Задачі для самостійного розв'язування

✏ **Задача 22.9 (7–8).** У трикутнику ABC висота AH дорівнює медіані BM. Знайти кут MBC.

✏ **Задача 22.10 (7–8).** У трикутнику ABC сторона AC вдвічі більша за сторону BC, а $\angle C = 2\angle A$. Знайти кути трикутника.

✏ **Задача 22.11 (7–8).** У квадраті $ABCD$ точка O є точкою перетину кола з центром A та радіусом AB і серединного перпендикуляра до BC, причому вона ближча до C. Знайти величину кута AOC.

✏ **Задача 22.12 (8).** У прямокутному трикутнику гіпотенуза у 4 рази більша за проведену до неї висоту. Знайти гострі кути трикутника.

✏ **Задача 22.13 (8).** З довільної точки P всередині гострого кута A опустили перпендикуляри PB і PC на сторони кута, а з точки A — перпендикуляр AK на BC. Відомо, що $\angle BAK = \alpha$. Знайти $\angle PAC$.

✏ **Задача 22.14 (9).** Довести, що коли два опуклих чотирикутники розміщені так, що середини сторін у них співпадають, то їхні площі рівні.

✏ **Задача 22.15 (8–9).** В рівнобедреному трикутнику ABC із середини H основи BC опущено перпендикуляр HE на бічну сторону AC; O – середина HE. Довести, що прямі AO і BE перпендикулярні.

✏ **Задача 22.16 (8–9).** З точки A проведено дотичні AB і AC до кола з центром O. Через точку X відрізка BC проведено пряму KL, яка перпендикулярна до XO (точки K і L лежать на прямих AB і AC). Довести, що $KX = XL$.

✏ **Задача 22.17 (7–8).** Три кола однакового радіуса проходять через одну точку. Довести, що інші три точки їхнього перетину лежать на колі такого ж радіуса.

✏ **Задача 22.18 (8–9).** Чотири прямі утворюють чотири трикутники. Довести, що: 1) описані навколо цих трикутників кола мають спільну точку (точка Мікеля); 2) центри кіл, описаних навколо цих трикутників, лежать на одному колі, яке проходить через точку Мікеля.

✏ **Задача 22.19 (8–9).** З точки A проведено прямі, які дотикаються кола S в точках B і C. Довести, що центр вписаного в трикутник ABC кола і центр кола, яке дотикається до BC і є зовнішньовписаним у трикутник ABC, лежать на колі S.

✏ **Задача 22.20 (8–9).** Знайти кути трикутника, в якому центри вписаного і описаного кіл симетричні відносно однієї зі сторін.

✏ **Задача 22.21 (8–9).** Чи існує опуклий багатокутник, у якого більше трьох гострих кутів ?

✏ **Задача 22.22 (9).** В рівнобедреній трапеції діагоналі перпендикулярні. Довести, що в таку трапецію не можна вписати коло.

✏ **Задача 22.23 (9).** У трикутнику медіана, бісектриса та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на чотири рівні частини. Довести, що даний трикутник — прямокутний, та знайти його кути.

✏ **Задача 22.24 (9).** Основи трапеції мають довжини 3 см та 15 см. Чи може радіус кола, що вписане в трапецію, мати довжину 4 см?

✏ **Задача 22.25 (9–10).** По нерухомому колу радіуса R, дотикаючись його зсередини, котиться без ковзання коло радіуса $r = \frac{R}{2}$. Знайти, яку лінію описує довільна точка внутрішнього кола.

✏ **Задача 22.26 (9).** Знайти площу трапеції $ABCD$, якщо її висота дорівнює h, а бічну сторону AB видно з центра описаного кола під кутом 60°.

✏ **Задача 22.27 (9–10).** У трапецію, в якій менша основа дорівнює a, вписано коло. Одна з бічних сторін трапеції ділиться точкою дотику на відрізки, що дорівнюють m і n, починаючи від більшої основи. Визначити площу трапеції.

✏ **Задача 22.28 (9).** Навколо кола радіуса 5 см описано рівнобічну трапецію. Відстань між точками дотику її бічних сторін дорівнює 8 см. Знайти площу трапеції.

✏ **Задача 22.29 (9–10).** У гострокутному трикутнику ABC висоти AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці H. Довести, що радіус описаного кола

$$R = \frac{AH^2 \cdot A_1H}{2B_1H \cdot C_1H}.$$

✏ **Задача 22.30 (9–10).** У трикутнику ABC медіана BE і бісектриса CD перпендикулярні. Відомо, що $CD = l$, а площа трикутника ABC дорівнює S. Знайти довжину медіани BE.

✏ **Задача 22.31 (10).** У трикутнику ABC — $\angle BAC = \alpha, BC = a$. Знайти відстань від середини A_1 сторони BC до прямої PQ, де P та Q — основи висот трикутника, проведені відповідно до сторін BA і CA.

✏ **Задача 22.32 (9–10).** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перпендикулярні і перетинаються в точці M. Довести, що проекції точки M на сторони чотирикутника лежать на одному колі.

✏ **Задача 22.33 (9–10).** У чотирикутник $ABCD$ вписано коло і навколо нього описано коло радіуса R. Відомо, що $AB = 2BC$, а діагоналі перпендикулярні. Знайти площу чотирикутника $ABCD$.

✏ **Задача 22.34 (9–10).** Довжини (послідовних) сторін a,b,c,d опуклого чотирикутника такі, що його площа дорівнює $\frac{ab+cd}{2}$. Довести, що вершини чотирикутника лежать на одному колі.

✏ **Задача 22.35 (9).** Всередині трикутника взяли m точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Їх з'єднали одна з одною і з вершинами трикутника відрізками, що попарно не перетинаються. При цьому даний трикутник розбився на маленькі трикутники. Яка кількість маленьких трикутників могла при цьому отриматися?

✏ **Задача 22.36 (9–10).** На площині дано 5000 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що можна побудувати 1000 п'ятикутників з вершинами в даних точках і які не перетинаються один з одним.

✏ **Задача 22.37 (9–10).** Знайти залежність між кутами трикутника, в якому одну з медіан із центра описаного кола видно під прямим кутом.

✏ **Задача 22.38 (5 СМО-1998, 8).** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BAC = \angle DBC = 30°, \angle BCA = 20°, \angle BDC = 70°$. Довести, що $ABCD$ — трапеція.

✏ **Задача 22.39 (УМО-2000, 10).** Паралелограм $ABCD$ і ромб $AB_1C_1D_1$ мають спільним кут A. Відомо, що $BD \parallel CC_1$. Нехай P — точка перетину прямих AC і B_1C_1, а Q — точка перетину прямих AC_1 і CD. Довести, що кут AQP є прямим.

✏ **Задача 22.40 (УМО-2000, 9).** Трикутник, утворений точками перетину медіан трикутника ABC з описаним навколо трикутника ABC колом, є рівностороннім. Довести, що трикутник ABC сам є рівностороннім.

✏ **Задача 22.41 (УМО-2001, 8).** На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle B = 20°$, вибрали відповідно точки D та E так, що $AD = BE = AC$. Знайти величину кута BDE

✏ **Задача 22.42 (9).** У трикутнику медіана та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на три рівні частини. Довести, що даний трикутник — прямокутний, та знайти його кути.

✏ **Задача 22.43 (9–10).** Спільні внутрішні дотичні двох кіл радіусів R і r взаємно перпендикулярні. Знайти площу трикутника, утвореного цими дотичними та спільною зовнішньою дотичною цих кіл.

✏ **Задача 22.44 (10–11).** На стороні AB трикутника ABC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає сторони AC і BC в точках D і E відповідно. Пряма DE ділить площу трикутника ABC на дві рівні частини і утворює з прямою AB кут 15°. Знайти кути трикутника ABC.

✏ **Задача 22.45 (ОМО-1999, 11).** Нехай точка P знаходиться всередині гострокутного трикутника ABC. На сторонах AC і BC відмітили такі точки M і K відповідно, що $\angle PMC = \angle PKC = 90°$. Довести, що коли точки M та K рівновіддалені від середини AB, то $\angle PBC = \angle PAC$.

✏ **Задача 22.46 ("задача Наполеона", 10–11).** Довести, що центри правильних трикутників, побудованих на сторонах довільного трикутника зовні цього трикутника, є вершинами правильного трикутника.

✏ **Задача 22.47 (9–10).** На сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрано відповідно точки K та M так, що відрізки AK і CM ділять площу чотирикутника $ABCD$ навпіл. Нехай P — точка перетину відрізків MK та BD. Знайти відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

✏ **Задача 22.48 (9–10).** У рівносторонній трикутник зі стороною a вписано коло. До кола проведено дотичну так, що її відрізок всередині трикутника дорівнює b. Знайти площу трикутника, що відтинається цією дотичною від даного трикутника.

✏ **Задача 22.49 (10).** Знайти кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо відомо, що точка перетину його висот лежить на вписаному колі.

✏ **Задача 22.50 (9–10).** З вершини C прямого кута трикутника ABC проведено висоту CK, а в трикутнику ACK проведено бісектрису CE. Пряма, яка паралельна CE і проходить через точку B, перетинає CK в точці F. Довести, що пряма EF ділить відрізок AC навпіл.

✏ **Задача 22.51 (9–10).** Зовнішньовписане у трикутник ABC коло дотикається прямих BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

✏ **Задача 22.52 (9–10).** На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взято точки A_1, B_1, C_1 відповідно так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Прямі A_1B_1 та A_1C_1 перетинають пряму, яка паралельна BC і проходить через вершину A, в точках C_2 і B_2 відповідно. Довести, що $AB_2 = AC_2$.

✏ **Задача 22.53 (9–10).** Три прямі, які проходять через вершини трикутника, перетинаються в одній точці. Довести, що також три прямі, які симетричні цим прямим відносно відповідних бісектрис трикутника, перетинаються в одній точці.

✏ **Задача 22.54 (9–10).** Три прямі, які проходять через вершини трикутника, перетинають протилежні сторони (або їхні продовження) у трьох точках, які лежать на одній прямій. Довести, що також три прямі, які симетричні цим прямим відносно відповідних бісектрис трикутника, перетинають протилежні сторони (або їхні продовження) у трьох точках, які лежать на одній прямій.

Задачі для самостійного розв'язування

✏ **Задача 23.9. (8–9).** Побудувати трикутник за відомими висотою h_a, медіаною m_a і кутом α.

✏ **Задача 23.10. (8–9).** Побудувати трикутник за відомими стороною a, медіаною m_c і кутом α.

✏ **Задача 23.11. (8–9).** Побудувати трикутник ABC за відомими точками P, Q, R, в яких висота, бісектриса і медіана, проведені з вершини C, перетинають описане коло.

✏ **Задача 23.12. (8–9).** Побудувати трикутник ABC за відомими центром описаного кола O, точкою перетину медіан M і основою K висоти CK.

✏ **Задача 23.13. (8–9).** Побудувати трикутник ABC за відомими сторонами BC і AC, якщо відомо, що кут проти AC в три рази більший за кут проти BC.

✏ **Задача 23.14. (8–9).** Знайти на даній прямій таку точку M, що:
а) сума відстаней від M до даних двох точок мінімальна;
б) різниця відстаней від M до даних двох точок максимальна.

✏ **Задача 23.15. (8–9).** Побудувати трикутник за відомими медіанами m_a, m_b, m_c.

✏ **Задача 23.16. (8–9).** Всередині кута дано точки A і B. Побудувати коло, яке проходить через ці точки і відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

✏ **Задача 23.17. (8–9).** Дано точки A, B і пряма l. Побудувати коло, яке проходить через ці точки і дотикається прямої l.

✏ **Задача 23.18. (8–9).** Побудувати чотирикутник $ABCD$ за відомими кутами та довжинами сторін $AB = a$ і $CD = b$.

✏ **Задача 23.19. (8–9).** Провести через дану точку M пряму так, щоб вона відсікала від даного кута з вершиною A трикутник ABC даного периметра p.

✏ **Задача 23.20. (8–9).** Дано два концентричні кола S_1 і S_2. Провести пряму, на якій ці два кола відтинають три рівних відрізки.

✏ **Задача 23.21. (8–9).** Дано точки $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$, які є серединами сторін багатокутника $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$. Побудувати багатокутник $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$.

Задача 23.22 (4 СМО-1998, 11). На площині дано трикутник ABC та точка M, відмінна від точок A, B, C. Довести, що площа трикутника з вершинами — точками перетину медіан трикутників MAB, MAC, MBC — не залежить від положення точки M (при фіксованому трикутнику ABC).

Задача 23.23. (8–9). Побудувати трикутник ABC за відомими стороною $AB = c$, висотою h_c та різницею кутів ($\angle A - \angle B$).

Задача 23.24. (8–9). Побудувати трикутник ABC, якщо дано точки A, B і пряма l, на якій лежить бісектриса кута C.

Задача 23.25. (8–9). Побудувати трикутник ABC за відомими сторонами AB, AC і бісектрисою AD.

Задача 23.26 (теорема Птолемея, 9–10). Навколо чотирикутника $ABCD$ описано коло. Довести, що

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Задача 23.27. (8–9). Побудувати паралелограм $ABCD$ за відомими сторонами $AB = a$, $AD = b$ і кутом φ між діагоналями.

Задача 23.28. (8-10). Всередині гострокутного трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника найменша.

Задача 23.29. (8–9). Нехай P — середина сторони AB опуклого чотирикутника $ABCD$. Довести, що якщо площа трикутника PCD дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$, то сторони BC і AD паралельні.

Задача 23.30. (8–9). Пряма l перетинає сторони AB і AD паралелограма $ABCD$ в точках E і F відповідно. Нехай G — точка перетину прямої l і діагоналі AC. Довести, що $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AC}{AG}$.

Задача 23.31 (8–9). Через точку перетину діагоналей трапеції проведену пряму, паралельну основам трапеції. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що розташований між бічними сторонами, якщо бічні сторони трапеції дорівнюють a та b.

Задача 23.32. (8–9). Через деяку точку Q, яка лежить всередині трикутника ABC, проведено три прямі, які паралельні його сторонам. Ці прямі розбивають трикутник на 6 частин, три з яких трикутники з площами S_1, S_2, S_3. Знайти площу S трикутника ABC.

✏ **Задача 23.43 (9–10).** Знайти геометричне місце точок перетину діагоналей прямокутників, що вписані в даний гострокутний трикутник.

✏ **Задача 23.44 (ОМО-2001, 9).** На колі зафіксовано дві точки A, B, а третя точка C рухається по цьому колу. Знайти геометричне місце точок перетину медіан трикутника ABC.

✏ **Задача 23.45 (8–9).** На площині дано точку P і дві паралельні прямі. Побудувати рівносторонній трикутник, одна з вершин якого співпадає з P, а дві інші лежать на цих прямих.

✏ **Задача 23.46 (УМО-2002, 10).** В коло вписано гострокутний трикутник ABC. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте хоча б один вписаний в це коло шестикутник із площею вдвічі більшою, ніж площа трикутника ABC.