

Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2022

1. seminar (Hendrik)

1. (Putnam 2021 B1)

Olgu tasand värvitud lõputu malelauamustriga, mis koosneb ühikruutudest. Veel üks ühikruut asetatakse juhuslikult tasandile, nii et tema asukoht ja orientatsioon valitakse ühtlase jaotusega. Mis on tõenäosus, et see ruut ei kata ühtegi malelaua ruudu tippu?

2. (Folkloor)

Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve n , nii et $n^2 + 1 \mid n!$.

3. (Putnam 1994 A4)

Olgu $A, B \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z})$, nii et $A, A + B, A + 2B, A + 3B$, ja $A + 4B$ on pööratavad matriksid ning nende pöördmatriksite kõik elemendid on täisarvud. Tõesta, et ka $A + 5B$ on pööratav ning tema pöördmatriksi elemendid on täisarvud.

4. (Varia huvitavaid ridasid)

Iga järgneva rea/piirväärtuse jaoks leia, kas see on koonduv või hajuv. Kui rida on koonduv, siis proovi leida rea summa (või võimalikult head ülemised/alumised tõkked sellele). Kui rida on hajuv, siis proovi hinnata, kui kiiresti rida hajub.

a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n},$

b) $\sum_{n \in A} \frac{1}{n},$ kus A on selliste naturaalarvude hulk, mille kümnendesituses ei leidu numbrit 9.

c) $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p},$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq n} \frac{1}{p^k},$ kus p^k on suurim algarvu p aste, mis pole arvust n suurem.

e) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(nx)}{n},$

f) (TÜ matemaatikaolümpiaad 2019) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3n^2 - n}{3^n}.$

2. seminar (Hendrik)

1. (Putnam 2001 A2)

Antud on n münti. Iga $1 \leq k \leq n$ jaoks on k . mündil tõenäosus $\frac{1}{2k+1}$ näidata kirja. Kui visata kõik n münti korraga, siis mis on tõenäosus, et kirjade arv on paaritu? Esita vastus ratsionaalfunktsioonina muutujast n .

2. (Putnam 2021 A3)

Leia kõik positiivsed täisarvud N , nii et sfääril

$$x^2 + y^2 + z^2 = N$$

leiduvad täisarvuliste koordinaatidega punktid, mis moodustavad korrapärase tetraeedri.

3. (Putnam 2005 B4)

Positiivsete täisarvude m ja n korral olgu $f(m, n)$ selliste täisarvuennikute $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ arv, et $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq m$. Tõesta, et $f(m, n) = f(n, m)$.

4. (Putnam 2000 A4)

Tõesta, et päratu integraal

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \sin(x) \sin(x^2) dx$$

koondub.

3. seminar (Urmas)

1. Putnam 1999, ül A-3

Olgu meil rida

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Näidata, et iga täisarvu $n \geq 0$ korral leidub täisarv $m \geq 0$ nii, et $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m$.

2. TÕ matemaatika olümpiaad 2014, ül 2

Olgu P ja Q erinevad reaalmuutuja polünoomid, mille puhul kehtib $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Tõestatda, et polünoom $P(x) - Q(x)$ jagab polünoomi $P(P(X)) - Q(Q(x))$.

3. Putnam 1999, ül B-2

Olgu $P(x)$ polünoom üle reaalarvude astmega n . Leidugu selline ruutpolünoom $Q(x)$, et $P(x) = Q(x)P''(x)$. Näidata, et kui polünoomil $P(x)$ on kaks erinevat juurt, siis on tal n erinevat juurt.

4. VJIMC 2008 C1 ül 4

Värvime hulga $\{1, \dots, n\}$ elemendid 6 erineva värviga. Defineerime

$$S = \{(x, y, z) \in \{1, \dots, n\}^3 \mid x+y+z \equiv 0 \pmod{n}, x, y, z \text{ on kõik sama värvi}\}$$

$$D = \{(x, y, z) \in \{1, \dots, n\}^3 \mid x+y+z \equiv 0 \pmod{n}, x, y, z \text{ on paarikaupa erinevat värvi}\}$$

Tõestada, et $|D| \leq 2|S| + \frac{n^2}{2}$.

4. seminar (Urmas)

1. Jarniku võistlus 2004, kategooria 1, ül 1

Olgu $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevalt diferentseeruv funktsioon, mis mingi sisendi puhul saavutab väärtuse $\sqrt{3}$ ja $f(0) = f(1) = 0$. Näidata, et funktsioonil f leiduvad sellised puutujad, mis koos x -teljega moodustavad võrdkülgse kolmnurga.

2. IMC 2007, päev 1, ül 2

Olgu meil $n \times n$ maatriks, mis sisaldab täpselt arve $1, \dots, n^2$. Mis on selle maatriksi minimaalne ja maksimaalne astak?

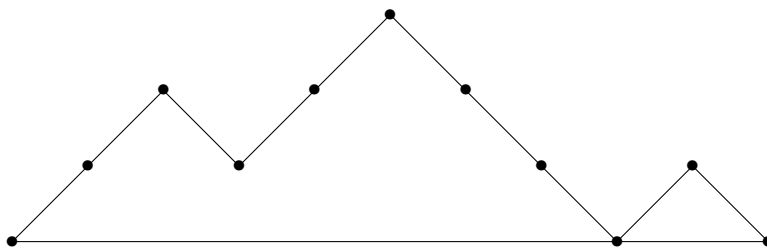
3. Putnam 2003, A5

Dycki n -jooneks nimetame sellist joont, mis

- (a) koosneb täisrvalisi koordinaate ühendavatest sirgetest,
- (b) algab nullist,
- (c) igal sammul liidetakse joone otsa vektor $(1, 1)$ või $(1, -1)$,
- (d) joon koosneb n -st vektorist $(1, 1)$ ja n -st vektorist $(1, -1)$,
- (e) joon ei tohi kunagi minna allapoole x -telge.

Dycki joone tagasitulekuks nimetame maksimaalset laskuvate lõikude arvu Dycki joones, mis lõppevad nulliga.

Allpool on toodud Dycki 5-joon, millel on kaks tagasitulekut: üks pikkusega 3 ja teine pikkusega 1.



Tõestada, et selliseid Dycki n -jooni, millel pole paarisarvulise pikkuega tagasitulekuid on sama palju kui Dycki $n - 1$ -jooni.

4. Putnam 2010, ül A5 Olgu $(G, *, \vec{e})$ rühm, mille korral $G \subseteq \mathbb{R}^3$ (siin ei tarvitse G olla $\mathbb{R}^3$ alamrühm).

Kehtigu iga $a, b \in G$ korral kas $a \times b = a * b$ või $a \times b = 0$.

Näidata, et iga $a, b \in G$ korral $a \times b = 0$.

5. seminar (Kadi)

1. Putnam 2017, A1

Olgu S vähim selline naturaalarvude hulk, et

- (a) $2 \in S$,
- (b) kui $n^2 \in S$, siis ka $n \in S$,
- (c) kui $n \in S$, siis ka $(n+5)^2 \in S$.

Millised naturaalarvud ei kuulu hulka S ?

2. Putnam 2015, A2

Olgu $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ ja $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, kui $n \geq 2$.

Leidke a_{2015} paaritu algtegur.

3. Putnam 2018, B3

Leidke kõik naturaalarvud $n < 10^{100}$, mille korral $n|2^n$, $n-1|2^n-1$ ja $n-2|2^n-2$.

4. Putnam 2015, A5

Olgu q paaritu naturaalarv. Olgu N_q selliste positiivsete täisarvude a arv, mille korral $0 < a < \frac{q}{4}$ ning a ja q on ühistegurita.

Tõestage, et N_q on paaritu parajasti siis, kui $q = p^k$, kus $k \in \mathbb{N}$ ja p on algarv, mille korral kehtib $p \equiv 5 \pmod{8}$ või $p \equiv 7 \pmod{8}$.

6. seminar (Kadi)

1. Putnam 2003, A1

Olgu n naturaalarv. Mitu erinevat võimalust on kirjutada n kujul

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

kus $a_1, a_2, \dots, a_k$ on naturaalarvud ja $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_1 + 1$?

2. Putnam 2006, A2

Sandra ja Oleg mängivad järgmist mängu. Kuhjas on n kivi. Igal käigul tuleb kuhjast eemaldada selline arv kive, mis on mingist algarvust ühe võrra väiksem. Võidab see, kes viimase kivi võtab. Sandra alustab. Tõesta, et on lõputult selliseid arve n , mille korral on Olegil võitev strateegia.

3. Putnam 2002, A4

Determinantide trips-traps-trull on kahe mängija mäng. Mängija 1 lisab arvu 1 tühja 3×3 maatriksisse. Mängija 0 lisab seejärel arvu 0 mingisse maatriksi vabasse kohta jne, kuni maatriks on täidetud. Mängija 0 võidab, kui saadud maatriksi determinant on 0, vastasel korral võidab mängija 1. Kellel on võitev strateegia?

4. Putnam 2001, A5

Tõesta, et leidub vaid üks naturaalarvude paar (a, n) , mille korral

$$a^{n+1} - (a+1)^n = 2001.$$