

Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2021

1. seminar (Hendrik)

1. (2009 Putnam A1)

Olgu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ selline funktsioon, et iga ruudu $ABCD$ korral $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Kas sellest järeldeb, et tasandi iga punkti P korral $f(P) = 0$?

Vihje: Vastus on jah, konstrueeri iga tasandi punkti jaoks ruutude konfiguratsioon, mis seda tõestaks.

2. (2002 Putnam B3)

Tõesta, et iga positiivse täisarvu $n > 1$ korral

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

Vihje: Lahuta igalt poolt $\frac{1}{e}$, korruta -1 -ga ja võta logaritm. Kasuta $\ln(1-x)$ Taylori rida.

3. (2000 Putnam A6)

Olgu $f(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom. Olgu $a_0, a_1, \dots$ selline täisarvude jada, et $a_0 = 0$ ja iga $n \geq 1$ korral $a_n = f(a_{n-1})$. Tõesta, et kui leidub positiivne täisarv m , mille korral $a_m = 0$, siis $a_1 = 0$ või $a_2 = 0$.

Vihje: $a - b \mid f(a) - f(b)$, vastuväiteline tõestus.

4. (Cauchy funktsionaalvõrrand)

Vaatleme funktsionaalvõrrandit

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

kus otsitavaks on funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Tõesta, et kõigi ratsionaalarvude q korral $f(q) = qf(1)$. *Vihje:* Tõesta kõigepealt induktsiooniga täisarvude jaoks.
- Tõesta, et kõigi reaalarvude x korral $f(x) = xf(1)$, kui on täidetud vähemalt üks järgmistest tingimustest:
 - a) f on mingis intervallis monotoonne,

b) f on mingis intervallis vähemalt ühelt poolt tõkestatud,
Vihje: Oletades vastuväiteliselt, et mingi x korral $f(x) \neq xf(1)$, konstrueeri x ja ratsionaalarvu lineaarkombinatsioon, mis asuks tõkkest vael pool. a) ja c) osa järelduvad b) osast.
c) f on vähemalt ühes punktis pidev.

- Lisaülesanne 1: Tõesta, et iga tingimust $f(x) = xf(1)$ mitterahuldava lahendi $f(x)$ graafik on tihe tasandil $\mathbb{R}^2$. *Vihje:* Sarnane eelmise küsimuse b) osale.
- Lisaülesanne 2: Näita, et leidub tingimust $f(x) = xf(1)$ mitterahuldavaid lahendeid. (Võib eeldada valikuaksioomi kehtimist.) *Vihje:* Mõttele reaalarvudest vektorruumina üle ratsionaalarvude, valikuaksioomi põhjal leidub seal lõputu baas.

2. seminar (Tähhvend)

1. (AGC 051)

Olgu antud positiivne täisarv d . Meil on antud lõpmatus koguses ruute ja korrapäraseid kolmnurki, millest igaüks on küljepikkusega 1. Mitu võimalust on katta selliste tükidega korrapärane 12-nurk küljepikkusega d ?

2. (SEEMOUS 2019)

Olgu $A_1, \dots, A_m \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tõesta, et leiduvad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ nii, et

$$\text{tr}((\varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_m A_m)^2) \geq \text{tr}(A_1^2) + \dots + \text{tr}(A_m^2).$$

3. (IMS 2009)

Olgu R ühikuga ring, kus iga element on esitatav idempotentsete elementide korrutisena. Tõesta, et R on kommutatiivne.

Ringi elementi u nimetatakse idempotentseks, kui $u^2 = u$.

Vihje: Tõesta, et mistahes $a, b \in R$ korral $ab = 1 \implies a = b = 1$.

3. seminar (Kadi)

1. (IMC 2000)

Olgu funktsioon $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

- (a) monotoonselt kasvav
- (b) monotoonselt kahanev

Kas saab kindlalt väita, et leidub $x \in [0, 1]$, mille korral $f(x) = x$?

2. (Putnam 2008 A1)

Olgu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ selline funktsioon, et $f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0$ iga $x, y, z \in \mathbb{R}$ korral. Tõesta, et leidub selline funktsioon $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $f(x, y) = g(x) - g(y)$ iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral.

3. (Putnam 2002 A3)

Olgu $n \geq 2$ täisarv ja olgu T_n hulga $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ selliste mittetühjade alamhulkade arv, mille liikmete aritmeetiline keskmine on täisarv. Tõesta, et $T_n - n$ on alati paarisarv.

4. (Putnam 2007 A5)

Olgu lõplikus rühmas täpselt n elementi, mille järk on p , kus p on algarv. Tõesta, et $n = 0$ või $p \mid n + 1$.

Vihje: Vaata hulka $S = \{(g_1, g_2, \dots, g_p) \mid g_1 \dots g_p = e\}$.