

Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

2020 kevad

1 Jaan Kristjan

1. (IMC 2000)

Kas on tõene, et leidub funktsioon $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nii, et f ei oma ühtegi püsipunkti ning on:

- a) monotoonselt kasvav?
- b) monotoonselt kahanev?

2. (IMC 2009)

Kui A, B, C on samat järku ruutmaatriksid ja A on pööratav, siis kas kehtib valem

$$(A - B)C = BA^{-1} \Rightarrow C(A - B) = A^{-1}B$$

3. (VJIMC 2004)

Tähistame tähisega $B(c, r)$ lahtist kera keskpunktiga c ning raadiusega r , mis asub tasandil $\mathbb{R}^2$. Kas leidub tasandil olevate punktide jada (z_n) niiviisi, et lahtiste kerade jada $B(z_n, \frac{1}{n})$, mille liikmed on paarikaupa lõikumatud ning jada (z_n) koondub.

4. (NCUMC 2014)

Tõesta, et eksisteerib täisarv x nii, et arvu e^x kümnendesituse esimesed 100 kohta langevad kokku arvu π esimese saja komakohaga.

2 Jaan Kristjan

1. (VJIMC 2006)

- (a) Olgu u, v kaks nilpotentset elementi kommutatiivses ringis. Näita, et ka $u + v$ on nilpotentne. (a on nilpotentne, kui leidub täisarv n nii, et $a^n = 0$.)
- (b) Too näide mittekommutatiivsest ringist ja nilpotentsetest elementidest u, v nii, et $u + v$ ei oleks nilpotent.

2. (PUTNAM 2002 - originaal)

Sa leiutasid just ajamasina ning esimese asjana liigud 18 aastat tagasi toimunud matemaatika suvepäevadele. Esimese nurga peal kutsub Jüri Lember sind oma uut mängu mängima. Mängus on suvaliselt valitud täisarv n vahemikust $[1, 2002]$ nii, et sina seda ei tea (tõenäosus iga arvu valimiseks on sama). Sa võidad ainult siis, kui arvad arvu n väärtuse ära **paaritu** arvu pakkumistega. Ühel pakkumisel saad valida ühe arvu etteantud vahemikust. Kui pakkusid valesti, saad vihje, kas n on pakutud arvust suurem või väiksem. Järgmise pakkumise pead tegema sealt vahemikust, kus n asub. Võidu korral on auhinnaks 1€, kuid kaotuse korral pead temale 2€ andma. Kas liitud mänguga ning kas see tasub end ära?

3. (TÜMO 2010)

Kas igal reaalmuutuja polünoomil P leidub esitus $P = Q_1 - Q_2$, kus Q_1 ja Q_2 on rangelt kasvavad reaalmuutuja polünoomid?

4. (VJIMC 2013)

Ühendame n -dimensionaalse kuubi kõik tipud omavahel sirglõikudega. Mitu erinevat sirglõikude ristumispunkti juurde tekkis?

3 Jaagup

1. (Putnam 2004 - kohandatud)
Tennisetähe Peeter Oja mänedžer jälgib hooajas esimese N mängu seas võidetud mängu $S(N)$. Hooaja alguses oli $S(N)$ väiksem kui 80% arvust N , aga hooaja lõpuks oli $S(N)$ suurem kui 80% arvust N . Kas tingimata oli hetk, kus $S(N)$ oli täpselt 80% arvust N ?
2. (IMC 2007)
Olgu x, y, z sellised täisarvud, et $S = x^4 + y^4 + z^4$ jagub arvuga 29. Näita, et S jagub arvuga 29^4 .
3. (IMC 2018)
Kas leidub korpus, mille aditiivne rühm ja multiplikatiivne rühm on isomorfsed?
4. (IMC 1999)
Kas leidub selline bijektsioon $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

5. (VJIMC 2000)
Kas leidub loenduv hulk Y ja tema alamhulkadest moodustatud mitteloenduv pere $\mathcal{F}$ nii, et iga erineva $A, B \in \mathcal{F}$ puhul on $A \cap B$ lõplik?

4 Tähvend

1. (IMC 2004)

Olgu $S \subset \mathbb{R}$ lõpmatu. On teada, et iga lõpliku alamhulga $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S$ korral kehtib $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq 1$.

Tõesta, et S on loenduv.

2. (Codeforces 42D — kohandatud)

On antud n tipuga täielik graaf K_n (iga kahe erineva tipu vahel on serv).

Tõesta, et servadele on võimalik määrata kaalud nii, et:

- igal tsüklil, mis läbib iga tippu täpselt ühe korra, on sama kaal;
- servade kaalud on paarikaupa erinevad;
- servade kaalud on täisarvud ja rahuldavad võrratust $1 \leq w \leq 2n^3$.

3. (IMS 2007) Näita, et leidub $S \subset \mathbb{R}^2$ nii, et $\overline{S} = \mathbb{R}^2$ ja hulgas S ei leidu kolme kollineaarset punkti.

5 Urmas

1. (Putnam 1995)

Olgu S korrutamise suhtes kinnine reaalarvude hulk. Olgu T ja U hulga S ühisosata alamhulgad, kusjuures nende ühend on S . Olgu nii, et mistahes kolme arvu (võivad ka võrdsed olla), mis kuuluvad hulka T , korrutis on hulgas T . Sama kehtigu ka hulga U korral. Näidata, et vähemalt üks hulkadest T , U on korrutamise suhtes kinnine.

2. (IMC 2008)

Olgu V kõikide ühe muutuja polünoomide vektorruum üle reaalarvude. Olgu $P: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarkujutus. Mistahes $f, g \in V$ korral kehtigu $P(fg) = 0 \implies P(f) = 0 \vee P(g) = 0$. Tõestada, et leiduvad sellised reaalarvud x_0 ja c , et $P(f) = cf(x_0)$ mistahes $f \in V$ korral.

3. (Putnam 2009)

Olgu S selline ratsionaalarvude hulk, et kehtivad:

- (a) $0 \in S$;
- (b) Kui $x \in S$, siis $x + 1 \in S$ ja $x - 1 \in S$;
- (c) Kui $x \in S$ ja $x \notin \{0, 1\}$, siis $\frac{1}{x(x-1)} \in S$.

Kas S peab sisaldama kõiki ratsionaalarve?

6 Karolina

1. (IMC 1997)

Olgu M pööratav maatriks mõõtmetega $2n \times 2n$. Olgu M ja M^{-1} esitatud kujul

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

kus $A, B, \dots, H$ on $n \times n$ maatriksid. Näidata, et $\det M \cdot \det H = \det A$.

2. (TÜMO 2014)

Olgu P ja Q erinevad reaalmuutuja polünoomid ning kektigu polünoomide võrdsus $P(Q(x)) = Q(P(x))$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Tõestada, et polünoom $P(P(x)) - Q(Q(x))$ jagub polünoomiga $P(x) - Q(x)$.

3. (TÜMO 2013)

Tasandil on antud n punkti. Tõesta, et kehtib üks järgmistest võimalustest:

- kas kõik need punktid asetsevad ühel ja samal sirgel,
- või leidub sirge, mis läbib täpselt 2 punkti.

4. (VJIMC 2015)

Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruv. Tõesta, et leidub $x \in [0, 1]$ selliselt, et

$$f \frac{4}{\pi} (f(1) - f(0)) = (1 + x^2) f'(x).$$

7 Tähvend

1. (CIIM 2010)

Olgu $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ lineaarselt sõltumatud vektorid. Olgu $v * w$ selline $n \times n$ maatriks, mille i -ndal real ja j -ndal veerul on $v_i w_j$. Leia $v * w - w * v$ astak.

2. (VJIMC 2016)

Olgu X hulk ja $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ selline, et mistahes lõikumatute $A, B \in \mathcal{P}(X)$ korral $\mu(A \cup B) = \mu(A) \cup \mu(B)$. Tõesta, et leidub $F \subseteq X$ nii, et $\mu(F) = F$.

3. (AtCoder Grand Contest 031 — kohandatud)

Olgu n positiivne täisarv. Vaatleme arvude $0, 1, \dots, 2^n - 1$ permutatsioone. Leia kõik sellised arvud a ja b , et leidub permutatsioon P , kus

- $P_0 = a$;
- $P_{2^n - 1} = b$;
- mistahes i , $0 \leq i < 2^n - 1$ korral erinevad arvude P_i ja P_{i+1} esitused kahendsüsteemis täpselt ühes kohas.

8 Jaagup

1. (TÜMO 12.05.2017)

Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sellised, et $|\alpha| = |\beta| = 1$ ja $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Tõesta, et $\beta = i\alpha$ või $\beta = -i\alpha$.

2. (TÜMO 12.05.2017)

Olgu G rühm, mis on moodustatud fikseeritud elementide $a, b \in G$ kõikvõimalikest korrutistest, kusjuures $aba = b^3$ ja $b^5 = 1$. Tõesta, et G on Abeli rühm.

3. (IMC 1996)

Olgu arvude $j = 0, \dots, n$ puhul $a_j := a_0 + jd$, kus a_0 ja d on fikseeritud reaalarvud. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Arvuta $|A|$.

4. (IMC 1996 - kohandatud)

Tasandi $\mathbb{R}^2$ alamhulga E ülemine sisu on defineeritud kui arv

$$\mathcal{C}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \text{diam}(E_i) \right\},$$

kus infimum on võetud üle selliste lõpliku arvu ruumi $\mathbb{R}^2$ alamhulkade kogumite, mis katavad ära hulga E (st $E \subset \bigcup_{i=1}^n E_i$).

Hulga E alumine sisu on defineeritud kui arv

$$\mathcal{K}(E) = \sup \{ \text{length}(L) : L \text{ on lõik, millele saab hulga } E \text{ ahendada} \}.$$

Näita, et

- (a) $\mathcal{C}(L) = \text{length}(L)$, kui L on lõik;
- (b) $\mathcal{C}(E) \geq \mathcal{K}(E)$;
- (c) Võrdus punktis (b) ei pruugi kehtida isegi juhul, kui E on kompaktne.

Märkused. Kõik kaugused selles ülesandes on eukleidilised.

Hulga E diameeter on arv $\text{diam}(E) = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in E \}$.

Hulga E ahend hulgale F on selline funktsioon $f: E \rightarrow F$, et $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ iga $x, y \in E$ puhul. Ütleme, et hulka E saab ahendada hulgale F , kui leidub ahend $f: E \rightarrow F$, mis on sürjektiivne.

Hulga E kompaktsuseks on meetrilises ruumis näiteks järgmised samaväärsed tingimused:

- Iga hulga E lahtine kate sisaldab lõpliku alamkatte, st iga $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} E_i$ puhul, kus $E \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} E_i$ ja hulgad E_i on lahtised, leiduvad indeksid $i_1, \dots, i_n \in \mathcal{I}$ nii, et $E \subset \bigcup_{j=1}^n E_{i_j}$.
- Iga hulgas E sisalduv jada sisaldab alamjada, mis koondub hulka E .
- Iga hulga E lõpmatu alamhulk sisaldab kuhjumispunkti, mis asub hulgas E .

Vihje. Olgu $E = T \cup T'$, kus T on kolmnurk tippudega $(-2, 2)$, $(2, 2)$ ja $(0, 4)$ (selline kolmnurk sisaldab ainult tippe ühendavaid külgi, mitte kolmnurga sisemust) ja olgu T' kolmnurga T peegeldus x -telje suhtes. Siis $\mathcal{C}(E) = 8 > \mathcal{K}(E)$.

9 Urmas

1. (Putnam 2002)

Olgu meil sfäär, millel on viis punkti. Tõestada, et leidub selline kinnine poolsfäär, millel asub nendest viiest vähemalt neli.

2. (IMC 1995)

Olgu X regulaarne maatriks veeruvektoritega $X_1, X_2, \dots, X_n$. Olgu Y maatriks, mille veeruvektorid on $X_2, X_3, \dots, X_n, 0$.

Näidata, et maatriksite $A = YX^{-1}$ ja $B = X^{-1}Y$ astakud on $n - 1$ ja nende ainsad omaväärtused on nullid.

3. (TÜMO 2012)

Olgu n naturaalarv. Olgu

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$$

Leida $f^{(n)}(0)$.

4. (IMC 1995)

Olgu A ja B $n \times n$ maatriksid. Eeldame, et leiduvad $n+1$ erinevat reaalarvu $t_1, \dots, t_{n+1}$ selliselt, et mistahes $i \in \{1, \dots, n+1\}$ korral on maatriksid

$$C_i = A + t_i B$$

nilpotentsed ($C_i^n = 0$).

Näidata, et maatriksid A ja B on nilpotentsed.

10 Karolina

1. (Putnam 1997)

Tähistagu N_n selliste naturaalarvudest koosnevate järjestite $(a_1, \dots, a_n)$ arvu, mille korral

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Kas N_{10} on paaritu või paaris?

2. (Putnam 1997 - kohandatud)

Töölised otsustavad töörahva püha puhul mängida ühte mängu. Töölised $1, 2, 3, \dots, n$ istuvad ümber laua ja igal töölisel on üks sent. Tööline 1 annab ühe sendi töölisele 2, kes annab 2 senti töölisele 3, kes annab ühe sendi töölisele 4, kes annab 2 senti töölisele 5, ja nii edasi. Iga tööline annab vastavalt üks või kaks senti järgmisele töölisele, kellel pole veel sendid otsa saanud. Kui töölisel saavad sendid otsa, siis on ta mängust väljas ja lahkub. Leia lõpmatu palju arve n , nii et n töölise korral saab üks tööline endale kõik sendid.

3. (VJIMC 2013)

Olgu $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ kaks 10×10 maatriksit selliselt, et $a_{ij} = b_{ij} + 1$ iga i, j korral ning $A^3 = 0$. Tõesta, et maatriksi B determinant on 0.

4. (Putnam 2003)

Kas saab leida sellised polünoomid $a(x), b(x), c(y), d(y)$ nii, et kehtiks samasus

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)?$$

11 Kati

1. (PUTNAM 2008 muudetud) Anna ja Brita mängivad järgmist mängu. Alguses on 2020×2020 ruudustik tühi. Anna alustab ning igal käigul valib mängija reaalarvu ja kirjutab selle tühja ruutu. Mäng lõppeb, kui ruudustik on täidetud. Anna võidab, kui tekkinud maatriksi determinant on nullist erinev, Brita võidab kui determinant on null. Kummal mängijatest on võitev strateegia?
2. (PUTNAM 2000) Tõesta, et leidub lõpmata palju täisarve n nii, et n , $n+1$ ja $n+2$ avalduvad kõik kahe täisruudu summana (näiteks $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 1^2 + 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2$).
3. (PUTNAM 2004). Olgu m, n positiivsed täisarvud. Tõesta, et

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

4. (TÜ 2016) Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv, kusjuures

$$f(0)^2 + (f'(0))^2 = 4.$$

Tõesta, et leidub $x_0 \in \mathbb{R}$, mille korral

$$f(x_0) + f''(x_0) = 0.$$

12 Kati

1. (VJIMC 2019) Olgu A mittetühi hulk ja $*$: $A \times A \rightarrow A$ assotsiatiivne tehe.

(a) Kehtigu

$$x * x * y = y \quad \text{ja} \quad y * x * x = y, \quad \forall x, y \in A$$

Kas sellest järeldeb, et $*$ on kommutatiivne?

(b) Kehtigu

$$x * x * y = y \quad \forall x, y \in A$$

Kas sellest järeldeb, et $*$ on kommutatiivne?

2. (PUTNAM 2014) Olgu täisarvu N esituseks liig-kümnendsüsteemis avaldis:

$$N = d_k 10^k + d_{k-1} 10^{k-1} + \dots + d_0 10^0$$

kus $d_k \neq 0$ ja $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ iga i korral. Näiteks arvul 10 on liig-kümnendsüsteemis kaks esitust $10 = 10 \cdot 10^0$ ja tavaline kümnendsüsteemi esitus $10 = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$. Millistel positiivsetel täisarvudel on täpselt üks esitus liig-kümnendsüsteemis?

3. (PUTNAM 2015) Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kolm korda diferentseeruv funktsioon, millel on vähemalt viis erinevat nullkohta. Tõestada, et funktsioonil $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ on vähemalt kaks erinevat nullkohta.
4. (PUTNAM 2013) Olgu positiivsete täisarvude n korral määratud suurus $c(n)$ järgmiselt: $c(1) = 1$, $c(2n) = c(n)$ ja $c(2n+1) = (-1)^n c(n)$. Leida järgmise avaldise väärtus:

$$\sum_{n=1}^{2013} c(n)c(n+2)$$