Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest II

Sügis 2015

1 Heiki I

1. Tõestage, et
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2.$$
2. Olgu $0 < a < b$. Tõestage, et
$$\int_a^b (x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}.$$
3. Otsustage järgmiste väidete kohta, kas nad kehtivad kõigi funktsioonide $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korral:
   (a) kui f on pidev ja $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, siis f on monotoonne;
   (b) kui f on monotoonne ja $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, siis f on pidev;
   (c) kui f on monotoonne ja pidev, siis $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
4. Tõestage, et piisavalt suure n korral saab ühikruudu tükeldada n väiksemaks ruuduks.

2 Heiki II

1. Olgu $A = (a_{ij})$ $n \times n$-maatriks, kusjuures $a_{ij} = (n-1)i + j$, st. maatriksi esimene rida on 1, 2, ..., n, teine rida on $n+1$, ..., $2n$ jne. Valime n arvu $j_1, \dots, j_n$ nii, et $\{1, 2, \dots, n\} = \{j_1, \dots, j_n\}$. Leidke summa
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_i}$$
kõik võimalikud väärtused.

2. Olgu $0 = \nu_0 \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1, \ldots, \nu_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ sellised, et iga $i, j = 0, \ldots, n+1$ korral $|\nu_i - \nu_j| \in \mathbb{Q}$. Tõestage, et leiduvad $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ nii, et
$$a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2 \neq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} a_i \nu_i = 0.$$
3. Olgu funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv, kusjuures $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ ning iga $x \in [0, \infty)$ korral $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geqslant 0$. Tõestage, et
$$\forall x \in [0, \infty) \quad f(x) \geqslant 3\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{3x}.$$
4. Olgu $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ sellised punktid, et iga i ja j korral leidub k omadusega: x_i, x_j, x_k on ühel ja samal sirgel. Tõestage, et kõik punktid asuvad ühel ja samal sirgel.

3 Aleksei I

1. Tõesta, et
$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2 \ln^2(1+x)}dx \geqslant \sqrt{\frac{17}{16}}.$$
2. Olgu p polünoom astmega $n \geqslant 1$ ja leidugu $a \in \mathbb{R}$ nii, et
$$p(a) + \frac{p''(a)}{2!} + \frac{p^{(4)}(a)}{4!} + \cdots + \frac{p^{(2n)}(a)}{(2n)!} = 0.$$
Tõesta, et leidub $b \in \mathbb{R}$ nii, et $p(b) = 0$.
3. Arvuta
$$\lim_n \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1}.$$
4. Arvuta
$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{1+x^5} dx \right).$$

4 Aleksei II

1. Olgu $u_n \in \mathbb{R}$ ja $\sum_1^\infty u_n^2 < \infty$. Tõesta, et $\sum_1^\infty \frac{u_n}{n} < \infty$.
2. Olgu $a_k \geqslant 0$ ja kehtigu
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$
iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõesta, et
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 2ea_1.$$

3. Olgu funktsioonid f, h ja g pidevad lõigus $[a,b]$ ja diferentseeruvad vahemikus (a,b). Tõesta, et leidub $\xi \in (a,b)$ nii, et
$$\begin{vmatrix} f(a) & h(a) & g(a) \\ f(b) & h(b) & g(b) \\ f'(\xi) & h'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

4. Olgu P polünoom, kusjuures $\deg P \leqslant 2n$ ja $|P(k)| \leqslant 1$ iga $k \in \mathbb{Z} \cap [-n,n]$ korral. Tõesta, et iga $x \in [-n,n]$ korral $|P(x)| \leqslant 2^{2n}$.

5. Tõesta, et
$$\sum_{\substack{m,n \geqslant 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{mn|m-n|} < \infty.$$

5 Indrek

1. Arvutage:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}.$$

2. Olgu T lineaarteisendus vektorruumil V. Olgu $x \in V$ selline, et $T^m x = 0$ ning $T^{m-1}x \neq 0$ mingi naturaalarvu m jaoks. Tõestage, et vektorsüsteem $x, Tx, \ldots, T^{m-1}x$ on lineaarselt sõltumatu.

3. Olgu $*$ kommutatiivne ja assotsiatiivne kahekohaline algebraline tehe hulgal S. Iga $x, y \in S$ korral leidugu $z \in S$ nii, et $x * z = y$. (Element z võib sõltuda elementidest x ja y.) Tõestage, et kui $a, b, c \in S$ ning $a * c = b * c$, siis $a = b$.

4. Olgu p, q, r ja s polünoomid, mille aste on ülimalt 3. Kas mõni järgmistest tingimustest on piisav selleks, et polünoomid oleks lineaarselt sõltuvad?
1) Kohal 1 on kõigi polünoomide väärtus 0.
2) Kohal 0 on kõigi polünoomide väärtus 1.

5. Olgu r, s ja t paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud. Olgu a ja b kommutatiivse multiplikatiivse rühma elemendid, olgu rühma ühikelement e ning kehtigu võrdused $a^r = b^s = (ab)^t = e$. Tõestage, et $a = b = e$. Kas ülesande väide kehtib ka mittekommutatiivse rühma korral?

6 Janno

1. Olgu $A = (a_{ij})$ $n \times n$-maatriks, kus
$$a_{ij} = \frac{1}{\min(i,j)}.$$
Leia $\det(A)$.

2. Iga positiivse täisarvu N saab avaldada kujul

$$N = d_k 10^k + d_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + d_0 10^0$$

kus $d_k \neq 0$ ja $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ iga i korral. Millistel positiivsetel täisarvudel on see esitus ühene?

3. Tõesta, et iga hulga $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ korral leidub hulk $S \subset X$ ja täisarv m nii, et $S \neq \emptyset$ ja

$$\left| m + \sum_{s \in S} s \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

4. Olgu $p(x) = x^5 + x$ ja $q(x) = x^5 + x^2$. Leia kõik kompleksarvude paarid (w, z), kus $w \neq z$ ja $p(w) = p(z)$ ning $q(w) = q(z)$.

5. Olgu $x_0 = 1$ ja $x_n = 3x_{n-1} + \lfloor \sqrt{5} x_{n-1} \rfloor$ iga $n \geqslant 1$ korral. Leia x_{2015}.

7 Andres

Lihtsad:

1. Kuubi igale tahule on kirjutatud mingi positiivne täisarv. Igasse tippu on kirjutatud nende kolme tahu arvude korrutis, mis saavad selles tipus kokku. Tippudel olevate arvude summa on 1001. Leia tahkudel olevate arvude summa.

2. $P(x)$ on mittenegatiivsete kordajatega polünoom. Tõestada, et $Q(x) = P(x)P(\frac{1}{x}) \geq 1$ iga positiivse x jaoks, kui $Q(1) \geq 1$

Raskemad:

3. 25 inimest käivad koosolekutel. Mitu koosolekut on maksimaalselt võimalik teha, kui on täidetud järgnevad tingimused:

   (a) Igal koosolekul on erinev inimeste kombinatsioon.

   (b) Kui vaadata ühe koosoleku inimesi, siis alati leidub iga eelneva koosoleku jaoks üks inimene (võib iga eelneva koosoleku jaoks olla erinev), kes on sellel eelneval koosolekul käinud ja teab teistele rääkida, mis seal toimus.

4. Pakis on N kaarti. Võetakse K esimest kaarti, $1 \leq K \leq N$, ja pannakse need tagurpidi järjestues paki lõppu. Tõestada, et vähem kui $\left(\frac{2N}{K}\right)^2$ sellise operatsiooniga saame esialgse järjestuse tagasi.

5. A, B, C on ruutmaatriksid, A on pööratav. Tõestada, et kui $(A - B)C = BA^{-1}$, siis sellest järeldub, et $C(A - B) = A^{-1}B$.

8 Võistlus I

1. Leia piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}.$$

2. Olgu funktsioon f positiivne ja pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,\infty)$. Tõesta, et

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)} dx = \infty.$$

3. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et

$$\frac{1}{4n^2} < \min_{m\in\mathbb{Z}} \left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{2n}.$$

4. Olgu $x \in \mathbb{R}$. Leia piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}.$$

9 Johanna

1. Olgu funktsioon f reaalteljel kaks korda pidevalt diferentseeruv. Tõestada, et suvalise $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

2. Leida järgmine piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} e^n}.$$

3. Leida integraal, kus $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x} \mathrm{d}x.$$

10 Triinu

1. Olgu A ja B sellised $n \times n$ maatriksid, et $AB + A + B = 0$. Tõesta, et $AB = BA$.

2. Olgu S selline ratsionaalarvude hulk, et

   (a) $0 \in S$

   (b) Kui $x \in S$, siis $x+1 \in S$ ja $x-1 \in S$

   (c) Kui $x \in S$, $x \neq 0$ ja $x \neq 1$, siis $\frac{1}{x(x-1)} \in S$

   Kas S sisaldab kõiki ratsionaalarve?

3. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud $n, k_1, \ldots, k_n$, et $k_1+\ldots+k_n = 5n+4$ ja $\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = 1$

4. (a) Kas leidub selline lõplik reaalarvude hulk A, milles on vähemalt 4 elementi ja tema suvaliste paarikaupa erinevate elementide a, b, c, d korral ka $ab + cd \in A$?

   (b) Kas leidub positiivsete reaalarvude hulk A, mis rahuldab samu tingimusi?

11 Roman

1. Leida $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Millise $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ korral arvrida $(x-1) + (\sqrt{x}-1) + \sqrt[3]{x}-1) + \ldots$ koondub?

3. Arvutada $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$.

4. Arvutada $\int\limits_0^\pi \ln(1 - 2a\cos x + a^2)dx$.

12 Võistlus II

1. Arvuta
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(4 - \sum_{n=1}^{k} \frac{2n}{2^n} \right).$$

2. Leia kõik funktsioonid $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad tingimust
$$f(x) = f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})$$
   iga $x \in [0,1]$ korral, kui

   (a) f on 2 korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[0,1]$,

   (b) f on pidevalt diferentseeruv lõigus $[0,1]$.

3. Kas päratu integraal
$$\int_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx$$
   koondub?

4. Olgu A ruutmaatriks $n \times n$, kusjuures

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mingi $k \geqslant 1$ korral. Tõesta, et $|E - A| \neq 0$.

13 Aleksis

1. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfying $f(x) + 2f(f(x) = 3n + 5$ for all $n \in \mathbb{N}$
2. Find the following limit

$$\lim_{n\to\infty} (n + 1 + n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$$

3. In Determinant Tic-Tac-Toe, Player 1 enters a 1 in an empty 3×3 matrix. Player 0 counters with a 0 in a vacant position, and play continues in turn until the 3×3 matrix is completed with five 1's and four 0's. Player 0 wins if the determinant is 0 and player 1 wins otherwise. Assuming both players pursue optimal strategies, who will win and how?
4. Prove that there exist infinitely many integers n such that n,$n + 1$,$n + 2$ are each the sum of the squares of two integers. [Example: $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2$.]