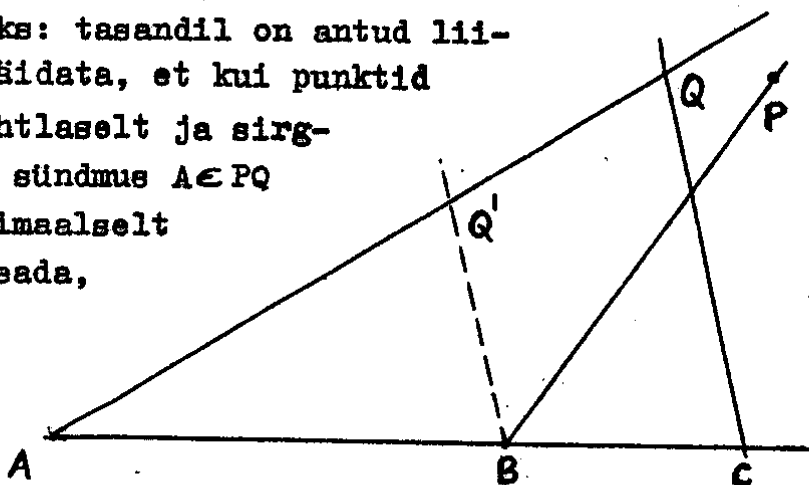
Joonis 18.

Teiselt poolt on ilmne, et need välismurgad on kas väljalõigatud ristkülikute sisemurgad või antud paberilehe välismurgad (vt. joon. 18). Järelikult nende välisnurkade summa ei ületa $(n+1) \cdot 360^\circ$. Et iga tüki A_i korral selliste välisnurkade summa on vähemalt 360° , siis järelikult $k \leq n+1$. Tõestusest on näha, et kui kokku saadi $n+1$ tükki, siis kõik tükid on ristkülikud.

18. Lahendame ülesande geomeetriliselt. Läheme üle liikumatult koordinaatide süsteemilt liikuvale. Tingimust, et punktid P, Q ja R asuvad ühel sirgel, tähistame kujul $R \in PQ$ ($P \neq Q$).

Läheme üle liikuvale koordinaatide süsteemile, mis on seotud ühega jalakäijatest. Siis taandub ülesanne järgmiseks: tasandil on antud liikumatu punkt A ; näidata, et kui punktid P ja Q liiguvad ühtlaselt ja sirgjooneliselt, siis sündmus $A \in PQ$ saab toimuda maksimaalselt 2 korda, kui on teada, et algmomendil $A \notin PQ$.

Joonis 19.



Oletame, et mingil momendil t_1 asuvad jalakäijad P ja Q punktides B ja C , nii et $A \notin BC$. Võtame kasutusele ühe "fiktiivse" jalakäija Q' , kes momendil $t = t_1$ asub punktis B , ja liigub paralleelselt jalakäijaga Q nii, et alati $A \in QQ'$. On ilmne, et tingimused $A \in PQ$, $A \in PQ'$ ja $Q' \in AP$ on ekvivalentsed (vt. joon. 19). Samuti on ilmne, et punkt Q' liigub ühtlaselt. Järelikult sirge PQ' säilitab sihi, s.t. ta jääb liikudes iseendaga paralleelseks. Järelikult saab ta vaid ühel momendil $t = t_2$ läbida punkti A . (Võimalus, et punktid P ja Q' ühtivad igal ajamomendil, välistatakse algtingimustega. Samuti järeldub algtingimustest, et punktid P ja Q' ei saa kogu aeg olla sirgel AB .)

19. Vt. ül.11 lahendus.

20. Märgime, et lõpp-paigutus sõltub algpaigutusest ja valitavatest hulknurkadest, kuid ei sõltu kõikude tegemise järjekorrast. Tõepoolest, pärast kõikude tegemist lähtehulknurga tipus olev arv sõltub esialgsest arvust selles tipus ja sellest, kas see tipp satub paaris- või paaritusse arvu hulknurkadesse. Peale selle on ilmne, et ühes ja samas hulknurgas pole mõtet üle ühe korra muuta märke.

Nimetame kahte paigutust ekvivalentseks, kui ühte neist on võimalik saada teisest (lõpliku arvu kõikudega). Kõiki paigutusi, mis on ekvivalentsed mingi fikseeritud paigutusega, nimetame ekvivalentsiklassiks või lihtsalt klassiks, mis on tekitatud antud paigutuse poolt. On ilmne, et kõik paigutused ühest klassist on omavahel ekvivalentsed, aga paigutused erinevatest klassidest ei ole ekvivalentsed. Osutub, et kõikides ekvivalentsiklassides on ühepalju paigutusi. Tõepoolest, olgu esimene klass tekitatud paigutuse N poolt, teine paigutuse M poolt. Siis paigutusele esimesest klassist, mis on saadud paigutusest N märkide muutmisel teatavate hulknurkade tippudes, seame vastavusse sellise paigutuse teisest klassist, mis on saadud paigutusest M märkide muutmisel samade hulknurkade tippudes. Selline vastavuse korraldamine võimalikkus annabki aluse väita, et kõikides klassides on ühepalju paigutusi.

Ülesande punktides a, b ja c väidetakse, et mitte kõik paigutused ei satu ühte klassi, punktis d aga tahetakse teada võimalike klasside arvu. Tähistame klasside arvu sümboliga $F(n)$, elementide arvu mingis klassis (ükskõik millises) aga sümboliga $f(n)$. Et paigutusi on üldse 2^n , siis $F(n) = 2^n / f(n)$. Järelikult tuleb $F(n)$ leidmiseks leida $f(n)$. Leiame näiteks, kui palju on paigutusi klassis, mis on tekitatud $+1$ koosneva paigutuse poolt. On ilmne, et iga pq -nurka (p, q - naturaalarvud ja suuremad kui 1) saab jaotada q -nurkadeks nii, et nende arv on p . Me võime piirduda selliste jaotustega, kus q on algarv. Kui p on algarv, siis $f(p) = 2$ ja järelikult

$$F(p) = 2^{p-1}. \quad (1)$$

Alustame punkti d lahendamisest. Olgu $n = bp$, kus b on naturaalarv ja p algarv. Leiame suuruse $f(n)$ suuruse $f(b)$ kaudu, kasutades n -murga jaotamist korrapärasteks b -nurkadeks. Fikseerime mingi korrapärase q -murga. Kui b jagub arvuga q , siis on ilmne, et see q -nurk sisaldub täielikult mingis b -nurgas. Kui b ei jagu algarvuga q , siis on lihtne näidata, et sellel q -nurgal on iga b -nurgaga täpselt üks ühine tipp.

Oletame algul, et $b \nmid a$. Siis b jagub arvu n kõikide algarvuliste teguritega ja iga valitav hulknurk sisaldab täielikult mingis p -nurgas. Sel juhul võib eeldada, et märgimuutused toimuvad üksteisest sõltumatult kõikides b -nurkades (neid on üldse p tükki). Seega

$$f(n) = [f(b)]^p. \quad (2)$$

Oletame nüüd, et b ei jagu arvuga p . Varvime kõik p -nurgad nii, et iga p -nurk on värvitud ühe värviga ja erinevad p -nurgad erinevate värvidega (kokku on vaja b värvi). Siis on suvalise b -murga kõik tipud värvitud erinevate värvidega. Jaotame oma tegevuse (s.t. käikude tegemise) kaheks etapiks: esimesel etapil valime p -nurkasid, teisel etapil ülejäänud q -nurkasid (q on arvu n algtegur, $q \neq p$). Esimesel etapil toimub märgimuutus ainult sama värvi tippudes, järeltõtt pärast esimest etappi on kõikides b -nurkades üks ja seesama arvude $+1$ ja -1 paigutus, kusjuures see paigutus võib olla täiesti suvaline. (Meenutame, et me alustasime paigutusest, kus kõik arvud on $+1$.) Siin ja allpool me arvestame, et b -nurkades on üks ja seesama paigutus, kui neid ümber punkti O pöörates kõik sama värvi tipud ühtivad.

Teisel etapil toimuvad märgimuutused b -nurkade sees, sest arvu n algtegurid, mis ei võrdu arvuga p , on arvu b teguriteks. Järelikult iga paigutus, mille korral paigutused kõikide b -nurkade sees on ekvivalentsed, on saadav esialgsest paigutusest. Leiame kõikide selliste paigutuste arvu $f(n)$. Esimese b -murga jaoks eksisteerib 2^b sellist arvude $+1$ ja -1 paigutust, ülejäänud b -nurkades võib paigutust muuta $f(b)$ viisil. Et ülejäänud b -nurki on $p-1$ tükki, siis

$$f(n) = 2^b [f(b)]^{p-1}. \quad (3)$$

Kasutades valemeid (1), (2) ja (3), võib leida $f(n)$ suvalise n jaoks. Lihtne on näidata, et

$F(n) = 2^{\varphi(n)}$, kus $\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$ ning $p_1, p_2, \dots, p_k$ on arvu n kõik erinevad algarvulised tegurid.

Edasi kasutame valemeid (1), (2) ja (3).

$$a) f(15) = f(3 \cdot 5) = 2^5 \cdot [f(5)]^2 = 2^7, \quad F(15) = 2^8.$$

$$b) f(30) = f(2 \cdot 15) = 2^{15} \cdot f(15) = 2^{22}, \quad F(30) = 2^8.$$

$$d) f(25) = f(5^2) = 2^5, \quad f(50) = 2^{25} \cdot 2^5 = 2^{30},$$

$$f(100) = f(2 \cdot 50) = 2^{30 \cdot 2} = 2^{60}, \quad f(300) = 2^{100} \cdot (2^{60})^2 = 2^{220};$$

$$f(2100) = 2^{300} \cdot (2^{220})^6 = 2^{1620}.$$

$$\text{Järelikult } F(2100) = 2^{2100} : 2^{1620} = 2^{480}.$$

21. a) Olgu antud ristreeper $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$. Vaatleme vektorit $\overrightarrow{OP}$, kus P on sfääri poolus. Kui tähistada $F(M) = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP})^2$ (skalaarkorrutis), siis on ilmne, et $F(M)$ on punkti M kauguse ruut ekvatoriaaltasandist. Vektori $\overrightarrow{OP}$ koordinaadid baasil $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ on punktide M_1, M_2 ja M_3 kaugused ekvatoriaaltasandist. Et $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$, siis $F(M_1) + F(M_2) + F(M_3) = 1$.

b) On ilmne, et antud punkti lahendus järeldub punkti c lahendusest. Seepärast tõestame kohe punktis c esitatud väite. Et $f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1$, kui M_1, M_2 ja M_3 on kolme omavahel ristuva raadiuse otspunktid sfääril, siis funktsioon f omab ühesuguseid väärtusi diametraalselt vastupidistes punktides. Järelikult piisab ainult põhjapoolkera vaatlemisest. Seepärast oletame, et M ja N asuvad põhjapoolkeral. Vaatleme suurringjoont, mille jaoks punkt M on kõige põhjapoolsem. Olgu Γ_M suurringjoone see osa, mis asetseb põhjapoolkeral. Oletame algul, et punkt N asub samuti kaarel Γ_M . Olgu N' selline Γ_M punkt, et $[ON'] \perp [ON]$, ja M' olgu üks Γ_M ja ekvaatori lõike-

punktidest. Siis $f(M) + f(M') = f(N) + f(N')$, sest $[OM] \perp [OM']$ ning punktid N, N', M ja M' asuvad ühel ja samal tasandil. Et $f(M') = 0$, siis $f(M) \geq f(N)$. Oletame nüüd, et punkt N asub põhjapoolkera selles osas, mis jääb kaarest Γ_M lõunasse. Siis leidub kaarel Γ_M punkt Q nii, et suurringjoone kaar Γ_Q läbib punkti N . Eelneva mõttekäigu põhjal saame, et $f(M) \geq f(Q) \geq f(N)$. Kui punkt N asub kaarest Γ_M põhja pool, siis punktist M punkti N jõudmiseks võib vaja minna rohkem kui kaks sammu. Olgu m ja n punktidele M ja N vastavad meridiaantasandid ja α nende tasandite vaheline nurk. Jaotame nurga α meridiaantasanditega $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ k võrdseks osaks. Nüüd võib punktist M punkti N liikuda järgmisel viisil: algul liigume mööda kaart Γ_M lõikumiseni meridiaantasandiga m_1 (toimugu see lõikumine punktis M_1), siis liigume mööda kaart Γ_{M_1} lõikumiseni tasandiga m_2 (punktis M_2), seejärel liigume mööda kaart Γ_{M_2} lõikumiseni tasandiga m_3 jne. On ilmne, et mida suurem on k , seda vähem me läheneme ekvatoriaaltasandile k sammu vältel. Lihtne on näidata, et arvu k saab valida nii suure, et punkt M_k asub punktist N põhja pool (s.t. et punkt N asetseb piirkonnas, mis asub kaarest Γ_{M_k} lõuna pool). Järelikult kehtib ahelvõrratus

$$f(M) \geq f(M_1) \geq f(M_2) \geq \dots \geq f(M_k) \geq f(N).$$

Seega kui sfääri punkt M asub ekvatoriaaltasandist kaugemal kui N , siis $f(M) \geq f(N)$.

d) Olgu Π_x paralleel, mille kaugus ekvatoriaaltasandist on x . Tõestame algul järgmise lemma.

Lemma. Kui $x + y + z = 1$, siis võib konstrueerida ristreeperi otspunktidega paralleelidel Π_x, Π_y ja Π_z .

Tõestus. Fikseerime punkti X paralleelil Π_x ja konstrueerime punkti Y nii, et $[OY] \perp [OX]$, kusjuures $Y \in \Pi_y$. Selleks vaatleme suurringjoont, mille tasand on risti raadiusega OX . Kui $y = 1-x$, siis reeper konstrueeritakse lihtsalt. Üks reeperi tipp on punkt X , teine tipp on antud suurringjoone ja

ekvaatori lõikepunkt ning kolmas tipp on selle suurringjoone kaugeim punkt ekvaatorist. Kui $y < 1 - x$, siis võib teiseks tipuks võtta ühe kahest suurringjoone ja Π_y lõikepunktist. Saame raadiuse OY. Kolmanda raadiuse saame, kui konstrueerime raadiustega OX ja OY ristuva raadiuse. Olgu kolmanda raadiuse otspunkt paralleelil Π_v . Siis punktist a järeldub, et

$$F(X) + F(Y) + F(V) = x + y + v = 1.$$

Et aga $x + y + z = 1$, siis järelikult $z = v$, s.t. et paralleelid Π_z ja Π_v ühtivad. Seega on lemma tõestatud.

Näitame nüüd, et funktsioon f on konstantne igal paralleelil.

Ütleme, et funktsioonil f on paralleelil Π_x hüpe mitte väiksem kui ε ($\varepsilon > 0$), kui paralleelil Π_x leiduvad sellised punktid X ja X' , et $|f(X) - f(X')| \geq \varepsilon$. Vaatleme paralleelina Π_x sellist paralleeli, millel funktsioonil f on hüpe mitte väiksem kui ε . Olgu paralleelid Π_y ja Π_z sellised, et paralleelidel Π_x , Π_y ja Π_z asetsevad kolme omavahel ristuva raadiuse otspunktid. Punktis a näitasime, et $F(X) + F(Y) + F(Z) = 1$ alati, kui $X \in \Pi_x$, $Y \in \Pi_y$ ja $Z \in \Pi_z$. Pöörates seda ristreeprit ümber lõuna- ja põhjapoolust läbiva telje liiguvad raadiuste otspunktid igaüks oma paralleelil. Näitame, et ühel paralleelidest Π_z või Π_y on funktsioonil f hüpe mitte väiksem kui $\varepsilon/2$. Oletame vastuväiteliselt, et see ei ole nii, s.t. et iga Y ja Y' korral paralleelilt Π_y ja iga Z ja Z' korral paralleelilt Π_z

$$|f(Y) - f(Y')| < \varepsilon/2 \quad \text{ja} \quad |f(Z) - f(Z')| < \varepsilon/2.$$

Kui punktid Y' ja Z' valida nii, et X' , Y' ja Z' moodustavad ristreeperi otspunktid, siis

$$f(X) + f(Y) + f(Z) = f(X') + f(Y') + f(Z') = 1.$$

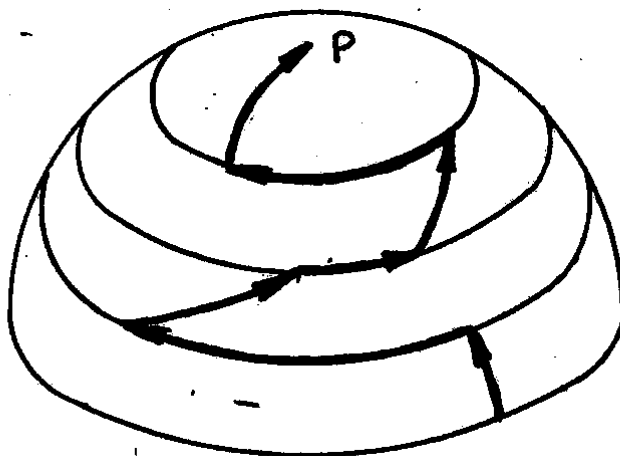
Järelikult

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(X) - f(X')| = |f(Y') - f(Y) + f(Z') - f(Z)| \leq \\ &\leq |f(Y) - f(Y')| + |f(Z) - f(Z')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Saine vastuolu.

Valime arvu N nii, et $N > 2/\varepsilon$ ja vaatleme $2N$ paralleeli $\Pi_{y_1}, \Pi_{y_2}, \dots, \Pi_{y_N}, \Pi_{z_1}, \Pi_{z_2}, \dots, \Pi_{z_N}$, mis vastavad arvudele $y_1 < y_2 < \dots < y_N < (1-x)/2$, $z_1 > z_2 > \dots > z_N$, $z_1 = 1 - x - y_1$ (x on fikseeritud). Ülaltöestatu põhjal on funktsioonil f hüpe mitte väiksem kui $\varepsilon/2$ kas paralleelil Π_{y_1} või Π_{z_1} .

Liikudes mööda funktsiooni f hüppepunkte ekvaatorilt põhjapoolusele (joon. 20), saame et $f(P) > (2/\varepsilon) \cdot (\varepsilon/2) = 1$. Saime jälle vastuolu. Seega on funktsioon f konstantne igal paralleelil.



Joonis 20.

Järelikult sõltub funktsioon f ainult muutujast x , kus $0 \leq x \leq 1$. Defineerime

$g(x) = f(X)$, kus $X \in \Pi_x$. Kui $x + y + z = 1$, siis $g(x) + g(y) + g(z) = 1$. Kui $z = 0$, siis $g(x) + g(1-x) = 1$ ning järelikult

$$1 - g[1 - (x + y)] = g(x + y)$$

ehk

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \text{ kui } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1. \quad (1)$$

e) Punkti c lahendamisel näitasime, et $g(x) \leq g(y)$, kui vaid $x \leq y$. Peale selle $g(1) = 1$. Omadusest (1) tuleneb, et $g(nx) = ng(x)$, kui $nx \leq 1$. Järelikult $g(1/n) = 1/n$ ning $g(m/n) = m/n$, kui $m \leq n$, s.t. $g(x) = x$, kui x on ratsionaalarv. Oletame nüüd, et x on irratsionaalarv. Valime ratsionaalarvud r_1 ja r_2 nii, et $r_1 < x < r_2$. Siis

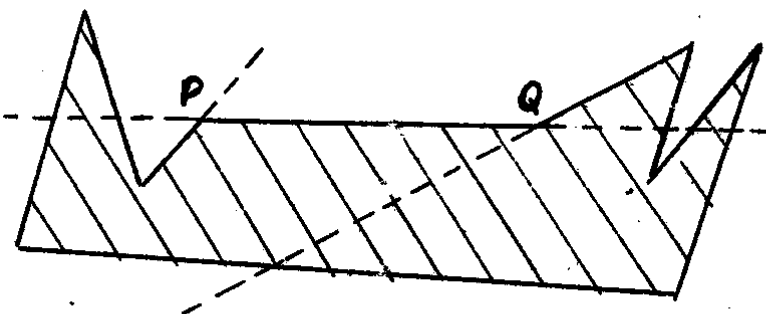
$$r_1 = g(r_1) \leq g(x) \leq g(r_2) = r_2$$

ehk $|g(x) - x| \leq |r_2 - r_1|$. Et vahe $|r_2 - r_1|$ saab muuta kuitahes väikeseks, siis peab ka irratsionaalsete x väärtuste korral kehtima võrdus $g(x) = x$.

22. Vt. ül.11 lahendus.

23. On teada, et iga kinnine iseendaga mittelõikuv murdjoon jaotab tasandi kaheks osaks: seesmiseks ja väliseks. Vaatleme kõigepealt neid murdjoone tippe P, kus murdjoon moodustab seesmise osa suhtes nurga, mis on väiksem kui sirgnurk (joon.21). Selliste nurkade mõlema haara pikendus lõikab antud murdjoont paarisarv kordi.

Seega igale sellisele tipule P vastab paarisarv "erilisi" paare. Paneme veel tähele, et erinevatele tippudele vastavad alati erinevad paarid. Kõigis antud murdjoone ülejäänud tippudes Q moodustub nurk, mis on suurem sirgnurgast seesmise osa suhtes. Selliste nurkade mõlema haara pikendus lõikab murdjoont paaritu arv kordi, kokku saame seega paarisarvu lõikumisi. Järelikult vastab igale tipule Q samuti paarisarv "erilisi" paare, kusjuures erinevatele tippudele vastavad erinevad paarid.



Joonis 21.

Seega igale sellisele tipule P vastab paarisarv "erilisi" paare. Paneme veel tähele, et erinevatele tippudele vastavad alati erinevad paarid. Kõigis antud murdjoone ülejäänud tippudes Q moodustub nurk, mis on suurem sirgnurgast seesmise osa suhtes. Selliste nurkade mõlema haara pikendus lõikab murdjoont paaritu arv kordi, kokku saame seega paarisarvu lõikumisi. Järelikult vastab igale tipule Q samuti paarisarv "erilisi" paare, kusjuures erinevatele tippudele vastavad erinevad paarid.

Kokkuvõttes saamegi, et "erilisi" paare on paarisarv.

24. Tähistame antud punktid arvudega 1,2,3, ..., n ning nende punktide juurde kirjutatud arvud sümbolitega $\alpha_1, \alpha_2,$

α_n . Olgu S kõikide nende arvude summa, s.t. $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Ühen-

dame punkti k kõikide ülejäänud punktidega. Olgu tekkinud sirgete arv β_k . Ülesande tingimuste kohaselt $\beta_k \geq 2$, kui $k = 1, 2, \dots, n$. Leiame kõikide arvude summa lähtudes punktist k. Et igal sirgel on kõikide arvude summa null (siin vaatleme kõiki sirgeid, mis läbivad punkti k), siis kõikide antud sirge punktist k erinevate punktide juurde kirjutatud arvude summa on $-\alpha_k$ (iga sirge korral, mis läbib punkti k). Järelikult kõikide arvude summa $S = -\alpha_k \beta_k + \alpha_k$, millest $\alpha_k = -S/(\beta_k - 1)$,

kui $k = 1, 2, \dots, n$. Summeerides saadud võrdust üle kõikide k väärtuste, saame

$$\sum_{k=1}^n \left(-\frac{S}{\beta_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k = S \quad \text{ehk} \quad S \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_{k-1}} \right) = 0.$$

Et sulgudes olev avaldis on positiivne, siis peab $S = 0$. Aga $\alpha_k = -S/(\beta_k - 1)$. Järelikult kõik arvud $\alpha_k = 0$.

25. Vt. ül.30 lahendus.

26. Alustame ülesande lahendamist lõpust. Nummerdame ka käigud vastupidises järjekorras. Sellisel juhul seisneb kõik teatavate nuppude lisamises ringjoonele. Tähistame sümbolitega V_n ja M_n vastavalt valgete ja mustade nuppude arvu n käigu järel. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $M_0 = 1$. Siis esimesel käigul lisatakse valgeid nuppe, teisel käigul lisatakse musti, kolmandal jälle valgeid jne. Tähistame sümboliga S_n kõikide nuppude arvu n käigu järel. s.t. $S_n = M_n + V_n$. On ilmne, et kui n käigu järel on ringjoonel S_n nuppu ja järgmisel käigul tuleb lisada valgeid nuppe, siis $S_{n+1} \leq S_n + 2M_n$, sest iga musta nupu juurde saab asetada maksimaalselt 2 valget. Juhul kui $(n+1)$. käigul lisatakse musti nuppe, siis analoogiliselt $S_{n+1} \leq S_n + 2V_n$.

a) Et $M_0 = 1$, siis $V_1 \leq 2 \cdot M_0 = 2$ ja $M_1 = 1$, $S_1 \leq 3$,
 $S_2 \leq S_1 + 2V_1 \leq 7$, $M_2 \leq 5$, $V_2 \leq 2$, $S_3 \leq 7 + 2 \cdot 5 = 17$, $V_3 \leq 12$, $M_3 \leq 5$,
 $S_4 \leq 17 + 2 \cdot 12 = 41$. Järelikult ei tohi algul ringjoonel olla
 rohkem kui 41 nuppu. Lähtudes sellest printsiibist, on lihtne
 konstrueerida selline 40 nupu paigutus, et pärast neljandat
 käiku jääb ringjoonele üks nupp. Näiteks

MVMMVMVMVMMMVMVMVMMVMMMVMVMVMVMVMMVMVMVMMVM.

b) Oletame, et igal käigul lisatakse ringjoonele maksimaalne arv nuppe, s.t. esimesel käigul asetatakse iga musta nupu juurde 2 valget, teisel käigul iga valge nupu juurde kaks musta jne. Näitame, et sel juhul $S_{n+2} = 2S_{n+1} + S_n$. Oletame lihtsuse mõttes, et n on paarisarv (juhtu, kui n on paaritu,

vaadeldakse analoogiliselt). Siis

$$S_{n+1} = S_n + 2M_n \text{ ja } S_{n+2} = S_{n+1} + 2V_{n+1}.$$

Et $V_{n+1} = 2M_n + V_n$, siis

$$\begin{aligned} S_{n+2} - S_{n+1} &= (S_{n+1} - S_n) + 2(V_{n+1} - M_n) = \\ &= S_{n+1} - S_n + 2(M_n + V_n) = S_{n+1} + S_n. \end{aligned}$$

Järelikult

$$S_{n+2} = S_n + 2S_{n+1}.$$

Et $S_0 = 1$ ja $S_1 = 3$, siis $S_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $S_3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$, $S_4 = 2 \cdot 17 + 7 = 41$, $S_5 = 2 \cdot 41 + 17 = 99$, $S_6 = 2 \cdot 99 + 41 = 239$, $S_7 = 2 \cdot 239 + 99 = 577$, $S_8 = 2 \cdot 577 + 239 = 1493$. Seega kui ringjoonel on 1000 nuppu, on vaja teha vähemalt 8 käiku. Niisiis, kui algul oleks ringjoonel asunud 1493 nuppu, oleks ülesanne lahendatud. Näitame, et ringjoonele on võimalik asetada 1000 nuppu nii, et pärast kaheksandat käiku jääb sinna 1 nupp.

Nimetame kahte kõrvuti olevat sama värvi nuppu paariks, kui mõlemal nupul on tema värvist erineva värviga naabernupp. On ilmne, et kui igal käigul lisada ringjoonele maksimaalne arv nuppe, siis pärast iga käiku võivad tekkida ainult ühte ja sama värvi paariid. Olgu P_n paaride arv n käigu järel. Näitame, et $P_{n+2} = S_n$.

Seame igale nuppude paigutusele ringjoonel vastavusse jada $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$, kus a_i ja b_i tähistavad vastavalt mustade ja valgete nuppude seeria pikkusi. Näiteks paigutusele MMMVVMVMVVV seame vastavusse jada 3, 2, 1, 1, 1, 3.

Olgu n paarisarv. Kui n käigu järel saadud paigutusele vastab jada $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$, siis järgmisel käigul saadud paigutusele vastab jada $1, 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, b_1+2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, b_2+2, \dots, b_k+2$. Lihtne on näha, et pärast $(n+2)$. käiku saadud paigutusele vastab jada, milles mustade paaride arv on

$$(a_1-1) + (b_1+1) + (a_2-1) + (b_2+1) + \dots + (a_k-1) + (b_k+1) = S_n,$$

sest paaride arv on arvu 2 esinemise kordsus selles jadas. Järelikult $P_{n+2} = S_n$. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et viimasel käigul lisatakse musta värvi nuppe. Lisame igal käigul ringjoonele maksimaalse arvu nuppe ja viimasel käigul lisame mõningatesse paaridesse kahe nupu asemel ühe. Nüüd on lihtne näha, et kui saadud paigutusest võtta ära kõik mustad nupud, millel on valge naabernupp, siis saame sama nuppude paigutuse, mis oli pärast eelviimast käiku.

Kui $S_8 = 1493$, siis $P_8 = S_6 = 239$. Seega on sel juhul pärast kaheksandat käiku võimalik saada kõik paigutused, mille nuppude arv m rahuldab ahelvõrratust

$$1493 - 239 \leq m \leq 1493,$$

kusjuures kõikidest neist paigutustest on 8 käiguga võimalik saada algaigutust (s.t. paigutust, kus $M_0 = 1$ ja $V_0 = 0$).

Ülesande lahendamiseks võtame algaigutuseks $M M M V M V$ ja lisame igal käigul maksimaalse arvu nuppe. Et $S_0 = 6$ ja $S_1 = 14$, siis $S_2 = 2 \cdot 14 + 6 = 34$, $S_3 = 2 \cdot 34 + 14 = 82$, $S_4 = 2 \cdot 82 + 34 = 198$, $S_5 = 2 \cdot 198 + 82 = 478$, $S_6 = 2 \cdot 478 + 198 = 1154$. Seega on pärast 6. käiku ringjoonel $P_6 = S_4 = 198$ mustade nuppude paari. Et $1154 - 198 < 1000$, siis on võimalik saada pärast 6. käiku ka paigutust, milles on 1000 nuppu. Toimides nüüd vastupidiselt (s.t. võttes nuppe ringjoonelelt ära), saame kuue käigu järel paigutuse $M M M V M V$ ja viimasest omakorda kahe käigu järel paigutuse, milles on üks nupp. Järelikult läheb vaja täpselt 8 käiku.

27. On selge, et pärast piima jaotamist oli seitsmenda päkapiku kruus tühi, s.t. seitsmes kruus oli ka algul tühi. Kui tähistada piima esialgsed kogused kruusides sümbolitega y_i ($i = 1, 2, \dots, 7$), siis suuruste y_i leidmiseks tuleks kirja panna ja lahendada küllaltki keerukas võrrandisüsteem. Ülesanne lahendub aga palju lihtsamalt, kui vaadelda igal valamisel ümbervalatud piima koguseid. Olgu need suurused tähistatud sümbolitega x_i ($i = 1, 2, \dots, 7$). Esimesel valamisel lisandub

igasse kruusi, välja arvatud esimene, $x_1/6$ liitrit piima. Teisel ümbervalamisel lisandub kõikidesse kruusidesse, välja arvatud teine, $x_2/6$ liitrit piima jne. Kuna pärast seitsmendat valamist saabub jälle algseis, siis peab igasse kruusi kuue valamisega lisandunud kogus olema võrdne sellest kruusist väljaavalatud piima kogusega. Seega esimese kruusi korral $x_1 = \frac{1}{6}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$, teise kruusi korral $x_2 = \frac{1}{6}(x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$ jne. Liites i-nda võrrandi mõlemale poole suuruse $\frac{1}{6} x_i$, saame võrrandid

$$\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = \frac{7}{6}x_1 = \frac{7}{6}x_2 = \dots = \frac{7}{6}x_7$$

ehk $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7$. Tähistades selle ümbervalatava koguse tähega x , saame, et esimeses kruusis oli algul x liitrit piima. Et teises kruusis oli enne teist valamist x liitrit, siis algul oli $x - \frac{x}{6} = \frac{5}{6}x$ liitrit piima. Analoogiliselt, kolmandas kruusis oli algul $\frac{4}{6}x$ liitrit piima jne.

Seega $x + \frac{5}{6}x + \frac{4}{6}x + \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}x = 3$, kust $x = \frac{6}{7}$. Järelikult oli algul esimeses kruusis $\frac{6}{7}$, teises $\frac{5}{7}$, kolmandas $\frac{4}{7}$, neljandas $\frac{3}{7}$, viiendas $\frac{2}{7}$, kuuendas $\frac{1}{7}$ liitrit piima, seitsmes kruus oli tühi.

28. a) Vt. ül.44 punkti a lahendus.

b) Oletame, et leidub kuuekohaline "eriline" arv A . Tähistame arvu A sümboliga z^2 , selle kolmest esimesest numbrist moodustatud arvu sümboliga x^2 , kolmest viimasest numbrist moodustatud arvu sümboliga y^2 . Sellisel juhul saame võrrandi

$$1000x^2 + y^2 = z^2, \text{ kus } 100 \leq x^2 < 1000, \quad 0 < y^2 < 1000.$$

Teisendades seda võrrandit, saame

$$(z - y)(z + y) = 1000 x^2.$$

Püüame lahendada saadud võrrandit proovimise teel. Kui võtta näiteks $z + y = 1000$ ning $z - y = x^2$, siis $1000 - x^2 = 2y$. Et $y^2 < 1000$, siis $y < 32$. Seega $0 < 1000 - x^2 < 64$. Saadud võrratuse

lahendiks sobib ainult $x = 31$, kuid seosest $1000 - (31)^2 = 2y$ ei saa siis leida täisarvulist väärtust muutujale y .

Proovime $1000 - x^2$ lahutada tegureiks teisiti. Oletame, et

$$\begin{cases} z - y = 500 \\ z + y = 2x^2. \end{cases}$$

Siis $2x^2 - 500 = 2y$ ehk $x^2 - y = 250$. Et $0 < y < 32$, siis $250 < x^2 < 282$. Saadud võrratuse lahendiks sobib ainult $x^2 = 256$. Siis $y = x^2 - 250 = 6$. Järelikult saame "erilise" arvu $256036 = 506^2$.

Otsides lahendit, kui

$$\begin{cases} z + y = 500 \\ z - y = 2x^2, \end{cases}$$

saame võrratuse $218 < x^2 < 250$, millest $x^2 = 225$. Sel juhul $y = 25$ ja $A = 225625 = 475^2$. Märkime, et üldse on kuuekohalisi "erilisi" arve viis. Idsaks ülaltoodutele on "erilised" arvud veel 144400, 324900, 576081.

29. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Olgu $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ ($S_0 = 0$). Konstrueerime otsitavad n rühma järgmiselt. Olgu A_k nende väljakirjutatud arvude hulk, mis asetsevad poollõigul $[S_{k-1}, S_k]$. Näitame, et hulgad A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) rahuldavad antud ülesande tingimusi. Hulga A_k maksimaalne element on S_k . Kui $S_k/S_{k-1} \leq 2$, siis on ilmne, et hulga A_k maksimaalse ja minimaalse elemendi suhe ei ületa 2. Seega jääb üle vaadelda vaid juhtu, kui $S_k/S_{k-1} > 2$. Siis

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k > 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})$$

ehk

$$a_k > a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = S_{k-1}. \quad (1)$$

Et $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k > a_k$, siis järelikult $a_k \in A_k$. Teiselt poolt on aga ilmne, et arvude S_{k-1} ja a_k vahel ei asetse ühtegi hulga A_k elementi. Teepoolest, kui nende vahel oleks veel mingi element hulgast A_k (näiteks element t), siis $t < a_k \leq a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq \dots \leq a_n$ ning seega summa t liidetavate hulka ei

kuulu arvud $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$. Järelikult saab t maksimaalne väärtus olla vaid $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = S_{k-1}$, mis on aga võimatu, sest eelduste kohaselt $t \in]S_{k-1}, a_k[$. Järelikult hulga A_k minimaalne element on a_k . Siis tingimuse (1) põhjal

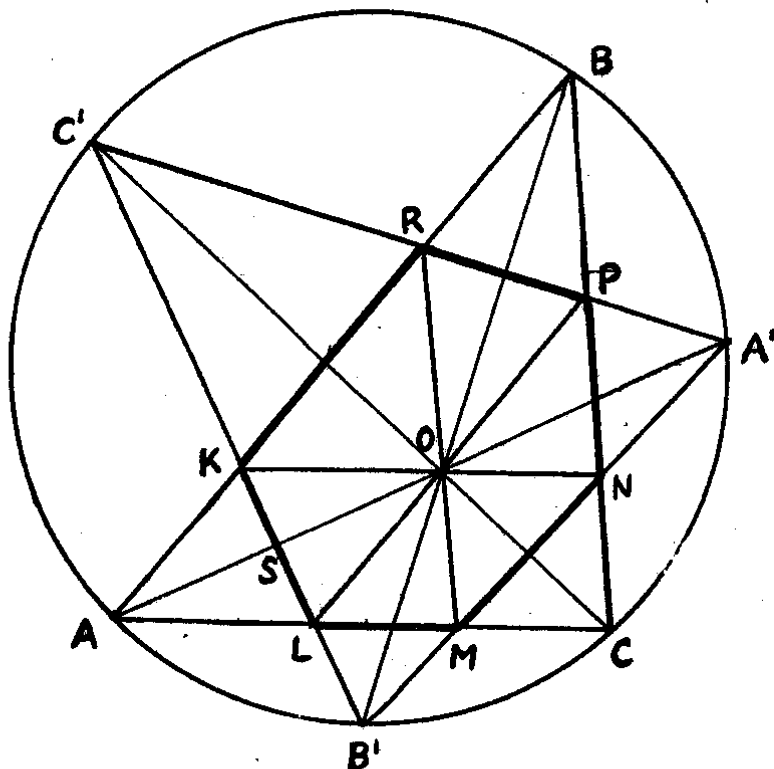
$$S_k/a_k = (a_1 + \dots + a_k)/a_k = 1 + (a_1 + \dots + a_{k-1})/a_k < 2.$$

30. a) Vaatleme kõiki neid urne, mis on nummerdatud arvudega $\overline{km}$, kus $k - m$ on paarisarv. Selliseid urne on 50 (02, 04, 06, 08, 11, 13, ..., 97, 99). Osutub, et need 50 urni annavadki meile ülesande lahenduse. Tõepoolest, oletame, et on antud mingi kolmekohaline arv $\overline{ijk}$. Ilmselt on selles arvus kas vähemalt kaks paarisnumbrit või vähemalt kaks paaritut numbrit. Kriipsutades maha ülejäänud kolmanda numbri, saame selle järjekorranumbriga pileti lasta mingisse ülalkirjeldatud urni.

b) Piletit $\overline{kkk}$ saab paigutada ainult urni $\overline{kk}$. Selliseid urne on 10. Pileteid numbritega $\overline{xyz}$, kus x, y ja z on paarikaupa erinevad, on kokku $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Urni $\overline{ab}$ ($a \neq b$) saab maksimaalselt paigutada 24 piletit, mille kõik numbrid on erinevad (need on piletid $\overline{uab}, \overline{aub}, \overline{abu}$, kus $u \neq a$ ja $u \neq b$). Järelikult on 720 pileti jaoks vaja vähemalt $720 : 24 = 30$ urni. Seega on kokku vaja vähemalt $30 + 10 = 40$ urni.

c) Olgu a_k selliste urnide arv, mille järjekorranumber algab arvuga k , $k = 0, 1, 2, \dots, 9$. (S.t. me vaatleme urne, mille järjekorranumber on kujul $\overline{k\overline{m}}$.) Olgu $a = \min\{a_0; a_1; \dots; a_9\}$. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et urne kujul $\overline{0\overline{m}}$ on a tükki. Nummerdades vajaduse korral urnid ümber, võib eeldada, et meil on välja valitud urnid $00, 01, \dots, 0(a-1)$. Vaatleme nüüd piletit numbriga $\overline{Oxy}$, kus $x \geq a$ ja $y \geq a$. Seda piletit saab lasta urni $\overline{xy}$, sest urnid $\overline{0x}$ ja $\overline{0y}$ ei kuulu eelduste kohaselt väljavalitute hulka. Suurused x ja y saavad teineteisest sõltumatult omada väärtusi $a, a+1, \dots, 9$. Seega pileтите $\overline{Oxy}$ ($x \geq a, y \geq a$) jaoks on vaja vähemalt $(10-a)(10-a)$ urni kujul $\overline{xy}$, kus $x \geq a$ ja $y \geq a$. Urne kujul $\overline{0\overline{m}}$ on eelduste kohaselt a . Urne kujul $\overline{1\overline{m}}$ on mitte vähem kui a . Sama võib väita urnide $\overline{2\overline{m}}, \overline{3\overline{m}}, \dots, \overline{(a-1)\overline{m}}$ kohta. Seega on kokku urne vähemalt $(10-a)(10-a) + a \cdot a = (10-a)^2 + a^2 \geq 50$.

31. Olgu ΔT_1 tipud A, B ja C ja ΔT_2 tipud A', B' ja C'. Vaatleme lõike AA', BB' ja CC'. Need lõigud on ΔT_1 nurga-poolitajad. Tõepoolest, $\widehat{BAA'} = \frac{1}{2} \widehat{BA'} = \frac{1}{2} \widehat{A'C} = \widehat{A'AC}$. Järeli-kult lõik AA' poolitab nurga BAC. Nurkade ABC ja ACB korral on tõestus analoogiline. Järelikult lõigud AA', BB' ja CC' lõiku-vad ühes punktis O, mis on ΔT_1 siseringjoone keskpunktiks.



Joonis 22.

Tõestuseks piisab, kui näidata, et ku-jund AKOL on romb. Analoogia põhjal on siis rombid ka neli-nurgad BPOR ja CMON. Siit järeldub kuus-nurga KLMNPR diago-naalide paralleel-sus kolmnurga ABC külgedega. Samuti järeldub sellest, et murdjooned LOP, ROM ja KON on sirglõi-gud. Näitame, et ku-jund AKOL on romb. Kõigepealt näitame, et kõõl AA' on ris-ti kõõluga B'C'.

Tõepoolest

$$\begin{aligned} \widehat{A'SB'} &= \frac{1}{2} (\widehat{B'CA'} + \widehat{AC'}) = \frac{1}{2} (\widehat{AC'} + \widehat{B'C} + \widehat{CA'}) = \\ &= \frac{1}{4} (\widehat{AC'B} + \widehat{AB'C} + \widehat{CA'B}) = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Järelikult on lõik AA' risti kõõluga C'B'. Näitame nüüd, et lõik C'B' poolitab lõigu AO. Et

$$\widehat{AC'B'} = \frac{1}{2} \widehat{AB'} = \frac{1}{2} \widehat{B'C} = \widehat{B'C'C} \text{ ja } AO \perp B'C',$$

siis AS = SO. Nüüd on lihtne näha, et

$$\widehat{CAA'} = \frac{1}{2} \widehat{CA'} = \frac{1}{2} \widehat{A'B} = \widehat{A'AB}.$$

Järelikult KS = SL. Seega nelinurk AKOL on romb.

32. Et $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n) = 0$, siis fikseerides $\varepsilon > 0$, võib leida sellise indeksi N , et kui $n > N$, siis

$$|a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n| \leq \varepsilon.$$

Siis ka $|a_{n+1}| - \frac{1}{2}|a_n| \leq \varepsilon$ ehk

$$|a_{n+1}| \leq \varepsilon + \frac{1}{2}|a_n| \leq \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{|a_{n-1}|}{2}) \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{|a_{n-2}|}{8} \leq \dots \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{n-M}} + \frac{|a_M|}{2^{n-M+1}} \leq 2\varepsilon + \frac{|a_M|}{2^{n-M+1}}, \text{ kus } M \geq N.$$

Kui valida M_1 nii, et $M_1 > M$ ja $\frac{|a_{M_1}|}{2^{n-M_1+1}} < \varepsilon$ $n > M_1$ korral, siis saame; et

$$|a_{n+1}| \leq 3\varepsilon, \text{ kui } n > M_1. \quad (1)$$

Et ε on suvaline etteantud positiivne reaalarv, siis võrratusest (1) järeldub, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

33. Vt. ül.23 lahendus.

34. Olgu linnade arv n . Nummerdame linnad esimese marsruudi läbimise järjekorras $1, 2, 3, \dots, n$. Teisel marsruudil läbitakse linnad mingis teises järjestuses $i_1, i_2, \dots, i_n$. Tähistame i -ndast linnast k -ndasse linna sõidu maksumuse sümboliga (i, k) , kusjuures loeme, et $(i, k) = (k, i)$. Ülesande tingimuste põhjal kehtivad järgmised võrratused:

$$(k, k+1) \leq (k, k+r), \quad (1)$$

$$(i_k, i_{k+1}) \geq (i_k, i_{k+r}), \quad (2)$$

kus $r = 1, 2, \dots, n-k$ ja $k = 1, 2, \dots, n-2$. Kui i_p ei ole suurim hulgas $\{i_p; i_{p+1}; \dots; i_{p+k}; \dots; i_n\}$, siis leidub selles hulgas element i_{p+r} et $i_{p+r} > i_p$ ja võrratuste (1) ja (2) põhjal

$$(i_p, i_{p+1}) \geq (i_p, i_{p+r}) \geq (i_p, i_p + 1). \quad (3)$$

Kui $i_n = n$, siis ahelvõrratus (3) kehtib p väärtuste $1, 2, \dots, n-1$ korral, ja liites saadud võrratused, ongi ülesanne lahendatud. Järelikult võib eeldada, et $i_n \neq n$. Olgu teisel mars-

ruudil linna n number q , s.t. et i_q on suurim hulgas $\{i_q; i_{q+1}; \dots; i_n\}$. Olgu $i_s = \max\{i_{q+1}; i_{q+2}; \dots; i_n\}$. Edasi olgu $i_t = \max\{i_{s+1}; i_{s+2}; \dots; i_n\}$ jne., kuni saame, et $i_n = \max\{i_{u+1}; i_{u+2}; \dots; i_n\}$. Selliselt oleme välja eraldanud kõik linnad $i_q, i_s, i_t, \dots, i_u, i_n$ millede numbrid on suuremad kõigist neile teisel marsruudil järgnevate linnade numbritest. Nende linnade korral ei kehti ahelvõrratus (3), kuid võrratuste (1) ja (2) põhjal

$$(i_q, i_{q+1}) \geq (i_q, i_s) \geq (i_s, i_s + 1),$$

sest $i_s < i_q$ ja linn i_s järgneb teisel marsruudil linnale i_q . Analoogiliselt saame, et

$$(i_s, i_{s+1}) \geq (i_s, i_t) \geq (i_t, i_t + 1) \text{ jne.},$$

kuni $(i_u, i_{u+1}) \geq (i_u, i_n) \geq (i_n, i_n + 1)$. Kokku võttes oleme nende linnade jaoks, mille numbrid on suuremad kõigi neile järgnevate linnade numbritest, saanud võrratused:

$$(i_q, i_{q+1}) \geq (i_s, i_s + 1),$$

$$(i_s, i_{s+1}) \geq (i_t, i_t + 1),$$

...

$$(i_u, i_{u+1}) \geq (i_n, i_n + 1).$$

Ülejäänud linnade i_p korral kehtivad võrratused

$$(i_p, i_{p+1}) \geq (i_p, i_p + 1).$$

Liites saadud võrratused, näeme et

$$\sum_{k=1}^{n-1} (i_k, i_{k+1}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} (k, k+1),$$

s.t. et sõit teisel marsruudil ei ole odavam kui sõit esimesel marsruudil.

35. Fikseerime selle ruudu jaoks koordinaatteljestiku nii, et ruudu üks tipp asuks koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed asuksid koordinaattelgedel. Sellisel juhul on ruudu servadel asuvate sõlmpunktide koordinaadid kujul $(0, k)$, $(k, 0)$, $(100, k)$, $(k, 100)$, kus $k = 1, 2, \dots, 99$. Ruudu sisemuses

on sõlmpunkte 99^2 , s.o. paaritu arv. Näitame, et kui kõikidest ruudu servadel asuvatest sõlmpunktidest algavad murdjooned, siis läbivad need kokku paarisarv ruudu sisemuses asuvaid sõlmpunkte. Vaatleme näiteks juhtu, kus murdjoon algab punktist $(0,1)$ ja lõpeb punktis $(k,0)$. Näitame, et selle murdjoone poolt läbitavate sõlmpunktide arv on sama paarsusega, mis arv $i+k-1$. Tõepoolest, sisemiste sõlmpunktide arv murdjoonel on ühe võrra väiksem murdjoone lülide arvust. Järelikult tuleb näidata, et murdjoone lülide arv on sama paarsusega, kui $i+k$. Kuid see on ilmne, sest murdjoone horisontaalsete lülide arv saab erineda arvust k vaid paarisarvu võrra ja vertikaalsete lülide arv saab erineda arvust i samuti paarisarvu võrra. Järelikult sõlmpunktide arv vaadeldaval murdjoonel on kujul $i+k-1+2m$.

Ülejäänud juhud (s.t. juhud, kus murdjoone alg- ja lõpp-punkt asuvad mingitel teistel servadel) on analoogilised. Kõikidel juhtudel tuleb sõlmpunktide arvu paarsus samasugune kui arvul $i+k-1$. Seega kõikide murdjoonte poolt läbitavate sõlmpunktide arvu paarsus on sama mis arvul

$$\sum_{i,k} (i+k-1) = 4 \cdot \sum_{i=1}^{99} i = 198.$$

Järelikult läbitakse paarisarv sõlmpunkte, seega leidub ruudu sisemuses läbimata sõlmpunkt.

36. Kui $m = n = 2$, siis on ülesande väite kehtivuses lihtne veenduda proovimise abil. Oletame nüüd, et $m > 2$ ja $n > 2$. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $x_m = \max(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ja $y_n = \max(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Kui $x_m = y_n$, siis võib võrduse mõlemat poolt taandada suurusega $x_m (= y_n)$. Oletame, et $x_m > y_n$ (juhtu, kus $x_m < y_n$, vaadeldakse analoogiliselt). Siis võib antud võrduse kirjutada kujul

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + (x_m - y_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}. \quad (1)$$

Kui $S = \sum_{i=1}^n y_i$ ja $S' = \sum_{i=1}^{n-1} y_i$, siis $y_n \geq S/n$ ning $S' = S - y_n \leq S - S/n < (n-1)m$, sest et $S < mn$. Seega rahuldab ka võrdus (1)

ülesande tingimusi. Kui selle võrduse korral kehtib ülesande väide, siis kehtib see ka esialgse võrduse korral, sest esialgses võrduses võib maha kriipsutada needsamad liikmed, mis võrduses (1).

Korrates sama protseduuri, jõuame võrduseni, kus ühel pool on kindlasti kaks liidetavat. Vaatleme sellist võrdust

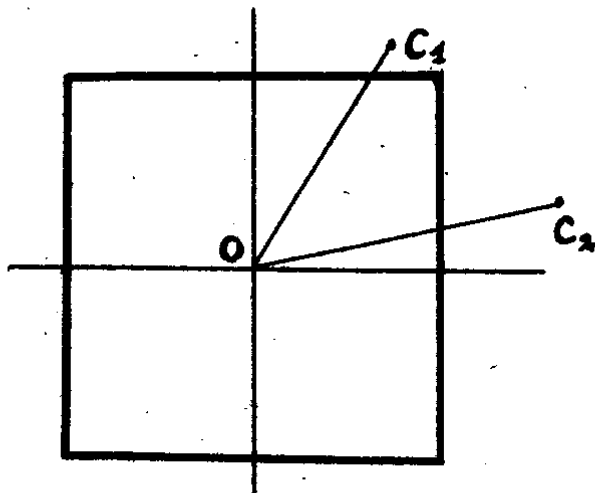
$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + \dots + y_k < 2k. \quad (2)$$

Oletame, et $x_1 \leq x_2$ ja et $y_k = \max(y_1, y_2, \dots, y_k)$. Tähistame $x_1 + x_2 = S$. Oletame nüüd, et võrduses (2) ei saa ülaltoodud lahutamise protseduuri jätkata, s.t. et $x_2 < y_k$. Et $x_2 \geq S/2$ ja $S < 2k$, siis $y_k > S/2$ ja $y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} < k$. Viimase võrratuse kehtimiseks on vaid üks võimalus: $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-1} = 1$. Et $x_1 < S/2 < k$, siis võime võrduses (2) vasakult maha tõmmata x_1 ja paremalt poolt x_1 ühte. Seega on ülesanne lahendatud.

37. Esmalt märgistame ära kõige suurema ruudu A_1 ja vaatleme kõiki neid ruute, mille keskpunkt asub väljaspool ruutu A_1 . Valime nende ruutude hulgast suurima, olgu see A_2 , ja märgistame ta ära. Edasi vaatleme kõiki neid ruute, mille keskpunkt asub väljaspool hulka $A_1 \cup A_2$ ja märgistame ära suurima nende hulgast, milleks olgu ruut A_3 jne.

Nii satub iga ruudu keskpunkt mingisse märgistatud ruutu. Oletame nüüd vastuväiteliselt, et mingi ruudu B keskpunkt O sattus rohkem kui nelja märgistatud ruutu. Kui B on märgistatud ruut, siis see on võimatu, sest konstruktsiooni kohaselt märgistatud ruudu keskpunkt ei asetse kunagi mingis teises märgistatud ruudus.

Järelikult ruut B saab olla ainult märgistamata. Tõmbame läbi ruudu B keskpunkti koordinaattelgedega paralleelsed sirged. Need jaotavad tasapinna neljaks osaks. Et ruut B on eel-



Joonis 23.

duste kohaselt kaetud vähemalt viie märgistatud ruuduga, siis peab tasandi mingil osal olema kahe märgistatud ruudu, näiteks A_1 ja A_2 keskpunktid C_1 ja C_2 (vt. joon. 23). Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $C_1O \leq C_2O$. Sel juhul on ilmne, et $C_1 \in A_2$. Kuid ühe märgistatud ruudu keskpunkt ei saa olla teises märgistatud ruudus. Seega saime vastuolu. Järelikult ei asu ühegi ruudu keskpunkt mitte enam kui neljas märgistatud ruudus.

38. a) Järjestame kaaluvihid raskuse järgi. Asetame vasakpoolsele kaalukaussile kõige kergema. Seejärel asetame parempoolsele kaalukaussile raskuselt järgmise kaaluvihhi. Edasi asetame vasakpoolsele raskuselt järgmise kaaluvihhi jne. Et iga järgnev viht on raskem eelmisest, siis vajub igal kaalumisel alla see kauss, kuhu viimati asetati viht.

b) Vaatleme kõigepealt sõna VVV...VV. Vastava kaalumiste seeria saame, kui asetame vihte ainult vasakpoolsele kaalukaussile. See pole aga ainus võimalus. Näitame, et vihte saab kaalule asetada selliselt, et alati vajub alla vasakpoolne kaalukauss ja seejuures pärast viimase vihi asetamist erinevad kaalukaussidel olevad koormused teineteisest mitte rohkem kui kaalub kõige raskem viht.

Olgu kaaluvihhtide raskused kasvavas järjekorras $m_1, m_2, \dots, m_n$, s.t. $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Asetame vasakule kaussile järjest vihid $m_1, m_3, \dots, m_n$, kui n on paaritu, või $m_2, m_4, \dots, m_n$, kui n on paarisarv. Seejärel asetame ülejäänud vihid paremale. Et $m_1 > 0, m_3 > m_2, m_5 > m_4, \dots, m_n > m_{n-1}$, siis paaritu n

korral

$$m_1 + m_3 + \dots + m_n > m_2 + m_4 + \dots + m_{n-1}.$$

Seega on kogu aeg vasakpoolne kaalukauss raskem. Paarisarvulise n korral saame võrratustest

$$m_2 > m_1, m_4 > m_3, m_6 > m_5, \dots, m_n > m_{n-1}$$

samuti, et

$$m_2 + m_4 + \dots + m_n > m_1 + m_3 + \dots + m_{n-1},$$

mis ütleb, et vasakpoolne kaalukauss on kogu aeg raskem. Pane-me nüüd tähele, et paaritu n korral on vihid lõpuks kaaludel täpselt samuti nagu sõnale VPVPV...V vastava kaalumise korral punktis a kirjeldatud meetodil. Järelikult, kui võtame vasakult ära vihi m_n , langeb alla parempoolne kaalukauss. Seega on kaalukaussidel olevate koormuste erinevus väiksem kui m_n . Paarisarvulise n korral on vihid lõpuks kaalul samuti nagu sõnale PVPV...V vastava kaalumiste seeria korral, kui kasutada punktis a kirjeldatud meetodit. Kui nüüd võtame vasakult ära vihi m_n , langeb alla parempoolne kaalukauss, s.t. jälle on kaalukaussidel olevate koormuste erinevus väiksem kui m_n .

Olgu nüüd antud mingi n -täheeline sõna tähtedest V ja P:

$$\underbrace{VV\dots V}_{k_1} \underbrace{PP\dots P}_{k_2} \underbrace{VV\dots V}_{k_3} \underbrace{PP\dots P}_{k_4} \dots,$$

tähte tähte tähte tähte ...

kus k_1 võib olla ka null. Jaotame vihid $m_1, m_2, \dots, m_n$ gruppidesse

$$(m_1, m_2, \dots, m_{k_1}), (m_{k_1+1}, m_{k_1+2}, \dots, m_{k_1+k_2}), \dots$$

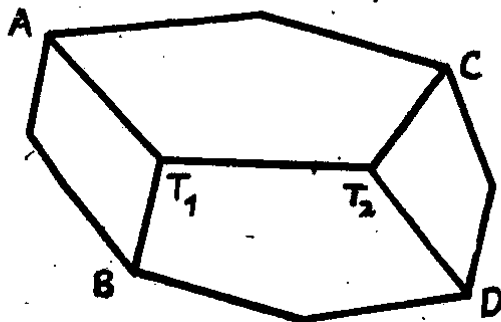
Nüüd asetame esimese grupi vihid järjest kaalule vastavalt k_1 -tähelisele sõnale $VV\dots V$ nii, et lõpuks kaalukaussidel oleva koormuse erinevus ei oleks suurem kui m_{k_1} . Seejärel asetame parempoolsele kaalukaussile vihi m_{k_1+1} . Et $m_{k_1+2} > m_{k_1+1} > m_{k_1}$, siis vihi m_{k_1+1} (või vihi m_{k_1+2}) asetamisel parempoolsele kaalukaussile langeb see alla. Edasi asetamegi teise grupi vihid kaalule vastavalt k_2 -tähelisele sõnale $PP\dots P$ nii, et lõpuks kaalukaussidel oleva koormuse erinevus ei oleks suurem kui

$m_{k_1+k_2}$. Analoogiliselt jätkates saamegi kaalumiste seeria, mis vastab antud sõnale.

39. Vt. ül.31 lahendus.

40. Vt. ül.32 lahendus.

41. On teada, et kolm punkti, mis ei asu ühel sirgel, määravad ringjoone ning neli punkti, mis ei asu ühel tasandil, määravad sfääri. Niisiis, hulktahuka tipp T_1 ja servade otspunktid T_2 , A ja B määravad sfääri S_1 (joon. 24). Lõigates seda sfääri tasandiga T_1AB , saame ringjoone, millel asuvad punktid T_1 , A ja B, järelikult ka tahu T_1AB kõik ülejäänud tipud. Seega asuvad tahu T_1AB kõik tipud sfääril S_1 . Samal viisil arutledes saame, et sfääril S_1 on ka tahkude BT_1T_2D ja AT_1T_2C kõik tipud. Analoogiline arutlus näitab, et T_2CD , AT_1T_2C ja DT_2T_1B tipud asuvad ühisel sfääril S_2 . Sfääridel S_1 ja S_2 on vähemalt neli ühist punkti (T_1, T_2, A ja B). Seega need sfäärid ühtivad: $S_1 = S_2 = S$.



Joonis 24.

Edasi vaatleme tippude A, B, C ja D juures olevaid tahke. Ka nende tahkude kõik tipud asuvad sfääril S . Analoogiliselt arutlust jätkates saamegi, et antud hulktahuka kõik tipud asuvad sfääril S .

42. Saab küll. Vaatleme seda hulkliiget pärast seitsmen-
dat käiku. Siis on käigul B. Esimese kuue käigu jooksul saab B
mängida nii, et järele jääb mitte rohkem kui üks tärn muutuja
 x kõikide paarisarvuliste astmete ees. Seega on pärast 7. käi-
ku kaks võimalust:

- 1) asendamata on üks paarisastme ja üks paarituastme kordaja,
- 2) asendamata on kaks paarituastme kordajat.

Esimesel juhul kirjutab B järelejäänud paarisastme kor-
dajaks sellise arvu, et kõikide paarisastmete ees olevate kor-

dajate summa oleks null (hulkliikme vabaliiget vaadeldakse kui x^0 kordajat). Järelikult $x = \pm 1$ korral sõltub hulkliikme väärtus ainult kordajatest muutuja x paaritute astmete ees. Sõltumata A viimasest käigust, on antud hulkliikmel $x = 1$ ja $x = -1$ korral vastand arvulised väärtused. (Paaritu funktsiooni omadus!)

Teisel juhul võib B toimida järgmiselt. Oletame, et kirjutamata on kordajad astmete x^{2n+1} ja x^{2m+1} ees. Siis leiab B süsteemist

$$\begin{cases} Q(-3) + a(-3)^{2m+1} + b(-3)^{2n+1} = 0 \\ Q(2) + a \cdot 2^{2m+1} + b \cdot 2^{2n+1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

suurused $a = a_0$ ja $b = b_0$ ning kirjutab arvu a_0 astme x^{2m+1} ette ($Q(x)$ on hulkliikme $P(x)$ see osa, kuhu kordajad on sisse kirjutatud. Lihtne on näha, et süsteem (1) on tõepoolest lahenduv, sest determinant $D = -(3^{2m+1}2^{2n+1} - 2^{2m+1}3^{2n+1}) \neq 0$.

Näitame, et sõltuvalt A viimasest käigust on hulkliikmel $P(x)$ kas erimärgilised väärtused kohal $x = 2$ ja $x = -3$, või $P(2) = P(-3) = 0$. Tõepoolest, kui A kirjutab astme x^{2n+1} ette kordaja b_0 , siis $P(2) = P(-3) = 0$. Kui viimane kordaja $b > b_0$, siis

$$P(2) = Q(2) + a_0 2^{2m+1} + b \cdot 2^{2n+1} = Q(2) + a_0 2^{2m+1} + b_0 2^{2n+1} + (b - b_0) 2^{2n+1} = (b - b_0) 2^{2n+1} > 0$$

ning

$$\begin{aligned} P(-3) &= Q(-3) + a_0 (-3)^{2m+1} + b (-3)^{2n+1} = Q(-3) + \\ &+ a_0 (-3)^{2m+1} + b_0 (-3)^{2n+1} + (b - b_0) (-3)^{2n+1} = \\ &= (b - b_0) (-3)^{2n+1} < 0. \end{aligned}$$

Kui viimane A poolt kirjutatud kordaja $b < b_0$, siis saab analoogiliselt näidata, et $P(2) < 0$ ja $P(-3) > 0$. Järelikult peab võrrandil $P(x) = 0$ olema lahend x_0 , kus $x_0 \in]-3, 2[$.

43. Vt. ül.23 lahendus.

44. Tähistame $P(x) = x^2 - \alpha$, $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. Siis $P(Q(x)) = (Q(x))^2 - \alpha = x^6 + 2px^5 + (2q + p^2)x^4 + 2(pq + r)x^3 +$

$$+ (q^2 + 2pr)x^2 + 2rqx + r^2 - \alpha \quad \text{ja}$$

$$Q(P(x)) = (P(x))^3 + p(P(x))^2 + qP(x) + r = \\ = x^6 + (p - 3\alpha)x^4 + (3\alpha^2 + q - 2p\alpha)x^2 + p\alpha^2 - \alpha q + r - \alpha^3.$$

Võrdusest $P(Q(x)) = Q(P(x))$ järeldub vastavate samade astmete ees olevate kordajate võrdus, seega $p = r = 0$. Kui $\alpha = 0$, siis $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^3$. Kui $\alpha \neq 0$, siis peab $\alpha = 2$ ja $q = -3$. Sel juhul $P(x) = x^2 - 2$ ja $Q(x) = x^3 - 3x$. Viimane on ainus kolmanda astme hulkliige, mis kommuteerub hulkliikmega $P(x) = x^2 - 2$.

Kui analoogilisel viisil otsida esimese astme hulkliikmeid, siis selgub, et hulkliikmega $P(x) = x^2 - \alpha$ kommuteerub ainult üks esimese astme hulkliige $Q(x) = x$. Teise astme hulkliikmeid, mis kommuteeruvad hulkliikmega $P(x) = x^2 - \alpha$, on samuti üks: $Q(x) = x^2 - \alpha$.

b) Olgu $P(x) = x^2 + px + q$ ja $Q(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$.
Siis

$$Q(P(x)) = (P(x))^k + a_1(P(x))^{k-1} + \dots + a_k$$

ja

$$P(Q(x)) = (Q(x))^2 + pQ(x) + q.$$

Arvud $p, q, a_1, a_2, \dots, a_k$ määrane vastavate astmete ees olevate kordajate võrdlemisel hulkliikmetes $Q(P(x))$ ja $P(Q(x))$. Need on $2k$ -astme hulkliikmed. Astme x^{2k} kordaja on mõlemas 1. Aste x^{2k-1} esineb hulkliikmes $Q(P(x))$ ainult avaldises $(P(x))^k$, sest $(P(x))^{k-1}$ on juba $(2k-2)$ -astme hulkliige. Tähistame astme x^{2k-1} kordaja hulkliikmes $Q(P(x))$ sümboliga $K(p, q)$, sest ta sõltub ainult hulkliikme $P(x)$ kordajatest. Hulkliikmes $P(Q(x))$ tekib aste x^{2k-1} avaldises $(Q(x))^2$ astmete x^k ja x^{k-1} korrutamisel, seega sõltub astme x^{2k-1} kordaja ainult suurusest a_1 . Tähistame astme x^{2k-1} kordaja avaldises $P(Q(x))$ sümboliga $L(a_1)$. Võrdusest $L(a_1) = K(p, q)$ arvutame antud suuruste p ja q järgi kordaja a_1 . See on võimalik, sest avaldises $L(a_1)$ on a_1 esime-

ses astmes (lihtne arvutus näitab, et $L(a_1) = 2a_1$). Edasi, aste x^{2k-2} tekib hulkliikmes $P(Q(x))$ astmete x^k ja x^{k-2} ning x^{k-1} ja x^{k-1} korrutamisel avaldises $(Q(x))^2$, seega tema kordaja $L(a_1, a_2)$ sõltub ainult suurustest a_1 ja a_2 , kusjuures a_2 on avaldises $L(a_1, a_2)$ esimeses astmes. Hulkliikmes $Q(P(x))$ esineb aste x^{2k-2} ainult avaldistes $(P(x))^k$ ja $(P(x))^{k-1}$, seega tema kordaja $K(p, q, a_1)$ sõltub ainult suurustest p , q ja a_1 . Võrdusest $L(a_1, a_2) = P(p, q, a_1)$ arvutame teadaolevate suuruste p , q , a_1 abil kordaja a_2 . Kordaja a_3 arvutame seosest $L(a_1, a_2, a_3) = K(p, q, a_1, a_2)$, korrates ülaltoodud arutlust. Nii jätkates saame arvutada kordajad $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, olles võrrelnud astmete $x^{2k-1}, x^{2k-2}, \dots, x^{k+1}$ ees olevaid kordajaid hulkliikmetes $P(Q(x))$ ja $Q(P(x))$. Kordaja a_k arvutamiseks võrdleme astme x^k kordajaid. Erinevalt esimese punkti käsitlesest tuleb nüüd hulkliikmes $P(Q(x))$ arvestada ka avaldist $p \cdot Q(x)$, kus x^k kordajaks on p . Avaldises $(Q(x))^2$ tekib aste x^k astmete x^k ja x^0 , x^{k-1} ja x , x^{k-2} ja x^2 , ... korrutamisel. Seega võime astme x^k kordaja hulkliikmes $P(Q(x))$ tähistada $L(p, a_1, a_2, \dots, a_k)$, kus suurus a_k on esimeses astmes. Hulkliikmes $Q(P(x))$ on astme x^k kordaja $K(p, q, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ ja seega osutub a_k leidmine võimalikuks ka antud juhul.

Järelikult oleme hulkliikmete $P(x)$ ja $Q(x)$ kommutatiivsuse tingimuse põhjal leidnud hulkliikme $Q(x)$ kordajate jaoks ainult ühed kindlad väärtused, s.t. et antud hulkliikmega $P(x)$ ei saa kommuteeruda kaks erinevat k -astme hulkliiget.

Märkus. Et kehtiks võrdus $P(Q(x)) = Q(P(x))$, peavad loomulikult ka astmete $x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^1, x^0$ kordajad nendes hulkliikmetes olema võrdsed. Järelikult, hulkliige $Q(x)$, mille kordajad me eespool arvutasime, võib ka mitte kommuteeruda hulkliikmega $P(x)$. Sel juhul pole ühtegi k -astme hulkliiget, mis kommuteerub hulkliikmega $P(x)$.

c) Neljanda astme hulkliige $P(P(x))$ ja kaheksanda astme hulkliige $P(P(P(x)))$ kommuteeruvad hulkliikmega $P(x)$. Punkti b põhjal rohkem selliseid hulkliikmeid ei ole.

d) Nii hulkliige $Q(R(x))$ kui ka hulkliige $R(Q(x))$ kommuteeruvad hulkliikmega $P(x)$. Tõepoolest,

$$Q(R(P(x))) = Q(P(R(x))) = P(Q(R(x))) \quad \text{ja}$$

$$R(Q(P(x))) = R(P(Q(x))) = P(R(Q(x))).$$

Punkti b põhjal $Q(R(x)) = R(Q(x))$, s.t. hulkliikmed $R(x)$ ja $Q(x)$ kommuteeruvad omavahel.

e) Siin peab kõigepealt tegema veidi eeltööd. Teame, et $P_3(x) = x^3 - 3x$ (vt. punkt a), $P_4(x) = P_2(P_2(x))$, $P_8(x) = P_2(P_2(P_2(x)))$ (vt. punkt c). Kergesti saame ka, et $P_6(x) = P_3(P_2(x))$. Kõik need hulkliikmed kommuteeruvad hulkliikmega $P_2(x)$, järelikult ka omavahel. Vahetu arvutamisega leiame ka $P_5(x)$ ja $P_7(x)$. Seega

$$P_2(x) = x^2 - 2,$$

$$P_6(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2,$$

$$P_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$P_7(x) = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x,$$

$$P_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2,$$

$$P_8(x) = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2.$$

$$P_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x,$$

Ilmneb, et $k = 4, 5, 6, 7, 8$ korral kehtib seos

$$P_k(x) = x P_{k-1}(x) - P_{k-2}(x). \quad (1)$$

Sama seosega defineerime hulkliikmed $P_k(x)$ kõikide ülejäänud k väärtuste jaoks. Nüüd tuleb näidata, et selliselt saadud hulkliikmed $P_k(x)$ kommuteeruvad hulkliikmega $P_2(x)$. Eeldame, et hulkliikmed $P_{k-2}(x)$ ja $P_{k-1}(x)$ kommuteeruvad hulkliikmega $P_2(x)$. Siis

$$\begin{aligned} P_k(P_2(x)) &= P_2(x) \cdot P_{k-1}(P_2(x)) - P_{k-2}(P_2(x)) = P_2(x) \cdot P_2(P_{k-1}(x)) - \\ &- P_2(P_{k-2}(x)) = (x^2 - 2)[P_{k-1}^2(x) - 2] - [P_{k-2}^2(x) - 2]. \end{aligned}$$

Leiame ka

$$\begin{aligned} P_2(P_k(x)) &= P_k^2(x) - 2 = \\ &= x^2 \cdot P_{k-1}^2(x) - 2x \cdot P_{k-1}(x) \cdot P_{k-2}(x) + P_{k-2}^2(x) - 2. \end{aligned}$$

Et oleks $P_2(P_k(x)) = P_k(P_2(x))$, peab kehtima võrdus

$$x P_{k-1}(x) \cdot P_{k-2}(x) - P_{k-1}^2(x) - P_{k-2}^2(x) = x^2 - 4. \quad (2)$$

Allpool näitame, et võrdus (2) kehtib kõikide valemiga (1) määratud hulkliikmete korral. Sellega saab ühtlasi tõestatud, et kõik hulkliikmed $P_k(x)$ kommuteeruvad hulkliikmega $P_2(x)$, sest $P_7(x)$ ja $P_8(x)$ kommuteeruvad hulkliikmega $P_2(x)$ ja seose (2) tõttu saab rakendada matemaatilise induktsiooni meetodit. Punktist d omakorda järeldub, et hulkliikmed $P_k(x)$ ja $P_j(x)$ kommuteeruvad omavahel, kui k ja j on suvalised naturaalarvud.

Tõestame seose (2) kehtivuse. Eeldame, et võrdus (2) on õige mingi naturaalarvu i korral (näiteks $i = 4$ korral). Leiame võrduse (2) vasaku poole $k = i + 1$ korral, arvestades seost (1):

$$\begin{aligned} & x P_i(x) \cdot P_{i-1}(x) - P_i^2(x) - P_{i-1}^2(x) = \\ & = x [x \cdot P_{i-1}(x) - P_{i-2}(x)] P_{i-1}(x) - [x P_{i-1}(x) - P_{i-2}(x)]^2 - \\ & - P_{i-1}^2(x) = x P_{i-1}(x) P_{i-2}(x) - P_{i-2}^2(x) - P_{i-1}^2(x) = x^2 - 4. \end{aligned}$$

Seega on seos (2) tõestatud.

Osutub, et hulkliikmeid $P_k(x)$ saab konstrueerida ka teisiti. Olgu

$$t^k + t^{-k} = P_k(t + t^{-1}), \quad (3)$$

s.t. et esitame funktsiooni $t^k + t^{-k}$ hulkliikmena suurusest $t + t^{-1}$. Näiteks

$$\begin{aligned} t^2 + t^{-2} &= (t + t^{-1})^2 - 2, \text{ siit } P_2(x) = x^2 - 2; \\ t^3 + t^{-3} &= (t + t^{-1})^3 - 3(t + t^{-1}), \quad P_3(x) = x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Asjaolu, et seos (3) määrab k -astme hulkliikme, järeldub matemaatilise induktsiooni abil seosest

$$t^k + t^{-k} = (t + t^{-1})(t^{k-1} + t^{-(k-1)}) - (t^{k-2} + t^{-(k-2)}). \quad (4)$$

Saadud hulkliikmete paarikaupa kommuteeruvus on samuti lihtsalt tõestatav. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} P_k(P_m(t + t^{-1})) &= P_k(t^m + t^{-m}) = (t^m)^k + (t^m)^{-k} = t^{mk} + t^{-mk} = \\ &= t^{km} + t^{-km} = P_m(t^k + t^{-k}) = P_m(P_k(t + t^{-1})). \end{aligned}$$

Tähistades $t + t^{-1} = x$, saame, et $P_k(P_m(x)) = P_m(P_k(x))$. Seega on $P_k(x)$ ja $P_m(x)$ kommuteeruvad. Kui nüüd eeldada, et t on reaalarv, siis $|x| = |t + t^{-1}| \geq 2$ ja seega on $P_k(x)$ ja $P_m(x)$ kommuteeruvus tõestatud vaid nende x väärtuste korral, kus $|x| \geq 2$. Kuid miski ei sega meid vaatlemast kompleksarvulisi t väärtusi, sest seos (4) kehtib nii reaalarvuliste kui ka kompleksarvuliste t väärtuste korral.

45. a) Kahekohaline "eriline" arv peab algama numbriga 1, 4 või 9. Lihtne on veenduda, et sobib vaid 49. Neljakohaliste "eriliste" arvude leidmiseks vaatleme esmalt arve kujul $16\overline{xx}$. Et $40^2 = 1600$, $41^2 = 1681$ ja $42^2 > 1700$, siis saame "erilise" arvu 1681. Kuid "erilist" arvu kujul $25\overline{xx}$ ei leidu, sest $50^2 = 2500$ ja $51^2 = 2601 > 2600$. Ei leidu ka "erilisi" arve kujul $36\overline{xx}$, $49\overline{xx}$, $64\overline{xx}$ ja $81\overline{xx}$, sest $(10k+1)^2 - (10k)^2 > 100$, kui $5 \leq k \leq 9$. Järelikult otsitavad arvud on 49 ja 1681.

b) Kui tähistada otsitava 20-kohalise "erilise" arvu A kümnest esimesest numbrist moodustatud arv sümboliga x^2 ja kümnest viimasest numbrist moodustatud arv sümboliga y^2 , siis $A = 10^{10}x^2 + y^2 = z^2$, kus $10^9 \leq x^2 \leq 10^{10}$ ja $0 < y^2 < 10^{10}$.

Ülesande üks võimalikest lahendustest on järgmine. Kirjutame lähtevõrrandi kujul

$$(10^5x)^2 + y^2 = z^2$$

ja püüame kasutada Pythagorase "kolmikute" üldkuju:

$$\begin{aligned} 10^5x &= 2kmn, \\ y &= (m^2 - n^2)k, \\ z &= (m^2 + n^2)k. \end{aligned}$$

Võttes $k = 1$, järeldub kitsendustest x ja y kohta, et

$$10^{10}/\sqrt{10} < 2mn < 10^{10} \quad \text{ja} \quad 0 < m^2 - n^2 < 10^5.$$

Siit on näha, et m ja n on ligikaudu võrdsed ja nende suurusjärk on 10^5 . Võttes näiteks $m = 10^5$ ja $n = 10^5 - 1$, saame, et mõlemad võrratused on "peaaegu" täidetud. Viga võib parandada näiteks nii: võtame $m = 10^5/2$ ja $n = 10^5/2 - 1$. Lihtne on näha,

et sel juhul $x = 2mn/10^5 = n = 10^5/2$ ja $y = m^2 - n^2 = 10^5 - 1$, seega $A = 24\ 999\ 000\ 019\ 999\ 800\ 001$.

Esitatud lahendusviis on küllaltki kunstlik. Punktis c vaatleme lahendust, mis on tunduvalt loomulikum ja mida võib rakendada ka käesoleva punkti lahendamisel.

c) Antud juhul saab otsitava arvu üles kirjutada järgmiselt:

$$A = (10^{25}x)^2 + y^2 = z^2, \text{ kus } 10^{49} < x^2 < 10^{50} \text{ ja } 0 < y^2 < 10^{50}.$$

Kui võtta $y = 0$, siis $z = 10^{25}x$. Et $y \neq 0$, siis $z = 10^{25}x + t$, kus $t \geq 1$. Näitame, et $t = 1$. Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et $t \geq 2$, siis

$$(10^{25}x)^2 + y^2 = (10^{25}x)^2 + 2 \cdot 10^{25}xt + t^2,$$

millest

$$y^2 = 2 \cdot 10^{25}xt + t^2 > 2 \cdot 10^{25}xt > 2 \cdot 10^{25} \cdot \sqrt{10} \cdot 10^{24} \cdot 2 > 10^{50},$$

mis on aga vastuolus algtingimustega. Järelikult $t = 1$ ja $y^2 = 2 \cdot 10^{25}x + 1$. Seega

$$(y - 1)(y + 1) = 2 \cdot 10^{25}x = 2^{26} \cdot 5^{25} \cdot x.$$

Et $(y + 1) - (y - 1) = 2$, siis üks tegureist, $(y + 1)$ või $(y - 1)$, on kujul $2c$, kus c on paaritu arv, ja teine tegur on kujul $2^{25}c_1$. Vaadeldes nende tegurite jaguvust 5-ga, ilmneb, et ainult üks neist tegureist saab jaguda 5-ga. Seega saame 4 võimalust:

$$1) \begin{cases} y - 1 = 2 \cdot 5^{25}c \\ y + 1 = 2^{25}c_1, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y + 1 = 2 \cdot 5^{25}c \\ y - 1 = 2^{25}c_1, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y - 1 = 5^{25}2^{25}c_1 \\ y + 1 = 2c \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y + 1 = 5^{25}2^{25}c_1 \\ y - 1 = 2c. \end{cases}$$

Kolmas võimalus langeb ära, sest sel juhul $y - 1 = 10^{25}c_1$ ja $y^2 > 10^{50}$, mis on aga võimatu. Neljandal juhul peab $c_1 = 1$, sest vastasel korral $y^2 \geq 10^{50}$, mis on võimatu. Võttes siis $c_1 = 1$, saame lahendi

$$y = 10^{25} - 1 \text{ ja } x = \frac{1}{2} \cdot 10^{25} - 1.$$

Esimesel juhul

$$c = (y - 1)/2 \cdot 5^{25} < 10^{25}/2 \cdot 5^{25} = 2^{24}.$$

Teisel juhul

$$c = (y + 1)/2 \cdot 5^{25} < 2^{24} + \frac{1}{2} \cdot 5^{25}.$$

Et c on naturaalarv, siis $c \leq 2^{24}$. Seega nii esimesel kui teisel juhul $0 < c \leq 2^{24}$. Lahutades nii esimesel kui teisel juhul ühest võrrandist teise, saame vastavalt

$$2 \cdot 5^{25}c - 2^{25}c_1 = -2 \quad \text{ja} \quad 2 \cdot 5^{25}c - 2^{25}c_1 = 2$$

ehk

$$5^{25}c - 2^{24}c_1 = -1 \quad \text{ja} \quad 5^{25}c - 2^{24}c_1 = 1.$$

Näitame, et kumbagi saadud võrrandit võib rahuldada maksimaalselt üks naturaalarvuline c väärtus, kus $0 < c \leq 2^{24}$. Vaatleme lihtsuse mõttes esimest võrrandit. Oletame, et sel võrrandil on kaks lahendit $c = a$ ja $c = b$ (vastavad c_1 väärtused olgu c_{1a} ja c_{1b}), kus $0 < a \leq 2^{24}$ ja $0 < b \leq 2^{24}$. Sel juhul $5^{25}(a - b) - 2^{24}(c_{1a} - c_{1b}) = 0$ ning seega peab $a - b$ jaguma arvuga 2^{24} , mis on aga võimatu. Analoogiliselt vaadeldakse ka teist võrrandit. Järelikult võib nii esimesel kui teisel juhul leiduda mitte rohkem kui üks "eriline" arv. Seega 100-kohalisi "erilisi" arve ei saa olla rohkem kui kolm.

Lihtne on näha, et ülaltoodud hinnang on rakendatav kõikidele 4m-kohalistele "erilistele" arvudele, s.t. et iga m korral võib leiduda maksimaalselt kolm 4m-kohalist "erilist" arvu.

d) Antud juhul saab ülesande tingimuste põhjal võrrandi

$$10^{15}x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{kus} \quad 10^{14} \leq x^2 < 10^{15} \quad \text{ja} \quad 0 < y^2 < 10^{15},$$

ehk

$$(z - y)(z + y) = 10^{15} x^2.$$

Lahendame ülesande proovimise teel. Selleks lahutame suuruse $10^{15}x^2$ tegureiks näiteks järgmiselt:

$$\begin{cases} z - y = 5 \cdot 10^{14}, \\ z + y = 2x^2. \end{cases}$$

Elimineerides muutuja z , saame võrrandi

$$2x^2 - 2y = 5 \cdot 10^{14} \quad \text{ehk} \quad x^2 - y = 25 \cdot 10^{13}.$$

Näitame, et kui $x = [\sqrt{25 \cdot 10^{13}}] + 1$, siis on ülesanne lahendatud. Tõepoolest, $x^2 \approx 2,5 \cdot 10^{14}$, mis ei ole vastuolus algtingimustega. Suuruse y jaoks saame tingimuse

$$y = x^2 - 25 \cdot 10^{13} \leq 2 \left[\sqrt{25 \cdot 10^{13}} \right] < 2 \cdot 5 \cdot 10^6 \sqrt{10} = 10^7 \sqrt{10}$$

ehk

$$y^2 < 10^{15},$$

mis pole samuti vastuolus algtingimustega. Järelikult eksisteerib 30-kohaline "eriline" arv.

$$\text{Et } \sqrt{25 \cdot 10^{13}} = 15811388,3\dots, \text{ siis } x = \left[\sqrt{25 \cdot 10^{13}} \right] + 1 = 15811389 \text{ ja } y = x^2 - 25 \cdot 10^{13} = 22109321$$

ning

$$A = z^2 = \underbrace{250\ 000\ 022\ 109\ 321}_{x^2} \underbrace{492\ 822\ 075\ 081\ 041}_{y^2}$$

46. Punktide a, b ja c lahendus on analoogiline ül. 29 lahendusega.

d) Üldsust kitsendamata võib eeldada, et marslaste tähestik koosneb sümbolitest 0, 1, 2, ..., 9. Jaotame tähestiku A kolmeks hulgaks nii, et $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, kus $A_1 = \{0; 1; 2\}$, $A_2 = \{3; 4; 5\}$ ja $A_3 = \{6; 7; 8; 9\}$. Vaatleme eesnimedena kõiki neid kahetähelisi sõnu $\overline{xy}$, kus x ja y kuuluvad ühte ja samasse hulka A_i ($i = 1, 2, 3$), s.t. 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55, 66, 67, 68, 69, 76, 77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99. Selliseid eesnimesid on $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 34$. Näitame, et võib läbi ajada nende 34 eesnimega. Tõepoolest, kui on antud perekonnanimi $\overline{xyz}$, siis tähtede x, y, z ja u hulgas leidub vähemalt kaks tähte, mis kuuluvad ühte ja samasse hulka A_i ($i = 1, 2, 3$). Kriipsutades perekonnanimest $\overline{xyz}$ maha kaks ülejäänud tähte, saame ühe 34-st eesnimest. Seega möödunud sajandil said marslased läbi ajada 34 eesnimega.

e) Vaatleme algul juhtu, kus $k = 4$. Näitame, et see tean-
dub juhule, kus $k = 3$. Oletame, et perekonnanimede arv kujul k on a_k . Olgu $a = \min(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et eesnimesid kujul $0\overline{xyz}$ on a tükki. Vajaduse korral sümboleid ümber paigutades võib saavutada olukorra, et esinevad eesnimed 00, 01, 02, ..., 0(a-1). Vaatleme nüüd perekonnanimesid kujul $0\overline{xyz}$, kus $x \geq a, y \geq a$ ja $z \geq a$. On selge, et kui 0 jätta maha tõmbamata, siis selle perekonnanime jaoks ei leidu sobivat eesnime. Järelikult, maha tuleb tõmmata igal juhul süm-

bol O. Seega ülesanne taandub sellele, et antud eesnimedele on vaja lisada veel sellised eesnimed, mis võimaldaksid kõikvõimalikel kombinatsioonidel $\overline{xyz}$ valida enesele sobiv eesnimi. Järelikult on ülesanne taandunud juhule, kus $k = 3$, kuid lähtehulga $\{0;1;2;\dots;9\}$ asemel on hulk $\{a;a+1;\dots;9\}$. Analoogiliselt punktiga c (vt. ül.30) saab näidata, et selliste kolmekohaliste kombinatsioonide jaoks vajaminevate eesnimede arv ei ole väiksem kui $(10 - a - k)^2 + k^2$, kus k on mingi arv 1 ja $10 - a$ vahel. Edasi, eesnimesid kujul $0\overline{1}, 1\overline{2}, \dots, (a-1)\overline{a}$ on vähemalt a^2 tükki. Seega on eesnimede arv vähemalt $a^2 + k^2 + (10 - (a+k))^2$. Tähistades $10 - (a + k) = b$, saame, et vaja on minimeerida avaldis $B = a^2 + k^2 + b^2$, kus $a + k + b = 10$. Lihtne on näha, et suurus B saavutab minimaalse väärtuse $B_{\min}$ siis, kui kaks arvudest (näiteks a ja k) on võrdsed kolmega ja kolmas (antud juhul b) on võrdne neljaga. Siis $B_{\min} = 34$. Et selline eesnimede nimekiri ka tegelikult eksisteerib, seda nägime eelmises punktis.

Juhtu, kus $k = 5$, saab analoogia põhjal taandada juhule $k = 4$, kusjuures minimeerida tuleb antud juhul avaldis $B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, kus $a + b + c + d = 10$. Lihtne on näha, et suuruse B minimaalne väärtus saavutatakse juhul, kui näiteks $a = b = 2$ ja $c = d = 3$. Minimaalse eesnimede nimekirja pikkus tuleb $2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 26$. Tõsiasi, et eksisteerib eesnimede nimekiri pikkusega 26, järeldub punkti d vastavast konstruktsioonist. Hulk A tuleb jaotada neljaks osahulgaks nii, et

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \text{ kus } A_1 = \{0;1\}, A_2 = \{2;3\}, A_3 = \{4;5;6\}, \\ A_4 = \{7;8;9\}.$$

$$\text{Kui } k = 6, \text{ siis } B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 20,$$

$$k = 7, B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 18,$$

$$k = 8, B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 16,$$

$$k = 9, B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 14,$$

$$k = 10, B_{\min} = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 12,$$

$$k = 11, B_{\min} = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 10.$$

Kui $k \geq 6$, siis eesnimede nimekiri pikkusega $B_{\min}$ konstrueeritakse analoogiliselt juhuga $k = 5$.

47. Olgu k naturaalarv. Leiame kõik indeksi m võimalikud väärtused, mille korral $a_m = k$. Ülesande tingimuste kohaselt peab kõikide selliste m väärtuste korral kehtima ahelvõrratus

$$k - 0,5 < \sqrt{m} < k + 0,5$$

ehk

$$k^2 - k + 0,25 < m < k^2 + k + 0,25.$$

Seega on indeksi m võimalikud väärtused $k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \dots, k^2 + k$. Selliste indeksite arv on $2k$. Järelikult

$$\frac{1}{a_{k^2-k+1}} + \frac{1}{a_{k^2-k+2}} + \dots + \frac{1}{a_{k^2+k}} = 2k \cdot \frac{1}{k} = 2$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}} &= \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}\right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{a_{1893}} + \frac{1}{a_{1894}} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}\right) = 2 + 2 + \dots + 2 = 88. \end{aligned}$$

48. Leiame punkti C' nii, et kujund $DMCC'$ on rööpkülik (vt.

joon. 25). Siis kolm-

nurgad CBM ja $C'AD$

on võrdsed. Järe-

likult $\widehat{CBM} = \widehat{C'AD}$.

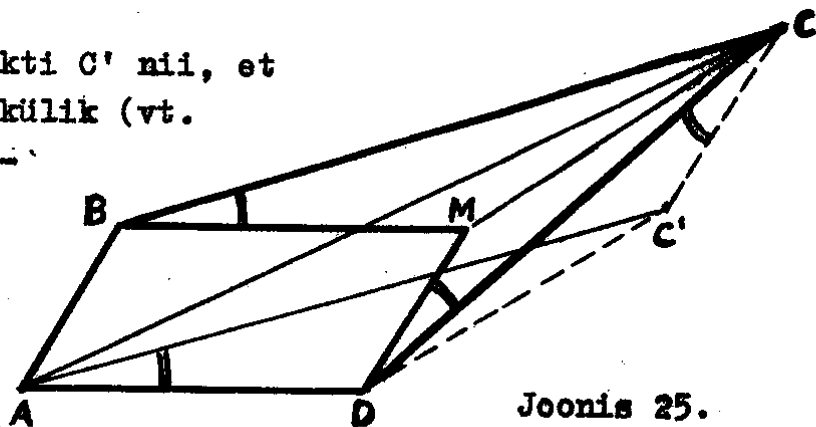
Et $\widehat{CDM} = \widehat{CBM}$, siis

$\widehat{DCC'} = \widehat{CDM} = \widehat{CBM} =$

$= \widehat{C'AD}$. Järelikult

punktid A, D, C' ja C asuvad ühel ringjoonel ($\widehat{DCC'} = \widehat{C'AD}$) ning seega

$$\widehat{ACD} = \widehat{AC'D} = \widehat{BCM}.$$



Joonis 25.

49. Oletame vastuväiteliselt, et $1978^m - 1$ jagub arvuga $1000^m - 1$. Siis jagub arvuga $1000^m - 1$ ka arv

$$(1978^m - 1) - (1000^m - 1) = 1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m).$$

Et 2^m ja $1000^m - 1$ on ühisteguriteta, siis peab arv $989^m - 500^m$ jaguma arvuga $1000^m - 1$. Kuid see on võimatu, sest et

$$0 < 989^m - 500^m < 989^m < 1000^m - 1.$$

50. a) Vaatleme punktide A ja B poolt määratud sirget. Toome sisse koordinaadid. Olgu punkti A korral $x = 0$ ja punkti B korral $x = 1$. Et sellisel juhul $K_0 = \{0; 1\}$, siis $K_1 = \{-1; 0; 1; 2\}$. Matemaatilise induktsiooni meetodiga on lihtne näidata, et

$$K_n = \left\{ -\frac{3^n-1}{2}; -\frac{3^n-1}{2} + 1; \dots; \frac{3^n+1}{2} \right\}.$$

Tõepoolest, kui $n = 1$, siis väide kehtib. Oletame, et väide kehtib $n = m$ korral, s.t.

$$K_m = \left\{ \frac{-3^m+1}{2}; \frac{-3^m+3}{2}; \frac{-3^m+5}{2}; \dots; \frac{3^m+1}{2} \right\}.$$

Hulga K_{m+1} äärmise vasakpoolse punkti saame, kui peegeldame hulga K_m äärmist parempoolset punkti $x = \frac{3^m+1}{2}$ punkti $x = \frac{-3^m+1}{2}$ suhtes. Järelikult, selle koordinaat on

$$-\frac{3^m-1}{2} - \left(\frac{3^m+1}{2} + \frac{3^m-1}{2} \right) = -\frac{3^{m+1}-1}{2}$$

Hulga K_{m+1} ülejäänud punktid, mis asuvad punktist $x = -\frac{3^m-1}{2}$ vasakul, saame, kui peegeldame hulga K_m ülejäänud punktid tema vasakpoolse otspunkti suhtes. Et saada hulga K_{m+1} neid punkte, mis asuvad hulga K_m äärmisest parempoolsest punktist paremal, tuleb peegeldada hulga K_m tema äärmise parempoolse punkti suhtes. Järelikult on hulga K_{m+1} parempoolseima punkti koordinaat

$$\frac{3^m+1}{2} + \left(\frac{3^m+1}{2} + \frac{3^m-1}{2} \right) = \frac{3^{m+1}+1}{2}$$

ning seega

$$K_{m+1} = \left\{ -\frac{3^{m+1}-1}{2}; \dots; \frac{3^{m+1}+1}{2} \right\}.$$

Võttes $n = 6$ ja $n = 7$, saame, et

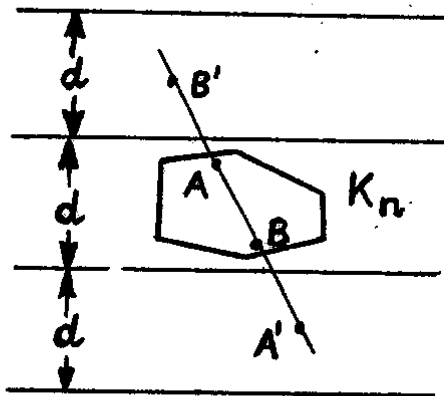
$$K_6 = \{-364; -363; \dots; 364; 365\} \text{ ja}$$

$$K_7 = \{-1093; -1092; \dots; 1093; 1094\}.$$

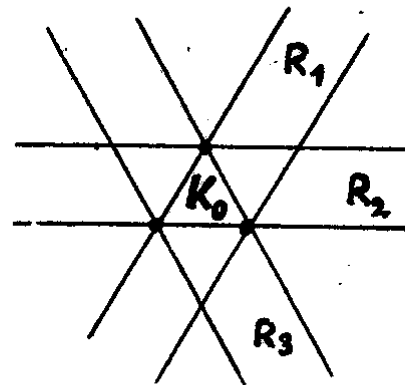
Seega $n = 7$ rahuldab ülesande tingimusi.

b) Nimetame ribaks tasandi kõikide punktide hulka, milised jäävad kahe paralleelse sirge vahele (sirged kaasa arvatud). Loeme riba laiuks tema kahe ääresirge vahelise kauguse. On lihtne näidata, et kui hulk K_n sisaldub ribas laiuks d , siis hulk K_{n+1} sisaldub ribas laiuks $3d$. Tõepoolest, olgu A

ja B hulga K_n punktid. Siis nende punktide peegeldused teineteise suhtes asuvad ribas R_1 , mille laius on $3d$ ja mis on saadud riba R peegeldamisel tema ääresirgete suhtes (vt. joon. 26).



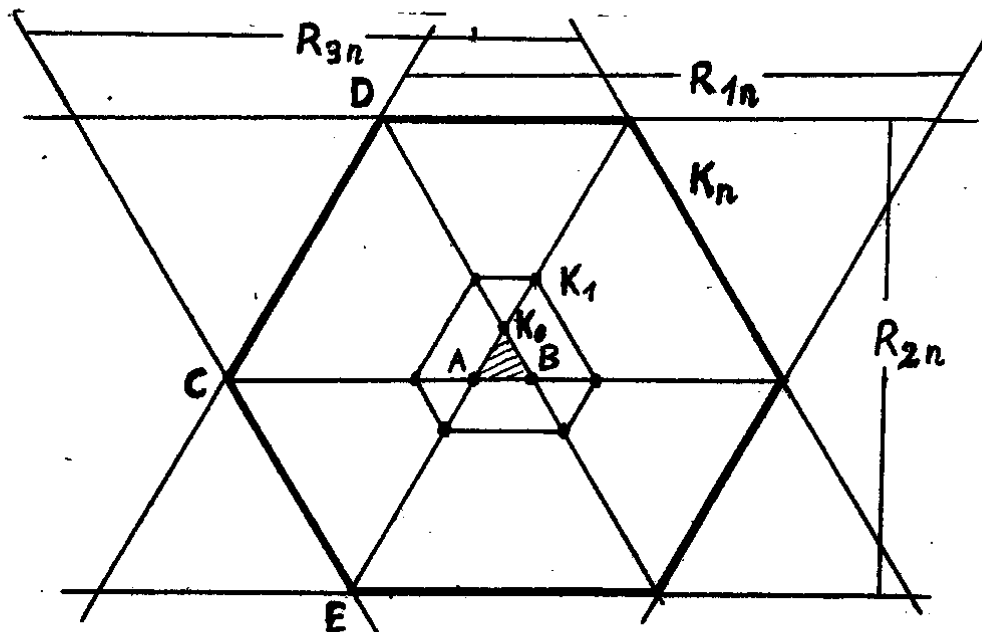
Joonis 26.



Joonis 27.

Antud ülesande lahendamiseks valime hulga K_0 jaoks 3 riba (R_1, R_2, R_3) nii, nagu on näidatud joonisel 27.

Ülaltoodu põhjal sisaldub hulk K_n ribades R_{1n}, R_{2n} ja R_{3n} , milledest igaüks on saadud vastava riba 3^n -kordsel laiendamisel (vt. joon. 28). Osutub, et saadud kuusnurkne kujund (ribade R_{1n}, R_{2n} ja R_{3n} ühisosa) ongi otsitav minimaalne kumer



Joonis 28.

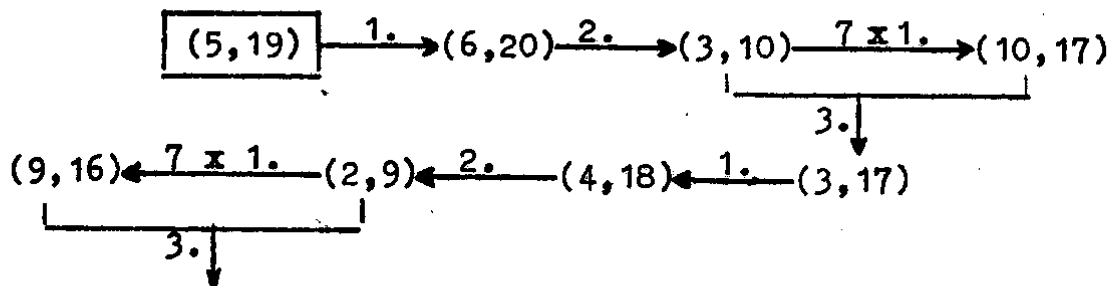
hulkmark, mis sisaldab hulga K_n . Tõepoolest, kui fikseerida hulgas K_0 kaks punkti ja peegeldada neid teineteise suhtes n korda (punktis a näidatud viisil), siis saadud hulga äärmised punktid satuvad antud kuusnurga kahte tippu. (Näiteks joonisel 28 punktide A ja B n -kordsel peegeldamisel saadud hulga äärepunktid asuvad hulkade R_{3n} ja R_{1n} ääresirgetel, järelikult ka saadud kuusnurga kahes tipus.) Kuusnurga pindala S arvutamiseks kasutame eelmise punkti tulemusi. Tähistagu S_0 lähtekolmnurga pindala. Joon. 28 põhjal

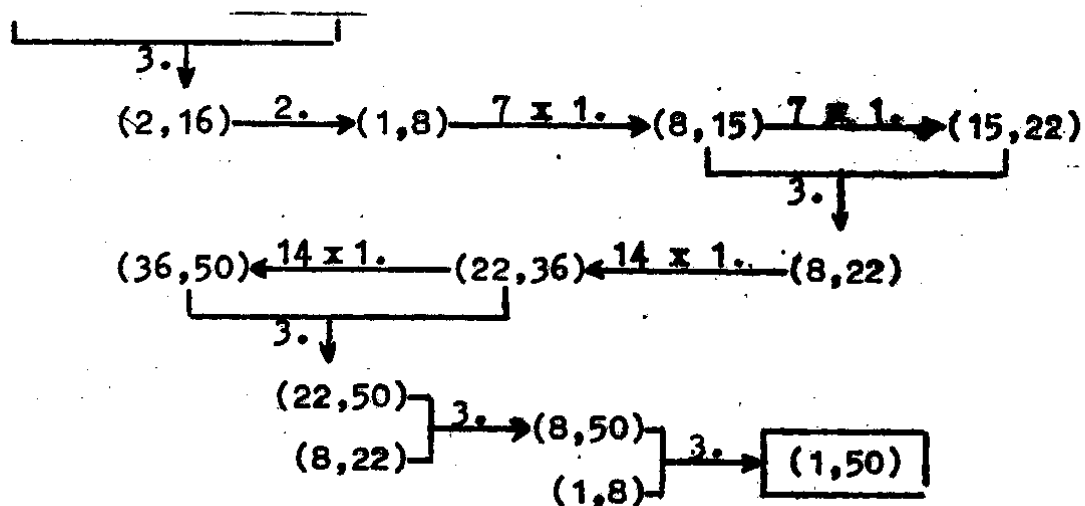
$$S = 3 \cdot S_{CBD} + 3 \cdot S_{CAE} - 2 \cdot S_0 =$$

$$= 3 \left(\frac{3^n + 1}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{3^n - 1}{2} \right)^2 - 2 = \frac{1}{2} (3^{2n+1} - 1).$$

51. Kirjutame vahe $b - a$ kujul 2^m , kus m on paaritu arv. Nimetame kaarti (a, b) "m-universaalseks", kui $b - a$ jagub arvuga m . Näitame, et kõik automaadid säilitavad kaartide "m-universaalsuse" omaduse, s.t. et kui mingisse automaati sisestada "m-universaalne" kaart, siis automaadi poolt väljastatav kaart on samuti "m-universaalne". Tõepoolest, kui "m-universaalsele" kaardile (c, d) rakendada esimest automaati, siis kaart $(c+1, d+1)$ on "m-universaalne", sest $(d+1) - (c+1) = d - c$ ning $(d - c) : m$. Kui kaardile (c, d) rakendada teist automaati, siis peab $(c, d) = (2u, 2v)$ ja $2(v - u) : m$, kust saame, et peab ka $(v - u) : m$, sest m on paaritu. Seega on kaart (u, v) "m-universaalne". Kui kaardid (c, d) ja (d, e) on "m-universaalsed", siis $(d - c) : m$, $(e - d) : m$, $[(e - d) + (d - c)] : m$. Järelikult $(e - c) : m$ ning seega on kaart (c, e) "m-universaalne".

a) Kaarti $(1, 50)$ on võimalik saada näiteks järgmiselt:





b) Et kaart $(5,19)$ on "7-universaalne", siis pole sellest võimalik saada kaarti $(1,100)$, sest $100 - 1 = 99$ ei jagu 7-ga.

c) Olgu $b - a = 2^m$, kus m on paaritu. Näitame, et kaardist (a,b) on võimalik saada iga kaarti $(1, km+1)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Rakendades esimest automaati n korda, saame kaardi $(a+n, b+n)$. Valides arvu n nii, et $(b+n):2^m$, saame kaardile $(a+n, b+n)$ rakendada teist automaati s korda. Tulemuseks saame kaardi (a_1, a_1+m) . Näitame, et kui $a_1 > 1$, siis on sellest kaardist võimalik saada uus kaart (a_2, a_2+m) , kus $a_2 < a_1$. Tõepoolest, rakendades kaardile (a_1, a_1+m) esimest automaati m korda, saame kaardi $(a_1 + m, a_1 + 2m)$. Kolmanda automaadi abil saame kaartidest (a_1, a_1+m) ja $(a_1 + m, a_1 + 2m)$ kaardi $(a_1, a_1 + 2m)$. Vaatleme nüüd a_1 suhtes kahte juhtu. Kui a_1 on paarisarv, siis teise automaadi abil saame kaardi (a_2, a_2+m) , kus $a_2 = \frac{1}{2} a_1 < a_1$. Kui a_1 on paaritu, siis rakendame kaardile $(a_1, a_1 + 2m)$ algul esimest, siis teist automaati. Selle tulemusena saame kaardi (a_2, a_2+m) , kus $a_2 = \frac{1}{2} (a_1 + 1)$. Siin samuti $a_2 < a_1$. Järelikult oleme mõlemal juhul saanud kaardi (a_2, a_2+m) , kus $a_2 < a_1$. Kui $a_2 > 1$, siis korrates ülaltoodud mõttekäiku, saame kaardi (a_3, a_3+m) , kus $a_3 < a_2$ jne. Analoogiliselt jätkates jõuame lõpuks kaardini $(1, m+1)$. Rakendades sellele kaardile esimest automaati $m, 2m, 3m, \dots$ korda, saame kaardid

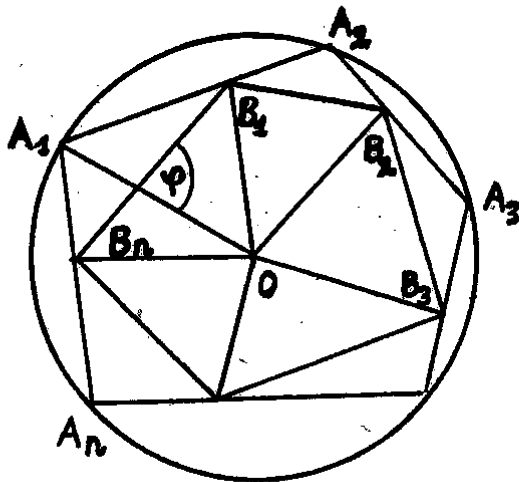
$(m+1, 2m+1), (2m+1, 3m+1), \dots, (km+1, km+m+1), \dots$

Nendest kaartidest on kolmanda automaadi abil võimalik saada kaardid $(1, 2m+1)$, $(1, 3m+1)$, $(1, 4m+1)$, Järelikult on kaardist (a, b) võimalik saada kõik kaardid kujul $(1, km+1)$, kus $k = 1, 2, 3, \dots$.

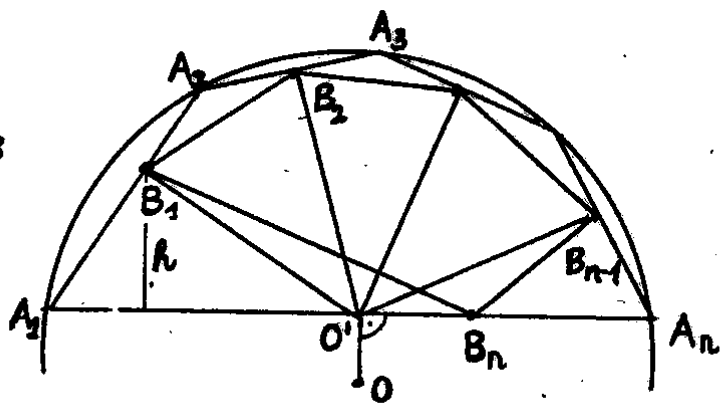
52. Olgu antud ringjoone keskpunkt O , märgitud punktide poolt moodustatud hulknurga ümbermõõt p , lähtehulknurga tipud $A_1, A_2, \dots, A_n$ ning märgitud punktid $B_1, B_2, \dots, B_n$. Vaatleme algul juhtu, kus punkt O asetseb lähtehulknurga sisepiirkonnas (joon.29). Nelinurga $OB_n A_1 B_1$ pindala $S_1 = \frac{1}{2} A_1 O \cdot B_n B_1 \times \sin \varphi \leq \frac{1}{2} \cdot A_1 O \cdot B_n B_1 = \frac{1}{2} R \cdot B_n B_1$, kus φ on diagonaalide $B_n B_1$ ja $A_1 O$ vaheline nurk. Analoogiline arutlus näitab, et selline võrratus kehtib ka kõikide ülejäänud nelinurkade $OB_{i-1} A_i B_i$ korral, s.t. et $S_i \leq \frac{1}{2} R \cdot B_i B_{i-1}$, kus $i = 2, 3, \dots, n$. Liites saadud võrratused, saame et

$$S \leq \frac{1}{2} R (B_n B_1 + B_1 B_2 + B_2 B_3 + \dots + B_{n-1} B_n) = \frac{1}{2} R p.$$

Lihtne on näha, et ülaltoodud tõestus on kehtiv ka juhul, kui punkt O asub lähtehulknurga küljel.



Joonis 29.



Joonis 30.

Juhul kui punkt O asub väljaspool lähtehulknurka, võib toimida järgmiselt. Tähistagu O' lähtehulknurga maksimaalse külje $A_1 A_n$ keskpunkti (joon.30). Lõigud $O'B_1, O'B_2, \dots, O'B_{n-1}$ jaotavad lähtehulknurga nelinurkadeks $O'B_1 A_2 B_2, O'B_2 A_3 B_3, \dots, O'B_{n-2} A_{n-1} B_{n-1}$ (pindaladega vastavalt $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$) ja

kolmnurkadeks $O'A_1B_1$ ning $O'B_{n-1}A_n$ (pindaladega vastavalt S_1 ja S_n). Kolmnurkades $OO'A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) on maksimaalne külg $OA_i = R$, s.t. et $O'A_i < R$, kui $i = 1, 2, \dots, n$. Suuruste $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ korral kehtib võrratus

$$S_i \leq \frac{1}{2} O'A_i \cdot B_iB_{i-1}, \text{ kus } i = 2, 3, \dots, n-1.$$

See võrratus kehtib ka $i = n$ korral, sest et kolmnurka $O'B_{n-1}A_n$ võib vaadelda nelinurgana $O'B_{n-1}A_nB_n$.

Kui tähistada kolmnurga $O'A_1B_1$ tipust B_1 küljele $O'A_1$ langetatud kõrgus tähega h , siis

$$S_1 = \frac{1}{2} A_1O'h \leq \frac{1}{2} A_1O' \cdot B_1B_n.$$

Järelikult

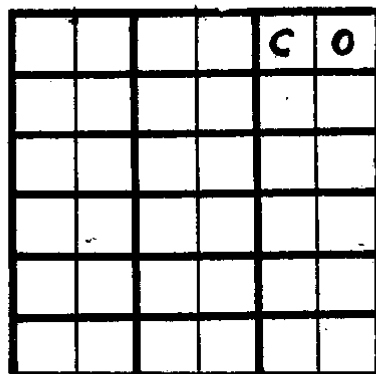
$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq \frac{1}{2} (A_1O' \cdot B_1B_n + A_2O' \cdot B_2B_1 + \dots + A_nO' \cdot B_nB_{n-1}) \leq \frac{1}{2} R(B_1B_n + B_2B_1 + \dots + B_nB_{n-1}) = \frac{1}{2} R p.$$

53. Olgu mängijad A ja B. Alustagu mängu A.

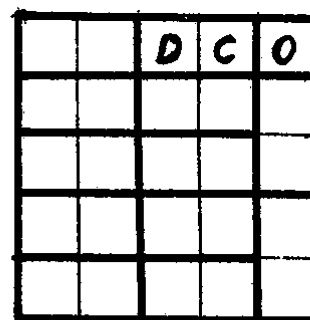
a) Kui n on paarisarv, võib malelauda jaotada nn. "doominokivideks" joonisel 31 näidatud viisil.

Mängija A nihutab esimese käiguga nupu väljalt O väljale C (vt. joon. 31). Edaspidi kasutab ta järgmist taktikat. Mängija B on sunnitud (ka pärast esimest käiku) esimesena sisenema mingisse uude "doominokivisse" ja pärast tema käiku nihutab A nupu sellesama "doominokivi" vabale väljale. Kui alustaja kasutab seda taktikat kõikide järgnevate käikude jooksul, siis on ilmne, et ta võidab.

Kui n on paaritu, siis võib malelauda jaotada "doomonokivideks" joonisel 32 näidatud viisil. On selge, et kui müüd B rakendab ülaltoodud taktikat, siis ta võidab, sõltumata A mängust. (Sest siin on mängija A alati sunnitud esimesena sisenema uude "doominokivisse".)



Joonis 31.

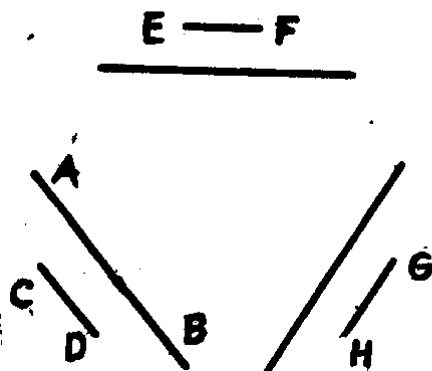


Joonis 32.

b) Kui n on paarisarv, siis A võidab juhul, kui ta avakäiguks valib $C \rightarrow O$ (vt. joon. 31) ja pärast kasutab punktis a toodud taktikat. Kui n on paaritu, siis A võidab käiguga $C \rightarrow D$ (vt. joon. 32). Tõepoolest, kui oletada, et mäng lõpeb väljal O, siis tähendab see seda, et viimasena käib A, sest et väljad D ja O on malelaval ühte värvi (kumbgi mängija käib alati ühte ja sama värvi väljadele). Kui mäng lõpeb mõnel teisel väljal, siis on ilmne, et väli O jääb mängust välja ja seetõttu võib A pärast avakäiku $C \rightarrow D$ kasutada punktis a kirjeldatud taktikat. Järelikult, kui n on paaritu, võidab samuti mängija A, s.t. mängu alustaja.

54. Ei ole alati võimalik. Kui näiteks 6 lõiku paigutada joonisel 33 näidatud viisil, siis nende lõikude otspunkte ei saa ühendada ülesandes nõutud viisil.

Lõiku CD saab ühendada ainult lõiguga AB, sealjuures üks punktidest C või D jääb ühendamata (vastasel korral tekib teistest punktidest isoleeritud nelimurk CABD). Järelikult peab kas C või D olema otsitava murdjoone alguspunkt. Analoogiline väide kehtib punktide E, F ning G, H kohta. Kuid see on võimatu, sest murdjoonel ei saa olla üle kahe alguspunkti.



Joonis 33.

55. Vt. ül.47 lahendus.

56. Vt. ül.48 lahendus.

57. Tähistame mängijad tähtedega A ja B. Alustagu mängu A.

a) Loogiliselt on võimalikud kaks vastandlikku juhtu:

1) mängija B saab võita A igasuguse mängu korral, s.t. mängijal B on võitev strateegia, 2) mängijal A on võitev strateegia. Saab näidata, et esimene juht viib vastuolule. Tõepoolest, oletame et B saab võita A igasuguse mängu korral. Järelikult, kui A võtab suuremast (esimesest) kuhjast n tikku, siis peab

mängijal B olema võitev käik. Kuid pärast A käiku jääb suuremasse kuhja $m - n > n$ tikku. Järelikult on mängija B teisel käigul sunnitud võtma esimesest kuhjast kn tikku. Seega jääb esimesse kuhja pärast teist käiku $m - (k+1)n$ tikku, kusjuures B saab võita A igasuguse mängu korral. Kui A oleks esimesel käigul võtnud kohe $(k+1)n$ tikku (esimesest kuhjast), siis oleks sama positsioon tekkinud pärast esimest käiku ja järelikult pidanuks võitma hoopis mängija A. Saadud vastuolu näitab, et kui $m > 2n$, siis on mängijal A võitev strateegia.

b) Punktis a esitatud tõestus on õige ka juhul kui $\alpha > 2$, s.t. ka sel juhul on mängijal A võitev strateegia. Jääb vaadelda veel juhtu, kus $1 < \alpha < 2$. Näitame, et kui $2 > \alpha \geq \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, siis on mängijal A võitev strateegia. Tähistame sümboolitega m_k ja n_k tikkude arvud kuhjades pärast k -ndat käiku, kusjuures olgu $m_k \geq n_k$. Et $2 > \frac{m}{n} > \alpha \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, siis $m_1 = n$, $n_1 = m - n$ ning

$$1 < \frac{m_1}{n_1} = \frac{n}{m-n} < \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Edasi

$$m_2 = n_1, n_2 = m_1 - n_1 \quad \text{ja} \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{n_1}{m_1 - n_1} > \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Kui $m_2/n_2 \geq 2$, siis punkti a põhjal saab võita A. Järelikult võib oletada, et

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \frac{m_2}{n_2} < 2.$$

Analoogiliselt ülaltõestatudga saame, et

$$1 < \frac{m_3}{n_3} < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{m_4}{n_4} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Siin võib jälle oletada, et $m_4/n_4 < 2$. Üldsust kitsendama võib eeldada, et arvud m ja n on ühisteguriteta (sest ühise teguri $d > 1$ olemasolu ei muuda mängustrateegiat).

Konstruksiooni põhjal on jada n_k monotoonselt kahanev, s.t. $n > n_1 > n_2 > \dots > n_s$, kui vaid $1 < \frac{m_k}{n_k} < 2$, $k = 1, 2, \dots$, s. Järelikult peab teatud paariskäigu järel saabuma olukord,

kus $m_k/n_k \geq 2$ ja $n_k > 1$ või $m_k \geq 2$ ja $n_k = 1$. Mõlemal juhul võidab A. Järelikult, kui $\alpha \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, siis mängijal A on võitev strateegia. Näitame veel, et kui $\alpha < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, siis võib valida sellised kuhjad tikkude arvuga m_0 ja n_0 , et $m_0 > \alpha \cdot n_0$ ja mängijal B on võitev strateegia. Tõepoolest, valime taandumatu murru m_0/n_0 selliselt, et $\alpha < \frac{m_0}{n_0} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Kui müüd valida kuhjades vastavalt m_0 ja n_0 tikku, siis ülaltoodud mõttekäigu põhjal kaotab alustaja.

Kerkib küsimus, kust on saadud arv $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Osutub, et selle arvu võib leida, lähtudes järgmistest kaalutlustest. Oletame, et arv α jaotab vahemiku $]1, 2[$ kaheks osaks nii, et kui $\frac{m}{n} \in]\alpha, 2[$, siis mängijal A on võitev strateegia; kui aga $\frac{m}{n} \in]1, \alpha[$, siis on mängijal B võitev strateegia.

Seega, kui $\frac{m}{n} \in]\alpha, 2[$, siis $\frac{n}{m-n} \in]1, \alpha[$
ja kui $\frac{n_1}{m_1-n_1} \in]1, \alpha[$, siis $\frac{n_1}{m_1-n_1} > \alpha$.

Järelikult võrratustest $m > n\alpha$, $n < (m-n)\alpha$, $m_1 < n_1\alpha$ ja $n_1 > (m_1-n_1)\alpha$ saame, et

$$1 + \alpha < \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \text{ja} \quad 1 + \alpha > \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2.$$

Et $\frac{m}{n} > \alpha$ ja $\frac{m_1}{n_1} < \alpha$, siis võib arvud m, n, m_1 ja n_1 valida nii, et $\frac{m}{n} - \alpha$ ja $\alpha - \frac{m_1}{n_1}$ on küllalt väikesed, järelikult $1 + \alpha \leq \alpha^2$ ja $1 + \alpha \geq \alpha^2$. Seega $1 + \alpha = \alpha^2$, millest $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ülesande lahenduse tulemuse võib resümeerida järgmiselt: kui $1 < \frac{m}{n} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, siis on mängijal B võitev strateegia; kui aga $\frac{m}{n} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, siis on võitev strateegia mängijal A.

58. Olgu $x_n = 4\{\sqrt{2n}\}$, kus $\{x\} = x - [x]$ tähistab arvu x murdosa. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $m > k$. Siis

$$\begin{aligned}
|x_m - x_k| &= |4 \{\sqrt{2m}\} - 4 \{\sqrt{2k}\}| = 4 |\sqrt{2m} - \sqrt{2k} - [\sqrt{2m}] + [\sqrt{2k}]| = \\
&= 4 |\sqrt{2(m-k)} - [\sqrt{2m}] + [\sqrt{2k}]| = 4 \frac{|2(m-k)^2 - ([\sqrt{2m}] - [\sqrt{2k}])^2|}{\sqrt{2(m-k)} + [\sqrt{2m}] - [\sqrt{2k}]} > \\
&> \frac{4}{\sqrt{2(m-k)} + [\sqrt{2m}] - [\sqrt{2k}]} > \frac{4}{\sqrt{2(m-k)} + \sqrt{2m+1} - \sqrt{2k}} = \frac{4}{2\sqrt{2(m-k)}+1} \\
&> \frac{4}{2\sqrt{2(m-k)}+(m-k)} = \frac{4}{(2\sqrt{2}+1)(m-k)} > \frac{1}{m-k} = \frac{1}{|m-k|}.
\end{aligned}$$

Vaatleme selle näite üldistust. Ahelmurdude teoorias on teada, et iga ruutirratsionaalarvu $\alpha = a + \sqrt{b}$ (a ja b ratsionaalarvud) jaoks võib leida sellise positiivse konstandi c nii, et kõikide täisarvulistest p ja q ($q \neq 0$) kerral kehtib võrratus

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{c q^2}.$$

Valime vastavalt arvule q arvu $p(q)$ nii, et murd $p(q)/q$ oleks arvule α küllalt lähedal, s.t. et $\left| \alpha - \frac{p(q)}{q} \right| < \frac{1}{q}$. Kui nüüd $x_n = c(n\alpha - p(n))$, siis

$$|x_n| = cn \left| \alpha - \frac{p(n)}{n} \right| < \frac{cn}{n} = c.$$

Järelikult on jada x_n tõkestatud. Kui $n \neq k$, siis

$$\begin{aligned}
|x_n - x_k| &= c[n\alpha - k\alpha - p(n) + p(k)] = \\
&= c|n - k| \cdot \left| \alpha - \frac{p(n) - p(k)}{n - k} \right| \geq c|n - k| \frac{1}{c(n-k)^2} = \frac{1}{|n - k|}.
\end{aligned}$$

Seega rahuldab jada x_n ülesande tingimusi.

59. Vt. ül.51 lahendus.

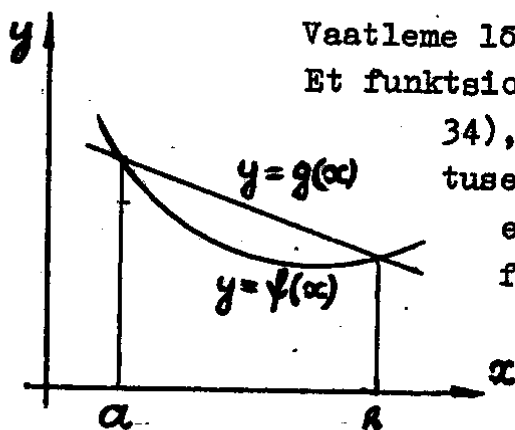
60. Vt. ül.52 lahendus.

61. Olgu $c > 0$ (c väärtuse täpsustame hiljem). Siis

$$S = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{c} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{c}{x_i} \right) \leq$$

¹ Vt. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Гостехиздат, 1949.

$$\leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{c} + \sum_{i=1}^n \frac{c}{x_i} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i} \right) \right]^2.$$



Joonis 34.

Vaatleme lõigul $[a, b]$ funktsiooni $y = f(x) = \frac{x}{c} + \frac{c}{x}$. Et funktsiooni $f(x)$ graafik on nõgus (vt. joon.

34), siis $f(x)$ saavutab maksimaalse väärtuse punktis $x = a$ või $x = b$. Tõepoolest, et graafik on nõgus, siis punkte $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ ühendav sirge $y = g(x)$ asub vahemikus $]a, b[$ funktsiooni $f(x)$ graafikust ülalpool. Järelikult, kui $x \in [a, b]$, siis

$$f(x) = \frac{x}{c} + \frac{c}{x} \leq g(x) \leq \max(f(a), f(b)).$$

Kui valida c nii, et $f(a) = f(b)$, siis $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$. Seega $c = \sqrt{ab}$. Järelikult lõigul $[a, b]$

$$f(x) \leq \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a} = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

ning

$$S \leq \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i} \right) \right]^2 \leq \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right]^2 = \frac{(a+b)^2 n^2}{4 ab}.$$

62. Fikseerime p punkti $(x, y(x))$ ($x = 0, 1, 2, \dots, p-1$) selliselt, et $x = k$ ja $y(x) \equiv k^2 \pmod{p}$ ¹. Näitame, et need punktid rahuldavad ülesandes püstitatud nõudeid.

Oletame vastuväiteliselt, et hulgas M leiduvad erinevad punktid (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) , mis asuvad ühel sirgel. Sel juhul kehtib võrdus

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},$$

¹ Üeldakse, et arvud a ja b on kongruentsed mooduli m järgi ja kirjutatakse $a \equiv b \pmod{m}$, kui $(a - b) : m$. Lähemalt vt. L.Kivistik, J.Gabovits. Arvuteooria, TRÜ rotaprint, 1974.

millest

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) = 0.$$

Seega

$$[(x_2^2 - x_1^2)(x_3 - x_2) - (x_3^2 - x_2^2)(x_2 - x_1)] : p$$

ehk

$(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) : p$. Kuid see on võimatu, sest $0 < |x_i - x_j| < p$, kui $i \neq j$. Järelikult ei asu ükski punktikolmik ühel sirgel.

Oletame, et leidub 4 punkti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ja (x_4, y_4) , mis asuvad mingi rööpküliku tippudes. Et rööpküliku vastasküljed moodustavad võrdsed vektorid, siis

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4 \text{ ja } y_2 - y_1 = y_3 - y_4.$$

Järelikult

$$(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 + x_4^2) : p$$

ehk

$$[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_3 - x_4)(x_3 + x_4)] : p.$$

Asendades nüüd $x_2 = x_1 + x_3 - x_4$, saame et,

$$2(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) : p.$$

Kuid see on võimatu. Saadud vastuolu näitab, et ükski punktinelik ei saa olla rööpküliku tippudeks.

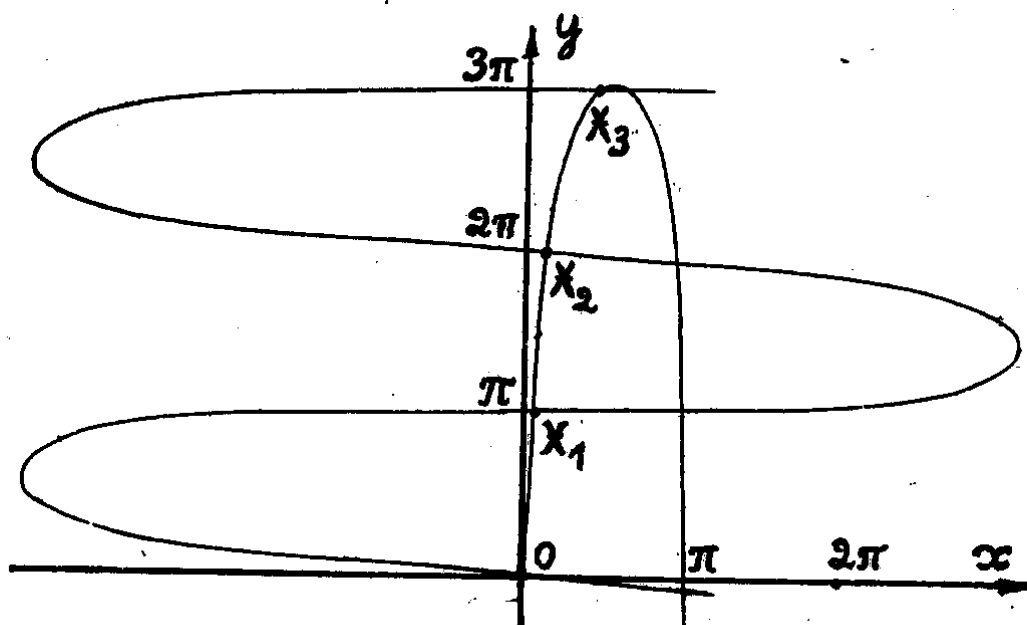
63. Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et jada iga element on ühistegurita arvuga m , sest hiljem võib arvu m osas võtta $f(m)$, $f(f(m))$, Tõepoolest,

$$\begin{aligned} f(m) &= m^3 - m + 1 \equiv 1 \pmod{m},^1 \\ f(f(m)) &\equiv 1^3 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{m}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Järelikult arvud $f(m)$, $f(f(m))$, ..., annavad m -ga jagades jäägiks ühe. Sellega on tõestatud, et jada kõik liikmed on tõepoolest ühisteguriteta.

¹ Üeldakse, et arvud a ja b on kongruentsed mooduli m järgi ja kirjutatakse $a \equiv b \pmod{m}$, kui $(a - b) : m$. Lähemalt vt. L.Kivistik, J.Gabovits. Arvuteooria, TRÜ rotaprint, 1974.

64. Pöörame funktsiooni $y = A \sin x$ graafikut koordinaatide alguspunkti suhtes 90° võrra, s.t. et lisame funktsiooni $y = A \sin x$ graafikule veel funktsiooni $x = A \sin y$ graafiku. Kui nüüd kahe graafiku ühendit pöörata koordinaatide alguspunkti suhtes 90° võrra, siis see hulk teiseneb iseendaks, sest et $y = A \sin x$ on paaritu funktsioon. Järelikult, kui esimeses veerandis on graafikutel $y = A \sin x$ ja $x = A \sin y$ lõikepunkt, siis pöörates seda lõikepunkti 90° võrra, saame jälle nende graafikute lõikepunkti. Pöörates graafikute lõikepunkti 0° , 90° , 180° ja 270° võrra, saame neli punkti, mis asuvad mingi ruudu tippudes. Olles sel viisil konstrueerinud kaks ruutu, piisab nende mittekongruentsuse tõestamiseks näidata, et nende tipud esimeses veerandis on erinevatel kaugustel koordinaatide alguspunktist.



Joonis 35

Kui valime $A > 1978\pi + 1$, siis graafiku $y = A \sin x$ see osa, kus $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$, lõikab graafikut $x = A \sin y$ vähemalt 1978 punktis $X_1, X_2, \dots, X_{1978}$, sealjuures kõik need lõikepunktid on erinevatel kaugustel koordinaatide alguspunktist (vt. joon. 35).

65. Nimetame "kihiks" kõikide ruumi punktide hulka, mis asuvad kahe paralleelse tasandi vahel (tasandite punktid kaasa arvatud). Loeme "kihi" laiuks tema kahe äärtasandi vahelise kauguse. On lihtne näidata, et kui hulk K_n sisaldub "kihis" R (laiusega d), siis hulk K_{n+1} sisaldub "kihis" R_1 , mille laius on $3d$ (tõestus on analoogiline ül. 50 punkt b tõestusega). Tähistame hulka K_n sisaldava minimaalse kumera hulktahuka sümboliga K'_n . Punktides a ja b esitatud ülesannete lahendused järelduvad punkti c lahendusest, seepärast alustame punktist c .

c) Valime tetraeedri K'_0 tippude koordinaadid järgmiselt:

$$A_1(d, d, d), \quad A_2(d, -d, -d), \quad A_3(-d, d, -d), \quad A_4(-d, -d, d).$$

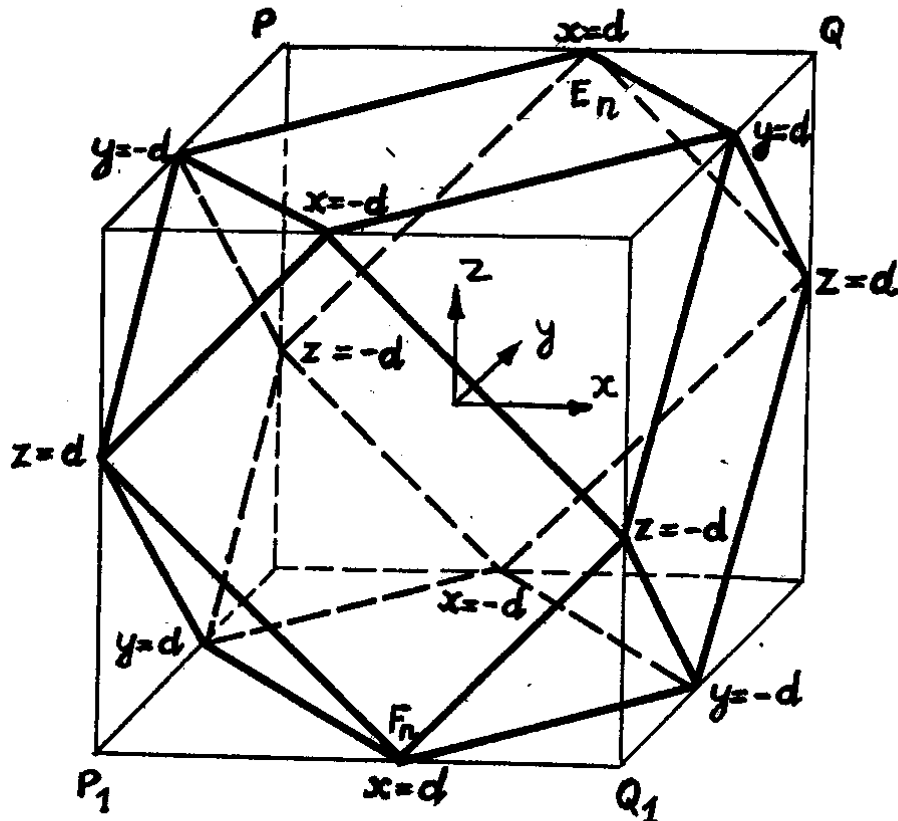
Suuruse d arvuline väärtus tuleks leida tingimusest, et tetraeedri K'_0 ruumala on 1, kuid antud juhul ei ole selle arvvaartus meile tähtis. Konstrueerime 7 "kihti" $X_1, X_2, \dots, X_7$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y, z) \mid |x| \leq d\}, & X_5 &= \{(x, y, z) \mid |x-y-z-d| \leq 2d\}, \\ X_2 &= \{(x, y, z) \mid |y| \leq d\}, & X_6 &= \{(x, y, z) \mid |-x+y-z-d| \leq 2d\}, \\ X_3 &= \{(x, y, z) \mid |z| \leq d\}, & X_7 &= \{(x, y, z) \mid |-x-y+z-d| \leq 2d\} \\ X_4 &= \{(x, y, z) \mid |x+y+z-d| \leq 2d\}, \end{aligned}$$

"Kihid" X_4, X_5, X_6 ja X_7 on valitud nii, et nende ühel äärtasandil on 3 ja teisel üks hulga K_0 punkt. (Selles on lihtne veenduda, kui punktide A_1, A_2, A_3 ja A_4 koordinaadid asendada "kihtide" X_4, X_5, X_6 ja X_7 äärtasandite võrranditesse.) Lihtne on näha, et "kihtide" X_4, X_5, X_6 ja X_7 ühisosa moodustab tetraeedri K'_0 . Kui "kihte" X_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) laiendada 3^n korda, siis saadud "kihid" $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{7n}$ on kirjeldatavad järgmiselt:

$$\begin{aligned} X_{1n} &= \{(x, y, z) \mid |x| \leq 3^n d\}, & X_{5n} &= \{(x, y, z) \mid |x-y-z-d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \\ X_{2n} &= \{(x, y, z) \mid |y| \leq 3^n d\}, & X_{6n} &= \{(x, y, z) \mid |-x+y-z-d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \\ X_{3n} &= \{(x, y, z) \mid |z| \leq 3^n d\}, & X_{7n} &= \{(x, y, z) \mid |-x-y+z-d| \leq 2 \cdot 3^n d\}. \\ X_{4n} &= \{(x, y, z) \mid |x+y+z-d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \end{aligned}$$

Et siin iga "kiht" X_{1n} on saadud "kihi" X_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 3^n -kordsel laiendamisel, siis järelikult $K'_n \subset Z_n$, kus $Z_n = \bigcap_{i=1}^7 X_{in}$. Näitame, et $K'_n = Z_n$. Kõige lihtsam on hulka Z_n ette kujutada kuubina $X_{1n} \cap X_{2n} \cap X_{3n}$, mille tippudest on "kihtide" X_{4n} , X_{5n} , X_{6n} ja X_{7n} äärtasanditega ära lõigatud tetraeedrid (vt. joon. 36).



Joonis 36.

Tekib hulktahukas Z_n , mille 12 tipu koordinaadid on järgmised:

$(3^n d, 3^n d, d)$, $(3^n d, d, 3^n d)$, $(d, 3^n d, 3^n d)$, $(-3^n d, -3^n d, d)$,
 $(-3^n d, d, -3^n d)$, $(d, -3^n d, -3^n d)$, $(3^n d, -3^n d, -d)$, $(3^n d, -d, -3^n d)$,
 $(-d, -3^n d, 3^n d)$, $(-3^n d, -d, 3^n d)$, $(-d, 3^n d, -3^n d)$, $(-3^n d, 3^n d, -d)$.

Fikseerime hulgas K_0 kaks punkti (näiteks A_1 ja A_2) ja näitame, et neid punkte teineteise suhtes n korda peegeldades saadakse punktid E_n ja F_n , mis on hulktahuka Z_n tipud. Tõepoo-

lest, et punktid A_1 ja A_2 asuvad "kihtide" X_3 ja X_2 erinevatel äärtasanditel, siis punktid E_n ja F_n asuvad kihtide X_{3n} ja X_{2n} erinevatel äärtasanditel, s.t. nad asuvad lõikudel PQ ja P_1Q_1 . Et A_1 ja A_2 asuvad "kihi" X_4 erinevatel äärtasanditel, siis E_n ja F_n asuvad "kihi" X_{4n} erinevatel äärtasanditel. Järelikult on punktid E_n ja F_n hulktahuka Z_n tipud. Võttes nüüd punktide A_1 ja A_2 asemel mõne teise punktipaari (A_i, A_j), saame analoogia põhjal, et ka nende punktide n -kordsed peegeldused on hulktahuka Z_n tipud. Järelikult kõik hulktahuka Z_n tipud asuvad hulgas K'_n . Sellega on näidatud, et $K'_n = Z_n$.

Hulktahuka K'_n ruumala arvutamiseks tuleb kuubi ruumalast lahutada äralõigatud tetraeedrite ruumalad:

$$V_n = (2 \cdot 3^n d)^3 - \frac{1}{6}(3^n - 1)^3 d^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}(3^n + 1)^3 d^3 - \\ - 3 \cdot \frac{1}{6}(3^n - 1)^3 d^3 - \frac{1}{6}(3^n + 1)^3 d^3 = 4(5 \cdot 3^{3n-1} - 3^n) d^3.$$

Kui tetraeedri K'_0 ruumala tähistada V_0 , siis $V_0 = \frac{8}{3} d^3$. Seega $V_n/V_0 = \frac{1}{2} (5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1})$. Et $V_0 = 1$, siis

$$V_n = \frac{1}{2} (5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1}).$$

a) Hulktahukal K'_1 on 14 tahku (vt. joon. 36). Kaheksa neist on võrdkülgised kolmnurgad ja kuus ristkülikud.

b) $V_1 = \frac{1}{2} (5 \cdot 27 - 9) = 63$.

66. Vt. ül.58 lahendus.

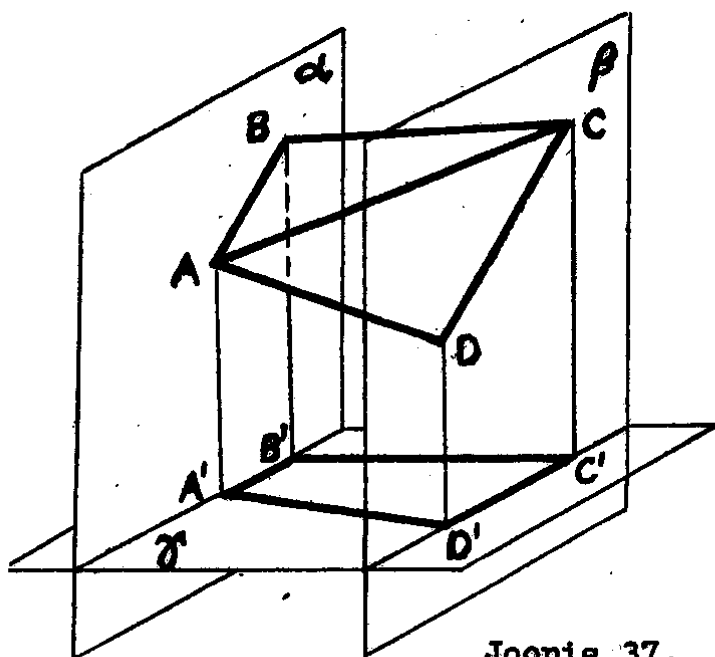
67. Vt. ül.51 lahendus.

68. Olgu AB ja CD tetraeedri vastasküljed. Konstrueerime kaks paralleelset tasandit α ja β nii, et $[AB] \subset \alpha$ ja $[CD] \subset \beta$. Vaatleme mingit tasandit γ , mis on risti tasanditega α ja β . Kui projekteerida tetraeedri $ABCD$ tasandile γ , siis saame trapetsi $A'B'C'D'$, mille kõrgus ei sõltu tasandi γ valikust (vt. joon. 37), sest trapetsi kõrgus on tasandite α ja β vaheline kaugus. Järelikult, et võrrelda selliste trapetside pindalasid (mis on saadud tetraeedri projekteerimisel erinevatele tasan-

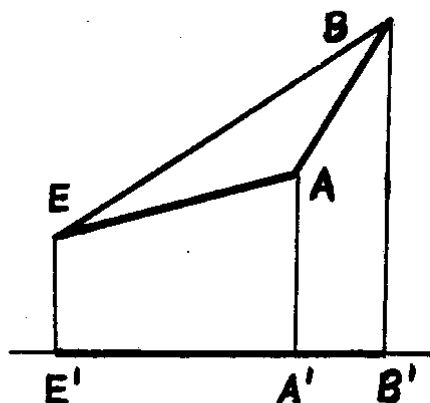
ditele γ), selleks piisab võrrelda nende trapetsite aluste summasid. Valime tasandil α punkti E nii, et lõigud EA ja CD on paralleelsed ning $\widehat{EAB} \geq \frac{\pi}{2}$

(vt. joon. 38). On ilmne, et lõikude EA ja CD projektsioonid tasandile γ on võrdse pikkusega. Pöörates kolmnurka EAB nii, et EB on paralleelne tasandiga γ , saame et $E'B' = EB$ (vt. joon. 39).

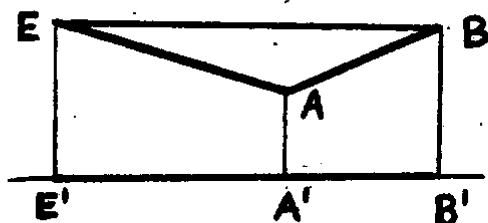
Üldest kitsendamata võib eeldada, et $\widehat{EBA} \leq \frac{\pi}{4}$. Sel juhul saab kolmnurka EAB pöörata nii, et lõik EB moodustab tasandiga γ nurga $\frac{\pi}{4}$ (vt. joon. 40). Siis $E'B' = \frac{1}{\sqrt{2}} EB$.



Joonis 37.

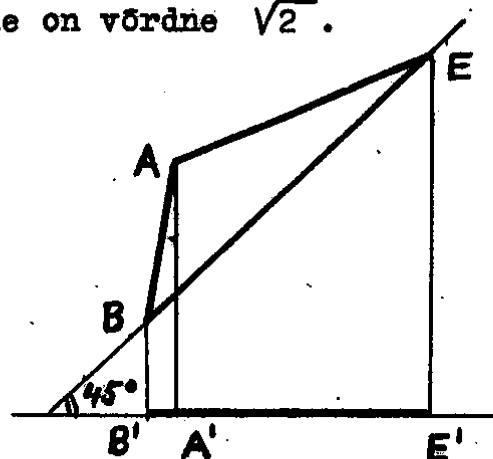


Joonis 38.



Joonis 39.

Kui nüüd neid kolmnurga EAB pööramisi tõlgendada tasandi γ kahe erineva valikuna, siis oleme näidanud, et võib valida kaks tasandit nii, et tetraeedri projektsioonide pindalade suhe nendele tasanditele on võrdne $\sqrt{2}$.



Joonis 40.

69. Olgu $D_k = (a_1 - b_k)^2 + (a_2 - b_k)^2 + \dots + (a_k - b_k)^2$,
kus $k = 1, 2, \dots, n$. Siis $D_n = D$ ja

$$\begin{aligned} D_k &= (a_k - b_k)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_k)^2 = (a_k - b_k)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1} + b_{k-1} - b_k)^2 = \\ &= (a_k - b_k)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1})^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1})(b_{k-1} - b_k) + \\ &\quad + (k-1)(b_k - b_{k-1})^2. \end{aligned}$$

Et suuruste b_k definitsiooni kohaselt $\sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1}) = 0$, siis

$$D_k = D_{k-1} + (k-1)(b_k - b_{k-1})^2 + (a_k - b_k)^2.$$

Lihtne on näha, et $kb_k = (k-1)b_{k-1} + a_k$, kui $k \geq 1$. Järelikult

$$b_{k-1} - b_k = \frac{b_k - a_k}{k-1}, \quad \text{kui } k \geq 2.$$

Seega

$$D_k = D_{k-1} + \frac{k}{k-1} (a_k - b_k)^2.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} D &= D_n = D_{n-1} + \frac{n}{n-1} (a_n - b_n)^2 = \dots = \\ &= (a_1 - b_1)^2 + \frac{2}{1} (a_2 - b_2)^2 + \frac{3}{2} (a_3 - b_3)^2 + \dots + \frac{n}{n-1} (a_n - b_n)^2. \end{aligned}$$

Et $1 < \frac{k}{k-1} \leq 2$ ($k = 2, 3, \dots, n$), siis

$$C = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 \leq D \leq 2 \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 = 2C.$$

70. Olgu $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $y = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$,
 $w = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Siis on lihtne näidata, et kui

$$x^n = q_n + r_n \sqrt{2} + s_n \sqrt{3} + t_n \sqrt{6},$$

siis

$$y^n = q_n - r_n \sqrt{2} + s_n \sqrt{3} - t_n \sqrt{6},$$

$$z^n = q_n + r_n \sqrt{2} - s_n \sqrt{3} - t_n \sqrt{6},$$

$$w^n = q_n - r_n \sqrt{2} - s_n \sqrt{3} + t_n \sqrt{6}.$$

Kui tähistada $q_n/x^n = A_n$, $r_n \sqrt{2}/x^n = B_n$, $s_n \sqrt{3}/x^n = C_n$ ja $t_n \sqrt{6}/x^n = D_n$, siis võib ülaltoodud avaldised kirjutada kujul

$$\begin{aligned} A_n + B_n + C_n + D_n &= 1, \\ A_n - B_n + C_n - D_n &= (y/x)^n, \\ A_n + B_n - C_n - D_n &= (z/x)^n, \\ A_n - B_n - C_n + D_n &= (w/x)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Et $x > y > 0$, $x > z > 0$ ja $x > |w|$, siis süsteemi (1) teise, kolmanda ja neljanda võrrandi paremad pooled koonduvad nulliks, kui $n \rightarrow \infty$. Liites süsteemi (1) võrrandite vastavad pooled, saame et $4A_n = 1 + u_n$, kus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Järelikult $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{4}$. Kui liita esimese ja teise võrrandi ja lahutada kolmanda ja neljanda võrrandi vastavad pooled, saame et $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{1}{4}$. Analoogiliselt saame, et $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \frac{1}{4}$. Järelikult

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n \sqrt{2}}{q_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n \sqrt{3}}{q_n} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n \sqrt{6}}{q_n} = 1,$$

kust saame, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

71. Vt. ül.62 lahendus.

72. Olgu n naturaalarv ja $y+1, y+2, \dots, x-1, x$ järjestikused naturaalarvud. Vaatleme võrrandit

$$(y+1) + (y+2) + \dots + (x-1) + x = n, \quad (1)$$

kus $x - y > 1$ ja $y \geq 0$. Võrrand (1) on samaväärne võrrandiga

$$(x - y)(x + y + 1) = 2n. \quad (2)$$

Et arvud $x - y$ ja $x + y + 1$ on erineva paarsusega, siis võrrand (2) pole lahenduv, kui $n = 2^s$, kus s on naturaalarv. Näitame, et kui $n \neq 2^s$, siis võrrand (2) on lahenduv. Tõepoolest, sellisel juhul $n = 2^s p$, kus p on paaritu ja $p \geq 3$. Kui $p > 2^{s+1}$, siis võttes $x - y = 2^{s+1}$ ja $x + y + 1 = p$, saame et

$$x = 2^s + (p-1)/2 \quad \text{ja} \quad y = -2^s + (p-1)/2.$$

Kui $p < 2^{s+1}$, siis võttes $x - y = p$ ja $x + y + 1 = 2^{s+1}$, saame et

$$x = 2^s + (p-1)/2 \quad \text{ja} \quad y = 2^s - (p+1)/2.$$

Järelikult, arve kujul 2^s ja ainult neid ei saa esitada järjestikuste naturaalarvude summana.

73. Kui $x = 0$, siis $y = \pm 2$. Et $x > 0$ korral on võrrandi vasak pool paaritu, siis $y = 2n+1$. Võib eeldada, et $n > 0$, s.t. leiame algul need lahendid, kus $y > 0$. Asendades $y = 2n+1$ lahtevõrrandisse, saame $3 \cdot 2^{x-2} = n(n+1)$. Et n ja $n+1$ on ühisteguriteta, siis kas $n=3$ ja $n+1=2^{x-2}$ või $n+1=3$ ja $n=2^{x-2}$. Esimesel juhul $x=4$ ja teisel juhul $x=3$. Järelikult on antud võrrandil 6 lahendit, s.t.

$$\begin{aligned} & \{(x;y) \mid 3 \cdot 2^x + 1 = y^2 \wedge x,y \in \mathbb{Z}\} = \\ & = \{(0;2); (0;-2); (4;7); (4;-7); (3;5); (3;-5)\}. \end{aligned}$$

74. Kokku on n -kohalisi arve $10^n - 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$.

a) Leiame, kui suure osa moodustavad n -kohalistest arvudest sellised "tasakaalustatud" arvud, millel ühtivad k esimest ja k viimast numbrit ($k \leq n$). Lihtne on näha, et sellistel arvudel on esimeste $n-k$ numbriga määratud ka viimased k numbrit. Seega pole neid rohkem kui $(n-k)$ -kohalisi arve üldse, s.t. et $9 \cdot 10^{n-k-1}$. Järelikult ei ületa selliste arvude osa n -kohaliste arvude hulgas suurust

$$\frac{9 \cdot 10^{n-k-1}}{9 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{10^k}.$$

Seega kõikide "tasakaalustatud" arvude osa n -kohaliste arvude hulgas ei ületa arvu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9}.$$

b) Lihtne on konstrueerida sellist arvu samaaegselt algusest ja lõpust. Tähistame otsitava arvu tähega A . Siis

$$\begin{aligned} A &= 9\dots = 98\dots 9 = 9897\dots 989 = 98979896\dots 9897989 = \\ &= 9897989698979895\dots 989798969897989 = \dots \end{aligned}$$

Arvus A on $2^{10} - 1 = 1023$ numbrit. Arv A ongi otsitav arv, sest kui sellele lõppu kirjutada 9, siis ühtivad esimene ja viimane number, kui lõppu kirjutada 8, siis ühtivad kaks esimest ja kaks viimast numbrit, kui lõppu kirjutada 7, siis ühtivad neli esimest ja neli viimast numbrit jne.

75. Olgu $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ ja $b_n = \sqrt{4n+2}$.

a) Et $b_n^2 - a_n^2 = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)} < 1$ ja $b_n^2 = 4n+2$ pole täisruut, siis järelikult $[a_n] = [b_n]$.

$$\begin{aligned} \text{b) } b_n - a_n &= \frac{b_n^2 - a_n^2}{b_n + a_n} = \frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{4n+2}} < \frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{4\sqrt{n}} = \\ &= \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{4\sqrt{n}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})} = \frac{1}{4\sqrt{n}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})} < \frac{1}{4\sqrt{n} \cdot 4n} = \frac{1}{16\sqrt{n^3}}. \end{aligned}$$

76. Et $m \leq x_i \leq M$, kui $i = 1, 2, \dots, k$, siis

$$(x_i - \frac{m+M}{2})^2 \leq (\frac{M-m}{2})^2.$$

Et $\sum_{i=1}^k x_i = 0$, siis

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \frac{M+m}{2})^2 = k(\frac{M+m}{2})^2 + \sum_{i=1}^k x_i^2 - (M+m) \sum_{i=1}^k x_i = k(\frac{M+m}{2})^2 + \sum_{i=1}^k x_i^2.$$

Järelikult

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 \leq k(\frac{M-m}{2})^2 - k(\frac{M+m}{2})^2 = -kmM.$$

77. Tähistame $(a_{2n} - a_0)/2n = h$. Vaatleme aritmeetilist progressiooni $b_k = a_0 + kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$). Lihtne on näha, et $b_0 = a_0$ ja $b_{2n} = a_{2n}$. Kui $c_k = a_k - b_k$, siis suuruste c_k jaoks peab kehtima võrratus

$$c_k + b_k \geq (c_{k-1} + b_{k-1} + c_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Et $b_k = (b_{k-1} + b_{k+1})/2$, siis järelikult $c_k \geq (c_{k-1} + c_{k+1})/2$.

Ülesandes tõestatav võrratus saab kuju

$$\frac{(c_0 + b_0) + (c_2 + b_2) + \dots + (c_{2n} + b_{2n})}{n+1} \leq \frac{(c_1 + b_1) + (c_3 + b_3) + \dots + (c_{2n-1} + b_{2n-1})}{n}$$

ehk

$$\frac{c_0 + c_2 + \dots + c_{2n}}{n+1} \leq \frac{c_1 + c_3 + \dots + c_{2n-1}}{n},$$

sest et liidetavad b_i saab koondada. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}(b_0 + b_2 + \dots + b_{2n}) &= \frac{1}{n+1}(b_0 + b_{2n}) \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}(b_0 + b_{2n}) = \\ &= a_0 + nh \text{ ja } \frac{1}{n}(b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}) = \frac{1}{n}(b_1 + b_{2n-1}) \cdot \frac{n}{2} = a_0 + nh. \end{aligned}$$

Järelikult aritmeetilise progressiooni lahutamine antud jadast ei muuda ülesande tingimusi. Jada c_k konstruktsiooni põhjal $c_0 = 0$ ja $c_{2n} = 0$. Näitame, et $c_k \geq 0$, kui $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Oletame vastuväiteliselt, et jadas c_k on negatiivseid liikmeid. Olgu $c_m < 0$ selle jada minimaalne element. Siis

$$c_m \geq (c_{m-1} + c_{m+1})/2 \text{ ehk } (c_m - c_{m-1}) + (c_m - c_{m+1}) \geq 0.$$

Et c_m on jada c_k minimaalne element, siis $c_m - c_{m-1} \leq 0$ ja $c_m - c_{m+1} \leq 0$. Järelikult $c_m = c_{m-1} = c_{m+1}$. Et $c_{m-1} \geq (c_{m-2} + c_m)/2$ ja $c_{m+1} \geq (c_m + c_{m+2})/2$, siis saame analoogiliselt, et $c_{m-2} = c_{m-1} = c_m = c_{m+1} = c_{m+2}$ jne. Seega ka $c_0 = c_m < 0$. Saadud vastuolu näitab, et jadas c_k ei ole negatiivseid liikmeid.

Et $c_0 = c_{2n} = 0$ ja $c_1 \geq (c_0 + c_2)/2$, $c_3 \geq (c_2 + c_4)/2$, $\dots$, $c_{2n-1} \geq (c_{2n} + c_{2n-2})/2$, siis $c_1 + c_3 + \dots + c_{2n-1} \geq$

$\geq (c_0 + c_{2n})/2 + c_2 + c_4 + \dots + c_{2n-2} = c_0 + c_2 + \dots + c_{2n}$
 $\geq \frac{n}{n+1} (c_0 + c_2 + \dots + c_{2n})$. Võrdus kehtib siis, kui $c_0 + c_2 +$
 $+ \dots + c_{2n-2} + c_{2n} = \frac{n}{n+1} (c_0 + c_2 + \dots + c_{2n})$, millest

$$c_0 = c_2 = \dots = c_{2n-2} = c_{2n} = 0.$$

Et $c_{2k} \geq (c_{2k-1} + c_{2k+1})/2$, kui $k = 1, 2, \dots, n-1$, siis ka

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{2n-1} = 0.$$

Järelikult võrduse kehtimiseks on tarvilik ja piisav, et jada a_k oleks aritmeetiline progressioon.

78. Oletame, et murru $1/p$ periood Q on n -kohaline, siis

$$\frac{1}{p} = \frac{A}{10^s} + \frac{Q}{10^{s+n}} + \frac{Q}{10^{s+2n}} + \frac{Q}{10^{s+3n}} + \dots, \quad (1)$$

kus $0 \leq s < n$ ning $A \geq 0$. Kirjutades seose (1) kujul

$$\frac{10^s}{p} = A + \frac{Q \cdot 10^n}{10^n - 1} \quad \text{ehk} \quad 10^s(10^n - 1) = [(10^n - 1)A + 10^n Q]p,$$

saame et $10^n - 1$ jagub arvuga p . Lihtne on näha, et ka arvud $10^{2n} - 1$, $10^{3n} - 1$, ... jaguvad arvuga p . Et $10^n - 1$ jagub arvuga p , siis on perioodi pikkuseks võetud minimaalne n .

a) Vastuse selles punktis püstitatud ülesandele saame järgmisest punktist, võttes seal $k = 1$ ja $m = n$.

b) Olgu $n = mk$. Jaotame perioodi Q m "tükiks". Seega

$$Q = Q_{m-1} + Q_{m-2} \cdot 10^k + Q_{m-3} \cdot 10^{2k} + \dots + Q_0 \cdot 10^{(m-1)k},$$

kus $Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}$ on k -kohalised naturaalarvud. Siis

$$\begin{aligned} \frac{10^s}{p} - A &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_i}{10^{ki}}, \quad 10^k \left(\frac{10^s}{p} - A \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^k Q_i}{10^{ki}}, \quad 10^{2k} \left(\frac{10^s}{p} - A \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{2k} Q_i}{10^{ki}}, \quad \dots, \end{aligned}$$

kus $Q_i = Q_{i+m}$, kui $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Liites saadud võrdused (neid on m tükki), saame et

$$\begin{aligned} & 10^S(1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k})/p = A(1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k}) = \\ & = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} = \sum_{t \geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} + \sum_{t < 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} = N + \sum_{t < 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} = \\ & = N + (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{m-1}) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{10^{ks}}, \end{aligned} \quad (2)$$

kus N on naturaalarv.

Et $10^n - 1 = 10^{mk} - 1 = (10^k - 1) \cdot (1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k})$ jagub arvuga p , siis järelikult $(1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k})$ jagub arvuga p . Seega on võrduse (2) vasakul pool naturaalarv. Järelikult on naturaalarv ka

$$B = (Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{m-1}) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{10^{ks}}.$$

Et $B = (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{m-1}) \frac{1}{10^k - 1}$, siis

$$(Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{m-1}) \div (10^k - 1).$$

79. Saab küll. Et ruutvõrrandi diskriminant

$$D = (a - b)^2 - 2(a + b) + 1$$

oleks negatiivne, piisab, kui näiteks võtta $a - b = 1978$ ja $a + b = 1978^2$, kust saame, et $a = 989 \cdot 1979$ ja $b = 989 \cdot 1977$.

80. Antud võrratuse õigsuse tõestamiseks piisab tõestada sellega ekvivalentne võrratus $x \geq e \ln x$, mis on saadud algvõrratuse logaritmitamisel. Kui $x \in]0, 1]$, siis on selle võrratuse kehtivus ilmne. Kui $x > 1$, siis on vaja tõestada, et $\frac{x}{\ln x} \geq e$. Uurime funktsiooni

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

piirkonnas $]1, \infty[$. Et $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, siis vah. mikus $]1, e[$

$f'(x) < 0$ ning vahemikus $]e, \infty[$ $f'(x) > 0$. Järelikult esimeses vahemikus $f(x)$ kahaneb ja teises kasvab. Seega on punktis $x = e$ funktsioonil $f(x)$ miinimum, s.t. et

$$\frac{x}{\ln x} \geq \frac{e}{\ln e} = e, \text{ kui } x > 1.$$

81. Maksimaalne lahendite arv on 3. Selle näitamiseks tõestame algul ühe lemma.

Lemma. Kui diferentseeruv funktsioon $f(x)$ omab vahemikus $]a, b[$ pidevat tuletist ja $f(a) = f(b) = 0$, siis leidub punkt c nii, et $a < c < b$ ja $f'(c) = 0$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $f'(x) \neq 0$, kui $a < x < b$. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $f'(x) > 0$, kui $a < x < b$. Valime lõigul $[a, b]$ osalõigu $[a_1, b_1]$, kus $a < a_1 < b_1 < b$. Et $f'(x)$ on pidev funktsioon, siis lõigul $[a_1, b_1]$ on funktsioonil $f'(x)$ minimaalne väärtus $m > 0$. Seega

$$0 = f(a) - f(b) = \int_a^b f'(x) dx \geq \int_{a_1}^{b_1} f'(x) dx \geq \int_{a_1}^{b_1} m dx = (b_1 - a_1)m > 0.$$

Saadud vastuolu näitab, et peab leiduma selline reaalarv c , et $a < c < b$ ja $f'(c) = 0$, m.o.t.t.

Olgu $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$ ning n võrrandi $f(x) = 0$ lahendite arv. Ülaltestatud lemma põhjal on võrrandil $f'(x) = 0$ vähemalt $n-1$ lahendit ja võrrandil $f''(x) = 0$ vähemalt $n-2$ lahendit. Et võrrandil $e^x - 2a = 0$ on maksimaalselt üks lahend, siis $n-2 \leq 1$, kust $n \leq 3$.

Kui võtta $a = 3$, $b = 0$ ja $c = 0$, siis on võrrandil $e^x - 3x^2 = 0$ parajasti kolm lahendit.

82. Et $(x_n - c)^2 \geq 0$, siis jada x_n on mittekahanev, s.t. et $x_{n+1} \geq x_n$. Kui oletada, et jada x_n koondub suuruseks a , siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - c)^2,$$

millest saame, et $a = a + (a - c)^2$. Järelikult

$$a = c \text{ ning } x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq c.$$

Et $x_2 = c^2$, siis peab kehtima võrratus $c^2 \leq c$ ehk $0 \leq c \leq 1$. Näitame, et saadud võrratus on jada x_n koonduvuseks piisav, s.t. et kui $0 \leq c \leq 1$, siis jada x_n koondub. Tõepoolest, et jada x_n on monotoonne, siis tema koonduvuse tõestamiseks piisab näidata, et ta on tõkestatud.

Näitame matemaatilise induktsiooni meetodiga, et iga n korral $x_n \leq c$. Kui $n = 1$, siis väide kehtib. Oletame, et ta kehtib ka $n = m$ korral, s.t. $x_m \leq c$. Siis

$$x_{m+1} - c = x_m - c + (x_m - c)^2 = (x_m - c)(1 - c + x_m) \leq 0,$$
 sest et $1 - c + x_m > 0$ ja $x_m - c \leq 0$. Järelikult ka $x_{m+1} \leq c$. Seega jada x_n koondub parajasti siis, kui $0 \leq c \leq 1$.

83. Jada b_n koonduvuse tõestamiseks piisab näidata, et ta on monotoonselt kasvav ja tõkestatud. Tõepoolest,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{4^n}}) > \frac{1}{2}(b_n + b_n) = b_n.$$

Järelikult on jada b_n monotoonselt kasvav. Et

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(\sqrt{b_n^2 + 1/4^n} - b_n) = \frac{1}{2 \cdot 4^n (\sqrt{b_n^2 + 1/4^n} + b_n)} < \frac{1}{2^{2n+1}(b_n + b_n)} < \frac{1}{2^{2n+2}b_1} = \frac{1}{2^{2n+1}},$$

siis

$$b_n - b_{n-1} < \frac{1}{2^{2n-1}}, \quad b_{n-1} - b_{n-2} < \frac{1}{2^{2n-3}}, \quad \dots, \quad b_1 - b_0 < \frac{1}{8}$$

Liites saadud võrratused, saame et

$$b_{n+1} - b_1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{6} \quad \text{ehk} \quad b_{n+1} < \frac{1}{6} + b_1.$$

Järelikult on jada b_n tõkestatud.

84. Valime koordinaatteljestiku nii, et sfääri keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis. Peegeldame värvitud punktid yz -tasandi suhtes ja värvime "mustade" punktide peegeldamisel saadud punktid ka mustaks. Siis on sfäärilist värvitud mitte rohkem kui 24 %. Pärast seda peegeldame värvitud punktid xz -tasandi suhtes ja toimime analoogiliselt. Sellisel juhul on sfäärilist värvitud mitte rohkem kui 48 %. Pärast peegeldamist xy -tasandi suhtes saame, et sfäärilist on värvitud mitte rohkem kui 96 %. Valides nüüd punkti sfääri värvimata osal ja peegeldades seda xy -, yz - ja xz -tasandi suhtes, saame 8 punkti, mis asuvad mingi risttahuka tippudes.

85. Kõikides 2×2 ruutudes (kokku on neid 49) arvude summa ei ületa arvu $64 + 63 + 62 + 61 = 250$.

Oletame vastuväiteliselt, et 2×2 ruute, milles arvude summa on suurem kui 100, ei ole rohkem kui kaks. Sellisel juhul kõikides 2×2 ruutudes olevate arvude summa peab olema väiksem kui $2 \cdot 250 + 47 \cdot 100 = 5200$. Teiselt poolt on ilmne, et malelaua nurgaväljadel olevad arvud on sellises summas ühekordselt, ääreväljadel (v.a. nurgaväljadel) olevad arvud kahekordselt ja siseväljadel olevad arvud neljakordselt. Seega pole kõikides 2×2 ruutudes olevate arvude summa väiksem kui $64 + 63 + 62 + 61 + 2(60 + 59 + \dots + 37) + 4(36 + 35 + \dots + 1) = 5242$. Saadud vastuolust järeldub, et saab leida vähemalt kolm 2×2 ruutu, milledes olevate arvude summa on suurem kui 100.

86. Vektorid $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ ja $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$ asuvad tasandil $x + y + z = 0$ ning on omavahel risti, sest $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$. Et selle tasandi normaalvektor $\vec{n} = (1; 1; 1)$ on risti vektoritega $\vec{x}$ ja $\vec{y}$, siis moodustavad vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{n}$ ristreeperi. Järelikult iga vektori $\vec{a}$ korral

$$\cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{x}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{y}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{n}}) = 1. \quad (1)$$

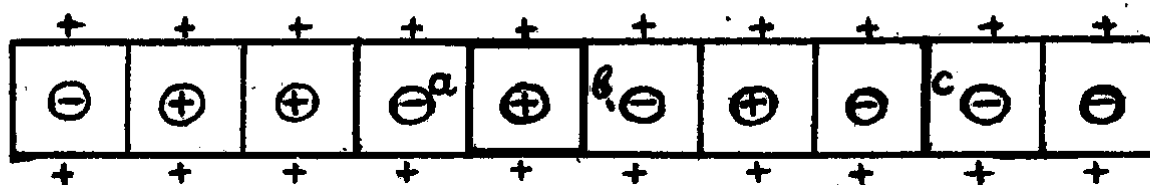
Kui $\vec{a} = (1; 0; 0)$, siis seosest (1) saame et

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + \frac{1}{3} = 1.$$

87. Vaatleme kõikvõimalike kolmekohaliste arvude korrutisi $100 \times 100, 100 \times 101, \dots, 998 \times 999, 999 \times 999$. Selliseid korrutisi on C_{900}^2 . Neid 6-kohalisi arve, mida ei saa esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena, on vähemalt $900\,000 - C_{900}^2 = 495\,450 > \frac{1}{2} \cdot 900\,000$. Seega on selliseid 6-kohalisi arve, mida ei saa esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena, rohkem kui neid 6-kohalisi arve, mida saab esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena.

88. Kirjutame kõikide ruutude horisontaalsetele külgedele punase $+1$. Vaatleme nüüd suvalist mustade arvude horisontaalset rida. Fikseerime selles reas ruudu. Kui selles ruudus on $+1$, siis kirjutame selle ruudu vertikaalsetele külgedele punased $+1$, kui ruudus on -1 , siis kirjutame vasakule küljele $+1$ ja paremale -1 (või vastupidi). Tähistame selle ruudu vertikaalsed küljed tähtedega a ja b . Antud rea ülejäänud vertikaalsete külgedega toimime järgmiselt.

Olgu fikseeritud ruudus $+1$. Võtame vaadeldavas reas suvalise vertikaalse külje c . Kui c asub fikseeritud ruudust paremal, siis kirjutame küljele c arvu, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede a ja c vahel. Kui c asub fikseeritud ruudust vasakul, siis kirjutame küljele c arvu, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede c ja b vahel (vt. joon. 41).



Joonis 41.

Juhul kui fikseeritud ruudus on -1 ja küljele b on kirjutatud -1 , siis tuleb küljele c (eeldusel, et ta asub fikseeritud ruudust vasakul) kirjutada arv, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede a ja c vahel. Kui c asub fik-

seeritud ruudust paremal, siis tuleb küljele c kirjutada arv, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede a ja c vahel. Joonisel 41 näidatud juhul tuleks küljele c kirjutada punane $+1$, sest et $(+1)(-1)(+1)(-1) = +1$.

Analoogiliselt toimime ka ülejäänud mustade arvude ridadega. Teostatud konstruktsiooni põhjal ilmneb, et ülesande väide kehtib kõikide ristkülikute $n \times 1$ kontuuride korral. Lihtne on ka veenduda selles, et kui kahel kujundil on ühine raja-joone osa, kuid ei ole ühiseid sisepunkte, ning ülesande väide kehtib mõlema kujundi kohta, siis kehtib see ka antud kujundite ühendi kohta. Siit järeldub, et väide kehtib kõikide ristkülikute $n \times m$ korral. Et antud eeldustel saab suvalist tasapinnalist kujundit vaadelda teatavate ristkülikute ühendina, siis on ülesande väide tõestatud suvalise kinnise kontuuri korral.

89. Ei saa. Vaatleme kahte juhtu.

¹⁰ Pärast eelviimast käiku on asendamata üks paarisastme kordaja. Seega pärast viimast käiku saame võrduse

$$x Q(x) + 1 = -a x^{2m}, \quad (1)$$

kus $x Q(x) + 1$ on hulkliikme $P(x)$ see osa, kuhu kordajad kirjutati sisse esimese 8 käigu jooksul ja arv a kirjutati mängija A poolt viimasel käigul x^{2m} ette.

Osutub, et kui valida arv a küllalt suur, siis on võrrandil (1) vähemalt üks mittereaalne lahend. Olgu $T(x) = x Q(x) + 1$. Siis $T(0) = 1$ ja $T(x)$ pidevuse tõttu leidub selline $\varepsilon > 0$, et lõigul $[-\varepsilon, \varepsilon]$ funktsioon $T(x) > 0$. Olgu $M = \max_{|x| \leq 1} |x Q(x) + 1|$. Tähistame sümbooliga x_a võrrandi (1) sellise lahendi, mille korral $|x_a| \leq 1$. (Selline x_a leidub iga a korral, sest võrrandi (1) kõikide lahendite korrutis on 1.) Valime $a = M/\varepsilon^{2m}$. Sellisel juhul

$$|x_a^{2m}| = \left| \frac{x_a Q(x_a) + 1}{-a} \right| \text{ ning } |x_a|^{2m} = \frac{|x_a Q(x_a) + 1|}{|a|} \leq \frac{M}{a} = \varepsilon^{2m}.$$

Seega $|x_a| \leq \varepsilon$. Et funktsioon $T(x)$ on lõigul $[-\varepsilon, \varepsilon]$ positiivne, siis $x_a Q(x_a) + 1 > 0$ ning seega

$$x_a^{2m} = \frac{x_a Q(x_a) + 1}{-a} < 0.$$

Saadud võrratus näitab, et võrrandi (1) lahend x_a ei saa olla reaalarv.

2^o Vaatleme juhtu, kus viimase käiguna asendab A paaritustasme kordaja. Sellisel juhul saab A mängida nii, et pärast 9. käiku on hulkliige kujul

$$x^{10} + ax^8 + bx^6 + cx^4 + dx^2 + 1 = 0. \quad (2)$$

(A kirjutab kõikide paarituste astmete ette nullid. Kui B peaks püüdma mängijat A segada selle taktika läbiviimisel, siis taandub mäng juhule 1^o. Tõepoolest, kui B kirjutab kordaja mingi paaritu astme ette, siis A jätkab kordajate kirjutamist paarituste astmete ette ja viimaseks käiguks jääb mängijale A kindlasti paarisastme kordaja kirjutamine.) Kui teha võrrandis (2) muutuja vahetus $x^2 = u$, siis uue võrrandi lahendite u_1, u_2, u_3, u_4 ja u_5 korral kehtib Vieta teoreemi põhjal seos

$$u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = -1.$$

Järelikult peab mingi i korral $u_i < 0$. See aga tähendab, et mingi lahendi x_0 korral $x_0^2 = u_i < 0$. Järelikult ei saa x_0 olla reaalne lahend.

90. Olgu $N = 4n - 1$ ja arvu N algarvudeks lahutus

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Et $N = 4n - 1$, siis peab antud lahutuses esinema algarv kujul $4s - 1$, mille astendaja on paaritu. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et $p_1 = 4s - 1$ ja $a_1 = 2m + 1$. On ilmne, et arvu N iga tegur on kujul $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$, kus $i_1 \leq a_1, i_2 \leq a_2, \dots, i_k \leq a_k$. "Täiusliku" arvu definitsiooni kohaselt

$$N + N = \sum p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k},$$

kus summeeritakse üle kõikvõimalike astendajate väärtuste, mille korral $i_1 \leq a_1, i_2 \leq a_2, \dots, i_k \leq a_k$. Järelikult $2N =$

$$= (1 + p_1 + \dots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{a_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{a_k}).$$

Viimase võrduse vasak pool $2 \cdot (4n-1) = 8n-2$ ei jagu neljaga. Kuid võrduse paremal pool on tegur

$$1 + p_1 + \dots + p_1^{2m+1} =$$

$$= (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + \dots + p_1^{2m}) = 4s(1 + p_1^2 + \dots + p_1^{2m}),$$

mis jagub neljaga. Saadud vastuolu näitab, et arv kujul $4n-1$ ei saa olla "täiuslik".

91. Vaatleme kolmnurka ABC. Olgu kolmnurga ümberringjoone raadius R , siseringjoone raadius R_1 ja segmentidesse joonestatud ringjoonte raadiused vastavalt R_2, R_3 ja R_4 . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et raadiused R_2, R_3 ja R_4 on maksimaalse väärtusega (vt. joon. 42), s.t.

$$2R_2 = R - R \cos \beta,$$

$$2R_3 = R - R \cos \gamma,$$

$$2R_4 = R - R \cos \alpha.$$

Kolmnurga pindala $S =$

$$= \frac{abc}{4R}, \text{ ja kuna}$$

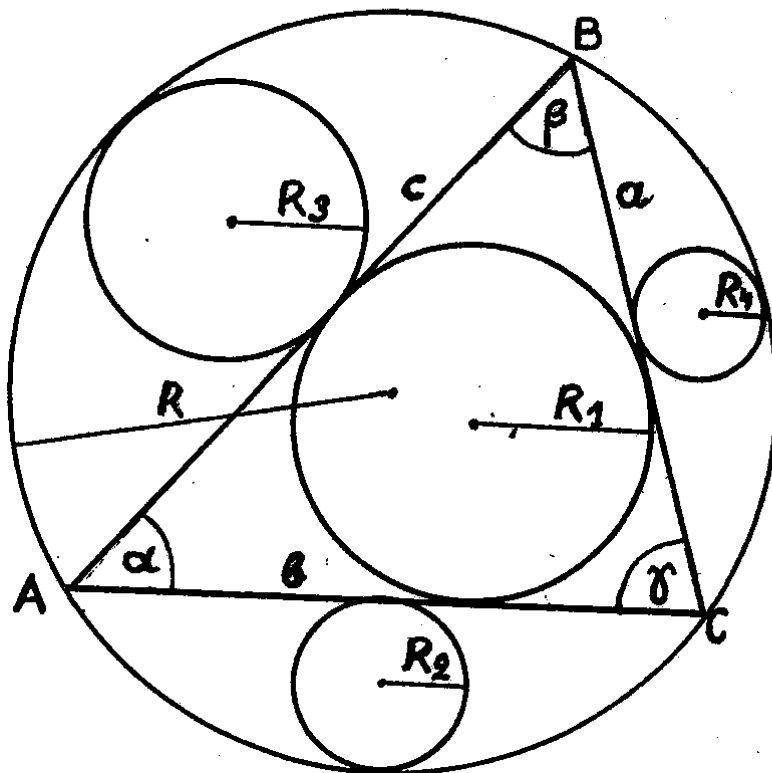
$$a = 2R \sin \alpha,$$

$$b = 2R \sin \beta,$$

$$c = 2R \sin \gamma,$$

siis

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$



Joonis 42.

Teisest küljest,

$$S = \frac{1}{2} R_1(a + b + c) \quad \text{ehk} \quad R_1 = \frac{2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

Seega

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{R}{2} \left[3 - (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Kuid } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Järelikult

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{R}{2} (2 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}).$$

Tähistame $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = u$. Et

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2} (3 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} (2 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}) = 1 - 2u \quad \text{ning alati} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = (\sqrt[3]{u})^2,$$

siis peab u kõikvõimalike väärtuste korral kehtima võrratus

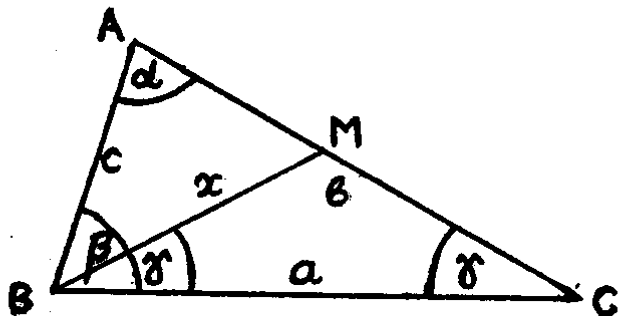
$$\frac{1 - 2u}{3} \geq \sqrt[3]{u^2} \quad \text{ehk} \quad (2\sqrt[3]{u} - 1)(\sqrt[3]{u} + 1)^2 \leq 0. \quad \text{Siit saame, et}$$

$$\sqrt[3]{u} \leq \frac{1}{2}. \quad \text{Seega } R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = R(1 + 2u) \leq R(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}R.$$

92. Võtame näiteks $z = x + 1$. Sel juhul $(x + 1)! = y!x!$ ehk $x = y! - 1$. Tähistades $y = n$ (n - naturaalarvuline parameeter), saame järgmise lahendite hulga: $x = n! - 1$, $y = n$ ja $z = n!$, kus $n = 3, 4, 5, \dots$

93. Olgu kolmnurga tipud A, B ja C ja kolmnurga küljed a, b ja c. Et $\alpha = 2\beta - 2\gamma$, siis

$$\beta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha. \quad (1)$$



Joonis 43.

Tõmbame tipust B lõigu BM nii, et $\widehat{MBC} = \gamma$ (vt. joon. 43). Siis $BM = MC$ ja seose (1) põhjal $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\alpha$. Tähistame $BM = x$. Siis kolmnurgast ABM siinusteoreemi põhjal

$$\frac{c}{\sin(\pi - \frac{3\alpha}{2})} = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{b-x}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Siit $x = c \sin \alpha / \sin \frac{3\alpha}{2}$. Asendades saadud x väärtuse avaldistesse $\frac{b-x}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ja $\frac{x}{\sin \alpha}$, saame seosest (2)

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{(3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} (1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1. \text{ Viimase põhjal } (\frac{c}{b} + 1)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 + 2 \cos \alpha = \\ &= 2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}. \text{ Siit} \end{aligned}$$

$$(b+c)^2(b-c) = a^2b. \quad (3)$$

Seose (3) piisavus ilmneb sellest, et seos (2) on saadav seosest (3), kui kirjutada antud tõestus lihtsalt vastupidises järjekorras. Järelikult seos (3) on tarvilik ja piisav selleks, et $\alpha = 2\beta - 2\gamma$.

94. Olgu otsitav hulkliige $P_N(x)$. Ülesande tingimuste kohaselt $P_N(0) = 0$ ning hulkliikmel $Q_N(x) = P_N(x) - N$ on N erinevat nullkohta $x_1, x_2, \dots, x_N$. Järelikult

$$Q_N(x) = P_N(x) - N = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) Q'_N(x), \quad (1)$$

kus $Q'_N(x)$ on teatav hulkliige. Näitame, et hulkliige $Q'_N(x)$ on samuti täisarvuliste kordajatega. Selleks piisab näidata, et kui $A(x)$ on täisarvuliste kordajatega hulkliige ja x_0 on vörrandi $A(x) = 0$ täisarvuline lahend, siis $A(x)/(x - x_0)$ on täisarvuliste kordajatega hulkliige. Töepoolest, olgu

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad \text{siis} \quad \frac{A(x)}{x - x_0} = \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \sum_{k=1}^m a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i x_0^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{k=i+1}^m a_k x_0^{k-1-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i, \quad \text{kus} \quad b_i = \sum_{k=i+1}^m a_k x_0^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Et x_0 on täisarv, siis ka b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1$) on täisarv. Järelikult $Q'_N(x)$ on täisarvuliste kordajatega hulkliige. Võtame võrduses (1) $x = 0$. Siis

$$Q_N(0) = P_N(0) - N = (-1)^N x_1 x_2 \dots x_N Q'_N(0).$$

Et $P_N(0) = 0$ ja $Q'_N(0)$ on täisarv, siis on arvul N vähemalt N erinevat täisarvulist jagajat. Arvude $x_1, x_2, \dots, x_N$ hulgas leidub mitte rohkem kui kaks sellist arvu x_p ja x_q , et $|x_p| = |x_q| = 1$. Kõikide ülejäänud indeksi i väärtuste korral $|x_i| \geq 2$. Järelikult

$$N = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_N| \cdot |Q'_N(0)| \geq |x_p| \cdot |x_q| \cdot 2^{N-2} = 2^{N-2}.$$

Seega saab hulkliige $P_N(x)$ eksisteerida vaid selliste N väärtuste korral, kus $N \geq 2^{N-2}$. On ilmne, et saadud võrratus kehtib ainult $N = 1, 2, 3, 4$, korral. Nende N väärtuste korral on lihtne näidata, et sellised hulkliikmed leiduvad. Võttes $Q(x) = \pm 1$, saame

$$P_1(x) - 1 = x - 1,$$

$$P_2(x) - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

$$P_3(x) - 3 = (x - 1)(x + 1)(x + 3),$$

$$P_4(x) - 4 = -(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2),$$

kust $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - x$, $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - x$ ja $P_4(x) = 5x^2 - x^4$.

Kui $N \geq 5$, siis $N < 2^{N-2}$ ja järelikult otsitavaid hulkläike ei leidu.

95. Tõestame algul ühe samasuse kombinatoorika valdkonnast. Vaatleme vahet

$$\begin{aligned} (C_n^k)^{-1} - (C_{n+1}^{k+1})^{-1} &= \frac{k!(n-k)!}{n!} - \frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{k!(n-k)!(n-k)}{(n+1)!} = \frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!} - \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \\ &= (C_{n+1}^k)^{-1} - \frac{1}{n+1} (C_n^k)^{-1} \quad \text{ehk} \\ \frac{1}{C_{n+1}^k} - \frac{1}{n+1} \frac{1}{C_n^k} &= \frac{1}{C_n^k} - \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

a) Korrutame võrduse (1) mõlemad pooli suurusega $(-1)^k$ ja summeerime siis saadud võrdused k väärtuste $1, 2, \dots, n$ korral. Saame

$$U_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{C_{n+1}^{n+1}} - \frac{1}{n+1} U_n = U_n + U_{n+1} + \frac{1}{C_{n+1}^1} \quad \text{ehk}$$

$$U_n = \frac{(-1)^n (n+1) - 1}{n+2}.$$

Saadud seosest näeme, et kui n on paaritu arv, siis $U_n = -1$, kui n on paarisarv, siis $U_n = \frac{n}{n+2}$.

b) Summeerime võrduse (1) mõlemad pooled k väärtuste $1, 2, \dots, n$ korral. Saame

$$(S_{n+1} - 1) - \frac{1}{n+1} S_n = S_n - (S_{n+1} - \frac{1}{n+1}) \quad \text{ehk}$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} (S_n + 1). \quad (2)$$

Edasi tõestame matemaatilise induktsiooni meetodiga. On ilmne, et punkti b väide kehtib, kui $n = 1$. Oletame, et ta kehtib $n = m$ korral, s.t.

$$S_m = \frac{m+1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k}.$$

Näitame, et tõestatav väide kehtib ka $n = m + 1$ korral. Lähtume võrdusest (2):

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= \frac{m+2}{2(m+1)} (1 + S_m) = \frac{m+2}{2(m+1)} \left(1 + \frac{m+1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k} \right) = \\ &= \frac{m+2}{2(m+1)} + \frac{m+2}{2^{m+2}} \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k} = \frac{m+2}{2^{m+2}} \left(\frac{2^{m+1}}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k} \right) = \\ &= \frac{m+2}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{2^k}{k}. \end{aligned}$$

Seega kehtib väide ka $n = m + 1$ korral. Järelikult

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

c) Vaatleme suhet $C_n^k : C_n^{k-1} = \frac{n-k+1}{k}$. See suhe on suurem ühest, kui $k < \frac{1}{2}(n+1)$. Järelikult on jada $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k$ monotoonselt kasvav, kui $k < \frac{1}{2}(n+1)$ ning seega $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^s \frac{1}{C_n^k}$, kus $s = \left[\frac{1}{2}(n+1) \right]$. Järelikult

$$\begin{aligned} S_n &\leq 1 + \frac{2}{n} + 2 \sum_{k=2}^s \frac{1}{C_n^k} < 1 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^s \frac{1}{C_n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{4(s-1)}{n(n-1)} < \\ &< 1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n} = 1 + \frac{6}{n}. \end{aligned}$$

Teiselt poolt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} \geq \frac{1}{C_n^n} = 1$. Seega $1 \leq S_n < 1 + \frac{6}{n}$.

Järelikult $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$.

SISUKORD

E e s s õ n a	3
Ü l e s a n d e d	4
X üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad	4
8. klass	4
9. klass	6
10. klass	8
XI üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad	10
8. klass	10
9. klass	12
10. klass	13
XII üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad	16
8. klass	16
9. klass	17
10. klass	18
Ülesandeid žürii materjalidest	20
L a h e n d u s e d	26

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ ЭСТОНСКОЙ ССР. В.Алтлейс, Т.Тяхт.

Задачи всесоюзных олимпиад школьников по математике. На эстонском языке.

Toimetaja E.Mitt. Trükkida antud 05.02.79 Paber 60x84/16.

Trükiproognaid 7,0. Arvestusproognaid 5,66. Trükiarv 3000.

Besti NSV Haridusministeerium, Tallinn, Tõnismägi 11. VOT-1

rotaprint, Tallinn, Sakala 23. Tellimise nr. 25. Hind 15 kop.

Hind 15 kop.