Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest III

Kevad 2016

1 Aleksei

1. Olgu $A = (a_{ij})$ ruutmaatriks suurusega $n \times n$, kusjuures

$$a_{i,j} = \frac{1}{\min(i,j)}.$$

Arvuta $\det(A)$.

2. Olgu $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, kusjuures kõikide u, v, w korral

$$F(u,0) = u,\ F(u,u) = 0, F(F(u,w), F(v,w)) = F(u,v).$$

Tõesta, et leidub rangelt monotoonne funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et

$$f(x-y) = F(f(x), f(y))$$

kõikide $x, y \in \mathbb{R}$ korral.

2 Andres

1. $P(x) = x^2 - 1$. Mitu reaalset nullkohta on polünoomil $\underbrace{P(P(...(P}_{n}(x))...))$?

2. S_n on n esimese algarvu summa. Tõesta, et iga S_n ja S_{n+1} vahel leidub täisarvu ruut ehk leidub $k \in \mathbb{Z}$, et $S_n < k^2 < S_{n+1}$.

3. $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)dx$ ja $J(f) = \int_0^1 x(f(x))^2 dx$. Leia $I(f) - J(f)$ maksimaalne väärtus, kus $f(x)$ võib olla suvaline pidev funktsioon.

3 Johanna

1. Tehke kindlaks kolmnurkade ABC arv, mis rahuldavad kõiki järgmisi tingimusi:
   (a) $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$
   (b) $0 \in \{A, B, C\}$
   (c) ABC on võrdhaarne
   (d) ABC pindala on 9

2. Neljanda astme polünoomi $p(x)$ nullkohad moodustavad komplekstasandil rombi. Tõestada, et polünoomi $p'(x)$ nullkohad asuvad selle rombi pikemal diagonaalil.

3. Olgu $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ sellised, et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1$. Leia $ac + bd + ce + da + eb$ vähim väärtus.

4 Triinu

1. Kas on võimalik lõpmatu malelaua igasse ruutu paigutada üks positiivne ratsionaalarv nii, et iga rea ja veeru summa on lõplik ja iga rasionaalarv esineb täpselt ühe korra?

2. Olgu A selline $n \times n$ maatriks, et $a_{ij} = i + j$, iga $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Mis on A astak?

3. Kas leidub pidevalt diferentseeruv funktsioon f sedasi, et iga $x \in$ korral $f(x) > 0$ ja $f'(x) = f(f(x))$?

4. Olgu a ja b fikseeritud positiivsed ühistegurita täisarvud. Siis iga täisarvu n jaoks leiduvad x ja y sedasi, et $n = ax + by$. Tõesta, et $n = ab$ on suurim täisarv, mille jaoks $xy <= 0$ kõigi selliste n esituste korral.

5 Andre

1. Olgu X hulk ja $\mathcal{P}(X)$ tema kõigi alamhulkade hulk. Olgu kujutus $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ selline, et $\mu(A \cup B) = \mu(A) \cup \mu(B)$ hulga X mistahes lõikumatute alamhulkade A ja B korral. Tõesta, et leidub hulk $F \subset X$ nii, et $\mu(F) = F$.

2. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$. Tõesta, et
$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \frac{n!}{n^n}$$

3. Leia kõik sellised funktsioonid $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, mis iga $x \in \mathbb{Z}$ korral rahuldavad tingimust
$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x.$$