Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2017

1 Aleksei

1. Tõesta, et
$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2 \ln^2(1+x)}dx \geq \sqrt{\frac{17}{16}}.$$

2. Olgu A ja B sellised $n \times n$ maatriksid, et $AB + A + B = 0$. Tõesta, et $AB = BA$.

3. Olgu funktsioon f reaalteljel kaks korda pidevalt diferentseeruv. Tõestada, et suvalise $a \in \mathbb{R}$ korral
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

4. Kontrolltööd kirjutas n tudengit. Seejärel lektor kogus kõik tööd kokku ja jagas suvaliselt tudengite vahel, et nad ise parandaksid üksteise töid. Olgu $P(n)$ tõenäosus, et vähemalt üks tudeng parandab iseenda tööd. Leia $\lim_{n\to\infty} P(n)$.

2 Jaagup

1. Olgu (a_n) jada, kus
$$a_1 = A, \quad a_2 = B, \quad (0 < B < A); \quad \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$$
Tõestada, et jada (a_n) koondub ja leida selle piirväärtus.

2. Olgu $f : [0,1] \to [0,1]$
   (a) monotoonselt kasvav
   (b) monotoonselt kahanev

   Kas leidub $x \in [0,1]$ nii, et $f(x) = x$?

3. Olgu S selline lõpmatu reaalarvude hulk, et mistahes lõpliku alamhulga $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ puhul $|s_1 + s_2 + \ldots + s_k| < 1$. Tõestage, et S on loenduv.

4. Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv ning olgu

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = -2, \quad f(1) = 1$$

Tõestage, et $\exists \xi \in (0, 1)$ nii, et

$$f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0$$

3 Janno

1. Leia kõik polünoomid $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$, mis iga x korral rahuldavad võrdust

$$|f(x)| - |g(x)| + h(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ 3x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ -2x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

2. Kolmnurga ABC nurk $\angle C$ on täisnurk, külje AC pikkus on 1 ja $\angle A = \alpha$. Küljel AB valitakse punkt D nii, et $|AC| = |AD|$. Küljel BC valitakse punkt E nii, et $\angle CDE = \alpha$. Küljele BC punktist E tõmmatud ristlõik lõikub küljega AB punktis F. Leia $\lim_{\alpha \to 0} |EF|$.

3. Olgu s ühikringjoone kaar, mis asub täielikult esimeses veerandis. Piirkonna, mis asub kaarest s allpool ja x–teljest üleval pool, pindala olgu A. Piirkonna, mis asub kaarest s vasakul ja y–teljest paremal, pindala olgu B. Tõesta, et $A + B$ sõltub ainult kaare s pikkusest ega ei sõltu kaare asukohast.

4. Olgu p algarv ja Z_p jäägiklasside hulk mooduli p järgi. Vaatleme polünoome, mille kordajad on hulgast Z_p. On teada, et hulgas W on polünoomid $x + 1$ ja $x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x^2 + 2x + 1$. Lisaks on teada, et kui $h_1(x)$ ja $h_2(x)$ on hulgas W, siis on ka polünoomi $h_1(h_2(x))$ jagamisel polünoomiga $x^p - x$ tekkiv jääk selles hulgas. Leia hulga W väikseim võimalik suurus.

4 Andre

1. Kas leidub bijektsioon $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

2. Olgu V vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$ ja $f, f_1, \ldots, f_k$ lineaarteisendused $V \to \mathbb{R}$. Olgu $f(x) = 0$, kui $f_1(x) = \ldots = f_k(x)$. Tõesta, et f on $f_1, \ldots, f_k$ lineaarkombinatsioon, st leiduvad $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nii, et

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i.$$

3. Tõesta, et ei leidu sellist funktsiooni $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ nii, et $f^2(x) \geq f(x+y)\big(f(x)+y\big)$ iga $x, y > 0$ korral.

5 Alvin ja Triin

1. (T) Olgu $k, n \in \mathbb{N}$ sellised, et $k \leq n-1$. Olgu $S := \{1, 2, \ldots, n\}$ ja olgu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ hulga S mittetühjad alamhulgad. Tõesta, et on võimalik värvida mõned hulga S elemendid, kasutades kaht värvi, punast ja sinist, nii et kehtivad järgmised tingimused:

   (i) Iga element hulgast S on värvimata või on värvitud punaseks või siniseks.

   (ii) Vähemalt üks hulga S element on värvitud.

   (iii) Iga hulk A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ on täielikult värvimata või sisaldab vähemalt ühte punast ja vähemalt ühte sinist elementi.

2. (T) Olgu $\mathbb{R}^+$ kõigi positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, mille jaoks iga $x, y \in \mathbb{R}^+$ korral

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y).$$

3. (A) Olgu juhuslikult valitud kolm tippu regulaarse $2n+1$-küljelise hulknurga tippude hulgast. Leida tõenäosus, et valitud tippudest moodustatud kolmnurga sisemus sisaldab hulknurga keskpunkti kui iga tipu valik on võrdtõenäone.

4. (A) Olgu R ring karakteristikaga 0. Leidugu idempotendid $e, f, g \in R$ nii, et $e + f + g = 0$. Tõestada, et $e = f = g = 0$.

5. (A, T) Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorid m-dimensionaalses Eukleidilises ruumis, mille korral $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0$. Näita, et leidub hulga $\{1, 2, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, permutatsioon π, mille korral

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \qquad \forall\, n = 1, 2, \ldots, k.$$

Märgime, et $\|\cdot\|$ tähistab Eukleidilist normi.

6 Oliver

1. Olgu a_n, b_n hajuvad jadad, kuid $a_n + b_n$, $a_n b_n$ koonduvad jadad. Tõesta, et jadade a_n, b_n kuhjumispunktide hulgad on samad ja koosnevad kahest punktist.

2. Olgu k, n positiivsed täisarvud. Polünoomid $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ on defineeritud järgmiselt:
$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$
$$g(x) = x^{2k} - x^k + 1$$
$$h(x) = x^{2k} + x^k + 1$$
Tõesta, et kui $g(x)$ jagab $f(x)$, siis ka $h(x)$ jagab $f(x)$.

3. Olgu p algarv. Kutsume positiivset täisarvu n *huvitavaks*, kui
$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$$
mingite täisarvuliste kordajatega polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ jaoks.

   a) Tõesta, et arv $p^p - 1$ on *huvitav*.

   b) Milliste algarvude p jaoks on $p^p - 1$ kõige väiksem *huvitav* arv?

4. Olgu antud täisarvud a, b ja positiivne täisarv n. Tõesta, et kui hulk
$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$
on lõplik, siis $n = 1$.

7 Andres

1. Vaatame kõikidest $n \times n$ maatriksitest koosnevat lineaarset ruumi. Mis on selle ruumi suurima dimensiooniga alamruum V, et
$$\forall X, Y \in V \quad \mathrm{trace}(XY) = 0.$$

2. Leia kõik polünoomid $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$, mis rahuldavad kahte järgnevat tingimust

   (a) $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ on permutatsioon arvudest $(0, 1, \ldots, n)$.

   (b) polünoomi $P(x)$ nullkohad on ratsionaalarvud.

3. Täisarvu $n \geq 3$ jaoks defineerime kolm hulka
$$S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall i \; x_i \in \{0, 1, 2\}\},$$
$$A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n : \forall i < n - 2 \; |\{x_0, x_1, x_2\}| \neq 1\},$$

$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n : \forall i < n-1 \ (x_i = x_{i+1} \to x_i \neq 0)\}.$$

Hulk S_n koosneb seega kõikvõimalikest n elemendiga nö vektorist, kus iga element on kas 0,1 või 2. Hulk A_n koosneb kõigist hulga S_n liikmetest, kus ei ole järjest kolm arvu samad. Hulk B_n koosneb kõigist hulga S_n liikmetest, kus ei ole järjest kahte nulli. Tõesta, et $|A_{n+1}| = 3|B_n|$ (siin $|\ldots|$ tähistab hulga liikmete arvu).

4. Leia kõik $r > 0$ nii, et iga suvalise diferentseeruva funktsiooni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mille jaoks kehtib $|\mathrm{grad} f(0,0)| = 1$ ja $|\mathrm{grad} f(u) - \mathrm{grad} f(v)| \leq |u - v|$ kõikide $u, v \in \mathbb{R}^2$, siis selle suvalise aga eelnevaid tingimusi rahuldava funktsiooni f maksimum piirkonnas $\{u \in \mathbb{R}^2 : |u| \leq r\}$ on ainult ühes punktis. ($|\ldots|$ tähistab vektorite pikkusi, grad on gradient)

8 Georg

1. Olgu $f(x)$ kaks korda diferentseeruv paarisfunktsioon nii, et $f''(0) \neq 0$. Tõesta, et $f(x)$ omab lokaalset ekstreemumit kohal $x = 0$.

2. Olgu $0 < a < b$. Tõesta, et

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

3. Olgu meil pakk $2n$ kaardiga. Iga segamine muudab järjestuse $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ järjestuseks $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$. Leia kõik paarisarvud $2n$ nii, et peale paki segamist 8 korda, on tagasi saadud algne järjestus.

4. Olgu $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Nimetame punkti x *varipunktiks*, kui eksisteerib punkt $y \in \mathbb{R}$, $y > x$ nii, et $f(y) > f(x)$. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja eeldame, et

   - kõik punktid avatud intervallis $I = (a, b)$ on varipunktid;
   - a ja b ei ole varipunktid.

   Tõesta, et

   (a) $f(x) \leq f(b)$ iga $a < x < b$ korral;

   (b) $f(a) = f(b)$.

9 Triinu

1. Olgu f täisarvuliste kordajatega teise astme polünoom. Eeldame, et $f(k)$ jagub 5-ga iga täisarvulise k korral. Tõesta, et kõik f kordajad jaguvad 5-ga.

2. Kehtigu funktsiooni $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ korral tingimused $f(1) = 1$ ja
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2} \quad \forall x \in [1,\infty)$$
Tõestage, et
$$a := \lim_{x\to\infty} f(x)$$
eksisteerib, kusjuures $a < 1 + \frac{\pi}{4}$

3. Arvuta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$$

4. Olgu S hulk, mis sisaldab kõiki positiivseid täisarve n, mille korral $n! + 1$ jagab $(2012n)!$. Kas S on lõplik?

10 Markus

1. Olgu $P(x) = ax^2 + bx + c$, kus $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seejuures $0 \le P(-1) \le 1$, $0 \le P(0) \le 1$, $0 \le P(1) \le 1$. Tõesta et $P(x) \le \frac{9}{8}$ iga $x \in [0,1]$ korral

2. Tasandil on antud n punkti. Tõestada, et kehtib üks kahest võimalusest:
   - kas kõik need punktid asetsevad ühel ja samal sirgel,
   - või leidub sirge, mis läbib täpselt 2 punkti.

3. Olgu P ja Q erinevad reaalmuutuja polünoomid ning kehtigu polünoomide võrdus $P(Q(x)) = Q(P(x))$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Tõesta, et polünoom $P(P(x)) - Q(Q(x))$ jagub polünoomiga $P(x) - Q(x)$

4. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud, mis rahuldaavad tingimusi $min(a + b, b + c, c + a) \ge \sqrt{2}$ ja $a^2 + b^2c^2 = 3$. Tõesta, et
$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \ge \frac{3}{(abc)^2}$$

11 Oskar

1. Olgu meil selline pidevalt diferentseeruv funktsioon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, et $f(0) = f(1) = 0$ ja $f(a) = \sqrt{3}$ mõne $a \in (0,1)$ korral. Tõesta, et funktsiooni f kahest puutujast ja x-teljest saab moodustada võrdkülgse kolmnurga.

2. Katil on ringi kujuline võtmehoidja n võtmega. Võttes taskust võtmehoidja, ta ei tea, mis pidi on võtmehoidja ennast taskus pööranud. Võtmete eristamiseks otsustas Kati iga võtme ära värvida. Mis on minimaalne vajaminev värvide arv?

3. Olgu meil selline kuuendat järku polünoom, mis on puutujaks sirgele kolmes punktis: A_1, A_2 ja A_3, kus A_2 paikneb A_1 ja A_3 vahel.

   (a) Tõesta, et kui lõikude A_1A_2 ja A_2A_3 pikkused on võrdsed, siis polünoomi ja lõikude vahelised pindalad on võrdsed.

   (b) Olgu $k = \frac{A_2A_3}{A_1A_2}$ ja K vastavate pindalade suhe. Tõesta, et

$$\frac{2}{7}k^5 < K < \frac{7}{2}k^5$$