Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2018

1 Oliver

1. Putnam 2013 A1

   Igale ikosaeedri tahule on kirjutatud mittenegatiivne täisarv. Kõikidel tahkudel olevate arvude summa on 39. Näidata, et leidub kaks tahku, millel on ühine tipp ja millele on kirjutatud sama arv.

2. Putnam 2015 B2

   On antud kõigi naturaalarvude jada. Viime korduvalt läbi järgmist operatsiooni: Võtame jada kolm esimest liiget ja kustutame jadast need liikmed ja nende summa. Esimesel sammul kustutame $1, 2, 3, 6$, teisel sammul $4, 5, 7, 16$. Paneme kirja uue jada, milles on igal sammul vaadeldud summad $6, 16, \ldots$ Kas selles jadas leidub arv, mille esitus kümnendsüsteemis lõppeb numbritega 2015?

3. IMC 2017 1. päev 2. ülesanne

   Olgu $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ diferentseeruv funktsioon. Eeldada, et f' on Lipschitzi mõttes pidev ehk leidub $L > 0$ selliselt, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral

   $$|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|.$$

   Tõestada, et iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks kehtib

   $$(f'(x))^2 < 2Lf(x).$$

4. VJIMC 2012 II kategooria 3. ülesanne

   Olgu $(R, +, \cdot)$ ühikuga ring. Kehtib tingimus: iga $x \in R$ korral $x^2 = 1$ või $x^n = 0$ mingi naturaalarvu n jaoks. Näidata, et R on kommutatiivne ring.

2 Oskar

1. VJIMC 1996 II kategooria 3. ülesanne (modifitseeritud)

   Tähistagu cif(x) arvu x numbrite summat kümnendsüsteemis. Olgu $a_1 = 2018^{2012^{2006}}$ ja $a_{n+1} =$cif(a_n). Leida $\lim\limits_{n\to\infty} \text{cif}(a_n)$.

2. IMC 1994 1. päeva 3. ülesanne

   Olgu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja lineaarsed kujutused $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sellised, et $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.

   a) Näita, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$.

   b) Näita, et leidub $k \geq 1$ nii, et $F^k = 0$.

3. IMC 1995 2. päeva 3. ülesanne

   Olgu f kaks korda diferentseeruv funktsioon vahemikus $(0, +\infty)$ nii, et $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0+} f''(x) = +\infty$. Näidata, et kehtib

   $$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

4. Putnam 2005 B4

   Iga naturaalarvu m ja n korral tähistagu $f(m, n)$ täisarvudest koonsevate n-korteežide $(x_1, .., x_n)$ arvu, kus korteežid rahuldavad tingimust:

   $$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq m.$$

   Näidata, et $f(m, n) = f(n, m)$.

3 Tähvend

1. CSAcademy Round #67, 3. ülesanne (kohandatud)

   On antud lõplik sõne, mis koosneb sümbolitest 0 ja 1. Kaks mängijat mängivad sellega mängu, kus mängijad käivad vaheldumisi. Iga käik võtab üks mängija ühe sufiksi, mis algab sümboliga 1 ja muudab selles kõik ühed nullideks. ning nullid ühtedeks. Kaotab see, kes käiku teha ei saa.

   Leida kõik sõned, mille korral esimesel mängijal on võitev strateegia.

2. Putnam 2002 A5

   Defineerime jada $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nii, et $a_0 = 1$ ja iga täisarvu $n \geqslant 0$ korral kehtivad:

   - $a_{2n+1} = a_n$;
   - $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$.

   Tõestada, et hulk

   $$\left\{ \frac{a_{n-1}}{a_n} \colon n \geqslant 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \dots \right\}$$

   sisaldab kõiki positiivseid ratsionaalarve.

3. IMC 2000 1. päeva 5. ülesanne

   Olgu R ring, mille karakteristika on 0. Olgu $e, f, g \in R$ sellised, et $e^2 = e$; $f^2 = f$; $g^2 = g$ (e, f, g on idempotendid) ja $e + f + g = 0$. Näidata, et $e = f = g = 0$.h

   (Öeldakse, et ringi R karakteristika on 0, kui iga $a \in R$ korral, kui $a \neq 0$, kehtib $na \neq 0$ iga naturaalarvu n jaoks)

4. IMO 2017 2. päeva 2. ülesanne

   Olgu antud täisarv $N \geqslant 2$. Rivis seisab $N(N + 1)$ jalgpallimängijat, kõik erinevate pikkustega. Aksu tahab rivist eemaldada $N(N - 1)$ mängijat, nii et järelejäänud $2N$ mängijast koosnevas rivis kehtivad järgmised N tingimust:

   (1) kahe pikima mängija vahel pole ühtki teist mängijat;
   (2) pikkuselt 3. ja 4. mängija vahel pole ühtki teist mängijat;
   ⋮
   (N) kahe lühima mängija vahel pole ühtki teist mängijat.

   Näidata, et see on alati võimalik.

4 Jaan Kristjan

1. Putnam 1998 B2

   Olgu meil antud punkt (a, b) teades, et 0<b<a. Leida minimaalse kolmnurga ümbermõõt, mis on konstrueeritud järgnevalt:
   1. üks tipp asub punktis (a,b)
   2. teine tipp asub x-teljel
   3. kolmas tipp asub sirgel $y = x$.

   Võib eeldada, et minimaalse ümbermõõduga kolmnurk eksisteerib.

2. IMC eelvoor 2012, 5. Ülesanne

   Olgu $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. Leida $f^{(n)}(0)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

3. Putnam 1985 A5

   Olgu $I_m = \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(mx)\mathrm{d}x$. Leida sellised täisarvud $m, 1 \leq m \leq 10$, mille korral $I_m \neq 0$.

4. IMC 2008 2.päev 2.ülesanne

   Olgu meil antud kaks erinevat ellipsit nii, et esimese ellipsi ühe fookuse asukoht kattub teise ellipsi mingi fookuse asukohaga. Tõesta, et antud ellipsitel on ülimalt kaks lõikepunkti.

5 Hartvig

1. IMC 2016 1. päeva 3. ülesanne

   Olgu n positiivne täisarv ning $a_1, a_2, \ldots a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots b_n$ reaalarvud nii, et $a_i + b_i > 0$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Tõestada võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i - b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

2. Putnam 2013 A2

   Olgu S kõikide positiivsete täisarvude hulk, mis pole täisruudud. Positiivse täisarvu $n \in S$ korral vaatame täisarve $a_1, a_2, \ldots, a_r$ nii, et $n < a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ ja $n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r$ on täisruut. Tähistagu $f(n)$ vastavalt vähima arvu a_r väärtust. Näiteks $2 \cdot 3 \cdot 6$ on täisruut, aga $2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 4, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 4 \cdot 5$ ja $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ pole, seega $f(2) = 6$. Tõestada, et funktsioon on injektiivne.

3. IMC 2014 1. päeva 4. ülesanne

   Olgu $n > 6$ *perfektne* arv ja olgu $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ arvu n algarvuline standardkuju, kus $1 < p_1 < \cdots < p_k$ Tõestada, et e_1 on paarisarv. Arv n on *perfektne*, kui $\sigma(n) = 2n$, kus $\sigma(n)$ tähistab kõigi arvu n positiivsete jagajate summat.

4. IMC 2015 1. päeva 2. ülesanne

   Iga positiivse täisarvu n korral olgu $f(n)$ funktsioon, mille väärtus saadakse, kui kirjutada n kahendsüsteemis ja vahetades numbrid 0 numbrite 1 vastu ning vastupidi. Näiteks $n = 23$ on kahendsüsteemis 10111, seega $f(n)$ on 1000, järelikult $f(23) = 8$. Tõestada, et

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \frac{n^2}{4}.$$

   Millal kehtib võrdus?

6 Oskar

1. VJIMC 2012 II kategooria 1. ülesanne

   Olgu $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ kahanev funktsioon nii, et

   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})}{f(2^n)} < \frac{1}{2}.$$

   Näita, et

   $$\int_1^\infty f(x)dx < \infty$$

2. VJIMC 2011 II kategooria 3. ülesanne

   Olgu p ja q polünoomid üle kompleksarvude sellised, et $\deg p >\deg q$ ja $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. Oletame, et p kõik nullkohad paiknevad rangelt ühikringi $|z| = 1$ sees ja q kõik nullkohad paikevad rangelt ühikringist väljas. Tõestada, et

   $$\max_{|z=1|} |f'(z)| > \frac{\deg p - \deg q}{2} \max_{|z=1|} |f(z)|.$$

3. IMC 2009 2. päeva 3. ülesanne

   Olgu $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ kaks $n \times n$ maatriksit sellised, et

   $$A^2B - BA^2 = 2ABA.$$

   Tõestada, et leidub positiivne täisarv k nii, et

   $$(AB - BA)^k = 0.$$

7 Tähvend

1. Putnam 2001 A1

   Olgu $(S, *)$ rühmoid, kusjuures iga $a, b \in S$ korral kehtib $(a * b) * a = b$. Näidata, et iga $a, b \in S$ korral $a * (b * a) = b$.

2. BOI 2013 1. päeva 3. ülesanne (kohandatud)

   On antud sidus graaf. Toimitakse järgmiselt:

   - Igasse serva kirjutatakse üks reaalarv;
   - Igasse tippu kirjutatakse temaga intsidentsete servade arvude summa;
   - Servadesse kirjutatud arvud kustutatakse.

   Leida kõik graafid, mille korral on tippudesse kirjutatud arvude põhjal võimalik alati üheselt määrata, mis olid servadesse kirjutatud arvud.

3. Putnam 2010 B5

   Kas leidub rangelt kasvav funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et $f'(x) = f(f(x))$ iga x korral?

8 Hartvig

1. IMC 2012 1. päeva 1. ülesanne

   Näidaku iga positiivse täisarvu n korral $p(n)$ võimaluste arvu, kuidas saab arvu n väljendada positiivsete täisarvude summana. Näiteks $p(4) = 5$, sest

   $$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

   Defineerime $p(0) = 0$.

   Tõestada, et $p(n) - p(n-1)$ on võrdne erinevate võimaluste arvuga, kuidas väljendada arvu n arvust 1 rangelt suuremate positiivsete täisarvude summana.

2. VJIMC 2016 II kategooria 1. ülesanne

   Olgu a, b ja c sellised positiivsed reaalarvud, et $a + b + c = 1$. Näidata, et

   $$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right) \geq 1728.$$

3. VJIMC 2003 I kategooria 3. ülesanne

   Leida piirväärtus

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{\ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$

4. Putnam 2008 B1

   Olgu tasandil $\mathbb{R}^2$ antud ringjoon, mille keskpunkt pole ratsionaalpunkt. Mitu ratsionaalpunkti saab maksimaalselt sellel ringjoonel asuda? (*Ratsionaalpunkt* on punkt, mille mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud.)

9 Carel

1. IMC 2005 esimene päev problem 1

   Olgu A $n \times n$ maatriks, mille (i, j)-s element on $i + j$ iga $i, j = 1, 2, ..., n$ korral. Mis on maatriksi A astak?

2. Putnam 2010 B3

   On antud 2010 kasti $B_1, B_2, ..., B_{2010}$. $2010n$ palli on jagatud nende kastide vahel. Palle on võimalik ümber jagada mingi käikude jada järgi, kus igal käigul saab valida mingi i ja liigutada täpselt i palli kastist B_i mingisse teise kasti. Milliste väärtuste n korral on võimalik jõuda seisuni, kus igas kastis on täpselt n palli, sõltumata pallide algsest jaotusest?

3. Putnam 1999 B4

   Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kolm korda diferentseeruv ning $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ja $f'''(x)$ kõik positiivsed iga x-i korral. Samuti kehtib iga x-i korral võrratus $f(x) \geq f'''(x)$. Näidake, et $f'(x) < 2f(x)$ iga x-i korral.

4. IMC 2000 teine päev problem 5

   Olgu $\mathbb{R}^+$ kõigi positiivsete reaalarvude hulk. Leidke kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ nii, et iga $x, y \in \mathbb{R}^+$ korral

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y).$$

10 Carel

1. Putnam 2002 B1

   Oleg on korvpalliväljakul ja harjutab vabaviskeid. Ta viskab sisse oma esimese katse ja viskab mööda teisel katsel. Alates teisest katsest on Olegi iga järgmise viske tabamise tõenäosus võrdne eelnevalt sissevisatud katsete osakaaluga. Mis on tõenäosus, et ta tabab täpselt 50 viset oma esimesest sajast viskest?

2. Putnam 1991 A4

   Kas leidub lõpmatu jada kinniseid ringe $D_1, D_2, D_3, ...$, mis asetseval tasandil vastavalt keskpunktidega $c_1, c_2, c_3, ...$, nii et

   (a) keskpunktide jada c_i ei koondu;

   (b) ringide D_i pindalade summa on lõplik;

   (c) tasandi iga sirge lõikab vähemalt ühte ringi D_i?

3. Putnam 1990 A3

   Tõestage, et iga täisarvuliste koordinaatidega tippudega kumera viisnurga pindala on suurem kui või võrdne $\frac{5}{2}$-ga (ükski kolm tippu ei asu samal sirgel).

4. Putnam 2001 A6

   Kas ringi raadiusega 1 on võimalik joonistada parabool, mille ringis oleva kaareosa pikkus on suurem kui 4?

11 Jaan Kristjan

1. Putnam 1998 - A1

   Meil on harilik koonus (põhjaks ring) raadiusega 1 ja kõrgusega 3. Koonuse sisse on paigutatud kuup nii, et kuubi põhi asetseb koonuse põhjal ning kuup on maksimaalse ruumalaga. Leida kuubi küljepikkus.

2. Putnam 2008 - A2

   Aadam ja Eeva mängivad 2008x2008 ruudustikul mängu, kus kordamööda käies saab 1 käigu jooksul täita 1 ruudu. Aadam alustab. Igal käigul valib mängija vaba ruudu ning kirjutab sinna 1 reaalarvu. Kui ruudustik täitub, siis mäng lõpeb. Kui tekkinud maatriks on regulaarne, võidab Aadam, kui singulaarne, võidab Eeva. Kellel on optimaalne võidustrateegia?
   Lahendamata probleem: Mis muutub, kui reeglites teha muudatus, et kui mängija käib arvu y, siis järgmine mängija järgmisel käigul seda arvu y käia ei saa?

3. IMC 2002, 2. Ülesanne

   Kas leidub selline pidevalt diferentseeruv funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et kehtivad järgmised tingimused $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = f(f(x))$ ja $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > 0$?

4. Jewish problems - problem 18

   Mitmekohaline arv on 125^{100}?