

Matemaatilise füüsika võrrandid

Urve Kangro

22. detsember 2023. a.

- 1 Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?
- 2 Osatuletis
- 3 Lainevõrrandid
 - Keele võnkumise võrrandi tuletamine
 - Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine
 - Mitmemõõtmelised lainevõrrandid
- 4 Soojusjuhtivuse võrrand
- 5 Laplace'i ja Poissoni võrrandid
- 6 Helmholtzi võrrandid
- 7 Maxwelli võrrandid
- 8 Nähtamatu lennuk
- 9 Miljon dollarit

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.
- Määrata suurused, mis meile huvi pakuvad, näiteks millegi asukoht, temperatuur, rõhk, tuule kiirus, elektrivälja tugevus jms.

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.
- Määrata suurused, mis meile huvi pakuvad, näiteks millegi asukoht, temperatuur, rõhk, tuule kiirus, elektrivälja tugevus jms.
- Määrata muutujad, millest meid huvitavad suurused sõltuvad, tüüpiliselt aeg ja ruumipunkt, samuti välised mõjud (jõud, kinnitused, takistused, ...)

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.
- Määrata suurused, mis meile huvi pakuvad, näiteks millegi asukoht, temperatuur, rõhk, tuule kiirus, elektrivälja tugevus jms.
- Määrata muutujad, millest meid huvitavad suurused sõltuvad, tüüpiliselt aeg ja ruumipunkt, samuti välised mõjud (jõud, kinnitused, takistused, ...)
- Leida seosed meid huvitavate suuruste ja väliste mõjude vahel.

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.
- Määrata suurused, mis meile huvi pakuvad, näiteks millegi asukoht, temperatuur, rõhk, tuule kiirus, elektrivälja tugevus jms.
- Määrata muutujad, millest meid huvitavad suurused sõltuvad, tüüpiliselt aeg ja ruumipunkt, samuti välised mõjud (jõud, kinnitused, takistused, ...)
- Leida seosed meid huvitavate suuruste ja väliste mõjude vahel.
- Tüüpiliselt seosteks on diferentsiaalvõrrandid (suuruste muutus on määratud süsteemi seisundiga antud ajahetkel). Kuna muutujaid on tavaliselt mitu, siis on tulemuseks tavaliselt osatuletistega diferentsiaalvõrrandid (või süsteemid).

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.
- Määrata suurused, mis meile huvi pakuvad, näiteks millegi asukoht, temperatuur, rõhk, tuule kiirus, elektrivälja tugevus jms.
- Määrata muutujad, millest meid huvitavad suurused sõltuvad, tüüpiliselt aeg ja ruumipunkt, samuti välised mõjud (jõud, kinnitused, takistused, ...)
- Leida seosed meid huvitavate suuruste ja väliste mõjude vahel.
- Tüüpiliselt seosteks on diferentsiaalvõrrandid (suuruste muutus on määratud süsteemi seisundiga antud ajahetkel). Kuna muutujaid on tavaliselt mitu, siis on tulemuseks tavaliselt osatuletistega diferentsiaalvõrrandid (või süsteemid).
- Tuleb uurida, kas saadud võrranditel leidub lahend, kas lahend on ühene ning kui algtingimusi veidi muuta, kas siis lahend muutub ka natuke või võib muutus olla väga suur (lahendi stabiilsus).

Mis on matemaatilise füüsika võrrandid?

- Need on võrrandid, mis kirjeldavad mingeid füüsikalisi protsesse.
- Määrata suurused, mis meile huvi pakuvad, näiteks millegi asukoht, temperatuur, rõhk, tuule kiirus, elektrivälja tugevus jms.
- Määrata muutujad, millest meid huvitavad suurused sõltuvad, tüüpiliselt aeg ja ruumipunkt, samuti välised mõjud (jõud, kinnitused, takistused, ...)
- Leida seosed meid huvitavate suuruste ja väliste mõjude vahel.
- Tüüpiliselt seosteks on diferentsiaalvõrrandid (suuruste muutus on määratud süsteemi seisundiga antud ajahetkel). Kuna muutujaid on tavaliselt mitu, siis on tulemuseks tavaliselt osatuletistega diferentsiaalvõrrandid (või süsteemid).
- Tuleb uurida, kas saadud võrranditel leidub lahend, kas lahend on ühene ning kui algtingimusi veidi muuta, kas siis lahend muutub ka natuke või võib muutus olla väga suur (lahendi stabiilsus).
- Lahendada võrrandid. Täpne lahendamine on võimalik väga harva, lihtsamate võrrandite puhul saab leida lahendi integraalina või lõpmatu summana. Üldiselt tuleb lahendada ligikaudu.

Näide

Maalt stardib rakett kaugete tähtede poole. Alates momendist, kui rakett on jõudnud 1000 km kaugusele, on tema kiirus võrdeline tema kauguse ruuduga maast. Üks tund hiljem on rakett jõudnud 2000 km kaugusele. Kui kaugel on rakett maast 3 tunni pärast?



Näide

Maalt stardib rakett kaugete tähtede poole. Alates momendist, kui rakett on jõudnud 1000 km kaugusele, on tema kiirus võrdeline tema kauguse ruuduga maast. Üks tund hiljem on rakett jõudnud 2000 km kaugusele. Kui kaugel on rakett maast 3 tunni pärast?



Olgu $y(t)$ raketi kaugus Maast ajamomendil t . Siis
$$y' = ky^2,$$

Näide

Maalt stardib rakett kaugete tähtede poole. Alates momendist, kui rakett on jõudnud 1000 km kaugusele, on tema kiirus võrdeline tema kauguse ruuduga maast. Üks tund hiljem on rakett jõudnud 2000 km kaugusele. Kui kaugel on rakett maast 3 tunni pärast?



Olgu $y(t)$ raketi kaugus Maast ajamomendil t . Siis

$$y' = ky^2,$$
$$y(0) = 1000, \quad y(1) = 2000.$$

Näide

Maalt stardib rakett kaugete tähtede poole. Alates momendist, kui rakett on jõudnud 1000 km kaugusele, on tema kiirus võrdeline tema kauguse ruuduga maast. Üks tund hiljem on rakett jõudnud 2000 km kaugusele. Kui kaugel on rakett maast 3 tunni pärast?



Olgu $y(t)$ raketi kaugus Maast ajamomendil t . Siis

$$y' = ky^2,$$

$$y(0) = 1000, \quad y(1) = 2000.$$

$$y(t) = \frac{2000}{2 - t}, \quad y(3) = -2000 \text{ ???}$$

Osatuletised

Mitme muutuja funktsioonide korral saab tuletise asemel defineerida osatuletise.

Olgu kahe muutuja funktsioon f defineeritud mingis piirkonnas $D \in \mathbb{R}^2$.
Olgu punkt (x, y) hulga D sisepunkt.

Osatuletised

Mitme muutuja funktsioonide korral saab tuletise asemel defineerida osatuletise.

Olgu kahe muutuja funktsioon f defineeritud mingis piirkonnas $D \in \mathbb{R}^2$.
Olgu punkt (x, y) hulga D sisepunkt.

Definitsioon

Kui leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f osatuletiseks muutuja x järgi, tähistatakse $f_x(x, y)$ või $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Osatuletised

Mitme muutuja funktsioonide korral saab tuletise asemel defineerida osatuletise.

Olgu kahe muutuja funktsioon f defineeritud mingis piirkonnas $D \in \mathbb{R}^2$.
Olgu punkt (x, y) hulga D sisepunkt.

Definitsioon

Kui leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **osatuletiseks muutuja x järgi**, tähistatakse $f_x(x, y)$ või $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Analoogiliselt defineeritakse osatuletis muutuja y järgi ning osatuletised, kui muutujaid on rohkem.

Keele võnkumine

Keel: pinguletõmmatud elastne painduv traat (või niit).

Tasakaaluasend: x -telg, u on keele kõrvalekalle tasakaaluasendist, s.t. keel võngub xu -tasandis. Teeme eeldused:

- 1) iga keele osake liigub ainult üles-alla (ristvõnkumine);
- 2) keel on ideaalselt painduv;
- 3) võnkumised on väikesed
- 4) keel on tõmmatud pingule; pingejõud keeles on P .

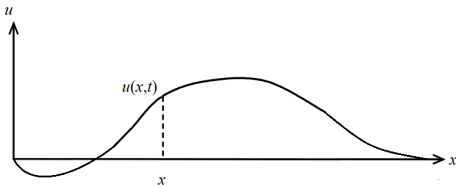
Lainevõrrandid

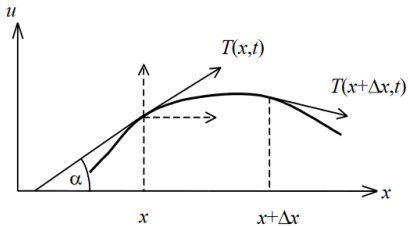
Keele võnkumine

Keel: pinguletõmmatud elastne painduv traat (või niit).

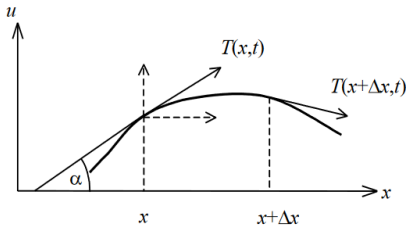
Tasakaaluasend: x -telg, u on keele kõrvalekalle tasakaaluasendist, s.t. keel võngub xu -tasandis. Teeme eeldused:

- 1) iga keele osake liigub ainult üles-alla (ristvõnkumine);
- 2) keel on ideaalselt painduv;
- 3) võnkumised on väikesed
- 4) keel on tõmmatud pingule; pingejõud keeles on P .

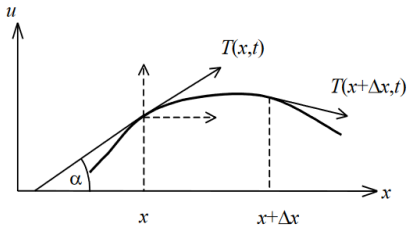




Vaatleme keele osakese $(x, x + \Delta x)$ võnkumist. Osakesele mõjub pingejõud $T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$, mille suurus on konstantselt P .



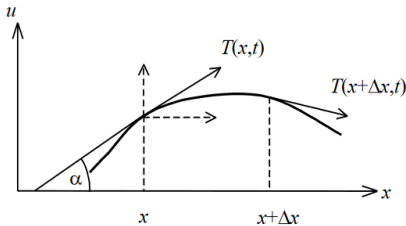
Vaatleme keele osakese $(x, x + \Delta x)$ võnkumist. Osakesele mõjub pingejõud $T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$, mille suurus on konstantselt P . Pingejõud on puutuja-suunaline. Ristvõnkumised, seega horisontaalsuunas on jõudude summa null.



Vaatleme keele osakese $(x, x + \Delta x)$ võnkumist. Osakesele mõjub pingejõud $T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$, mille suurus on konstantselt P . Pingejõud on puutuja-suunaline. Ristvõnkumised, seega horisontaalsuunas on jõudude summa null.

Vertikaalsuunas on jõudude summa

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha \approx P \tan \alpha' - P \tan \alpha = P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t).$$



Vaatleme keele osakese $(x, x + \Delta x)$ võnkumist. Osakesele mõjub pingejõud $T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$, mille suurus on konstantselt P . Pingejõud on puutuja-suunaline. Ristvõnkumised, seega horisontaalsuunas on jõudude summa null.

Vertikaalsuunas on jõudude summa

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha \approx P \tan \alpha' - P \tan \alpha = P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t).$$

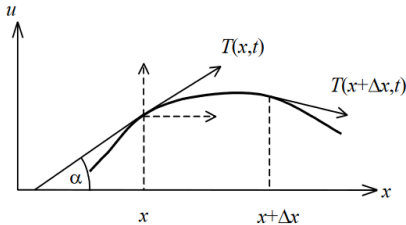
Newtoni II seadus: $F = ma$.

Olgu keele joontihedus ρ . Siis keele osakese mass on $\rho \Delta x$.

Keele osakese kiirendus punktis x on $u_{tt}(x, t)$.

Saame võrrandi $P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t) = \rho \Delta x u_{tt}(x, t)$.

Jagame suurusega $\rho \Delta x$ ning läheme piirile $\Delta x \rightarrow 0$: $\frac{P}{\rho} u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$.



Vaatleme keele osakese $(x, x + \Delta x)$ võnkumist. Osakesele mõjub pingejõud $T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$, mille suurus on konstantselt P . Pingejõud on puutuja-suunaline. Ristvõnkumised, seega horizontaalsuunas on jõudude summa null.

Vertikaalsuunas on jõudude summa

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha \approx P \tan \alpha' - P \tan \alpha = P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t).$$

Newtoni II seadus: $F = ma$.

Olgu keele joontihedus ρ . Siis keele osakese mass on $\rho \Delta x$.

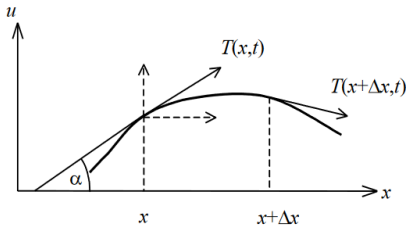
Keele osakese kiirendus punktis x on $u_{tt}(x, t)$.

Saame võrrandi $P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t) = \rho \Delta x u_{tt}(x, t)$.

Jagame suurusega $\rho \Delta x$ ning läheme piirile $\Delta x \rightarrow 0$: $\frac{P}{\rho} u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$.

Ühemõõtmeline lainevõrrand: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$, kus f on väline jõud.

Kirjeldab ka näiteks varu pikivõnkumisi ning elektrisignaali levimist väikese takistusega juhtmes.



Vaatleme keele osakese $(x, x + \Delta x)$ võnkumist. Osakesele mõjub pingejõud $T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$, mille suurus on konstantselt P . Pingejõud on puutuja-suunaline. Ristvõnkumised, seega horisontaalsuunas on jõudude summa null.

Vertikaalsuunas on jõudude summa

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha \approx P \tan \alpha' - P \tan \alpha = P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t).$$

Newtoni II seadus: $F = ma$.

Olgu keele joontihedus ρ . Siis keele osakese mass on $\rho \Delta x$.

Keele osakese kiirendus punktis x on $u_{tt}(x, t)$.

Saame võrrandi $P u_x(x + \Delta x, t) - P u_x(x, t) = \rho \Delta x u_{tt}(x, t)$.

Jagame suurusega $\rho \Delta x$ ning läheme piirile $\Delta x \rightarrow 0$: $\frac{P}{\rho} u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$.

Ühemõõtmeline lainevõrrand: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$, kus f on väline jõud.

Kirjeldab ka näiteks varda pikivõnkumisi ning elektrisignaalide levimist väikese takistusega juhtmes.

Lisaks **rajatingimused** $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ja **algtingimused**.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teeme muutujavahetuse $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

Olgu $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x + at, x - at)$.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teeme muutujavahetuse $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

Olgu $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x + at, x - at)$.

Asendades selle esialgsesse võrrandisse saame $v_{\xi\eta} = 0$.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teeme muutujavahetuse $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

Olgu $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x + at, x - at)$.

Asendades selle esialgsesse võrrandisse saame $v_{\xi\eta} = 0$.

Seega $v_\xi(\xi, \eta) = h(\xi)$ ning $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kus f ja g on suvalised funktsioonid.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teeme muutujavahetuse $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

Olgu $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x + at, x - at)$.

Asendades selle esialgsesse võrrandisse saame $v_{\xi\eta} = 0$.

Seega $v_\xi(\xi, \eta) = h(\xi)$ ning $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kus f ja g on suvalised funktsioonid.

Lainevõrrandi **üldlahend** on $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teeme muutujavahetuse $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

Olgu $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x + at, x - at)$.

Asendades selle esialgsesse võrrandisse saame $v_{\xi\eta} = 0$.

Seega $v_\xi(\xi, \eta) = h(\xi)$ ning $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kus f ja g on suvalised funktsioonid.

Lainevõrrandi **üldlahend** on $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$.

Olgu antud ka algtingimused $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Siis $f(x) + g(x) = u_0(x)$ ja $af'(x) - ag'(x) = u_1(x)$.

Ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendamine

Vaatleme võrrandit $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Teeme muutujavahetuse $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

Olgu $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x + at, x - at)$.

Asendades selle esialgsesse võrrandisse saame $v_{\xi\eta} = 0$.

Seega $v_\xi(\xi, \eta) = h(\xi)$ ning $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kus f ja g on suvalised funktsioonid.

Lainevõrrandi üldlahend on $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$.

Olgu antud ka algtingimused $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Siis $f(x) + g(x) = u_0(x)$ ja $af'(x) - ag'(x) = u_1(x)$.

Siit saame leida lahendi

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - at) + u_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(s) ds,$$

seda valemit nimetatakse d'Alemberti valemiks.

Mitmemõõtmelised lainevõrrandid

Samamoodi saab tuletada võrrandi pinguletõmmatud membraani võnkumiseks.

Kahemõõtmeline lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f$.

Mitmemõõtmelised lainevõrrandid

Samamoodi saab tuletada võrrandi pinguletõmmatud membraani võnkumiseks.

Kahemõõtmeline lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f$.

Rajatingimused: $u(x, y, t) = 0$, kui (x, y) on membraani servas.

Algtingimused: $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = u_1(x, y)$, kui (x, y) on membraani punkt.

Kirjeldab näiteks ka väikeste lainete levimist veepinnal.

Mitmemõõtmelised lainevõrrandid

Samamoodi saab tuletada võrrandi pinguletõmmatud membraani võnkumiseks.

Kahemõõtmeline lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f$.

Rajatingimused: $u(x, y, t) = 0$, kui (x, y) on membraani servas.

Algtingimused: $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = u_1(x, y)$, kui (x, y) on membraani punkt.

Kirjeldab näiteks ka väikeste lainete levimist veepinnal.

Kolmemõõtmeline lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Kirjeldab näiteks heli levimist (siis $u(x, y, z, t)$ on (õhu)rõhk punktis (x, y, z) ajamomendil t) või elektromagnetlainete (raadiolained, valgus) levimist ruumis.

Soojusjuhtivuse võrrand

Olgu antud varras pikkusega L , mille külgpinnad on isoleeritud. Eeldame, et varda ristlõikes on temperatuur sama, s.t. temperatuur sõltub ainult x -koordinaadist. Olgu $u(x, t)$ temperatuur punktis x ajamomendil t .

Soojusjuhtivuse võrrand

Olgu antud varras pikkusega L , mille külgpinnad on isoleeritud. Eeldame, et varda ristlõikes on temperatuur sama, s.t. temperatuur sõltub ainult x -koordinaadist. Olgu $u(x, t)$ temperatuur punktis x ajamomendil t . Vaatleme varda ühte tükikest $(x, x + \Delta x)$. Varda ristlõiget läbiv soojushulk on võrdeline temperatuuri muutusega: $q = -ku_x$.

Soojusjuhtivuse võrrand

Olgu antud varras pikkusega L , mille külgpinnad on isoleeritud. Eeldame, et varda ristlõikes on temperatuur sama, s.t. temperatuur sõltub ainult x -koordinaadist. Olgu $u(x, t)$ temperatuur punktis x ajamomendil t . Vaatleme varda ühte tükikest $(x, x + \Delta x)$. Varda ristlõiget läbiv soojushulk on võrdeline temperatuuri muutusega: $q = -ku_x$. Temperatuuri muutus selles tükikeses mingi väikese aja Δt jooksul on võrdeline sellesse siseneva soojushulgaga, mis on jagatud selle tükikese ruumalaga ehk

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \frac{c(ku_x(x + \Delta x, t) - ku_x(x, t))\Delta t}{S\Delta x}.$$

Soojusjuhtivuse võrrand

Olgu antud varras pikkusega L , mille külgpinnad on isoleeritud. Eeldame, et varda ristlõikes on temperatuur sama, s.t. temperatuur sõltub ainult x -koordinaadist. Olgu $u(x, t)$ temperatuur punktis x ajamomendil t . Vaatleme varda ühte tükikest $(x, x + \Delta x)$. Varda ristlõiget läbiv soojushulk on võrdeline temperatuuri muutusega: $q = -ku_x$. Temperatuuri muutus selles tükikeses mingi väikese aja Δt jooksul on võrdeline sellesse siseneva soojushulgaga, mis on jagatud selle tükikese ruumalaga ehk

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \frac{c(ku_x(x + \Delta x, t) - ku_x(x, t))\Delta t}{S\Delta x}.$$

Jagame läbi Δt -ga ja läheme piirile $\Delta t \rightarrow 0$ ja $\Delta x \rightarrow 0$:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t).$$

See on [ühemõõtmeline soojusjuhtivuse võrrand](#).

Soojusjuhtivuse võrrand

Olgu antud varras pikkusega L , mille külgpinnad on isoleeritud. Eeldame, et varda ristlõikes on temperatuur sama, s.t. temperatuur sõltub ainult x -koordinaadist. Olgu $u(x, t)$ temperatuur punktis x ajamomendil t . Vaatleme varda ühte tükikest $(x, x + \Delta x)$. Varda ristlõiget läbiv soojushulk on võrdeline temperatuuri muutusega: $q = -ku_x$. Temperatuuri muutus selles tükikeses mingi väikese aja Δt jooksul on võrdeline sellesse siseneva soojushulgaga, mis on jagatud selle tükikese ruumalaga ehk

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \frac{c(ku_x(x + \Delta x, t) - ku_x(x, t))\Delta t}{S\Delta x}.$$

Jagame läbi Δt -ga ja läheme piirile $\Delta t \rightarrow 0$ ja $\Delta x \rightarrow 0$:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t).$$

See on [ühemõõtmeline soojusjuhtivuse võrrand](#).

Ka siia tuleb lisada rajatingimused, näiteks $u(0, t) = u(L, t) = 0$ või $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$. ning algtingimus $u(x, 0) = u_0(x)$.

Ka soojusjuhtivuse võrrand võib olla kahe- või kolmemõõtmeline.

Olgu $u(x, y, z, t)$ temperatuur punktis (x, y, z) ajamomendil t . Eeldame, et keha juhib soojust kõikides punktides ja kõikides suundades ühtemoodi.

Kolmemõõtmeline soojusjuhtivuse võrrand : $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.
Kirjeldab ka näiteks difusiooni ja stohhastilisi protsesse (Browni liikumine, finantsmatemaatika).

Ka soojusjuhtivuse võrrand võib olla kahe- või kolmemõõtmeline.

Olgu $u(x, y, z, t)$ temperatuur punktis (x, y, z) ajamomendil t . Eeldame, et keha juhib soojust kõikides punktides ja kõikides suundades ühtemoodi.

Kolmemõõtmeline soojusjuhtivuse võrrand : $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.
Kirjeldab ka näiteks difusiooni ja stohhastilisi protsesse (Browni liikumine, finantsmatemaatika).

Olgu $u(x, t)$ optsiooni hind ajamomendil t , kui aktsia hind on x .

Black-Scholesi võrrand: $u_t + k^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0$.

Nobeli preemia majanduses 1997 said R.C. Merton ja M. Scholes uue meetodi eest tuletisväärtpaberite hinna määramiseks.

Laplace'i ja Poissoni võrrandid

Soojusjuhtivuse võrrand: $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Oletame, et u ja f ei sõltu ajast. Siis $u_t = 0$ ja $u_{tt} = 0$. Siis saame mõlemal juhul võrrandi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = F,$$

kus $F = -f/a^2$. Seda nimetatakse **Poissoni võrrandiks**.

Kui $F = 0$, siis seda nimetatakse **Laplace'i võrrandiks**.

Laplace'i ja Poissoni võrrandid

Soojusjuhtivuse võrrand: $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Oletame, et u ja f ei sõltu ajast. Siis $u_t = 0$ ja $u_{tt} = 0$. Siis saame mõlemal juhul võrrandi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = F,$$

kus $F = -f/a^2$. Seda nimetatakse **Poissoni võrrandiks**.

Kui $F = 0$, siis seda nimetatakse **Laplace'i võrrandiks**.

Need võrrandid kirjeldavad tasakaaaluolekut või teatud juhtudel ka funktsiooni, millele võrrandi lahendid lähenevad, kui $t \rightarrow \infty$.

Laplace'i ja Poissoni võrranditele on lahendi üheseks määramiseks vaja lisada ka rajatingimused.

Helmholtzi võrrand

Lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Oletame, et f sõltub ajast perioodiliselt, näiteks käitub iga fikseeritud (x, y, z) korral nagu $\sin(kt + \phi)$. Seda saab väljendada kujul

$$f(x, y, z, t) = e^{ikt} \tilde{f}(x, y, z).$$

Eeldame, et ka rajatingimused käituvad samamoodi. Siis teatud tingimustel hakkab ka lainevõrrandi lahend piiril $t \rightarrow \infty$ käituma samamoodi, s.t.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(u(x, y, z, t) - e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z) \right) = 0.$$

Helmholtzi võrrand

Lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Oletame, et f sõltub ajast perioodiliselt, näiteks käitub iga fikseeritud (x, y, z) korral nagu $\sin(kt + \phi)$. Seda saab väljendada kujul

$$f(x, y, z, t) = e^{ikt} \tilde{f}(x, y, z).$$

Eeldame, et ka rajatingimused käituvad samamoodi. Siis teatud tingimustel hakkab ka lainevõrrandi lahend piiril $t \rightarrow \infty$ käituma samamoodi, s.t.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(u(x, y, z, t) - e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z) \right) = 0.$$

Kuna $\frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z)] = -k^2 e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z)$, siis $\tilde{u}$ rahuldab võrrandit

$$-k^2 \tilde{u} = a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{zz}) + \tilde{f}.$$

Jätame siin tilded ära ja tähistame $c^2 = k^2/a^2$, saame

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + c^2 u = F.$$

Seda nimetatakse **Helmholtzi võrrandiks**.

Helmholtzi võrrand

Lainevõrrand: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$.

Oletame, et f sõltub ajast perioodiliselt, näiteks käitub iga fikseeritud (x, y, z) korral nagu $\sin(kt + \phi)$. Seda saab väljendada kujul

$$f(x, y, z, t) = e^{ikt} \tilde{f}(x, y, z).$$

Eeldame, et ka rajatingimused käituvad samamoodi. Siis teatud tingimustel hakkab ka lainevõrrandi lahend piiril $t \rightarrow \infty$ käituma samamoodi, s.t.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(x, y, z, t) - e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z)) = 0.$$

Kuna $\frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z)] = -k^2 e^{ikt} \tilde{u}(x, y, z)$, siis $\tilde{u}$ rahuldab võrrandit

$$-k^2 \tilde{u} = a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{zz}) + \tilde{f}.$$

Jätame siin tilded ära ja tähistame $c^2 = k^2/a^2$, saame

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + c^2 u = F.$$

Seda nimetatakse [Helmholtzi võrrandiks](#).

See võrrand kirjeldab ajas perioodilist piirlahendit. Samuti tekib see võrrand, kus $F = 0$, Laplace'i võrrandi omaväärtusülesannetes.

Maxwelli võrrandid

Elektriväli $E(x, y, z, t)$ on punktis (x, y, z) ajamomendil t ühikulisele punktlaengule mõjuv jõud. Magnetväli $H(x, y, z, t)$ kirjeldab punktis (x, y, z) ajamomendil t vooluga juhtmele mõjuvat jõudu.

Maxwelli võrrandid vaakumis (ligikaudu ka õhus):

$$\varepsilon_0 E_{1,t} = H_{3,y} - H_{2,z},$$

$$\varepsilon_0 E_{2,t} = H_{1,z} - H_{3,x},$$

$$\varepsilon_0 E_{3,t} = H_{2,x} - H_{1,y},$$

$$\mu_0 H_{1,t} = -(E_{3,y} - E_{2,z}),$$

$$\mu_0 H_{2,t} = -(E_{1,z} - E_{3,x}),$$

$$\mu_0 H_{3,t} = -(E_{2,x} - E_{1,y}),$$

$$E_{1,x} + E_{2,y} + E_{3,z} = 0,$$

$$H_{1,x} + H_{2,y} + H_{3,z} = 0.$$

Maxwelli võrrandites saab ühe väljadest elimineerida, näiteks kui elimineerime H , siis saame lainevõrrandi

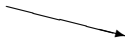
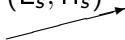
$$E_{tt} = c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz})$$

koos lisatingimusega $E_{1,x} + E_{2,y} + E_{3,z} = 0$.

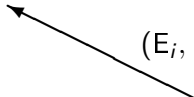
Lisaks on vaja rajatingimusi.



(E_s, H_s)



(E_i, H_i)



“Nähtamatu” lennuk



Lockheed F-117 Nighthawk

Esimene lend 1981.

Kasutati ulatuslikult Lahesõjas 1990-1991.

Kes tahab võita miljon dollarit?

Clay instituut (Clay Mathematics Institute) sõnastas aastal 2000 seitse “kõige tähtsamat” matemaatilist probleemi, neist igaühe lahendajale on välja pandud auhind miljon dollarit.

Üks on lahendatud: Grigori Perelman lahendas Poincare hüpoteesi.

Riemanni hüpotees sõnastatud juba aastal 1900 Hilberti probleemina (23 “kõige tähtsamat” matemaatilist probleemi sel ajal).

Navier-Stokesi võrrand

Olgu $v(x, t)$ vedeliku kiirus ning $p(x, t)$ vedeliku rõhk punktis x ajamomendil t . Olgu $f(x, t)$ väline jõud ning ν vedeliku viskoossus.

$$v_{i,t} + \sum_{j=1}^3 v_j v_{i,x_j} = -p_{x_i} + \nu \sum_{j=1}^3 v_{i,x_j x_j} + f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

lisaks kokkusurumatu vedeliku korral massi jäävuse seadus

$$v_{1,x_1} + v_{2,x_2} + v_{3,x_3} = 0.$$

Navier-Stokesi võrrand

Olgu $v(x, t)$ vedeliku kiirus ning $p(x, t)$ vedeliku rõhk punktis x ajamomendil t . Olgu $f(x, t)$ väline jõud ning ν vedeliku viskoossus.

$$v_{i,t} + \sum_{j=1}^3 v_j v_{i,x_j} = -p_{x_i} + \nu \sum_{j=1}^3 v_{i,x_j x_j} + f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

lisaks kokkusurumatu vedeliku korral massi jäävuse seadus

$$v_{1,x_1} + v_{2,x_2} + v_{3,x_3} = 0.$$

Probleem. Tõestada või tuua kontranäide järgmisele väitele: kui on antud vedeliku kiirus (piisavalt sile) ajamomendil 0, siis Navier-Stokesi võrrandil leidub lahend v, p , mis on määratud kogu ruumis ja kõigi $t \geq 0$ korral ning rahuldab algtingimust.