

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Puhta matemaatika instituut

Aivo Parring

GEOMEETRIA II

Tartu 2005

Sisukord

Eessõna.....	3
1. Rühm.....	6
2. Vektorruum.....	12
3. Ruutvormid.....	20
4. Eukleidiline, pseudoeukleidiline ja sümplektiline vektorruum.....	24
5. Afinne ruum. Eukleidiline, pseudoeukleidiline ja sümplektiline afinne ruum.....	33
6. Vektorruumi lineaarteisendused.....	47
7. Afiinsed kujutused ja teisendused.....	55
8. Afinse ruumi automorfismid.....	63
9. Afinse ruumi kvadriku mõiste.....	72
10. Kvadriku lõikamine sirgega.....	75
11. Kvadriku keskpunkt.....	80
12. Kvadriku diameetertasand.....	82
13. Kvadriku puutujatasand.....	85
14. Kvadrikute afinne klassifikatsioon.....	88
15. Kvadrikute ortogonaalne klassifikatsioon.....	93

Eessõna

Geomeetria on matemaatika haru, mille aineks on kehade kuju ja nende ruumiliste vahekordade uurimine. Samas öeldakse lahti nende kehade muudest omadustest, nagu näiteks kaal, värvus, tihedus jm. Geomeetria vanimat osa tuntakse elementargeomeetria nime all. Tema algeid leidub juba Egiptuse ja Babüloonia matemaatilistes tekstides, mis on kirja pandud juba teisel aastatuhandel enne meie ajaarvamist. Kujundeid vaadeldakse igapäevases ruumis, kusjuures arutluste õigsust põhjendatakse jooniste abil. Ka kaasajal esineb geomeetria selliseid käsitusi. Kõik sõltub sellest, millisel tasemel on õppekava poolt ette nähtud geomeetriat õpetada. Samas on toimunud geomeetrias, nii nagu kogu matemaatikas, väga oluline areng. See areng on toimunud kahes suunas. Esimese suuna rajajaks loetakse saksa matemaatikut *David Hilberti* (23.I 1862 – 14.II 1943). Tema eesmärgiks oli loobumine geomeetria esitamisest jooniste tasemel. Selleks oli vaja geomeetriat, nii nagu igat tõsiselt võetavat matemaatilist teooriat, käsitleda aksiomaatiliselt, mis võimaldab loobuda joonistele toetuvatest tõestustest, asendades need deduktsiooniga. Aastal 1899 esitas tollane Göttingeni ülikooli professor David Hilbert oma teoses "Geomeetria alused" ("Grundlagen der Geometrie") elementargeomeetria aksiomaatika. Tegelikult püüdis geomeetriat aksiomaatiliselt käsitleda juba kreeka matemaatik *Eukleides* (u. 365 – u. 300 e.m.a.) oma teose "Elemendid" geomeetriat käsitlevas osas, kus ta võtab aksiomaatiliselt kokku eelkäijate saavutused.

Teine oluline suund geomeetria arengus on seotud samuti saksa matemaatikuga, seekord *Felix Kleiniga* (25.IV 1848 – 22.VI 1925). Aastal 1872 pidas ta Erlangeni ülikoolis avaloengu, mis on saanud tuntuks *Erlangeni programmi* nime all. Selles esitas ta geomeetria ja teisenduste rühma vahelise seose. Selgitame seda mõtet lähemalt. Nagu teada (eukleidiline) geomeetria vaatleb ruumi kujundite neid omadusi, mis säiluvad liikumistel. Ühte kujundit loetakse võrdseks teise kujundiga, kui ühe neist saab viia teiseks liikumise abil. F. Klein ütles veidi üldisemalt: liikumiste hulga asemel võib piirduda ka tema mistahes alamhulgaga, kusjuures võrdseteks loetakse kujundid, mil üks on saadav teisest teisenduse abil vaadeldavast

alamhulgast. Teisenduste hulga kitsendamise tulemusena tema alamhulgale annab teise geomeetria, mis uurib kujundite omadusi, mis ei muutu vaadeldava alamhulga teisenduste toimel. Antud kujundite võrdsuse mõistelt nõutakse kolme loomuliku tingimuse täidetust. Need tingimused on järgmised: 1) iga kujund on võrdne iseendaga, 2) kui üks kujund on võrdne teise kujundiga, siis teine kujund on võrdne esimese kujundiga ja 3) kui üks kujund on võrdne teise kujundiga ja teine kujund on võrdne omakorda kolmanda kujundiga, siis esimene kujund on võrdne kolmanda kujundiga. Osutub, et need kolm nõuet ruumi teisenduste alamhulga kohta viivad seleni, et teisenduste alamhulk peab olema rühm. Ruumi kujundite omaduste, mis säiluvad valitud teisenduste rühma korral, hulka nimetatakse selle rühma geomeetriaks. Valides erinevaid teisenduste rühmi, saame vaadeldava ruumi erinevaid geomeetriaid.

Mõlemad suunad on tänaseni läbi teinud üsna suure arengu. Seda on paljuski võimaldanud matemaatika areng üldse, seejuures esmajoones (lineaar)algebra areng. Käesoleva geomeetriakursuse terviklikkuse huvides on algebra need osad, mis on vajalikud meil, on esitatud uuesti, kuid ilma tõestusteta. Meie esmaseks sihiks on anda mitmete (punkti)ruumide aksiomaatiline käsitus. Seega loobutakse näitlikust käsitlusest, käsitlusest jooniste abil. Selle käsitluse eeliseks on veel see, et vaadeldav ruum ei pea tingimata olema kolmemõõtmeline. Ruumi mõõde võib olla kuitahes suur – ruum on paljumõõtmeline. Ruum võib olla isegi lõpmatumõõtmeline. Sek korral on küll välistatud punkti koordinaatide kasutamine, sest neid ei ole punktidel lihtsalt olemas. Ruumide aksiomaatika andmisel on vajalik algebras käsitletud teadmisi rühmade ja vektorruumide kohta. Tegelikult on vajalikud ka teadmised kujutuste kohta, mida siin ei meenutata. Eeldatakse, et lugejal on need mees. Vektorruumide ülevaate esitamisel tutvutakse ka selliste vektorruumidega, milles on antud skalaarkorrutamine. Olenevalt skalaarkorrutise definitsioonist, saadakse eukleidiline, pseudoeukleidiline või sümplektiline vektorruum. Kasutades vektorruumi mõistet, saame anda nüüd esimese ruumi aksiomaatika, milleks on *afinne ruumi aksiomaatika*. Kui vektorruumiks võtame eukleidilise, pseudoeukleidilise või sümplektilise vektorruumi, saame eukleidilise, pseudoeukleidilise või sümplektilise afinne ruumi. Järgmiseks ruumiks, mille aksiomaatikani me tahame jõuda, on projektiivne ruum. Selleks aga peame uurima afinne ruumi ja tema eritüübi – eukleidilise afinne ruumi – kvaadrikute geomeetria. Meie jaoks on esmajoones vajalik kvaadrikute afinne ja ortogonaalne klassifikat-

sioon. Nüüd same anda projektiivse ruumi aksiomaatika ja seejärel ka põgusalt tutvuda selle ruumi ehitusega. Projektiivse ruumi mõiste kaudu jõutakse kahe viimase siin vaadeldava ruumi mõisteni. Nendeks on elliptiline ja hüperboolne ruum. Viimana ruum on tuntud ka Lobatêvski ruumina. Sellega meie tutvus erinevate ruumidega piirdub.

Teiseks meie kursuse oluliseks aspektiks on vaadeldud ruumide geomeetria, s.o. Erlangeni programm. Kõigi eespool vaadeldud ruumide korral saab vaadelda nende ruumide automorfismide rühmi, et oleks selge, mis on nende ruumide geomeetria. Seletame veidi täpsemalt. Alustada tuleb hoopis kordamisega. Meenutatakse vektorruumi lineaarteisendustega seotud mõisteid. Erilist huvi pakuvad bijektiivsed lineaarteisendused, mille hulk kujutatute korrutamise suhtes moodustab rühma. Seda rühma nimetatakse automorfismide rühmaks. Kui on tegemist eukleidilise, pseudoeukleidilise või sümplektilise vektorruumiga, siis loomulikul viisil eraldub välja automorfismide rühmast alamrühm, mida vastavalt nimetatakse eukleidiliseks, pseudoeukleidiliseks või sümplektiliseks automorfismide rühmaks. Pärast seda ettevalmistavat tööd, saame asuda punktiruumide automorfismide rühma selgitama. Automorfismide rühma nimetatakse *liikumiste rühmaks*. Selleks tuleb käsitleda afinse ruumi afinseid teisendusi. Teeme seda muidugi aksiomaatiliselt. Meie eesmärgiks on vaadelda bijektiivseid afinseid teisendusi, sest nende hulk kujutatute korrutamise suhtes on rühm. See rühm võetakse afinse ruumi liikumiste rühmaks. Kui vaatleme afinse ruumi eritüüpe – eukleidilist, pseudoeukleidilist ja sümplektilist afinset ruumi –, siis afinse ruumi liikumiste rühmast loomulikul teel eraldub välja alamrühm, mida nimetatakse vastavalt vaadeldava ruumi eukleidiliseks, pseudoeukleidiliseks või sümplektiliseks liikumiste rühmaks. Analoogilised liikumiste rühmad tekivad kolme viimase ruumi – projektiivse, elliptilise ja hüperboolse – ruumi korral. Nende rühmade käsitlemine ei mahu küll käesoleva kursuse raamidesse.

Kõigis vaadeldud ruumides saab üles ehitada geomeetria, mis pole midagi muud, kui nende ruumide alamhulkade omaduste uurimine. Seejuures tuleb piirduda alamhulga nende omadustega, mis säiluvad, kui kujundile rakendame liikumiste rühma elemente. Antud kursuse raamidesse ei mahu ka ühe või teise ruumi geomeetria uurimine.

Sellega ka meie geomeetria kursus lõpeb. Tegemist on sissejuhatavate peatükkidega. Kaasaegne geomeetria on aga muutkondade geomeetria.

1. Rühm

(Kordamine)

Rühma mõiste on geomeetrias väga oluline. Ilma temata pole suurt midagi peale hakata. Meenutame mõningaid rühmaga seotuid mõisteid.

Definitsioon 1.1. *Mittetühja hulka G nimetame rühmaks, kui temas on antud kujutus*

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G; \quad (x, y) \longmapsto xy, \quad (1.1)$$

mida nimetame korrutamiseks. Korrutamine peab rahuldama järgmisi aksioome.

1° *Korrutamine on assotsiatiivne, s.o. iga $x, y, z \in G$ korral kehtib*

$$(xy)z = x(yz). \quad (1.2)$$

2° *Hulgas G leidub selline element, tähistame e abil, et iga $x \in G$ korral kehtib*

$$xe = x, \quad ex = x. \quad (1.3)$$

Elementi e nimetatakse ühikelemendiks.

3° *Iga elemendi $x \in G$ korral leidub hulgas G selline element, tähistame x^{-1} abil, et*

$$xx^{-1} = e, \quad x^{-1}x = e. \quad (1.4)$$

Elementi x^{-1} nimetatakse elemendi x pöördelemendiks.

Definitsioon 1.2. *Rühma G nimetatakse kommutatiivseks ehk Abeli rühmaks, kui korrutamine temas on kommutatiivne, s.o.*

$$xy = yx. \quad (1.5)$$

Märkus. Rühmas kujutust $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ nimetatakse sageli korrutamise asemel *liitmiseks*. Sel korral kirjutatakse

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G; \quad (x, y) \longmapsto xy$$

asemel

$$+ : G \times G \longrightarrow G; \quad (x, y) \longmapsto x + y.$$

Ühikelementi tähistame e asemel θ ja pöördelementi x^{-1} asemel $-x$ abil, nimetades neid vastavalt *nullelemendiks* ja *vastandelemendiks*. Kujutust $\cdot$ või $+$ nimetatakse rühma *algebraliseks tehteks*. Igas konkreetsetes rühmas on algebralisel tehtel konkreetne sisu.

Näide 1.1. Olgu $GL(n, \mathbf{R})$ n -järku regulaarsete reaalarvuliste elementidega matriksite hulk. Osutub, et see hulk on matriksite korrutamise suhtes rühm.

Meil tuleb kontrollida rühma aksioomide täidetust. Kõigepealt tuleb kontrollida, et matriksite korrutamine on hulgas $GL(n, \mathbf{R})$ algebraline tehe. See on tõepoolest nii, sest

$$(X, Y) \in GL(n, \mathbf{R}) \times GL(n, \mathbf{R}) \iff |X| \neq 0, \quad |Y| \neq 0$$

korral

$$|XY| = |X||Y| \neq 0 \iff XY \in GL(n, \mathbf{R}).$$

Seega aksioom 1° kehtib. Samuti kehtib aksioom 2°. Nimelt ühikelemendiks on n -järku ühikmatriks E , sest $|E| = 1 \neq 0$ ja $EX = X$ ja $XE = X$ iga $X \in GL(n, \mathbf{R})$ korral. Samuti kehtib aksioom 3°. Matriksi $X \in GL(n, \mathbf{R})$ pöördelemendiks on pöördmatriks X^{-1} . Teame $|X^{-1}| = |X|^{-1} \neq 0$, mistõttu $X^{-1} \in GL(n, \mathbf{R})$. Seega $GL(n, \mathbf{R})$ on rühm. Seda rühma nimetatakse *täielikuks lineaarrühmaks*.

Järgnevas meenutame alamrühma mõistet.

Definitsioon 1.3. Rühma G mittetühja alamhulka H nimetatakse rühma G alamrühmaks, kui ta on rühma G algebralise tehete suhtes rühm.

Vahetult on ilmne, et iga $x, y \in H$ korral $H \subset G$ tõttu korrutis $xy \in G$, kuid alamrühmaks olemiseks on sellest vähe. Nõutakse $xy \in H$. Osutub, et alamrühma H ühikelemendiks on rühma G ühikelement ja elemendi $x \in H$ pöördelemendiks on rühma G seisukohalt leitud pöördelement x^{-1} . Kuna $e \in G$ korral $e \in H$, siis rühma G kõikidel alamrühmadel on vähemalt üks ühine element – ühikelement e . Alamrühmaks olemist kontrollida definitsiooni abil on üsna tülikas. Palju lihtsam on kasutada järgmist teoreemi.

Teoreem 1.1. Rühma G mittetühi alamhulk H on alamrühm siis ja ainult siis kui

$$x, y \in H \implies xy^{-1} \in H$$

ehk samaväärselt

$$x, y \in H \implies xy \in H, \quad x \in H \implies x^{-1} \in H.$$

Järgnevas toome mitmed geomeetria jaoks olulised alamrühmade näited. Tegemist on täieliku lineaarrühma alamrühmadega.

Võtame täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamhulga H , mis koosneb skalaarmatriksitest, s.o.

$$H := \{xE \mid x \in \mathbf{R}'\},$$

kus $\mathbf{R}' := \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Näide 1.2. n -järku skalaarmatriksite hulk on täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühm.

Tõepoolest. On ilmne, et $H \neq \emptyset$. Mistahes $xE, yE \in H$ korral

$$(xE)(yE)^{-1} = (xE)(y^{-1}E) = (xy^{-1})EE = (xy^{-1})E,$$

kus $x \neq 0$ ja $y \neq 0$ tõttu ka $xy^{-1} \neq 0$. Seega $(xE)(yE)^{-1} \in H$. Teoreemi 1.1 kohaselt on n -järku skalaarmatriksite hulk täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühm.

Näide 1.3. Olgu G vabalt fikseeritud n -järku matriks. Täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamhulk

$$H_G := \{X \in GL(n, \mathbf{R}) \mid X^\top GX = G\} \tag{1.6}$$

on tema alamrühm.

Tõepoolest. Iga $X, Y \in H_G$ korral $X^\top GX = G$ ja $Y^\top GY = G$. Kuna matriks Y on regulaarne, siis eksisteerib pöördmatriks Y^{-1} , mille abil saame seose $Y^\top GY = G$ vasakult poolt avaldada matriksi G :

$$\begin{aligned} G &= (Y^\top)^{-1}GY^{-1} = (Y^{-1})^\top GY^{-1} \implies \\ &\implies G = (Y^{-1})^\top GY^{-1}. \end{aligned}$$

Seega

$$(XY^{-1})^\top G(XY^{-1}) = (Y^{-1})^\top (X^\top GX)Y^{-1} = (Y^{-1})^\top GY^{-1} = G,$$

mistõttu H_G on täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühm.

Valides erinevaid matrikseid G , saame erinevaid alamrühmi H_G .

1) Kui matriks G on nullmatriks θ , siis tingimust (1.6) rahuldavad kõik täieliku lineaarrühma elemendid. Seega $H_\theta = GL(n, \mathbf{R})$.

2) Kui matriks G on ühikmatriks E , siis tingimusest (1.6) saame

$$H_E := \{X \in GL(n, \mathbf{R}) \mid X^\top EX = E\} \quad (1.7)$$

ehk

$$X^\top X = E \iff X^{-1} = X^\top.$$

Saadud alamrühma nimetatakse *ortogonaalrühmaks* ja tavaliselt tähistatakse $O(n, \mathbf{R})$ abil.

3) Matriksiks G võtame regulaarse diagonaalmaatriksi, mille diagonaal on ehitusega

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, \overbrace{-1, -1, \dots, -1}^s.$$

Valitud matriks on üsna ühikmaatriksi sarnane, mistõttu teda tähistame ${}^s E_n$ abil. Siin $s = 0$ korral saame ühikmaatriksi. Alamrühma tingimus (1.6) on kujuga

$${}^s O(n, \mathbf{R}) := \{X \in GL(n, \mathbf{R}) \mid X^\top ({}^s E_n) X = {}^s E_n\}.$$

Tekkinud alamrühma nimetatakse $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral pseudo-ortogonaalrühmaks. Kui $s = 0$, saame ortogonaalrühma.

4) Koosnegu täielik lineaarrühm paarisjärku regulaarmatriksitest, s.o. $GL(2n, \mathbf{R})$. Matriksiks G võtame $2n$ -järku kaldsümmeetrilise matriksi, mille diagonaalile toetub n teist järku kaldsümmeetrilist matriksit

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ülejäänud elemendid on nullid. Seega matriksi G saame anda otsesummana

$$I_n = \underbrace{I \oplus I \oplus \dots \oplus I}_n.$$

Tekkinud alamrühma $H_{I_n} \subset GL(2n, \mathbf{R})$ nimetatakse *sümplektiliseks rühmaks*. Teda tähistatakse Sp_{2n} abil.

Näide 1.4. *Eraldame täielikust lineaarrühmast välja alamhulga, mis koosneb matriksitest determinandiga 1, s.o.*

$$H := \{X \in GL(n, \mathbf{R}) \mid |X| = 1\}. \quad (1.8)$$

Osutub, et see hulk on täieliku lineaarrühma alamrühm.

Tõepoolest. Kontrolliks kasutame teoreemi 1.1. Iga $X, Y \in H$ korral $|X| = |Y| = 1$. Kuna $|Y^{-1}| = |Y|^{-1} = 1$, siis $|XY^{-1}| = |X||Y^{-1}| = 1$. Seega $XY^{-1} \in H$. Vaadeldav hulk H on alamrühm.

Järgmise alamrühma näite saamiseks, võtame vaatluse alla ortogonaalrühma. Iga $X \in O(n, \mathbf{R})$ korral $X^T X = E$, millest $|X^T X| = |E|$ ehk $|X|^2 = 1$. Seega ortogonaalrühma iga elemendi determinant on 1 või -1 .

Näide 1.5. *Ortogonaalrühma alamhulk*

$${}^+O(n, \mathbf{R}) := \{X \in O(n, \mathbf{R}) \mid |X| = 1\}$$

on tema alamrühm, mida nimetatakse pärisortogonaalrühmaks.

Analoogiliselt nagu näite 1.4 korral näeme, et vaadeldav alamhulk on alamrühm.

Sellega meie alamrühmade näited piirduvad. Lõpuks meenutame faktorrühma mõistet.

Olgu H rühma G alamrühm. Mistahes elemendi $g \in G$ korral moodustame alamhulga

$$gH := \{gx \mid x \in H\},$$

mida nimetatakse *vasakpoolseks kõrvalklassiks moodustajaga g alamrühma H järgi*. Kui element g muutub rühmas G , tekib rühma vasakpoolsete kõrvalklasside hulk. Rühma elemendi h muutumisel kõrvalklassis gH kogu aeg saame $hH = gH$. Kuna rühma G ühikelement e kuulub igasse tema alamrühma, siis ka $e \in H$. Seega kõrvalklass $eH = \{ex = x \mid x \in H\} = H$. Samas võib alamrühma H abil moodustada parempoolsed kõrvalklassid $Hg := \{xg \mid x \in H\}$, kus $g \in G$. Reeglina parempoolsete kõrvalklasside hulk ei ühti vasakpoolsete kõrvalklasside hulgaga. Vahest võib see nii ka olla. Kui rühm G kommutatiivne, siis see nii ongi.

Definitsioon 1.4. Rühma G alamrühma H nimetatakse rühma G normaaljagajaks, kui tema järgi moodustatud vasakpoolsete kõrvalklasside hulk ühtub parempoolsete kõrvalklasside hulgaga.

Näide 1.6. Täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ skalaarmatriksite alamrühm $H := \{xE \mid x \in \mathbf{R}'\}$ on normaaljagaja.

Tõepoolest. Iga $A \in GL(n, \mathbf{R})$ abil moodustame mõlemapoolsed kõrvalklassid. Saame

$$AH = \{A(xE) \mid x \in \mathbf{R}'\} = \{x(AE) \mid x \in \mathbf{R}'\} = \{xA \mid x \in \mathbf{R}'\}$$

ja

$$HA = \{(xE)A \mid x \in \mathbf{R}'\} = \{xA \mid x \in \mathbf{R}'\},$$

millest näeme $AH = HA$ iga $A \in GL(n, \mathbf{R})$ korral. Seega skalaarmatriksite alamrühm on rühma $GL(n, \mathbf{R})$ normaaljagaja.

Rühma G normaaljagaja H korral kõrvalklasside hulka tähistatakse G/H . Osutub, et selles hulgas loomulikult tekib rühma struktuur. Iga $g_1H, g_2H \in G/H$ korral korrutamine antakse valemiga

$$g_1H \cdot g_2H := (g_1g_2)H.$$

Ühikelemendiks faktorrühmas on kõrvalklass $eH = H$ rühma G ühikelemendi e järgi. Elemendi gH pöördelemendiks on $g^{-1}H$.

Näide 1.7. Täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ kõrvalklasside hulk tema skalaarmatriksite alamrühma järgi on faktorrühm.

Paneme veel kirja selles konkreetsetes faktorrühmas mõni rida eespool antud korrutamise ja pöördelemendi leidmise valemi. Saame

$$\{xA \mid x \in \mathbf{R}'\} \cdot \{xB \mid x \in \mathbf{R}'\} = \{x(AB) \mid x \in \mathbf{R}'\},$$

$$\{xA \mid x \in \mathbf{R}'\}^{-1} = \{xA^{-1} \mid x \in \mathbf{R}'\}.$$

2. Vektorruum

(Kordamine)

Definitsioon 2.1. *Mittetühja hulka $\mathbf{V}$ nimetame vektorruumiks üle reaalarvude $\mathbf{R}$, kui tal on järgmine ehitus.*

I. On antud kujutus

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y},$$

mida nimetame vektorite liitmiseks. Vektorite liitmine peab rahuldama järgmisi aksioome.

1° *Vektorite liitmine on assotsiatiivne, s.o. iga $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$ korral kehtib*

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

2° *Hulgas $\mathbf{V}$ leidub selline vektor, tähistame $\vec{0}$ abil, et iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral kehtib*

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

Vektorit $\vec{0}$ nimetatakse nullvektoriks.

3° *Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral leidub hulgas $\mathbf{V}$ selline vektor, tähistame $-\vec{x}$ abil, et*

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}, \quad (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}.$$

Vektorit $-\vec{x}$ nimetatakse vektori $\vec{x}$ vastandvektoriks.

4° *Vektorite liitmine on kommutatiivne, s.o. iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

II. On antud kujutus

$$\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}; \quad (\xi, \vec{x}) \longmapsto \xi \vec{x},$$

mida nimetatakse reaalarvu ja vektori korrutamiseks. Viimane peab rahuldama järgmisi aksioome.

5° Iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral

$$1\vec{x} = \vec{x}.$$

6° Iga $\xi, \mu \in \mathbf{R}$ ja iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral

$$(\xi\mu)\vec{x} = \xi(\mu\vec{x}).$$

III. *Distributiivsused.*

7° Iga $\xi \in \mathbf{R}$ ja iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral

$$\xi(\vec{x} + \vec{y}) = \xi\vec{x} + \xi\vec{y}.$$

8° Iga $\xi, \mu \in \mathbf{R}$ ja iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral

$$(\xi + \mu)\vec{x} = \xi\vec{x} + \mu\vec{x}.$$

Vektorite lahutamine antakse valemiga

$$\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-\vec{y}).$$

Näide 2.1. (m, n) -järku maatriksite hulk $Mat(m, n)$ on maatriksite liitmise ja arvuga korrutamise suhtes vektorruum.

Näide 2.2. *Hulk*

$$\mathbf{R}^n := \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbf{R}\}$$

on tehete

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) + (y^1, y^2, \dots, y^n) := (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$

ja

$$\xi(x^1, x^2, \dots, x^n) := (\xi x^1, \xi x^2, \dots, \xi x^n)$$

suhtes vektorruum.

Antud näide on eelmise näite erijuht $\mathbf{R}^n = Mat(1, n)$. Märkusena lisame, et geomeetrias üsna sageli kasutatakse ülaindekseid. Näiteks nii on tehtud paar rida eespool, kirjutades $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Algebras sama asja tähistatakse $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Näide 2.3. *Reaalarvude hulk on reaalarvude liitmise ja korrutamise suhtes vektorruum.*

See näide on eelmise näite erijuht, võttes $n = 1$. Sel korral $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$.

Definitsioon 2.2. *Me nimetame vektorruumi $\mathbf{V}$ mittetühja alamhulka $\mathbf{M}$ tema alamruumiks, kui $\mathbf{M}$ on $\mathbf{V}$ tehete – liitmise ja arvuga korrutamise – suhtes vektorruum (üle reaalarvude $\mathbf{R}$).*

Teoreem 2.1. *Vektorruumi $\mathbf{V}$ mittetühi alamhulk $\mathbf{M}$ on tema alamruum, siis ja ainult siis, kui vektorruumi $\mathbf{V}$ tehted on alamruumi $\mathbf{M}$ teheteks, s.o.*

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M} \implies \vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{M}, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad \vec{x} \in \mathbf{M} \implies \xi \vec{x} \in \mathbf{M}$$

ehk samaväärselt

$$\xi, \mu \in \mathbf{R}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M} \implies \xi \vec{x} + \mu \vec{y} \in \mathbf{M}.$$

Kuna vektorruumi $\mathbf{V}$ kõikide alamruumide nullvektoriks on tema nullvektor, siis kõikide tema alamruumide ühisosa ei ole tühi hulk.

Toome kaks triviaalset alamruumi näidet.

Näide 2.4. *Vektorruum $\mathbf{V}$ on iseenda alamruum.*

Näide 2.5. *Vektorruumi nullvektorist koosnev alamhulk $\{\vec{0}\}$ on tema alamruum.*

Definitsioon 2.3. *Olgu $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_s$ vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruumid. Tema alamruumide $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_s$ summaks, mida tähistatakse $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_s$ abil, nimetatakse vektorruumi $\mathbf{V}$ alamhulka*

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_s :=$$

$$:= \{\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_s \mid \vec{x}_1 \in \mathbf{M}_1, \vec{x}_2 \in \mathbf{M}_2, \dots, \vec{x}_s \in \mathbf{M}_s\}.$$

Teoreem 2.2. *Vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruumide summa $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_s$ on alamruum.*

Definitsioon 2.4. *Vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruumide summat $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_s$ nimetame otsesummaks, mida tähistame $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_s$ abil, kui igal alamruumil $\mathbf{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) on ülejäänud alamruumide*

summaga $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_{i-1} + \mathbf{M}_{i+1} + \dots + \mathbf{M}_s$ ainult üks ühine vektor, nimelt nullvektor $\vec{0}$, s.o.

$$\mathbf{M}_i \cap (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_{i-1} + \mathbf{M}_{i+1} + \dots + \mathbf{M}_s) = \{\vec{0}\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, s\}.$$

Tavaliselt vaadeldakse kahe alamruumi $\mathbf{M}_1$ ja $\mathbf{M}_2$ summat $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. Ottesumma $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$ korral $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \{\vec{0}\}$. Teine tingimus on aga

$$\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$$

tõttu täidetud.

Definitsioon 2.5. Olgu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorruumi $\mathbf{V}$ vektorid. Hulka

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) := \{\vec{x} = \xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2 + \dots + \xi_m \vec{a}_m \mid \forall \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathbf{R}\}$$

nimetatakse lineaarkatteks moodustajatega $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$.

Teoreem 2.3. Vektorruumi lineaarkate $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)$ moodustajatega $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbf{V}$ on tema alamruum.

Üheks fundamentaalmõisteks vektorruumis on vektorsüsteemi lineaarne sõltuvus (sõltumatus).

Definitsioon 2.6. Vektorsüsteemi

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$$

nimetame lineaarselt sõltuvaks (lineaarselt sõltumatuks) kui võrrandil

$$\xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2 + \dots + \xi_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

on enam kui üks lahend (ainult üks lahend).

Vektorsüsteemi lineaarse sõltuvuse (sõltumatuse) kindlaks tegemine definitsiooni alusel on sageli vaevarikas. Olukorda lihtsustavad järgmised teoreemid.

Teoreem 2.4. Ühevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui $\vec{a}$ on nullvektor, s.o. $\vec{a} = \vec{0}$.

Järeldus 2.1. Ühevektoriline vektorsüsteem $\vec{a}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}$ ei ole nullvektor, s.o. $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Teoreem 2.5. *Vektorsüsteem*

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\},$$

milles on vähemalt kaks vektorit, s.o. $m \geq 2$, on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi mingi vektor on avaldatav tema ülejäänud vektorite kaudu.

Järeldus 2.2. *Vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$, kus $m \geq 2$, on lineaarselt sõltumatu siis ainult siis, kui sellest vektorsüsteemist ei saa avaldada ühtegi vektorit selle vektorsüsteemi ülejäänud vektorite kaudu.*

Teoreem 2.6. *Vektorsüsteem, millel on lineaarselt sõltuv alamsüsteem, on lineaarselt sõltuv.*

Järeldus 2.3. *Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem ei sisalda nullvektorit.*

Järeldus 2.4. *Nullvektorit sisaldav vektorsüsteem on lineaarselt sõltuv.*

Vektorsüsteemi lineaarse sõltumatuse mõiste võimaldab vektorruumis anda baasi mõiste.

Definitsioon 2.6. *Vektorruumi V vektoritest moodustatud vektorsüsteemi*

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

nimetatakse tema baasiks, kui see vektorsüsteem on esiteks lineaarselt sõltumatu ja teiseks vektorruumi V iga vektor avaldub selle vektorsüsteemi vektorite kaudu.

Baasi definitsioonist ei järeldu, et iga vektorruum peab omama baasi. Kui vektorruumil on baas, siis on üsna loomulik, et see baas ei ole ainus. Tekib küsimus, kas kuidagi on seotud vektorite arv erinevates baasides. Järgmine teoreem toob asjasse selgust.

Teoreem 2.7. *Vektorruumi kõikides baasides on samapalju vektoreid.*

Definitsioon 2.7. *Vektorruumi, millel puuduvad baasid, nimetatakse lõpmatumõõtmeliseks ehk lõpmatudimensionaalseks vektorruumiks.*

Definitsioon 2.8. *Vektorruumi, millel on baas(id) olemas, nimetatakse lõplikumõõtmeliseks ehk lõplikudimensionaalseks vektorruumiks. Vektorite arvu baasis nimetatakse vektorruumi mõõtmeks ehk dimensiooniks.*

Kui lõplikumõõtmelise vektorruumi $\mathbf{V}$ mõõde on n , siis tähistame teda $\mathbf{V}^n$ abil.

Teoreem 2.8. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi $\mathbf{V}^n$ iga lineaarselt sõltumatut vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ saab $m \leq n$ korral täiendada selle vektorruumi baasini.*

Järgnevas me täpsustame tähiseid. Näiteks vektorruumi $\mathbf{V}^n$ baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ edaspidi tähistame lühemalt $\{\vec{e}_i\}$ abil. Siin indeksi i asemel võib kasutada mistahes teist väikest ladina tähte. Seega $\{\vec{e}_i\} = \{\vec{e}_k\}$. Ka teatavat tüüpi summasid hakkame tähistama lühemalt. Seejuures veendume ülaindeksite kasulikkuses. Teeme seda konkreetse näite abil. Vektorruumi $\mathbf{V}^n$ iga vektori $\vec{x}$ saab avaldada baasi $\{\vec{e}_i\}$ kaudu. Kasutades kordajate tähistamiseks ülaindekseid võime selle kirjutada

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n \iff \vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i.$$

Albert Einstein lihtsustas summamärgi abil antud kirjutist, jättes summamärgi $\sum_{i=1}^n$ lihtsalt ära. Seega

$$\sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = x^i \vec{e}_i.$$

Siit saame reegli: kui valemis on kaks ühesugust indeksit, millest üks on ülal ja teine all, siis toimub nende järgi summeerimine. Summeerimise interval on reeglina eelnevast tekstist teada. Näiteks

$$x^k y_k = x^1 y_1 + x^2 y_2 + \dots + x^n y_n, \quad w_s^s = w_1^1 + w_2^2 + \dots + w_n^n.$$

Definitsioon 2.9. *Olgu $\{\vec{e}_i\}$ vektorruumi $\mathbf{V}^n$ baas. Me saame iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ avaldada baasi kaudu järgmisel kujul $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$. Arve $x^1, x^2, \dots, x^n$ viimases summas nimetatakse vektori $\vec{x}$ koordinaatideks baasil $\{\vec{e}_i\}$. Vektorit $\vec{x}$ koordinaatidega $x^1, x^2, \dots, x^n$ tähistame $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ehk lühidalt $\vec{x} = (x^i)$.*

Teoreem 2.9. *Vektori koordinaadid igal baasil määratakse üheselt.*

Opereerimisel vektoritega on oluline järgmine teoreem. Ta on aluseks koordinaatide meetodile –me võime vektorite asemel opereerida tema koordinaatidega.

Teoreem 2.10. *Vektorite liitmisel, lahutamisel ja vektori arvuga korrumisel tuleb koordinaadid vastavalt liita, lahutada ja sama arvuga korrumtada.*

Erinevatel baasidel on ilmselt vektoril erinevad koordinaadid. Selgitame seda nüüd täpsemalt. Vektorruumis $\mathbf{V}^n$ üleminekut baasilt $\{\vec{e}_i\}$ teisele baasile $\{\vec{e}_i'\}$ tähistame lühidalt $\{\vec{e}_i\} \longrightarrow \{\vec{e}_i'\}$. Kuna iga vektori saab avaldada baasi kaudu, siis saame ka uue baasi iga vektori $\vec{e}_i'$ avaldada vana baasi kaudu:

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^n c_i^j \vec{e}_j \iff \vec{e}_i' = c_i^j \vec{e}_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Moodustame matriksi C , mille i -ndas veerus on vektori $\vec{e}_i'$ koordinaadid $c_i^1, c_i^2, \dots, c_i^n$ baasil $\vec{e}_i$. Seega

$$C := \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \iff C = (c_i^j). \quad (2.1)$$

Juhime tähelepanu sellele, et ülaindeks on matriksi reaindeks. Matriksit C nimetame *baasiteisenduse matriksiks üleminekul baasilt $\{\vec{e}_i\}$ baasile $\{\vec{e}_i'\}$* . Kui baasiteisendus $\{\vec{e}_i\} \longrightarrow \{\vec{e}_i'\}$ toimub matriksi C abil, siis kasutame täpsemat tähist $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i'\}$. Algebra kursusest teame, et baasiteisenduse matriks on regulaarne. Veelgi enam: kui võtame n -järku regulaarse matriksi C ja moodustame baasist $\{\vec{e}_i\}$ valemite (2.1) abil vektorsüsteemi $\{\vec{e}_i'\}$, siis saame baasi. Nagu sai öeldud, on baasiteisendusmatriks C regulaarne. Seega eksisteerib temal pöördmatriks C^{-1} . Tema elemente tähistame $\vec{c}_i^j$ abil. Baasiteisendustel on kolm olulist omadust, mida algebra kursuses tavaliselt ei rõhutata. Lugejal palume kontrollida järgmiste omaduste õigsust.

Omadused. *Vektorruumi $\mathbf{V}^n$ baasiteisendustel on järgmised omadused:*

- 1° $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i'\} \implies \{\vec{e}_i'\} \xrightarrow{C^{-1}} \{\vec{e}_i\};$
- 2° $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{E} \{\vec{e}_i\};$
- 3° $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C_1} \{\vec{e}_i'\}, \quad \{\vec{e}_i'\} \xrightarrow{C_2} \{\vec{e}_i''\} \implies \{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C_1 C_2} \{\vec{e}_i''\}.$

Jätkame oma mõttekäiku järgmiselt. Tähistame vektorruumi $\mathbf{V}^n$ baaside hulka $\mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ abil. Fikseerime temas mingi baasi $\{\vec{e}_i^{(o)}\} \in \mathcal{B}(\mathbf{V}^n)$.

Nimetame seda baasi *algbaasiks*. Iga baasi, nende seas ka algbaasi, saab avaldada algbaasi kaudu, saades üheselt määratud, seejuures regulaarse, baasiteisendusmaatriksi. Tekib kujutus

$$\varphi : \mathcal{B}(\mathbf{V}^n) \longrightarrow GL(n, \mathbf{R}); \quad \{\vec{e}_i\} \longmapsto \varphi(\{\vec{e}_i\} = C,$$

kus maatriks $C = (c_i^j)$ saadakse avaldisest $\vec{e}_i = c_i^j \vec{e}_j^{(\circ)}$. Osutub, et see kujutus on bijektiivne, s.o. sama-aegselt injektiivne ja surjektiivne. Veen-dume selles. Oletame, et leidub baaside paar, mil $\{\vec{e}_i^{(1)}\} \neq \{\vec{e}_i^{(2)}\}$, kuid $\varphi(\{\vec{e}_i^{(1)}\}) = \varphi(\{\vec{e}_i^{(2)}\})$. Avaldame need baasid algbaasi kaudu. Me saame avaldistest

$$\vec{e}_i^{(1)} = {}^{(1)}c_i^j \vec{e}_j^{(\circ)}, \quad \vec{e}_i^{(2)} = {}^{(2)}c_i^j \vec{e}_j^{(\circ)}$$

baasiteisendusmaatriksid $C_1 = ({}^{(1)}c_i^j)$ ja $C_2 = ({}^{(2)}c_i^j)$. Kujutuse φ definit-siooni kohaselt $\varphi(\{\vec{e}_i^{(1)}\}) = C_1$ ja $\varphi(\{\vec{e}_i^{(2)}\}) = C_2$. Seega

$$\varphi(\{\vec{e}_i^{(1)}\}) = \varphi(\{\vec{e}_i^{(2)}\}) \implies C_1 = C_2 \implies {}^{(1)}c_i^j = {}^{(2)}c_i^j \implies \{\vec{e}_i^{(1)}\} = \{\vec{e}_i^{(2)}\}.$$

Oleme saanud vastuolu tehtud oletusega. Seega kujutus φ on injektiivne.

Näitame nüüd kujutuse φ surjektiivsuse, s.o. $\varphi(\mathcal{B}(\mathbf{V}^n)) = GL(n, \mathbf{R})$. Selleks on vaja näidata, et iga regulaarse maatriksi $C = (c_i^j)$ korral leidub selline baas $\{\vec{e}_i\}$, mis φ abil kujutub maatriksiks C . Selleks baasiks on vektorsüsteem $\{\vec{e}_i\}$ moodustatuna valemiga $\vec{e}_i = c_i^j \vec{e}_j^{(\circ)}$. Algebra tarkuse kohaselt moodustatud vektorsüsteem on baas. Kujutuse φ definitsiooni ko-haselt tema kujutub vabalt valitud maatriksiks C . Olemegi näidanud, et ku-jutus φ on surjektiivne. Silmas pidades hulkade isomorfismi mõistet, lubab bijektiivse kujutuse φ olemasolu öelda, et baaside hulk $\mathcal{B}(\mathbf{V}^n)$ isomorfne hulgaga $GL(n, \mathbf{R})$. Tegelikult on ju $GL(n, \mathbf{R})$ rühm. Osutub, et see asjaolu toob loomulikult moel ka rühma struktuuri baaside $\mathcal{B}(\mathbf{V}^n)$ hulka. Seejuures olulised on veidi eespool kirja pandud baasiteisenduste omadused ja kuju-tuse φ definitsioon. Kuna φ on bijektiivne, siis leidub tal pöördkujutus $\varphi^{-1} : GL(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{V}^n)$, mis muuseas on ka bijektiivne. Algebra kur-susest teame, et baaside $\mathcal{B}(\mathbf{V}^n)$ hulgas tekib algebraline tehe järgmiselt

$$\begin{aligned} \star : \mathcal{B}(\mathbf{V}^n) \times \mathcal{B}(\mathbf{V}^n) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{V}^n); \quad (\{\vec{e}_i\}, \{\vec{a}_i\}) \longmapsto \{\vec{e}_i\} \star \{\vec{a}_i\} := \\ &:= ((\varphi(\{\vec{e}_i\}) \cdot (\varphi(\{\vec{a}_i\})))^{-1}, \end{aligned}$$

mille suhtes baaside hulk $\mathcal{B}(\mathbf{V}^n)$ on rühm. Märgive, et selles rühmas ühikelemendiks on algbaas $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\}$. Mistahes baasi $\{\vec{e}_i\}$ pöördelemendiks on $\{\vec{e}_i\}^{-1} = \varphi^{-1}(\varphi(\{\vec{e}_i\})^{-1})$.

3. Ruutvormid

(Kordamine)

Ruutvormi mõiste antakse bilineaarvormi mõiste kaudu. Olgu $\mathbf{V}$ vektorruum üle reaalarvude $\mathbf{R}$.

Definitsioon 3.1. Kujutust $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}$ nimetatakse bilineaarvormiks, kui ta on lineaarne kummagi argumendi suhtes, s.o.

$$f(\xi^1 \vec{x}_1 + \xi^2 \vec{x}_2, \vec{y}) = \xi^1 f(\vec{x}_1, \vec{y}) + \xi^2 f(\vec{x}_2, \vec{y}),$$

$$f(\vec{x}, \xi^1 \vec{y}_1 + \xi^2 \vec{y}_2) = \xi^1 f(\vec{x}, \vec{y}_1) + \xi^2 f(\vec{x}, \vec{y}_2).$$

Viimased tingimused on matemaatilise induktsiooni abil üldistatavad enam kui kahe vektori lineaarkombinatsioonile:

$$f(\xi^\alpha \vec{x}_\alpha, \vec{y}) = \xi^\alpha f(\vec{x}_\alpha, \vec{y}), \quad f(\vec{x}, \xi^\alpha \vec{y}_\alpha) = \xi^\alpha f(\vec{x}, \vec{y}_\alpha).$$

Definitsioon 3.2. Bilineaarvormi $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}$ nimetatakse sümmeetriliseks, kui

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}).$$

Definitsioon 3.3. Olgu $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}$ sümmeetriline bilineaarvorm. Kujutust

$$F : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}; \quad F(\vec{x}) := f(\vec{x}, \vec{y})$$

nimetatakse ruutvormiks.

Meenutame fakte bilineaarvormi kohta, kui vektorruum on lõpliku mõõtmeline: $\mathbf{V} = \mathbf{V}^n$. Baasi $\{\vec{e}_i\}$ korral mistahes vektorid $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}^n$ on avaldatav baasi kaudu kujul $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ ja $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$. Bilineaarvormi jaoks saame

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j) = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) x^i y^j = a_{ij} x^i y^j,$$

kus $a_{ij} := f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$. Maatriksit $A := (a_{ij})$ nimetatakse bilineaarvormi maatriksiks baasil $\{\vec{e}_i\}$. Sümmeetrilise bilineaarvormi maatriks on sümmeetriline, sest

$$a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = f(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = a_{ji} \iff A^\top = A.$$

Ruutvormi jaoks saame $F(\vec{x}) = a_{ij}x^i x^j$. Maatriksit A sel korral nimetatakse ruutvormi maatriksiks. Bilineaarvormil (ruutvormil) on igal baasil oma maatriks. Selgitame kuidas ta muutub baasiteisendusel. Baasiteisenduse $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i'\}$ korral valem $\vec{e}_i' = c_i^j \vec{e}_j$ annab baasiteisenduse maatriksi C , mis seob bilineaarvormi (ruutvormi) maatrikseid $A = (a_{ij})$ ja $A' = (a'_{ij})$ saaduna valemitest

$$a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j), \quad a'_{ij} = f(\vec{e}_i', \vec{e}_j')$$

järgmiselt

$$a'_{st} = c_s^i c_t^j a_{ij} \iff A' = C^\top A C. \quad (3.1)$$

Kuna maatriks C on regulaarne, siis viimasest saame $r := \text{rank} A = \text{rank} A'$, mis ütleb, et bilineaarvormi (ruutvormi) maatriksi astak igal baasil on ühesugune. Seega astak r on bilineaarvormi (ruutvormi) jaoks invariantne mõiste.

Definitsioon 3.4. Bilineaarvormi (ruutvormi) astakuks nimetatakse tema maatriksi astakut.

Tavaliselt nõutakse, et ruutvormi astak $\text{rank} F$ on vähemalt 1.

Teoreem 3.1. Vektorruumis $\mathbf{V}^n$ leidub selline baas $\{\vec{e}_i\}$, milles sümmeetrilise bilineaarvormi (ruutvormi) maatriksil A on diagonaalkuju –

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ on nullist erinevad arvud, sest $\text{rank} A = r$. Sel korral

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1 x^1 y^1 + \lambda_2 x^2 y^2 + \dots + \lambda_r x^r y^r \quad (3.2)$$

ja

$$F(\vec{x}) = \lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \dots + \lambda_r(x^r)^2. \quad (3.3)$$

Definitsioon 3.5. *Sümmeetrilise bilineaarvormi (ruurvormi) viimast kuju (3.2) ((3.3)) nimetatakse tema kanooniliseks kujuks.*

Baas, milles sümmeetriline bilineaarvorm (ruutvorm) on normaalkuju-ga, pole üheselt määratud; neid on tegelikult lõpmatult palju. Kanooniliste kujude seas on üks eriline.

Teoreem 3.2. *Vektorruumis $\mathbf{V}^n$ leidub selline baas $\{\vec{e}_i\}$, milles süm-meetrilise bilineaarvormi (ruutvormi) maatriksil A on järgmine diagonaal-kuju*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Olgu viimases maatriksis diagonaalil 1 ja -1 arvu tähistatud vastavalt s ja t abil. Seejuures $s + t = r$. Sellise baasi korral

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^s y^s - x^{s+1} y^{s+1} - \dots - x^r y^r,$$

$$F(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^s)^2 - (x^{s+1})^2 - \dots - (x^r)^2.$$

Definitsioon 3.6. *Sümmeetrilise bilimeaarvormi (ruutvormi) viimast kuju nimetatakse tema normaalkujuks.*

Märgime, et neid baase, milles normaalkuju saadakse on ka lõpmatult palju.

Teoreem 3.3 (Inertsiseadus). *Sümmeetrilise bilineaarvormi (ruut-vormi) kõikides kanoonilistes kujudes on ühepalju positiivseid kordajaid ja samuti ühepalju negatiivseid kordajaid.*

Edaspidi pakuvad meile huvi spetsiifilised ruutvormid. Selleks on vaja meenutada ruutvormide liigitust ehk klassifikatsiooni. Jämedam klassifikatsioon tehakse tema astaku järgi, mis võib muutuda ühest kuni vektorruumi mõõtmeni. Peenem klassifikatsioon saadakse ”+1” ja ”−1” arvu järgi maatriksis (3.4) normaalkuju korral. Meid huvitavad *regulaarsed ruutvormid*, s.o. sellised, mil $\text{rank} F = \dim \mathbf{V}^n = n$. Regulaarsetest ruutvormidest omakorda kaks erijuhtu – positiivselt ja negatiivselt määratud ruutvormid.

Definitsioon 3.7. *Ruutvormi $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ nimetatakse positiivselt (negatiivselt) määratuks, kui iga nullvektorist erineva vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral $F(\vec{x}) > 0$ ($F(\vec{x}) < 0$).*

Teoreem 3.4. *Ruutvormi nimetatakse regulaarseks, positiivselt määratuks ja negatiivselt määratuks ruutvormiks, kui tema normaalkujuks on vastavalt*

$$F(\vec{x}) = (x^1)^2 + \dots + (x^s)^2 - (x^{s+1})^2 - \dots - (x^n)^2, \quad s \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (3.5)$$

$$F(\vec{x}) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2,$$

$$F(\vec{x}) = -(x^1)^2 - \dots - (x^n)^2.$$

Ruutvormi n -järku maatriksil on vastavalt kuju

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = E, \quad A = -E.$$

4. Eukleidiline, pseudoeukleidiline ja sümplektiline vektorruum

Selles punktis vaatleme eri tüüpi vektorruume.

Definitsioon 4.1. Skalaarkorrutamiseks vektorruumis $\mathbf{V}$ üle $\mathbf{R}$ nimetatakse kujutust

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

kui ta rahuldab järgmisi aksioome

$$1^\circ \quad \langle \xi^1 \vec{x}_1 + \xi^2 \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \xi^1 \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \xi^2 \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle,$$

$$2^\circ \quad \langle \vec{x}, \xi^1 \vec{y}_1 + \xi^2 \vec{y}_2 \rangle = \xi^1 \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \xi^2 \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle,$$

$$3^\circ \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle,$$

$$4^\circ \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}.$$

Definitsioon 4.2. Vektorruumi $\mathbf{V}$, milles on antud skalaarkorrutamise eelmise definitsiooniga, nimetatakse eukleidiliseks vektorruumiks. Viimast tähistame $\mathbf{V}$ asemel suure trüki tähega $\mathbf{E}$.

Definitsioonist 4.1. näeme, et skalaarkorrutamine kahe esimese aksioomi kohaselt on bilineaarvorm. Kolmas aksioom ütleb, et see bilineaarvorm on sümmeetriline. Seega skalaarkorrutamine tekitab ruurvormi, mis neljanda aksioomi tõttu on positiivselt määratud ruutvorm.

Järgnevas arutelus eeldame, et eukleidiline vektorruum on lõplikumõõtmeline $\dim \mathbf{E} = n$ ehk $\mathbf{E} = \mathbf{E}^n$. Võttes baasi $\{\vec{e}_i\}$, saame leida vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ koordinaadid, mis saame avaldistest $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ ja $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$. Viimaste abil omakorda saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle x^i y^j.$$

Tähistame baasivektoripaaride skalaarkorrutisi $g_{ij} := \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$. Saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j.$$

Tekib n -järku maatriks $G := (g_{ij})$. Kuna $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle = g_{ji}$, siis maatriks G on sümmeetriline: $G^\top = G$. Vektori skaalarkorrutis iseendaga annab positiivselt määratud ruutvormi

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = g_{ij} x^i x^j. \quad (4.1)$$

Definitsioon 4.3. Vektori $\vec{x}$ pikkuseks nimetatakse arvu

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

Kuna $\vec{x} \neq \vec{0}$ korral $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ ja ainult $\vec{x} = \vec{0}$ korral $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, siis nullvektorst erineva vektori ja ainult tema korral $|\vec{x}| > 0$ ning nullvektori ja ainult tema korral $|\vec{0}| = 0$. Seega

$$\vec{x} \neq \vec{0} \iff |\vec{x}| > 0, \quad \vec{x} = \vec{0} \iff |\vec{x}| = 0.$$

Pöördume tagasi ruutvormi (4.1) juurde. Ruutvormi jaoks leidub baas $\{\vec{e}_i\}$, kus tal on normaalkuju. Kuna meie ruutvorm on veel positiivselt määratud, siis see normaalkuju on järgmine

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2.$$

Sel korral $G = E$.

Definitsioon 4.4. Baasi, milles ruutvormi (4.1) maatriks, s.o. skaalarkorrutise maatriks G on ühikmaatriks ehk ruutvorm $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ on normaalkujul, nimetame ristbaasiks.

Osutub, et ruutvormi $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ maatriks G on igal baasil regulaarne. Veen-dume selles. Olgu G ja G' ruutvormi $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ maatriksid erinevatel baasidel $\{\vec{e}_i\}$ ja $\{\vec{e}_i'\}$. Ruutvormide teooriast teame

$$\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i'\} \implies G \longrightarrow G' = C^\top G C.$$

Kui $\{\vec{e}_i\}$ on ristbaas, siis $G = E$. Seega

$$G' = C^\top E C = C^\top C \implies |G'| = |C^\top C| = |C^\top| |C| = |C|^2.$$

Maatriksi C regulaarsuse tõttu $|G'| = |C|^2 \neq 0$. Kuna baas $\{\vec{e}_i'\}$ on suvaline, siis olemegi näidanud, et G on regulaarne. Lisaks viimasest valemist näeme, et igal baasil $|G| > 0$.

Selgitame kui palju on eukleidilises vektorruumis ristbaase. Tähistame ristbaaside hulka $\mathcal{B}^\perp(\mathbf{E}^n)$ abil. Ilmselt $\mathcal{B}^\perp(\mathbf{E}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbf{E}^n)$. Fikseerime ühe ristbaasi $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\}$, nn. *algbaasi*. Mistahes ristbaasi $\{\vec{e}_i\}$, nende seas ka algbaasi, saab avaldada algbaasi kaudu $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i\}$. Kuna ristbaaside korral $G^{(\circ)} = E$ ja $G = E$, siis lihtsustub ka valem $G = C^\top G^{(\circ)} C$, saades $E = C^\top C$. Seega algristbaasist kõigi ristbaaside kättesaamiseks tuleb baasiteisendusmaatriks $C \in GL(n, \mathbf{R})$ valida nii, et $C^\top C = E$. Maatriks C on järelikult ortogonaalmaatriks. Saime: baasiteisendusmaatriks C kuulub ortogonaalrühma $O(n, \mathbf{R})$, mis on, nagu teame, täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühm. Pikemalt peatamata märgime, et ristbaaside hulk $\mathcal{B}^\perp(\mathbf{E}^n)$ on isomorfne ortogonaalrühmaga $O(n, \mathbf{R})$. Selle näitamine toimub analoogiliselt § 2, kus näitasime, et vektorruumi baaside hulk on isomorfne täieliku lineaarrühmaga. Bijektiivseks kujutuseks $\psi : \mathcal{B}^\perp(\mathbf{E}^n) \longrightarrow O(n, \mathbf{R})$ kõlbab kujutus $\varphi : \mathcal{B}(\mathbf{V}^n) \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$, vaadeldes teda ainult ristbaaside hulgal.

Enne kui asume järgmist tüüpi vektorruumi vaatlemisele, me anname $m < n$ korral eukleidilise vektorruumi $\mathbf{E}^n$ alamruumi $\mathbf{M}^m$ ortogonaaltäiendi mõiste.

Definitsioon 4.5. *Eukleidilise vektorruumi $\mathbf{E}^n$ alamruumi $\mathbf{M}^m$ ortogonaaltäiendiks, mida tähistame $\mathbf{M}_\perp$ abil, nimetame tema alamhulka*

$$\mathbf{M}_\perp := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^n \mid \vec{x} \perp \vec{y}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{M}^m\}.$$

Kuna $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, siis viimase valemi saame anda samaväärselt

$$\mathbf{M}_\perp := \{\vec{x} \in \mathbf{E}^n \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{M}^m\}.$$

Teoreem 4.1. *Alamhulk $\mathbf{M}_\perp$ on vektorruumi $\mathbf{E}^n$ alamruum, kusjuures $\dim \mathbf{M}_\perp = n - m$, s.o. $\mathbf{M}_\perp = \mathbf{M}_\perp^{n-m}$ ja*

$$\mathbf{M}^m + \mathbf{M}_\perp^{n-m} = \mathbf{M}^m \oplus \mathbf{M}_\perp^{n-m} = \mathbf{E}^n.$$

Võttes mistahes alamruumi $\mathbf{M}^m$, saame eukleidilise vektorruumi $\mathbf{E}^n$ esitada kahe omavahel ristuva alamruumi otsesummana $\mathbf{E}^n = \mathbf{M}^m \oplus \mathbf{M}_\perp^{n-m}$. Nende alamruumide baasid koos vaadatuna annavad ilmselt kogu eukleidilise vektorruumi baasi. Võttes alamruumist $\mathbf{M}_\perp^{n-m}$ omakorda alamruumi

$\mathbf{Q}^l$, saame leida tema ortogonaaltäiendi $\mathbf{Q}_{\perp}^{n-m-l}$. Eukleidilise vektorruumi $\mathbf{E}^n$ saame esitada kolme omavahel ristuva alamruumi otsesummana

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{M}^m \oplus \mathbf{Q}^l \oplus \mathbf{Q}_{\perp}^{n-m-l}.$$

Analoogiliselt võib vajaduse korral jätkata.

Asume järgmist tüüpi vektorruumi vaatlemisele. Selleks muudame veidi skalaarkorrutise definitsiooni 4.1.

Definitsioon 4.6. *Skalaarkorrutamiseks vektorruumis $\mathbf{V}$ üle $\mathbf{R}$ nimetatakse kujutust*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

kui ta rahuldab järgmisi aksioome

- 1° $\langle \xi^1 \vec{x}_1 + \xi^2 \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \xi^1 \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \xi^2 \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle,$
- 2° $\langle \vec{x}, \xi^1 \vec{y}_1 + \xi^2 \vec{y}_2 \rangle = \xi^1 \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \xi^2 \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle,$
- 3° $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle,$
- 4° $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{V} \iff \vec{a} = \vec{0}.$

Definitsioon 4.7. *Vektorruumi $\mathbf{V}$, milles on antud skalaarkorrutamise eelmise definitsiooniga, nimetatakse pseudoeukleidiliseks vektorruumiks.*

Kui võrrelda viimast skalaarkorrutamise definitsiooni 4.6 eukleidilise vektorruumi skalaarkorrutise definitsiooniga 4.1, siis muudetud on ainult viimast neljandat aksioomi. Tulemused, mis tuginevad kolmele esimesele aksioomile, on samasugused nagu eukleidilise vektorruumi korral, seega ülekantavad. Pseudoeukleidilise vektorruumi skalaarkorrutamine on sümmeetriline bilineaarvorm. Järelikult tekib ka ruutvorm. See ruutvorm ei pea olema positiivselt määratud, sest see tugineb skalaarkorrutamise neljandale aksioomile, mida aga muutsime, võrreldes eukleidilise vektorruumi skalaarkorrutamise neljanda aksioomiga.

Oletame nüüd, et pseudoeukleidiline vektorruum on lõplikumõõtmealine: $\mathbf{V} = \mathbf{V}^n$, mis garanteerib baaside olemasolu. Iga baasi $\{\vec{e}_i\}$ korral mistahes kaks vektorit $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ saame avaldada tema kaudu kujul $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ ja $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$. Nii nagu eukleidilise vektorruumi korral saame kahe vektori skalaarkorrutise nende vektorite koordinaatide kaudu valemiga

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j,$$

kus $g_{ij} := \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$. Tekib ka n -järku sümmeetriline maatriks $G = (g_{ij})$.

Selgitame, mis järeldub seekord skalaarkorrutise neljandast aksioomist. Avaldades vektori $\vec{a}$ baasi kaudu $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$, saame neljanda aksioomi

$$\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle, \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{V}^n \iff \vec{a} = \vec{0}.$$

kirja panna koordinaatides

$$(g_{ij}a^j)x^i = 0, \quad \forall (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n \implies (a^1, a^2, \dots, a^n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Viimase avaldise implikatsiooni märgist $\implies$ vasemal asuv osa ütleb, et ühest võrrandist koosneval homogeenisel lineaarvõrrandisüsteemil $(g_{ij}a^j)x^i = 0$ üherealise maatriksiga

$$(g_{1j}a^j \quad g_{2j}a^j \quad \dots \quad g_{nj}a^j) \tag{4.2}$$

on lahenditeks kõik vektorruumi $\mathbf{R}^n$ vektorid. Seega vaadeldava homogeense võrrandi lahendiruumi mõõde on $\dim \mathbf{R}^n = n$, mistõttu maatriksi (4.2) astak on vaadeldava võrrandi tundmatute arv miinus lahendiruumi mõõde, s.o. $n - n = 0$. (Öeldu tuleneb, nagu teame, lineaarvõrrandisüsteemi teooriast.) Järelikult maatriksi (4.2) esimest järku miinorid, s.o. selle maatriksi elemendid, on kõik võrdsed nulliga. Saame

$$g_{1j}a^j = 0, \quad g_{2j}a^j = 0, \quad \dots, \quad g_{nj}a^j = 0 \iff g_{ij}a^j = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Viimast võime vaadelda n -võrrandist koosneva homogeenise lineaarvõrrandisüsteemina

$$g_{ij}x^j = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{4.3}$$

mille lahendiks on skalaarkorrutamise neljanda aksioomi kohaselt

$$\vec{a} = \vec{0} \iff (a^1, a^2, \dots, a^n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Järelikult lineaarvõrrandisüsteemi (4.2) lahendiruum koosneb ainult nullvektorist $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Lahendiruumi mõõde on seega null, mistõttu süsteemi (4.3) maatriksi $G = (g_{ij})$ astak on $n - 0 = n$. Järelikult maatriksil G leidub n -järku nullist erinev miinor. Selleks on maatriksi G determinant. Seetõttu $|G| \neq 0$. Skalaarkorrutamise definitsiooni 4.6 neljandast aksioomist saime, et baasil $\{\vec{e}_i\}$ skalaarkorrutamise maatriks G on regulaarne.

Nii on igal baasi korral, sest baas $\{\vec{e}_i\}$ on valitud vabalt. Nüüd võime ka nii öelda, et ruutvorm $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = g_{ij} x^i x^j$ regulaarne. Ruutvormide teooria kohaselt leidub selline baas $\{\vec{e}_i\}$, milles ruutvormil $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ on normaalkuju, mis tänu valemile (3.5) on järgmine

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = (x^1)^2 + \dots + (x^s)^2 - (x^{s+1})^2 - \dots - (x^n)^2, \quad s \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (4.4)$$

sest $s + t = n$. Ruutvormi maatriks G sellel baasil on

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi peadiagonaalil on ”+1” ja ”−1” arvu tähistatud vastavalt s ja t abil. Viimast maatriksit tähistame $G = {}^t E_n$. Me eeldame, et viimases maatriksis on peadiagonaalil vähemalt üks ”−1”. Juhul $t = 0$ saame eukleiidilise vektorruumi, mida on juba vaadeldud. Seega $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, millest järeldub, et pseudoeukleiidilisi vektorruume on n erinevat tüüpi. Pseudoeukleiidilisi vektorruume tähistame $\mathbf{V}^n$ asemel $\mathbf{E}^n$ abil. Defineerime vektori $\vec{x}$ pikkuse nagu eukleiidilise vektorruumi korral sama valemiga

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

Sellest valemist näeme, et pseudoeukleiidilises vektorruumis ühe osa vektorite pikkuse ruut on positiivne (sel korral ka nende vektorite pikkus on positiivne), teise osa vektorite pikkuse ruut on null (sel korral ka nende vektorite pikkus on null) ja kolmanda osa vektorite pikkuse ruut on negatiivne (nende vektorite pikkus on puhtimaginaarne).

Definitsioon 4.8. Vektoreid pikkusega 0 nimetatakse pseudoeukleiidilise vektorruumi isotroopseteks vektoriteks.

Definitsioon 4.9. Baasi, milles ruutvormil $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ on normaalkuju, nimetatakse ka pseudoeukleiidilise vektorruumi korral ristbaasiks.

Selgitame ka siin, kui palju on ristbaase. Tähistame pseudoeukleidilise ruumi ristbaaside hulka $\mathcal{B}^\perp({}_t\mathbf{E}^n)$ abil. Ilmselt $\mathcal{B}^\perp({}_t\mathbf{E}^n) \subset \mathcal{B}({}_t\mathbf{E}^n)$. Fikseerime ühe ristbaasi $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\}$, nn. algbaasi. Mistahes ristbaasi $\{\vec{e}_i\}$, nende seas ka algbaasi, saab avaldada algbaasi kaudu $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i\}$. Kuna ristbaaside korral $G^{(\circ)} = {}^tE_n$ ja $G = {}^tE_n$, siis täpsustub valem $G = C^\top G^{(\circ)} C$, saades ${}^tE_n = C^\top {}^tE_n C$. Seega algristbaasist saame kõik ristbaasid kätte, kui baasiteisendusmaatriks rahuldab saadud tingimust. Seega maatriks C muutub pseudoortogonaalrühmas ${}^tO(n, \mathbf{R})$, mis on, nagu teame, täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühm. Pikemalt peatamata märgime, et ristbaaside hulk $\mathcal{B}^\perp({}_t\mathbf{E}^n)$ on isomorfne pseudoortogonaalrühmaga ${}^tO(n, \mathbf{R})$. Selle näitamine toimub analoogiliselt §2, kus näitasime, et vektorruumi baaside hulk on isomorfne täieliku lineaarrühmaga. Bijektiivseks kujutuseks $\psi : \mathcal{B}^\perp({}_t\mathbf{E}^n) \longrightarrow {}^tO(n, \mathbf{R})$ kõlbab kujutus $\varphi : \mathcal{B}(\mathbf{V}^n) \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$, vaadeldes teda ainult ristbaaside hulgal.

Asume viimast tüüpi vektorruumi vaatlemisele. Selleks me muudame skalaarkorrutamise definitsiooni veel.

Definitsioon 4.10. *Skalaarkorrutamiseks vektorruumis $\mathbf{V}$ üle $\mathbf{R}$ nimetatakse kujutust*

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

kui ta rahuldab järgmisi aksioome

- 1° $\langle \xi^1 \vec{x}_1 + \xi^2 \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \xi^1 \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \xi^2 \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$,
- 2° $\langle \vec{x}, \xi^1 \vec{y}_1 + \xi^2 \vec{y}_2 \rangle = \xi^1 \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \xi^2 \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle$,
- 3° $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,
- 4° $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle, \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{V} \iff \vec{a} = \vec{0}$.

Definitsioon 4.11. *Vektorruumi $\mathbf{V}$, milles on antud skalaarkorrutamise eelmise definitsiooniga, nimetatakse sümplektiliseks vektorruumiks.*

Sümplektilist vektorruumi tähistame $\mathbf{V}$ asemel $\mathbf{Sp}$ abil. Kui võrrelda sümplektilise vektorruumi skalaarkorrutamise definitsiooni 4.10 pseudoeukleidilise vektorruumi skalaarkorrutamise definitsiooniga 4.6, siis muudetud on ainult kolmandat aksioomi. Skalaarkorrutamine ei ole enam sümmeetriline, vaid on kaldsümmeetriline. Esimese ja teise aksioomi kohaselt on skalaarkorrutamine ka siin bilineaarvorm, mis kolmanda aksioomi tõttu ei

ole enam sümmeetriline, vaid on kaldsümmeetriline. Seetõttu ei teki siin ka ruutvormi. Võttes kolmandas aksioomis $\vec{y} = \vec{x}$, saame

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \iff 2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff |x| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = 0.$$

Näeme, et süplektilises vektorruumis kõigi vektorite pikkused on võrdsed nulliga, mis on päris üllatav.

Siit alates eeldame, et sümplektiline vektorruum on lõplikumõõtmeline, näiteks mõõtmega m . Seega temas on olemas baasid. Iga baasi $\{\vec{e}_i\}$ korral mistahes kaks vektorit $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ saame avaldada tema kaudu kujul $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ ja $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$. Nii nagu eukleidilise vektorruumi korral saame kahe vektori skalaarkorrutise nende vektorite koordinaatide kaudu valemiga

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j,$$

kus $g_{ij} := \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$. Tekib maatriks $G = (g_{ij})$, mis on kaldsümmeetriline, sest

$$g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = -\langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle = -g_{ji} \implies G^\top = -G.$$

Nagu pseudoeukleidilise vektorruumi korral saame ka siin, et skalaarkorrumise maatriks G on regulaarne, s.o. $|G| \neq 0$. See on võimalik ainult siis kui sümplektilise vektorruumi mõõde on paarisarv. Tõepoolest, sest

$$|G| = |G^\top| = |-G| = (-1)^m |G|,$$

millest $|G| \neq 0$ tõttu saame $1 = (-1)^m$. Viimane saab kehtida ainult paarisarvulise m korral, s.o. $m = 2n$. Lõplikumõõtmelist sümplektilist vektorruumi tähistame $\mathbf{Sp}^{2n}$.

Kahjuks järgnevas ei saa me kasutada ruutvormi teooriat, et leida ristbaasi analoog. Vastav tõestus peab toimuma teiste vahenditega. Tõestuseta konstateerime, et leidub selline baas $\{\vec{e}_i\}$, mille korral skalaarkorrumise $2n$ -järku maatriks G on järgmise ehitusega. Maatriksi G diagonaalile toetub n teist järku kaldsümmeetrilist maatriksit

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ülejäänud elemendid on tal aga nullid. Eespool tähistame sellist maatriksit I_n abil. Maatriksi I_n saame anda lühidalt otsesummana

$$I_n = \underbrace{I \oplus I \oplus \dots \oplus I}_n.$$

Sellise baasi korral

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ y^3 & y^4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x^{2n-1} & x^{2n} \\ y^{2n-1} & y^{2n} \end{vmatrix}.$$

Definitsioon 4.12. *Sümplektilise vektorruumi $\mathbf{Sp}^{2n}$ baasi, mille korral skalaarkorrutamise maatriks on kujuga I_n , nimetatakse sümplektiliseks baasiks.*

Selgitame ka siin kui palju on sümplektilisi baase. Tähistame nende hulka $\mathcal{B}^s(\mathbf{Sp}^{2n})$ abil. Ilmselt $\mathcal{B}^s(\mathbf{Sp}^{2n}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{Sp}^{2n})$. Fikseerime ühe sümplektilise baasi $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\}$, nn. algbaasi. Mistahes sümplektilise baasi $\{\vec{e}_i\}$, nende seas ka algbaasi, saab avaldada algbaasi kaudu $\{\vec{e}_i^{(\circ)}\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i\}$. Kuna sümplektiliste baaside korral $G^{(\circ)} = I_n$ ja $G = I_n$, siis täpsustub tuntud valem $G = C^\top G^{(\circ)} C$, saades $\overline{G} = C^\top I_n C$. Seega sümplektilisest algbaasist saame kõik sümplektilised baasid kätte, kui baasiteisendusmaatriks rahuldab saadud tingimust. Seega maatriks C muutub sümplektilises rühmas Sp_{2n} , mis on, nagu teame, täieliku lineaarrühma $GL(2n, \mathbf{R})$ alamrühm. Pikemalt peatamata märgime, et sümplektiliste baaside hulk $\mathcal{B}^s(\mathbf{Sp}^{2n})$ on isomorfne sümplektilise rühmaga Sp_{2n} . Selle näitamine toimub analoogiliselt § 2, kus näitasime, et vektorruumi baaside hulk on isomorfne täieliku lineaarrühmaga. Bijektiivseks kujutuseks $\psi : \mathcal{B}^s(\mathbf{Sp}^{2n}) \rightarrow Sp_{2n}$ kõlbab varasem kujutus $\varphi : \mathcal{B}(\mathbf{V}^{2n}) \rightarrow GL(2n, \mathbf{R})$, vaadeldes teda ainult sümplektiliste baaside hulgal.

5. Afinne ruum. Eukleidiline, pseudo-eukleidiline sümplektiline affinne ruum

Selles punktis vaatleme niinimetatud punktiruumi. Koolis kui ka kõrgkoolis tavaliselt vaadeldakse ruumi igapäevases ettekujutuses. Tegemist on tavalise kolmemõõtmelise eukleidilise ruumiga. Arutelud toimuvad jooniste abil. Meie anname ruumi mõiste aksiomaatilisel. Seejuures ruumi mõõde võib olla kuitahes suur, isegi lõpmatu. Ruumi mõiste käsitus viiakse samale tasemele nagu on see kombeks algebras materjali esitamisel.

Definitsioon 5.1. *Mittetühja hulka $\mathcal{A}$ üle vektorruumi $\mathbf{V}$ nimetatakse afinseks ruumiks, kui on antud kujutus*

$$+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}; \quad (X, \vec{x}) \longmapsto +(X, \vec{x}) := X + \vec{x},$$

mis rahuldab kahte järgmist aksioomi.

- 1° Iga $X \in \mathcal{A}$ ja iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral $X + (\vec{x} + \vec{y}) = (X + \vec{x}) + \vec{y}$.
 - 2° Iga $X, Y \in \mathcal{A}$ korral võrrandil $X + \vec{x} = Y$ on olemas lahend ja seejuures ainult üks. Seda lahendit tähistame $\vec{x} := \overrightarrow{XY}$ abil.
- Afinse ruumi elemente $A, B, \dots, X, Y, \dots \in \mathcal{A}$ nimetame punktideks.

Definitsioon 5.2 *Afinse ruumi $\mathcal{A}$ defineerimiseks kasutatud vektorruumi $\mathbf{V}$ nimetame tema sihiruumiks.*

Järgnevas teeme mõningad järeldused afinse ruumi definitsioonist. Samas kasutame ka vektorruumi elementaarseid omadusi. Lugeja tõestuste lugemisel iga võrdusmärgi juures ilmselt selgitab, mida on kasutatud.

Järeldus 5.1. *Iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral võrrandil $X + \vec{x} = X$ on üks ja sama lahend $\vec{x} = \vec{0}$.*

Tõestus. Aksioomi 2° kohaselt võrrandil $X + \vec{x} = X$ on lahend olemas ja seejuures ainult üks. Seda lahendit leppisime tähistada $\vec{x} = \overrightarrow{XX}$. Leiame selle lahendi:

$$X + \vec{x} = X \iff X = X + \vec{x} = X + (\vec{x} + \vec{0}) =$$

$$= (X + \vec{x}) + \vec{0} = X + \vec{0} \iff X + \vec{0} = X.$$

Seega võrrandi $X + \vec{x} = X$ lahendiks on $\vec{x} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$. ♠

Järeldus 5.2. Võrrandite $X + \vec{x} = Y$ ja $Y + \vec{x} = X$ lahendid on teineteise vastandvektorid, s.o. $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$.

Tõestus. Aksioomi 2° kohaselt nendel võrranditel $X + \vec{x} = Y$ ja $Y + \vec{x} = X$ on lahendid olemas, mida eespool lubasime tähistada $\overrightarrow{XY}$ ja $\overrightarrow{YX}$. Viimased muidugi rahuldavad vastavat võrrandit. Seetõttu

$$X + \overrightarrow{XY} = Y, \quad Y + \overrightarrow{YX} = X.$$

Arvutame:

$$Y + (\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XY}) = (Y + \overrightarrow{YX}) + \overrightarrow{XY} = X + \overrightarrow{XY} = Y \iff Y + (\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XY}) = Y.$$

Saime, et võrrandi $Y + \vec{x} = Y$ lahendiks on $\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XY}$. Eelmise järelduse kohaselt on lahendiks ka $\vec{0}$. Lahendi ühesuse tõttu peavad need lahendid ühtuma. Saame

$$\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XY} = \vec{0} \iff \overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}. \quad \spadesuit$$

Järeldus 5.3. Iga kolme punkti $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ korral

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}.$$

Tõestus. Teame, et võrranditel

$$X + \vec{x} = Y, \quad Y + \vec{y} = Z, \quad X + \vec{z} = Z$$

on olemas (üheselt määratud) lahendid, mida me tähistame

$$\vec{x} = \overrightarrow{XY}, \quad \vec{y} = \overrightarrow{YZ}, \quad \vec{z} = \overrightarrow{XZ},$$

mis muidugi rahuldavad vastavaid võrrandeid, s.o.

$$X + \overrightarrow{XY} = Y, \quad Y + \overrightarrow{YZ} = Z, \quad X + \overrightarrow{XZ} = Z.$$

Teiselt poolt

$$X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) = (X + \overrightarrow{XY}) + \overrightarrow{YZ} = Y + \overrightarrow{YZ} = Z \iff X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) = Z.$$

Seega $\overrightarrow{XZ}$ kui ka $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$ on võrrandi $X + \vec{z} = Z$ lahendiks. Lahendi ühesuse tõttu

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}. \spadesuit$$

Järeldus 5.4. Võrdused $X + \vec{x} = Y$ ja $\overrightarrow{OX} + \vec{x} = \overrightarrow{OY}$ on samaväärsed.

Tõestus. Kui $X + \vec{x} = Y$, siis fikseerides afiinses ruumis $\mathcal{A}$ vabalt mingi punkti O , tekib punktikolmik O, X, Y . Järelduse 5.3 kohaselt $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY}$ ehk $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$ tõttu $\overrightarrow{OX} + \vec{x} = \overrightarrow{OY}$. Arutleme vastupidises suunas. Eeldame $\overrightarrow{OX} + \vec{x} = \overrightarrow{OY}$. Siit $\vec{x} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$, mille järelduse 5.2 kohaselt saab kirjutada $\vec{x} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{XY}$. Seega $X + \vec{x} = X + \overrightarrow{XY} = Y$. $\spadesuit$

Järeldus 5.5. Afiinne ruum on isomorfne oma sihiruumiga.

Tõestus. Hulkade isomorfismi mõiste kohaselt on vaja konstrueerida bijektiivne kujutus $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{V}$. Viimase defineerimiseks fikseerime vabalt afiinses ruumis $\mathcal{A}$ mingi punkti O . Iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral saame võrrandi $O + \vec{x} = X$ üheselt määratud lahendi $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{V}$ abil defineerida kujutuse $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ valemiga $X \mapsto \varphi(X) := \overrightarrow{OX}$. Osutub, et see kujutus on bijektiivne, s.o. injektiivne ja sürjektiivne. Injektiivsuse näitamiseks definitsiooni kohaselt on vaja veenduda, et alati

$$X \neq Y \implies \varphi(X) \neq \varphi(Y).$$

Selle väite õigsus tõestatakse tavaliselt vastuväiteliselt. Oletatakse, et leidub punktipaar $X_o, Y_o \in \mathcal{A}$, et

$$X_o \neq Y_o \implies \varphi(X_o) = \varphi(Y_o).$$

Kujutuse φ definitsiooni kohaselt

$$\varphi(X_o) = \varphi(Y_o) \implies \overrightarrow{OX_o} = \overrightarrow{OY_o} \implies \overrightarrow{OY_o} - \overrightarrow{OX_o} = \vec{0},$$

millest omakorda järelduse 5.2 abil saame

$$\overrightarrow{OY_o} + \overrightarrow{X_oO} = \vec{0} \iff \overrightarrow{X_oO} + \overrightarrow{OY_o} = \vec{0}.$$

Siit järelduse 5.3 abil saame $\overrightarrow{X_oY_o} = \vec{0}$. Ühelt poolt järelduse 5.1 kohaselt $X_o + \vec{0} = X_o$ ja teiselt poolt $X_o = X_o + \vec{0} = X_o + \overrightarrow{X_oY_o} = Y_o$, s.o. $X_o = Y_o$. Saime vastuolu tehtud oletusega. Seega alati $X \neq Y$ korral ka $\varphi(X) \neq \varphi(Y)$. Kujutus $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ on injektiivne.

Sürjektiivsuse näitamiseks on vaja veenduda, et kujutus φ on pealekujutus, s.o. $\varphi(\mathcal{A}) := \{\varphi(X) | X \in \mathcal{A}\} = \mathbf{V}$. Teisiti öeldes, vaja on näidata, et iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral leidub sobiv punkt $X \in \mathcal{A}$, et $\varphi(X) = \vec{x}$. Punktiks X sobib punkt $X := O + \vec{x}$. Tõepoolest, sest $\varphi(X) = \varphi(O + \vec{x}) = \vec{x}$. Saime, et kujutus $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ on sürjektiivne. Kokkuvõttes on φ bijektiivne. Järeldus 5.5 on tõestatud. ♠

Vahetult viimasest järeldusest näeme, et afinse ruumi saame järgmise hulga

$$\mathcal{A} = \{A + \vec{x} | \vec{x} \in \mathbf{V}\}. \quad (5.1)$$

Siin punkti O on tähistatud tähega A .

Definitsioon 5.3. *Afinse ruumi mõõtmeks nimetatakse tema sihiruumi mõõdet: $\dim \mathcal{A} := \dim \mathbf{V}$.*

Näeme, et afinne ruum võib olla ka lõpmatumõõtmeline, sest sihiruum võib olla seda. Kui afinne ruum on lõplikumõõtmeline, näiteks mõõtmega n , siis tähistame afinset ruumi $\mathcal{A}^n$ abil.

Definitsioon 5.4. *Afinse ruumi $\mathcal{A}^n$ reeperiks nimetame hulka, mis koosneb selle ruumi mingist punktist O ja sihiruumi mingist baasist $\{\vec{e}_i\}$. Punkti O nimetame reeperi alguspunktiks. Reeperit tähistame $\{O; \vec{e}_i\}$ abil.*

Definitsioon 5.5. *Punkti $X \in \mathcal{A}^n$ kohavektoriks reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ korral nimetatakse võrrandi $O + \vec{x} = X$ üheselt määratud lahendivektorit $\overrightarrow{OX}$.*

Definitsioon 5.6. *Punkti $X \in \mathcal{A}^n$ koordinaatideks reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ korral nimetatakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate sihiruumi baasil $\{\vec{e}_i\}$.*

Seega, avaldades $\overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i$, saame punkti X koordinaatideks x^i . Me kirjutame $X(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ehk lühidalt $X(x^i)$. Punkti koordinaadid antud reeperi korral määratakse üheselt, sest kohavektor ja tema koordinaadid,

nagu teame, määratakse üheselt. Ilmselt punktil erivate reeperite korral on erinevad koordinaadid. Loomulikult tekib tahtmine teha kindlaks kuidas teisenevad punkti koordinaadid üleminekul ühelt reeperilt $\{O; \vec{e}_i\}$ teisele nn. uuele reeperile $\{O'; \vec{e}_i'\}$. Selleks peame arvatavasti kirjeldama uue reeperi asendit vana (esialgse) reeperi suhtes. Teeme seda. Võrrandist $O + \vec{x} = O'$ saame uue reeperi alguspunkti O' kohavektori $\vec{x} = \overrightarrow{OO'}$. Avaldades selle baasi $\{\vec{e}_i\}$ kaudu valemiga $\overrightarrow{OO'} = c^i \vec{e}_i$, saame alguspunkti O' koordinaadid (c^i) , s.o. $O'(c^i)$. Omakorda avaldame uude reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_i'\}$ vanasse reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_i\}$ kaudu:

$$\vec{e}_i' = c_i^j \vec{e}_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \implies C = (c_i^j) \in GL(n, \mathbf{R}).$$

Näeme, et uue reeperi asend määratakse $n + n^2$ arvu abil. Nendeks on c^i ja $C = (c_i^j)$, mis vormistame spetsiifilise ehitusega $(n + 1)$ -järku maatriksina:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c^1 & c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^n & c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Selle maatriksi esimeses veerus, alates teisest elemendist, on O' koordinaadid. Alates teisest reast ja teisest veerust on baasiteisendusmaatriks C . Maatriksit $\overline{C}$ nimetame reeperiteisendusemaatriksiks. Edaspidi reeperiteisendust $\{O; \vec{e}_i\} \rightarrow \{O'; \vec{e}_i'\}$ tähistame täpsemalt $\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O'; \vec{e}_i'\}$, näidates ära ka reeperiteisendusemaatriksi. Maatriks $\overline{C}$ on regulaarne, sest $|\overline{C}| = |C| \neq 0$. Järelikult $\overline{C} \in GL(n + 1, \mathbf{R})$. Võib arvata, et punkti X vanad koordinaadid (x^i) ja uued koordinaadid (x'^i) on seotud maatriksi $\overline{C}$ elementide abil. Punkti koordinaadid on kohavektori koordinaadid. Seega nad saame avaldistest $\overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i$ ja $\overrightarrow{O'X} = x'^i \vec{e}_i'$. Kui viimased valemid kuidagi omavahel siduda, siis saavad ka punkti X vanad ja uued koordinaadid omavahel seotud. See on ka võimalik, sest kolme punkti O, O' ja X korral järelduse 5.3 abil saame

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} &= \overrightarrow{OX} \iff c^i \vec{e}_i + x'^j \vec{e}_j' - x^i \vec{e}_i = \vec{0} \iff (c^i - x'^j c_j^i - x^i) \vec{e}_i = \vec{0} \implies \\ &\implies c^i + x'^j c_j^i - x^i = 0 \iff x^i = c_j^i x'^j + c^i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Siin viimasel sammul kasutasime baasi $\{\vec{e}_i\}$ lineaarset sõltumatust. Valem (5.3) annab punkti vanad koordinaadid uute kaudu.

Järgnevas selgitame reeperiteisenduste omadusi.

Omadus 5.1. Triviaalse reeperiteisenduse $\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O; \vec{e}_i\}$ maatriks $\overline{C}$ on $(n+1)$ -järku ühikmaatriks, mida tähistame $\overline{E}$ abil, sest on ehitusega (5.2).

Tõestus. Praegu $O' = O$, mistõttu $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO}$. Järelduse 5.1 kohaselt $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$. Järelikult $c^i = 0$ iga $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral. Uude reeperisse kuuluva baasi puhul $\vec{e}'_i = \vec{e}_i = \delta^j_i \vec{e}_j$. Siin δ^j_i on Kroneckeri sümbol. Seega $C = (\delta^j_i)$ on n -järku ühikmaatriks. Reeperiteisendusemaatriksiks (5.2) paegu on seega $(n+1)$ -järku ühikmaatriks, mis muuseas on täieliku lineaarrühma $GL(n+1, \mathbf{R})$ ühikelement. ♠

Omadus 5.2. Kahe järjestikuse reeperiteisenduse

$$\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{A}} \{O'; \vec{e}'_i\}, \quad \{O'; \vec{e}'_i\} \xrightarrow{\overline{B}} \{O''; \vec{e}''_i\}$$

korral resultantreeperiteisenduse

$$\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O''; \vec{e}''_i\}$$

maatriks $\overline{C}$ on maatriksite $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ korrutis $\overline{AB}$, s.o. $\overline{C} = \overline{AB}$.

Tõestus. Paneme kirja maatriksite $\overline{A}$, $\overline{B}$ ja $\overline{C}$ elemendid. Need saame avaldistest

$$\overrightarrow{OO'} = a^i \vec{e}_i, \quad \overrightarrow{O'O''} = b^i \vec{e}'_i, \quad \overrightarrow{OO''} = c^i \vec{e}_i$$

ja

$$\vec{e}'_i = a^j_i \vec{e}_j, \quad \vec{e}''_i = b^j_i \vec{e}'_j, \quad \vec{e}''_i = c^j_i \vec{e}_j.$$

Maatriksid $A = (a^j_i)$, $B = (b^j_i)$ ja $C = (c^j_i)$ on reeperiteisenduste poolt indutseeritud baasteisendusmaatriksid. Võime kirjutada

$$\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{A} \{\vec{e}'_i\}, \quad \{\vec{e}'_i\} \xrightarrow{B} \{\vec{e}''_i\}, \quad \{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}''_i\},$$

kus $A, B, C \in GL(n, \mathbf{R})$. Reeperiteisendusemaatriksiteks valemi (5.2) kohaselt praegu on

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 & a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b^1 & b^1_1 & b^1_2 & \dots & b^1_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^n & b^n_1 & b^n_2 & \dots & b^n_n \end{pmatrix}$$

ja

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c^1 & c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^n & c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Siin $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in GL(n+1, \mathbf{R})$. Maatriksi $\overline{C}$ elemendid saab leida ka teisiti, arvestades

$$\overrightarrow{OO''} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O''} = a^i \vec{e}_i + b^j \vec{e}_j' = a^i \vec{e}_i + b^j a_j^i \vec{e}_i = (a^i + b^j a_j^i) \vec{e}_i.$$

Koordinaatide ühesuse tõttu

$$c^i = a^i + b^j a_j^i \iff c^i = a^i + a_j^i b^j. \quad (5.4)$$

Edasi saame kirjutada

$$\vec{e}_i'' = b_i^s \vec{e}_s' = b_i^s a_s^j \vec{e}_j.$$

Silmas pidades maatriksite korrutamise definitsiooni, saame

$$c_i^j = b_i^s a_s^j = a_s^j b_i^s \iff C = AB. \quad (5.5)$$

Osutub, et $\overline{C} = \overline{AB}$. Maatriksite $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ vahetu korrutamise teel saame

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 & a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b^1 & b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^n & b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 + a_j^1 b^j & a_j^1 b_1^j & a_j^1 b_2^j & \dots & a_j^1 b_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n + a_j^n b^j & a_j^n b_1^j & a_j^n b_2^j & \dots & a_j^n b_n^j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Võrreldes valemitega (5.4) ja (5.5), saamegi, et $\overline{C} = \overline{AB}$. ♠

Omadus 5.3. Kui üleminek ühelt reeperilt teisele toimub maatriksi $\overline{C}$ abil, siis üleminek teiselt reeperilt esimesele toimub pöördmaatriksi $\overline{C}^{-1}$ abil, s.o.

$$\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O'; \vec{e}_i'\} \implies \{O'; \vec{e}_i'\} \xrightarrow{\overline{C}^{-1}} \{O; \vec{e}_i\}.$$

Tõestus. Tähistame otsitava reeperiteisenduse $\{O'; \vec{e}_i'\} \longrightarrow \{O; \vec{e}_i\}$ maatriksit $\overline{X}$ abil. Kuna tegu on reeperiteisendusemaatriksiga, siis ta on ehitusega (5.2). Omaduste 5.2 ja 5.1 kohaselt $\overline{C}\overline{X} = \overline{E}$, millest saame $\overline{X} = \overline{C}^{-1}$. ♠

Teoreem 5.1. *Hulk, mis koosneb $(n+1)$ -järku maatriksitest ehitusega*

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix},$$

on täieliku lineaarrühma $GL(n+1, \mathbf{R})$ alamrühm. Seda alamrühma nimetame afinseks rühmaks ja tähistame $\overline{GL}(n+1, \mathbf{R})$.

Tõestus. Teoreemi 1.1 kohaselt on vaja näidata, et

$$\overline{X}, \overline{Y} \in \overline{GL}(n+1, \mathbf{R}) \implies \overline{X}\overline{Y} \in \overline{GL}(n+1, \mathbf{R}),$$

$$\overline{X} \in \overline{GL}(n+1, \mathbf{R}) \implies \overline{X}^{-1} \in \overline{GL}(n+1, \mathbf{R}).$$

Need kaks fakti on kontrollitud omaduse 5.2 ja 5.3 tõestamisel. ♠

Hakkame nüüd vaatlema afinse ruumi $\mathcal{A}^n$ reeperite hulka, mida tähistame $\mathcal{R}(\mathcal{A}^n)$ abil. Selle hulga ehituse uurimiseks fikseerime temas vabalt ühe reeperi $\{O_{(\circ)}; \vec{e}_i^{(\circ)}\}$, mida nimetame *algreeperiks*. Mistahes reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ saab avaldada algreeperi kaudu $\{O_{(\circ)}; \vec{e}_i^{(\circ)}\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O; \vec{e}_i\}$, kusjuures reeperiteisendusemaatriks $\overline{C} \in G(\mathcal{A}^n)$. Tekib kujutus

$$\varphi : \mathcal{R}(\mathcal{A}^n) \longrightarrow \overline{GL}(n+1, \mathbf{R}); \quad \{O; \vec{e}_i\} \longmapsto \varphi(\{O; \vec{e}_i\}) := \overline{C},$$

mis on bijektiivne. Kuna kaks analoogilist tõestust on vektorruumi baaside juures olnud, siis bijektiivsuse näitamise jätame lugejale. Oleme tõestanud teoreemi.

Teoreem 5.2. *Afinse ruumi $\mathcal{A}^n$ reeperite hulk $\mathcal{R}(\mathcal{A}^n)$ on isomorfne afinse rühmaga $\overline{GL}(n+1, \mathbf{R})$.*

Järgnevas anname afinse ruumi m -tasandi mõiste. Viimane üldistab tavalise ruumi tasandi mõistet. Fikseerime afinses ruumis $\mathcal{A}$ vabalt mistahes punkti A ja sihiruumi $\mathbf{V}$ mistahes m -mõõtmelise alamruumi $\mathbf{M}^m$.

Definitsioon 5.7. *Afinse ruumi $\mathcal{A}$ m -tasandiks nimetame tema alamhulka*

$$A + \mathbf{M}^m := \{A + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}.$$

Siin punkt A kuulub m -tasandile. Selleks tuleb võtta $\vec{x} = \vec{0}$. Viimases definitsioonis punkt A ei ole mingis erilises rollis, nagu näeme järgmisest teoreemist.

Teoreem 5.3. *Iga punkti $B \in A + \mathbf{M}^m$ korral m -tasandid $A + \mathbf{M}^m$ ja $B + \mathbf{M}^m$ ühtuvad, s.o. $A + \mathbf{M}^m = B + \mathbf{M}^m$.*

Tõestus. Kuna punkt $B \in A + \mathbf{M}^m$, siis definitsiooni 5.7 kohaselt leidub sobiv vektor $\vec{b} \in \mathbf{M}^m$, et $A + \vec{b} = B$. Viimasest järelduse 5.2 kohaselt $B + (-\vec{b}) = A$. Iga punkti $X \in B + \mathbf{M}^m$ korral leidub sobiv vektor $\vec{x} \in \mathbf{M}^m$, et $X = B + \vec{x}$, millesse me asendame punkti B . Saame $X = (A + \vec{b}) + \vec{x} = A + (\vec{b} + \vec{x})$. Kuna $\mathbf{M}^m$ on alamruum, siis $\vec{b}, \vec{x} \in \mathbf{M}^m$ tõttu ka $\vec{b} + \vec{x} \in \mathbf{M}^m$, mistõttu

$$(X \in B + \mathbf{M}^m \implies X \in A + \mathbf{M}^m) \implies B + \mathbf{M}^m \subseteq A + \mathbf{M}^m.$$

Vastupidi. Iga punkti $X \in A + \mathbf{M}^m$ korral leidub sobiv vektor $\vec{x} \in \mathbf{M}^m$, et

$$X = A + \vec{x} = (B + (-\vec{b})) + \vec{x} = B + (-\vec{b} + \vec{x}).$$

Kuna vektor $-\vec{b} + \vec{x} \in \mathbf{M}^m$, siis

$$X \in A + \mathbf{M}^m \implies X \in B + \mathbf{M}^m \implies A + \mathbf{M}^m \subseteq B + \mathbf{M}^m.$$

Kookuvõttes oleme näidanud, et

$$B \in A + \mathbf{M}^m \implies A + \mathbf{M}^m = B + \mathbf{M}^m. \spadesuit$$

Järeldus 5.6. *Afinne ruum $\mathcal{A}^n$ on n -tasand, kusjuures määravaks vektorruumiks on tema sihiruum.*

Tõestus. Järeldub valemist (5.1). $\spadesuit$

Teoreem 5.4. *Afinse ruumi $\mathcal{A}$ iga m -tasand $A + \mathbf{M}^m$ on afinne ruum sihiruumiga $\mathbf{M}^m$.*

Tõestus. Kontrollime m -tasandi $A + \mathbf{M}^m$ korral afinse ruumi definitsiooni täidetust. Nägu teoreemis 5.3 selgus võib m -tasandi definitsioonis

$A + \mathbf{M}^m = \{A + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}$ punkti A asendada mistahes teise punktiga sellelt m -tasandilt. Seega

$$\forall X \in A + \mathbf{M}^m \implies A + \mathbf{M}^m = \{X + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}.$$

Afinse ruumi $\mathcal{A}$ definitsioonis 5.1 olev kujutus $+: \mathcal{A} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ tekitab kujutuse $+: A + \mathbf{M}^m \longrightarrow A + \mathbf{M}^m$ valemiga

$$(X, \vec{x}) \longmapsto X + \vec{x}.$$

Ilmselt $A + \mathbf{M}^m \subseteq \mathcal{A}$ ja $\mathbf{M}^m \subseteq \mathbf{V}$ tõttu afinse ruumi $\mathcal{A}$ definitsiooni 5.1 aksioomidest 1^o ja 2^o järeldeb nende aksioomide kehtivus m -tasandi $A + \mathbf{M}^m$ korral. ♠

Definitsioon 5.8. *Afinse ruumi igat m -tasandit nimetame tema alamruumiks.*

Definitsioon 5.9. *Afinse ruumi $\mathcal{A}^n$ $(n - 1)$ -tasandit nimetatakse hüpertasandiks, 1-tasandit sirgeks ja 2-tasandit tasandiks.*

Leiame m -tasandi parameetrilised võrrandid vektor- ja koordinaatkujul.

Lähtume m -tasandi definitsioonist

$$A + \mathbf{M}^m = \{X = A + \vec{y} \mid \vec{y} \in \mathbf{M}^m\}.$$

Saame m -tasandi võrrandiks

$$X = A + \vec{y}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{M}^m.$$

Võtame afinse ruumi $\mathcal{A}^n$ mistahes reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$. Järeldus 5.4 lubab kirjutada

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \vec{y}.$$

Siin vektorid $\overrightarrow{OX}$ ja $\overrightarrow{OA}$ on punktide X ja A kohavektorid, milliseid valemite kompaktsema esitamise huvides tähistame $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$ ja $\vec{a} := \overrightarrow{OA}$. Järelikult m -tasandi vektorvõrrandiks kohavektorite kaudu saame

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{y}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{M}^m. \tag{5.6}$$

Selles võrrandis vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{x}$ on antud m -tasandil fikseeritud punkti A ja muutuva punkti X kohavektorid. Vektor $\vec{y}$ on m -tasandit määrava sihiruumi $\mathbf{M}^m$ muutuv vektor.

Võtame alamruumi $\mathbf{M}^m$ mistahes baasi $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_m\}$, lühidalt $\{\vec{s}_\alpha\}$. Siin $\alpha \in \{1, 2, \dots, m\}$. Vektori $\vec{y}$ saame avaldada selle baasi kaudu

$$\vec{y} = t^1 \vec{s}_1 + t^2 \vec{s}_2 + \dots + t^m \vec{s}_m \iff \vec{y} = t^\alpha \vec{s}_\alpha.$$

Kuna vektor $\vec{y}$ on muutuv vektor, siis $t^1, t^2, \dots, t^m$ muutuvad reaalarvude hulgal.

Lõpuks paneme kirja m -tasandi vektorvõrrandi (5.6) koordinaatides. Valemis (5.6) olevad vektorid avaldame reeperisse kuuluva baasi kaudu, millega tulevad sisse nende vektorite koordinaadid. On õigus kirjutada

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i, \quad \vec{a} = a^i \vec{e}_i, \quad \vec{s}_\alpha = s_\alpha^i \vec{e}_i.$$

Asendades võrrandisse (5.6), kergesti saame

$$x^i = a^i + t^\alpha s_\alpha^i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.7)$$

Viimased on m -tasandi võrrandid koordinaatides. Kuna punkti koordinaatideks on kohavektori koordinaadid, siis valemis (5.7) on m -tasandi muutuva punkti X koordinaadid x^i avaldatud m -tasandi fikseeritud punkti A koordinaatide ja alamruumi $\mathbf{M}^m$ baasivektorite $\vec{s}_\alpha$ koordinaatide kaudu.

Valemist (5.7) erijuhul saame sirge ja tasandi parameetrilised võrrandid tavalises ruumis. Sirge korral $m=1$. Seega sihiruumist võetav alamruum $\mathbf{M}^1$ on ühemõõtmeline. Tema ainsat baasivektorit tähistame $\mathbf{s}$ abil. Sirge parameetrilisteks võrranditeks (5.7) abil saame

$$x^i = a^i + t s^i \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.8)$$

Kui nendes võrrandites parameeter t muutub reaalarvude alamhulgal, siis me võtame sirge punktidest ainult osa punkte. Reeglina alamhulgaks on mingi lõik $[t_1, t_2]$, kusjuures $t_1 < t_2$.

Definitsioon 5.10. *Punktihulka $\{X\}$, mille punktide X koordinaadid (x^i) rahuldavad võrrandeid*

$$x^i = a^i + t s^i \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.9)$$

nimetame sirglõiguks otspunktidega $B(b^i)$ ja $C(c^i)$, kus $b^i = a^i + t_1 s^i$ ja $c^i = a^i + t_2 s^i$, ja tähistame BC abil.

Definitsioon 5.11. Punkti $D(d^i)$, kus $d^i = a^i + \frac{1}{2}(t_1 + t_2)s^i$, nimetame lõigu BC keskpunktiks.

Näeme, et $d^i = \frac{1}{2}(b^i + c^i)$. Kuna $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = (b^i - d^i) = \frac{1}{2}(b^i - c^i)$ ja $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (c^i - d^i) = \frac{1}{2}(c^i - b^i)$, siis vektorid $\overrightarrow{DB}$ ja $\overrightarrow{DC}$ on teineteise vastandvektorid: $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$.

Punkti lõpuosa pühendame afinse ruumi eri tüüpidele, milleks on eukleidiline, pseudoeukleidiline ja sümplektiline afinne ruum.

Definitsioon 5.12. Afinset ruumi $\mathcal{A}$ sihiruumiga $\mathbf{V}$ nimetame vastavalt eukleidiliseks, pseudoeukleidiliseks või sümplektiliseks afinseks ruumiks, kui sihiruumiks $\mathbf{V}$ on eukleidiline, pseudoeukleidiline või sümplektiline vektorruum.

Lõplikumõõtmelist eukleidilist, pseudoeukleidilist ja sümplektilist afinset ruumi tähistame vasravalt $\mathcal{E}^n$, ${}_t\mathcal{E}^n$ ja $\mathcal{S}p^{2n}$.

Definitsioon 5.13. Lõplikumõõtmelise eukleidilise, pseudoeukleidilise või sümplektilise afinse ruumi reeperit nimetame vastavalt ristreeperiks, (samuti) ristreeperiks või sümplektiliseks reeperiks, kui temasse kuuluva sihiruumi baas on kas ristbaas, (samuti) ristbaas või sümplektiline baas.

Enne kui läheme edasi, kõneleme vahepeal afinse rühma $\overline{GL}(n+1, \mathbf{R})$ kolmest alamrühmast.

Nagu teame koosneb afinne rühm maatriksitest ehitusega

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix},$$

kus

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbf{R}).$$

Me eraldame afinsest rühmast välja erinevaid alamhulki. Esimene neist on selline, kus maatriksis $\overline{X}$ sisalduv maatriks X muutub täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühmal $O(n, \mathbf{R})$, s.o. ortogonaalrühmal. Tähistame vaadeldavat alamhulka $\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$ abil. Osutub, et see hulk on afinse rühma

alamrühm. Tõepoolest. Kuna ühikmaatriks $\overline{E} \in \overline{O}(n+1, \mathbf{R})$, siis vaadeldav hulk ei ole tühi. Edasi on vaja kontrollida, et

$$\forall \overline{X}, \overline{Y} \in \overline{O}(n+1, \mathbf{R}) \implies \overline{X}\overline{Y}^{-1} \in \overline{O}(n+1, \mathbf{R}). \quad (5.10)$$

Veendume selles. Eelduse kohaselt

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y^1 & y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^n & y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix},$$

kus

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{pmatrix}.$$

kuuluvad ortogonaalrühma $X, Y \in O(n, \mathbf{R})$. Leiame maatriksi $\overline{Y}$ pöördmaatriksi. Saame

$$\overline{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{y}^1 & \overline{y}_1^1 & \overline{y}_2^1 & \dots & \overline{y}_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{y}^n & \overline{y}_1^n & \overline{y}_2^n & \dots & \overline{y}_n^n \end{pmatrix}.$$

Siin $(\overline{y}_i^j)$ on maatriksi Y pöördmaatriksi Y^{-1} elemendid, s.o. $Y^{-1} = (\overline{y}_i^j)$, ja $y^i = -\overline{y}_j^i y^j$. Õeldu õigsuse kontrolliks võib veenduda, et korrutis $\overline{X}\overline{Y}^{-1}$ on ühikmaatriks. Jääb veel leida korrutis $\overline{X}\overline{Y}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \overline{X}\overline{Y}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{y}^1 & \overline{y}_1^1 & \overline{y}_2^1 & \dots & \overline{y}_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{y}^n & \overline{y}_1^n & \overline{y}_2^n & \dots & \overline{y}_n^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z^1 & z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n & z_1^n & z_2^n & \dots & z_n^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kus $z^i = x^i + x_j^i \bar{y}^j$ ja $z_j^i = x_s^i \bar{y}_j^s$. Siin z_j^i on matriksi $XY^{-1} \in O(n, \mathbf{R})$ elemendid. Olemegi näidanud, et $\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$ on afiinse rühma $\overline{GL}(n, \mathbf{R})$ alamrühm. Seda (alam)rühma nimetame *ortogonaalseks afiinseks rühmaks*.

Nüüd me eraldame afiinsest rühmast välja kaks järgmist alamhulka, mis on samuti afiinse rühma alamrühmad. Esimene neist on selline, kus matriksis $\overline{X}$ sisalduv matriks X muutub täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$ pseudoortogonaalalamrühmal ${}^tO(n, \mathbf{R})$. Tähistame vaadeldavat alamhulka ${}^t\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$ abil. Osutub, et see hulk on afiinse rühma alamrühm. *Nimetame (alam)rühma ${}^t\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$ pseudoortogonaalseks afiinseks rühmaks*. Teine hulk on afiinse rühma $\overline{GL}(2n+1, \mathbf{R})$ alamhulk, mis koosneb $(2n+1)$ -järku matriksitest $\overline{X}$, millesse kuuluv $2n$ -järku matriks muutub täieliku lineaarrühma $GL(2n, \mathbf{R})$ sümplektilisel alamrühmal Sp_{2n} . *Seda afiinse rühma alamrühma Sp_{2n} nimetame sümplektiliseks afiinseks rühmaks ja tähistame $\overline{Sp}_{2n}$ abil*. Tänu ortogonaalse afiinse rühma tõestusele on ilmne, et need kaks alamhulka on afiinse rühma alamrühmad.

Sõnastame tõestuseta kaks teoreemi. Tõestused on jäetud lugejale, sest analoogiline tõestus on eespool olemas.

Teoreem 5.5. *Lõplikumõõtmelise eukleidilise afiinse ruumi $\mathcal{E}^n$ ristreeperite $\mathcal{R}^\top(\mathcal{E}^n)$ (pseudoeukleidilise afiinse ruumi ${}_t\mathcal{E}^n$ ristreeperite $\mathcal{R}^\top({}_t\mathcal{E}^n)$) hulk on isomorfne eukleidilise afiinse rühmaga $\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$ (pseudoortogonaalse afiinse rühmaga ${}^t\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$).*

Teoreem 5.6. *Lõplikumõõtmelise sümplektilise afiinse ruumi Sp^{2n} sümplektiliste reeperite $\mathcal{R}^s(Sp^{2n})$ hulk on isomorfne sümplektilise afiinse rühmaga $\overline{Sp}_{2n}$.*

6. Vektorruumi lineaarteisendused

(Kordamine)

Käesolevas punktis meenutame mõisteid ja teoreeme algebra kursusest. See on vajalik järgmise punkti esitamiseks.

Olgu $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{V}'$ vektorruumid üle reaalarvude.

Definitsioon 6.1. Kujutust $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ nimetatakse lineaarkujutuseks, kui iga $\xi^1, \xi^2 \in \mathbf{R}$ ja $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbf{V}$ korral

$$\mathcal{A}(\xi^1 \vec{x}_1 + \xi^2 \vec{x}_2) = \xi^1 \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \xi^2 \mathcal{A}(\vec{x}_2).$$

Viimast valemit saab matemaatilise induktsiooni abil laiendada enam kui kahe vektori lineaarkombinatsioonile: $\mathcal{A}(\xi^i \vec{x}_i) = \xi^i \mathcal{A}(\vec{x}_i)$.

Näide 6.1. Nullkujutus

$$\theta : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'; \quad \vec{x} \longmapsto \theta(\vec{x}) := \vec{0}_{\mathbf{V}'}$$

on lineaarkujutus.

Lineaarkujutusel on rida omadusi. Sõnastame need.

Omadus 6.1. Lineaarkujutuste $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ ja $\mathcal{B} : \mathbf{V}' \longrightarrow \mathbf{V}''$ korral

$$\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}''; \quad \vec{x} \longmapsto \mathcal{B}\mathcal{A}(\vec{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))$$

on lineaarkujutus.

Omadus 6.2. Lineaarkujutuse $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ korral $\mathcal{A}(\vec{0}_{\mathbf{V}}) = \vec{0}_{\mathbf{V}'}$.

Omadus 6.3. Lineaarkujutuse $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ korral $\mathcal{A}(-\vec{x}) = -\mathcal{A}(\vec{x})$.

Omadus 6.4. Olgu $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ lineaarkujutus. Iga tema alamruumi $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$ korral on kujutishulk $\mathcal{A}(\mathbf{M}) := \{\mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{M}\}$ vektorruumi $\mathbf{V}'$ alamruum.

Omadus 6.5. Lineaarkujutus $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ kujutab vektorruumi $\mathbf{V}$ lineaarselt sõltuva vektorsüsteemi vektorruumi $\mathbf{V}'$ lineaarselt sõltuvaks vektorsüsteemiks.

Omadus 6.6. Olgu $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ lineaarkujutus. Kui $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ on alamruumi $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$ moodustajad, siis $\{\mathcal{A}(\vec{a}_1), \mathcal{A}(\vec{a}_2), \dots, \mathcal{A}(\vec{a}_m)\}$ on alamruumi $\mathcal{A}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{V}'$ moodustajad.

Definitsioon 6.2. Lineaarkujutust $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ nimetatakse lineaarteisenduseks.

Tähistame $\text{Hom } \mathbf{V}$ abil vektorruumi $\mathbf{V}$ lineaarteisenduste hulka. Sellel hulgal tekivad loomulikult järgmised tehted.

Definitsioon 6.3. a) Kujutust

$$\text{Hom } \mathbf{V} \times \text{Hom } \mathbf{V} \longrightarrow \text{Hom } \mathbf{V}; \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longmapsto \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

antuna valemiga

$$\vec{x} \longmapsto (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) := \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x})$$

nimetatakse lineaarteisenduste $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ summaks.

b) Kujutust

$$\text{Hom } \mathbf{V} \times \text{Hom } \mathbf{V} \longrightarrow \text{Hom } \mathbf{V}; \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longmapsto \mathcal{A}\mathcal{B}$$

antuna valemiga

$$\vec{x} \longmapsto (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}) := \mathcal{A}(\vec{x})(\mathcal{B}(\vec{x}))$$

nimetatakse lineaarteisenduste $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ korrutiseks.

c) Kujutust

$$\mathbf{R} \times \text{Hom } \mathbf{V} \longrightarrow \text{Hom } \mathbf{V}; \quad (\xi, \mathcal{A}) \longmapsto \xi\mathcal{A}$$

antuna valemiga

$$\vec{x} \longmapsto (\xi\mathcal{A})(\vec{x}) := \xi\mathcal{A}(\vec{x})$$

nimetatakse arvu ξ ja lineaarteisenduse $\mathcal{A}$ korrutiseks.

Nende tehete korrektsusele annab vastuse järgmine teoreem.

Teoreem 6.1. *Lineaarteisenduste summa, korrutis ja arvu kordne on lineaarteisendused, s.o.*

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Hom } \mathbf{V}, \quad \xi \in \mathbf{R} \implies \mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \xi\mathcal{A} \in \text{Hom } \mathbf{V}.$$

Definitsioon 6.4. *Bijektiivseid lineaarteisendusi nimetatakse automorfismideks. Vektorruumi $\mathbf{V}$ automorfismide hulka tähistame $\text{Aut } \mathbf{V}$ abil. Vahetult on ilmne $\text{Aut } \mathbf{V} \subseteq \text{Hom } \mathbf{V}$.*

Teoreem 6.2. *Automorfismide hulk $\text{Aut } \mathbf{V}$ on hulgal $\text{Hom } \mathbf{V}$ antud lineaarteisenduste korrutanise suhtes rühm.*

Märgime, et selle rühma ühikelemendiks on samasusteisendus

$$\mathcal{E} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}; \quad \vec{x} \longmapsto \mathcal{E}(\vec{x}) := \vec{x}.$$

Järgnevas eeldame, et vektorruum $\mathbf{V}$ on lõplikumõõtmeline, näiteks $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n$. Sel korral on tagatud baasi olemasolu. Iga lineaarteisenduse $\mathcal{A} : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n$ korral saame baasi $\{\vec{e}_i\}$ iga kujutisvektori $\mathcal{A}(\vec{e}_i)$ avaldada baasi $\{\vec{e}_i\}$ kaudu kujul $\mathcal{A}(\vec{e}_i) = a_i^j \vec{e}_j$. Moodustame maatriksi

$$A := \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix},$$

mille i -ndas veerus on vektori $\mathcal{A}(\vec{e}_i)$ koordinaadid. Seega maatriksi $A = (a_i^j)$ elementide ülaindeks on rea indeks.

Definitsioon 6.5. *Maatriksit $A \in \text{Mat}(n, n)$ nimetame lineaarteisenduse $\mathcal{A} : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n$ maatriksiks baasil $\{\vec{e}_i\}$.*

Kui vektori $\vec{x}$ ja tema kujutisvektori $\mathcal{A}(\vec{x})$ koordinaate järgnevas tähistada $\vec{x} = (x^i)$ ja $\mathcal{A}(\vec{x}) = ({}'x^i)$, siis nad on omavahel seotud valemiga

$${}'x^i = a_j^i x^j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Lineaarteisendusel $\mathcal{A} : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n$ on igal baasil oma maatriks. Olgu tema maatrikseid baasidel $\{\vec{e}_i\}$ ja $\{\vec{e}_i'\}$ tähistatud $A, A' \in \text{Mat}(n, n)$, siis kehtib valem $A' = C^{-1}AC$, kus $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}_i'\}$.

Teoreem 6.3. *Lineaarteosenduste hulk $\text{Hom } \mathbf{V}_n$ on isomorfne n -järku matriksite hulgaga $\text{Mat}(n, n)$.*

Teoreem 6.4. *Vektorruumi $\mathbf{V}_n$ lineaarteisenduste liitmisel, korrumisel ja arvuga korrumisel tuleb nende matriksid võetuna samal baasil vastavalt liita, korrutada ja korrutada sama arvuga.*

Teoreem 6.5. *Automorfismide rühm $\text{Aut } \mathbf{V}_n$ on isomorfne täieliku lineaarrühmaga $GL(n, \mathbf{R})$.*

Selle teoreemi tõestamisel tuleb näidata, et leidub bijektiivne kujutus $\varphi : \text{Aut } \mathbf{V}_n \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$ omadusega

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Aut } \mathbf{V}_n \implies \varphi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{B}).$$

Märgime, et automorfismi $\mathcal{A} \in \text{Aut } \mathbf{V}_n$ korral iga lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ kujutub lineaarselt sõltumatuks vektorsüsteemiks $\{\mathcal{A}(\vec{a}_1), \mathcal{A}(\vec{a}_2), \dots, \mathcal{A}(\vec{a}_m)\}$. Sellest järeldame, et baas $\{\vec{e}_i\}$ kujutub baasiks $\{\mathcal{A}(\vec{e}_i)\}$.

Järgnevas me vaatleme olukorda, kui vektorruum $\mathbf{V}$ on kas eukleidiiline, pseudoeukleidiiline või sümplektiiline vektorruum. Neid kolme juhtu saab vaadelda korraga, öeldes lihtsalt, et meil on skalaarkorrumisega vektorruum.

Definitsioon 6.6. *Skalaarkorrumisega vektorruumi automorfismi $\mathcal{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ nimetatakse isomeetriliseks lineaarteisenduseks, kui iga kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y}) \rangle.$$

Tähistame $I(\mathbf{V})$ abil skalaarkorrumisega vektorruumi bijektiivsete isomeetriliste lineaarteisenduste hulka. Seega $I(\mathbf{V})$ on automorfismide rühma $\text{Aut } \mathbf{V}$ alamhulk. See alamhulk on mittetühi, sest samasusteisendus

$$\mathcal{E} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}; \quad \vec{x} \longmapsto \mathcal{E}(\vec{x}) := \vec{x}$$

kuulub

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \mathcal{E}(\vec{x}), \mathcal{E}(\vec{y}) \rangle.$$

tõttu hulka $I(\mathbf{V})$.

Teoreem 6.6. *Isomeetriliste lineaarteisenduste hulk $I(\mathbf{V})$ on skalaarkorrutisega vektorruumi $\mathbf{V}$ korral automorfismide rühma $\text{Aut } \mathbf{V}$ alamrühm.*

Tõestus. Seda me juba teame, et $I(\mathbf{V}) = \emptyset$. Vaja on veel näidata, et iga $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in I(\mathbf{V})$ korral ka $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} \in I(\mathbf{V})$. Eeldusest saame

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V} \implies \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y}) \rangle, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \mathcal{B}(\vec{x}), \mathcal{B}(\vec{y}) \rangle.$$

Kuna $\mathcal{B} \in I(\mathbf{V})$ ja $I(\mathbf{V}) \subset \mathbf{V}$ tõttu $\mathcal{B} \in \text{Aut } \mathbf{V}$, mistõttu $\mathcal{B}$ omab rühma $\text{Aut } \mathbf{V}$ seisukohalt pöördelementi $\mathcal{B}^{-1} \in \text{Aut } \mathbf{V}$. Seejuures $\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{E}$. Eelduse teisest tingimusest saame

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \mathcal{E}(\vec{x}), \mathcal{E}(\vec{y}) \rangle = \langle (\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1})(\vec{x}), (\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1})(\vec{y}) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1}(\vec{x})), \mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1}(\vec{y})) \rangle = \langle \mathcal{B}^{-1}(\vec{x}), \mathcal{B}^{-1}(\vec{y}) \rangle \end{aligned}$$

ehk

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \mathcal{B}^{-1}(\vec{x}), \mathcal{B}^{-1}(\vec{y}) \rangle \iff \mathcal{B}^{-1} \in I(\mathbf{V}).$$

Arvutame edasi:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}(\vec{x}), \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}(\vec{y}) \rangle &= \langle \mathcal{A}(\mathcal{B}^{-1}(\vec{x})), \mathcal{A}(\mathcal{B}^{-1}(\vec{y})) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{B}^{-1}(\vec{x}), \mathcal{B}^{-1}(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Saamegi, et $\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} \in I(\mathbf{V})$. ♠

Olgu nüüd $\mathbf{V}$ lõplikumõõtmeline skalaarkorrutamisega vektorruum $\mathbf{V}^n$. (Sümplektilise vektorruumi korral tuleb n asemel võtta $2n$.) Nagu teame, rühm $\text{Aut } \mathbf{V}^n$ on isomorfne rühmaga $GL(n, \mathbf{R})$. Isomorfismi realiseerivat bijektiivset kujutust tähistasime $\varphi : \text{Aut } \mathbf{V}^n \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$ abil, kusjuures

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Aut } \mathbf{V}^n \implies \varphi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{B}).$$

Uurime kujutuse φ omadusi. Kuna φ on bijektiivne, siis on olemas temal pöördkujutis $\varphi^{-1} : GL(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \text{Aut } \mathbf{V}^n$, mis on samuti bijektiivne. Seejuures pöördkujutuse definitsiooni kohaselt

$$\varphi\varphi^{-1} : GL(n, \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$$

on samasuskujutus

$$\epsilon : GL(n, \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbf{R}); \quad \mathcal{A} \longmapsto \epsilon(\mathcal{A}) := \mathcal{A}.$$

Samuti

$$\varphi^{-1}\varphi : GL(n, \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$$

on samasuskujutus

$$\epsilon : Aut \mathbf{V}^n \longrightarrow Aut \mathbf{V}^n; \quad \mathcal{A} \longmapsto \epsilon(\mathcal{A}) := \mathcal{A}.$$

Kokkuvõttes

$$\varphi\varphi^{-1} = \epsilon, \quad \varphi^{-1}\varphi = \epsilon.$$

Toome nüüd kujutuste φ ja φ^{-1} mõningad omadused.

Omadus 6.7. Kujutused φ ja φ^{-1} kujutavad ühe rühma ühikelemendi teise rühma ühikelemendiks.

Tõestus. Rühma $Aut \mathbf{V}^n$ ühikelemendiks on samasusteisendus $\mathcal{E}$ ja rühma $GL(n, \mathbf{R})$ ühikelemendiks aga n -järku ühikmaatriks E . Nüüd iga $\mathcal{A} \in Aut \mathbf{V}^n$ korral

$$\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{A} \implies \varphi(\mathcal{A}\mathcal{E}) = \varphi(\mathcal{A}) \iff \varphi(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{E}) = \varphi(\mathcal{A})$$

ja

$$\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A} \implies \varphi(\mathcal{E}\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{A}) \iff \varphi(\mathcal{E})\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{A}).$$

Kuna φ on bijektiivne, siis $\varphi(Aut \mathbf{V}^n) = GL(n, \mathbf{R})$, mistõttu $\varphi(\mathcal{A})$ annab $\mathcal{A}$ muutumisel rühmas $Aut \mathbf{V}^n$ kätte täieliku lineaarrühma $GL(n, \mathbf{R})$. Seega kahe viimase seose kohaselt $\varphi(\mathcal{E})$ on rühma $GL(n, \mathbf{R})$ ühikelement. Rühma ühikelemendi ühesuse tõttu saame $\varphi(\mathcal{E}) = E$. Viimasest omakorda

$$\varphi^{-1}(E) = \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{E})) = \varphi^{-1}\varphi(\mathcal{E}) = \epsilon(\mathcal{E}) = \mathcal{E}.$$

Saime $\varphi(\mathcal{E}) = E$ ja $\varphi^{-1}(E) = \mathcal{E}$. ♠

Omadus 6.8. Iga $X, Y \in GL(n, \mathbf{R})$ korral

$$\varphi^{-1}(XY) = \varphi^{-1}(X)\varphi^{-1}(Y).$$

Tõestus. Iga $X, Y \in GL(n, \mathbf{R})$ korral $\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y) \in Aut \mathbf{V}^n$ kehtib

$$\varphi(\varphi^{-1}(X)) = \varphi\varphi^{-1}(X) = \epsilon(X) = X, \quad \varphi(\varphi^{-1}(Y)) = \dots = Y.$$

Kui tähistada $\varphi^{-1}(X) := \mathcal{X}$ ja $\varphi^{-1}(Y) := \mathcal{Y}$, siis $\varphi(\mathcal{X}) = X$ ja $\varphi(\mathcal{Y}) = Y$. Viimast silmas pidades, saame

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(XY) &= \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{X})\varphi(\mathcal{Y})) = \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{X}\mathcal{Y})) = \varphi^{-1}\varphi(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \\ &= \epsilon(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \mathcal{X}\mathcal{Y} = \varphi^{-1}(X)\varphi^{-1}(Y).\end{aligned}$$

Seega

$$\varphi^{-1}(XY) = \varphi^{-1}(X)\varphi^{-1}(Y). \quad \spadesuit$$

Omadus 6.9. Iga $\mathcal{X} \in \text{Aut } \mathbf{V}^n$ korral

$$\varphi(\mathcal{X}^{-1}) = (\varphi(\mathcal{X}))^{-1}.$$

Tõestus. Selles omaduses me väidame, et $\varphi(\mathcal{X}^{-1})$ on elemendi $\varphi(\mathcal{X}) \in GL(n, \mathbf{R})$ pöördelement $(\varphi(\mathcal{X}))^{-1}$. Pöördelemendi definitsiooni kohaselt on vaja näidata, et

$$\varphi(\mathcal{X}^{-1})\varphi(\mathcal{X}) = E, \quad \varphi(\mathcal{X})\varphi(\mathcal{X}^{-1}) = E.$$

Veendume selles:

$$\varphi(\mathcal{X}^{-1})\varphi(\mathcal{X}) = \varphi(\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X}) = \varphi(\mathcal{E}) = E,$$

$$\varphi(\mathcal{X})\varphi(\mathcal{X}^{-1}) = \varphi(\mathcal{X}\mathcal{X}^{-1}) = \varphi(\mathcal{E}) = E.$$

Sellega omadus on tõestatud. $\spadesuit$

Pöördume nüüd skalaarkorrutisega vektorruumide juurde tagasi. Iso-morfismi realiseeriva bijektiivse kujutuse $\varphi : \text{Aut } \mathbf{V}^n \longrightarrow GL(n, \mathbf{R})$ abil alamrühm $I(\mathbf{V}^n) \subset \text{Aut } \mathbf{V}^n$ kujutub rühma $GL(n, \mathbf{R})$ mittetühjaks alam-hulgaks $\varphi(I(\mathbf{V}^n)) \subset GL(n, \mathbf{R})$.

Teoreem 6.7. Rühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamhulk $\varphi(I(\mathbf{V}^n))$ on tema alam-rühm.

Tõestus. Iga $X, Y \in \varphi(I(\mathbf{V}^n))$ korral $\mathcal{X} := \varphi^{-1}(X)$ ja $\mathcal{Y} := \varphi^{-1}(Y)$ on $I(\mathbf{V}^n)$ elemendid. Seejuures $\varphi(\mathcal{X}) = X$ ja $\varphi(\mathcal{Y}) = Y$. Nüüd

$$XY^{-1} = \varphi(\mathcal{X})\varphi(\mathcal{Y}^{-1}) = \varphi(\mathcal{X}\mathcal{Y}^{-1}).$$

Siin me kasutasime omadust 6.9. Kuna $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in I(\mathbf{V}^n)$ ja $I(\mathbf{V}^n)$ on (alam)-rühm, siis $\mathcal{X}\mathcal{Y}^{-1} \in I(\mathbf{V}^n)$. Seega $\varphi(\mathcal{X}\mathcal{Y}^{-1}) \in \varphi(I(\mathbf{V}^n))$. Sellest omakorda $XY^{-1} \in I(\mathbf{V}^n)$. Oleme näidanud, et hulk $\varphi(I(\mathbf{V}^n))$ on rühma $GL(n, \mathbf{R})$ alamrühm. ♠

Lõpuks uurime rühma $\varphi(I(\mathbf{V}^n))$ ehitust skalaarkorrutamisega vektorruumide korral. Olgu skalaarkorrutisega ruumideks kas eukleidiline või pseudoeukleidiline ruum. Sümplektiline vektorruum jääb esialgu vaatluse alt välja. Mistahes ristreeperi $\{\vec{e}_i\}$ korral skalaarkorrutise maatriksiks $G = (g_{ij})$, kus $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$, on kas E_n või sE_n . Iga $A \in \varphi(I(\mathbf{V}^n))$ korral $\mathcal{A} := \varphi^{-1}(A)$ on $I(\mathbf{V}^n)$ element, kusjuures $\varphi(\mathcal{A}) = A$. Meenutades kujutuse φ definitsiooni, siis A on $\mathcal{A}$ maatriks saaduna valemi $\mathcal{A}(\vec{e}_i) = a_i^j \vec{e}_j$ abil, s.o. $A = (a_i^j)$. Et tegemist on isomeetrilise automorfismiga, siis $\langle \mathcal{A}(\vec{e}_i), \mathcal{A}(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ tõttu

$$\langle a_i^s \vec{e}_s, a_j^t \vec{e}_t \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \iff a_i^s a_j^t g_{st} = g_{ij} \iff A^\top G A = G.$$

Kuna baas $\{\vec{e}_i\}$ on ristbaas, siis $G = E_n$ või $G = {}^sE_n$. Järelikult $\varphi(I(\mathbf{V}^n))$ elemendid peavad rahuldama kas $A^\top E_n A = E_n$ või $A^\top {}^sE_n A = {}^sE_n$. Viimasest saame, et eukleidilise vektorruumi korral isomeetriliste automorfismide alamrühma $I(\mathbf{V}^n)$ kujutiseks rühmas $GL(n, \mathbf{R})$ on ortogonaalrühm, s.o. $\varphi(I(\mathbf{E}^n)) = O(n, \mathbf{E}^n)$. Kui tegemist on pseudoeukleidilise vektorruumiga ${}_s\mathbf{E}^n$, siis $\varphi(I({}_s\mathbf{E}^n))$ on pseudoortogonaalrühm indeksiga s , s.o. $\varphi(I({}_s\mathbf{E}^n)) = {}^sO(n, \mathbf{R})$.

Sümplektilise vektorruumi korral analoogiliselt saame, et sümplektilise baasi korral rühm $\varphi(I(\mathbf{Sp}^{2n}))$ on sümplektiline rühm.

7. Afiinsed kujutused ja teisendused

Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}'$ afiinsed ruumid sihiruumidega $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{V}'$ üle reaalarvude korpuse $\mathbf{R}$.

Definitsioon 7.1. Kujutust $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ nimetame *afinseks kujutuseks*, kui leidub selline lineaarkujutus $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$, et iga punkti $X \in \mathcal{A}$ ja iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral kehtib

$$f(X + \vec{x}) = f(X) + \varphi(\vec{x}). \quad (7.1)$$

Lineaarkujutust φ nimetame *afinse kujutuse f homogeenseks osaks*.

Teoreem 7.1. Iga lineaarkujutuse $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ ning iga kahe punkti $A \in \mathcal{A}$ ja $A' \in \mathcal{A}'$ korral leidub selline üheselt määratud afinne kujutus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, mille homogeenseks osaks on ettevõetud $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ ja $f(A) = A'$.

Tõestus. Defineerime kujutuse $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ järgmiselt. Mistahes punkti $X \in \mathcal{A}$ korral saame võrrandist $A + \vec{x} = X$ leida üheselt määratud lahendivektori $\vec{x} = \overrightarrow{AX} \in \mathbf{V}$ ja selle abil omakorda $\varphi(\overrightarrow{AX}) \in \mathbf{V}'$. Nüüd defineerime kujutuse f valemiga

$$f(X) := A' + \varphi(\overrightarrow{AX}).$$

Osutub, et sellel kujutusel on nõutavad omadused. Tõepoolest:

$$f(A) = f(A + \vec{0}_{\mathbf{V}}) = A' + \varphi(\vec{0}_{\mathbf{V}}) = A' + \vec{0}_{\mathbf{V}'} = A'$$

ja

$$\begin{aligned} f(X + \vec{y}) &= f((A + \vec{x}) + \vec{y}) = f(A + (\vec{x} + \vec{y})) = A' + \varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \\ &= A' + (\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})) = (A' + \varphi(\vec{x})) + \varphi(\vec{y}) = f(X) + \varphi(\vec{y}), \end{aligned}$$

mistõttu kujutus f on afinne kujutus homogeenise osaga φ .

Lõpuks on vaja näidata kujutuse f ühesus. Kui peaks leiduma veel teine afinne kujutus $\bar{f}$ sama homogeenise osaga φ , kusjuures $\bar{f}(A) = A'$, siis iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral

$$\bar{f}(X) = \bar{f}(A + \overrightarrow{AX}) = \bar{f}(A) + \varphi(\overrightarrow{AX}) = A' + \varphi(\overrightarrow{AX}) = f(X).$$

Kujutuste võrdsuse definitsiooni kohaselt $\bar{f} = f$. Seega kujutus f on üheselt määratud. ♠

Definitsioon 7.2. *Afinse ruumi $\mathcal{A}$ punktisüsteemi $\{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ nimetame afinselt sõltumatuks, kui tema sihiruumi $\mathbf{V}$ vektorsüsteem $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ on lineaarselt sõltumatu.*

Teoreem 7.2. *Olgu $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ n -mõõtmelise afinsse ruumi $\mathcal{A}^n$ afinselt sõltumatu punktisüsteem ja $\{A'_0, A'_1, \dots, A'_n\}$ afinsse ruumi $\mathcal{A}'$ punktisüsteem. Leidub üheselt määratud afinne kujutus $f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}'$ omadusega $f(A_i) = A'_i$ iga $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ korral.*

Tõestus. Paneme tähele, et esimene afinne ruum on lõplikumõõtmeline. Mõõdet on tähistatud n abil. Punktisüsteemides on punkte ühe võrra rohkem kui $\mathcal{A}^n$ mõõde. Alustame nüüd tõestusega. Tekivad sihiruumide $\mathbf{V}^n$ ja $\mathbf{V}'$ vektorsüsteemid $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ ja $\{\overrightarrow{A'_0A'_1}, \overrightarrow{A'_0A'_2}, \dots, \overrightarrow{A'_0A'_n}\}$. Neist esimene on lineaarselt sõltumatu. Vektorruumide korral on teada, et leidub üheselt määratud lineaarkujutus $\varphi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}'$ omadusega

$$\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{A'_0A'_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Võtame punktipaari $A_0 \in \mathcal{A}^n$ ja $A'_0 \in \mathcal{A}'$ ning tekkinud lineaarkujutuse φ . Eelmise teoreemi 7.1 kohaselt leidub üheselt määratud afinne kujutus $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ homogeenise osaga φ ning omadusega $f(A_0) = A'_0$. Seejuures kujutus defineeritakse valemiga

$$f(X) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0X}) := A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0X}).$$

Osutub, et sellel afinsel kujutusel $f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}'$ on nõutavad omadused. Meil $f(A_0) = A'_0$ on juba teada. Sellele saab iga $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ korral lisada

$$f(A_i) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}) = A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = A'_0 + \overrightarrow{A'_0A'_i} = A'_i.$$

Seega $f(A_i) = A'_i$ iga $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ korral. Kujutuse f ühesus tuleneb rakendatud tulemuste ühesuse tõttu. ♠

Teoreem 7.3. Olgu $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ ja $g : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}''$ afiinsed kujutused homogeensete osadega vastavalt $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ ja $\psi : \mathbf{V}' \longrightarrow \mathbf{V}''$. Sel korral korrutis $gf : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$ on afinne kujutus homogeenne osaga $\psi\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}''$.

Tõestus. Teame, et $\psi\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}''$ on lineaarkujutus. Iga punkti $X \in \mathcal{A}$ ja iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral

$$\begin{aligned} gf(X + \vec{x}) &= g(f(X + \vec{x})) = g(f(X) + \varphi(\vec{x})) = \\ &= g(f(X)) + \psi(\varphi(\vec{x})) = gf(X) + \psi\varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Seega kujutus $gf : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}''$ on afinne kujutus homogeenne osaga $\psi\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}''$. ♠

Järgnevas vaatleme afiinsete kujutuste üht eriliiki.

Definitsioon 7.3. Afinsed kujutust $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ nimetatakse afiinseks teisenduseks.

Näide 7.1. Fikseerime afiinses ruumis $\mathcal{A}$ vabalt ühe punkti, mida tähistame näiteks O abil. Defineerime teisenduse $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ valemiga

$$X \in \mathcal{A} \longmapsto f(X) := O.$$

Osutub, et defineeritud kujutus on afinne teisendus, sest

$$f(X + \vec{x}) = O + \vec{0} = O + \theta(\vec{x}) = f(X) + \theta(\vec{x}).$$

Siin $\theta : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on nullteisendus. Oleme näidanud, et f on afinne teisendus, mille homogeenneks osaks on nullteisendus.

Definitsioon 7.4. Fikseerime mingi vektori $\vec{a} \in \mathbf{V}$ afiinse ruumi $\mathcal{A}$ sihiruumist. Teisendust

$$\tau_{\vec{a}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}; \quad X \longmapsto \tau_{\vec{a}}(X) := X + \vec{a}$$

nimetame afiinse ruumi $\mathcal{A}$ rööplükkeks ehk nihkeks vektori $\vec{a}$ võrra.

Teoreem 7.4. Iga $\vec{a} \in \mathbf{V}$ korral rööplüke $\tau_{\vec{a}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on afinne teisendus, mille homogeenneks osaks on samasusteisendus $\epsilon : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$.

Iga afinne teisendus, mille homogeenseks osaks on samasusteisendus, on rööplüke.

Tõestus. Näitame, et rööplüke on afinne teisendus. Iga punkti $X \in \mathcal{A}$ ja iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral

$$\begin{aligned}\tau_{\vec{a}}(X + \vec{x}) &= (X + \vec{x}) + \vec{a} = X + (\vec{x} + \vec{a}) = X + (\vec{a} + \vec{x}) = \\ &= (X + \vec{a}) + \vec{x} = \tau_{\vec{a}}(X) + \vec{x} = \tau_{\vec{a}}(X) + \epsilon(\vec{x}).\end{aligned}$$

Seega rööplüke $\tau_{\vec{a}}$ on afinne teisendus, mille homogeenseks osaks on samasusteisendus ϵ .

Olgu $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ afinne teisendus, mille homogeenseks osaks on samasusteisendus $\epsilon : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Sel korral paneme paika vektori $\vec{a} \in \mathbf{V}$, mis määrab rööplükke. Selleks fikseerime punkti $A \in \mathcal{A}$ nii kuidas pähe tuleb.

Tähistame $A' := f(A) \in \mathcal{A}$. Seega $f(A) = A' = A + \overrightarrow{AA'}$. Mistahes punkti $X \in \mathcal{A}$ korral

$$\begin{aligned}f(X) &= f(A + \overrightarrow{AX}) = f(A) + \epsilon(\overrightarrow{AX}) = A' + \overrightarrow{AX} = (A + \overrightarrow{AA'}) + \overrightarrow{AX} = \\ &= A + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AX}) = A + (\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AA'}) = (A + \overrightarrow{AX}) + \overrightarrow{AA'} = \\ &= X + \overrightarrow{AA'} = \tau_{\overrightarrow{AA'}}(X).\end{aligned}$$

Seega kujutuste võrdsuse definitsiooni kohaselt $f = \tau_{\overrightarrow{AA'}}$, mis ütleb, et afinne teisendus f on rööplüke vektori $\overrightarrow{AA'}$ võrra. ♠

Teoreem 7.5. *Afinse ruumi $\mathcal{A}$ kõigi rööplükete hulk on teisenduste korrumise suhtes rühm, mis on isomorfne sihiruumiga $\mathbf{V}$ kui aditiivse rühmaga.*

Tõestus. Tähistame afinsse ruumi $\mathcal{A}$ rööplükete hulka T abil. Defineerime kujutuse $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow T$ valemiga $\vec{x} \in \mathbf{V} \mapsto \varphi(\vec{x}) := \tau_{\vec{x}}$. See kujutus on bijektiivne, mille kontrollimise jätame lugejale. Uurime kujutuse φ omadusi. Kehtib $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}}$, sest iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral

$$\begin{aligned}\tau_{\vec{x}+\vec{y}}(X) &= X + (\vec{x} + \vec{y}) = X + (\vec{y} + \vec{x}) = (X + \vec{y}) + \vec{x} = \\ &= \tau_{\vec{y}}(X) + \vec{x} = \tau_{\vec{x}}(\tau_{\vec{y}}(X)) = \tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}}(X) \iff \tau_{\vec{x}+\vec{y}} = \tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}}.\end{aligned}$$

Viimase abil

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \tau_{\vec{x}+\vec{y}} = \tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}}.$$

Kui kasutada algebras tuntud teoreemi, mis ütleb, et kui ühes hulgas H on olemas algebraline tehe ja teine hulk on rühm G ning leidub bijektiivne kujutus $\varphi : G \longrightarrow H$ omadusega

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

siis ka hulk H on rühm, mis on isomorfne rühmaga G . Rakendame seda teoreemi meie olukorras. Praegu on tehtega hulgaks hulk T . Tehteks on rööplükete $\tau_{\vec{x}}$ ja $\tau_{\vec{y}}$ kui kujutuste korrutamine, mis valemi $\tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}} = \tau_{\vec{x}+\vec{y}}$ tõttu on ka rööplüke. Lisaks sellele

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}} = \varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y}).$$

Seega rööplükete hulk T on rühm, mis on isomorfne vektorruumiga $\mathbf{V}$ kui rühmaga vektorite liitmise suhtes. ♠

Rööplükete rühma ühikelemendiks on $\tau_{\vec{o}}$, sest mistahes rööplükke $\tau_{\vec{x}} \in T$ korral

$$\tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{o}} = \tau_{\vec{x}+\vec{o}} = \tau_{\vec{x}}, \quad \tau_{\vec{o}}\tau_{\vec{x}} = \tau_{\vec{o}+\vec{x}} = \tau_{\vec{x}}.$$

Rööplükke $\tau_{\vec{x}} \in T$ pöördelemendiks on rööplüke $\tau_{-\vec{x}}$, sest

$$\tau_{\vec{x}}\tau_{-\vec{x}} = \tau_{\vec{x}-\vec{x}} = \tau_{\vec{o}}, \quad \tau_{-\vec{x}}\tau_{\vec{x}} = \tau_{-\vec{x}+\vec{x}} = \tau_{\vec{o}}.$$

Rühm T on kommutatiivne, kuna

$$\tau_{\vec{x}}\tau_{\vec{y}} = \tau_{\vec{x}+\vec{y}} = \tau_{\vec{y}+\vec{x}} = \tau_{\vec{y}}\tau_{\vec{x}}.$$

Definitsioon 7.5. *Afinset teisendust $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ nimetame tsentroafinseks mingi punkti $O \in \mathcal{A}$ suhtes, kui $f(O) = O$, s.o. punkt O jääb paigale. Paigale jäävat punkti nimetatakse afinse teisenduse püsipunktiks.*

Teoreem 7.6. *Etteantud punkti $O \in \mathcal{A}$ ja etteantud lineaarteisenduse $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ korral leidub üheselt määratud tsentroafinne teisendus püsipunktiga O ja homogeenuse osaga φ .*

Tõestus. Võttes punktipaari (O, O) ja antud teisenduse $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, on teoreemi 7.1 eeldused täidetud. Selle teoreemi kohaselt leidub üheselt

määratud afinne teisendus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ homogeense osaga φ ning seejuures $f(O) = O$. ♠

Teoreem 7.7. *Olgu O afinse ruumi $\mathcal{A}$ vabalt fikseeritud punkt. Iga afinse teisenduse $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ saab üheselt esitada rööplükke ja tsentroafinse teisenduse püsipunktiga O korrutisena.*

Tõestus. Tõestame esmalt teoreemi ühel erijuhul, kui afinne teisendus on tsentroafinne mingi püsipunktiga O . Sel korral kehtib ilmne võrdus $f = ef = \tau_O f$, mis ütlebki, et f on esitatud rööplükke ja püsipunktiga O tsentroafinse teisenduse f korrutisena. Teisena vaatleme sellist afiinsel teisendust, millel püsipunkti ei ole olemas. Fikseerime nüüd mistahes punkti $O \in \mathcal{A}$. Kuna afiinsel teisendusel $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ püsipunkte ei ole, siis $f(O) := A \neq O$. Olgu meil afinse teisenduse homogeenset osa tähistatud $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ abil. Hakkame nüüd otsima tsentroafinset teisendust $\bar{f} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ püsipunktiga O ja homogeense osaga $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. Eelmise teoreemi 7.6 kohaselt selline tsentroafinne teisendus $\bar{f} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ leidub ja määratakse üheselt. Seejuures saame

$$\bar{f}(X) = \bar{f}(O + \overrightarrow{OX}) = \bar{f}(O) + \varphi(\overrightarrow{OX}) = O + \varphi(\overrightarrow{OX}).$$

Moodustame vektori $\vec{a} := \overrightarrow{OA}$. Tekib rööplükke $\tau_{\vec{a}}$. Osutub, et afinne teisendus f on esitatav korrutisena $f = \tau_{\vec{a}} \bar{f}$. Veendume selles. Iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{a}} \bar{f}(X) &= \tau_{\vec{a}}(\bar{f}(X)) = \tau_{\vec{a}}(\bar{f}(O + \overrightarrow{OX})) = \tau_{\vec{a}}(\bar{f}(O) + \varphi(\overrightarrow{OX})) = \\ &= \tau_{\vec{a}}(O + \varphi(\overrightarrow{OX})) = (O + \varphi(\overrightarrow{OX})) + \overrightarrow{OA} = (O + \overrightarrow{OA}) + \varphi(\overrightarrow{OX}) = \\ &= A + \varphi(\overrightarrow{OX}) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OX}) = f(O + \overrightarrow{OX}) = f(X), \end{aligned}$$

millest $\tau_{\vec{a}} \bar{f} = f$ ehk $f = \tau_{\vec{a}} \bar{f}$.

Sellega teoreemis väidetud lahutuse olemasolu on näidatud. Tuleb veel näidata lahutuse ühesus.

Oletame, et konstrueeritud esituse $f = \tau_{\vec{a}} \bar{f}$ kõrval on veel olemas teine lahutus $f = \tau_{\vec{a}'} \tilde{f}$, kus $\tilde{f}(O) = O$ ja $\tilde{f}$ homogeenseks osaks on nagu ennegi $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. Seega

$$f = \tau_{\vec{a}} \bar{f}, \quad f = \tau_{\vec{a}'} \tilde{f} \implies \tau_{\vec{a}} \bar{f} = \tau_{\vec{a}'} \tilde{f}.$$

Viimasest püsipunkti O korral saame

$$\tau_{\vec{a}}\overline{f}(O) = \tau_{\vec{a}'}\tilde{f}(O) \implies \tau_{\vec{a}}(\overline{f}(O)) = \tau_{\vec{a}'}(\tilde{f}(O)) \implies \tau_{\vec{a}}(O) = \tau_{\vec{a}'}(O) \implies$$

$$O + \vec{a} = O + \vec{a}' \implies A = O + \vec{a}' \implies \vec{a}' = \overrightarrow{OA} = \vec{a}.$$

Seega $\tau_{\vec{a}} = \tau_{\vec{a}'}$, s.o. rööplüked $\tau_{\vec{a}}$ ja $\tau_{\vec{a}'}$ ühtuvad. Seega $\tau_{\vec{a}}\overline{f} = \tau_{\vec{a}'}\tilde{f}$ saame esitada $\tau_{\vec{a}}\overline{f} = \tau_{\vec{a}}\tilde{f}$, millest

$$\tau_{-\vec{a}}(\tau_{\vec{a}}\overline{f}) = \tau_{-\vec{a}}(\tau_{\vec{a}'}\tilde{f}) \implies (\tau_{-\vec{a}}\tau_{\vec{a}})\overline{f} = (\tau_{-\vec{a}}\tau_{\vec{a}'})\tilde{f} \implies$$

$$\tau_{-\vec{a}+\vec{a}}\overline{f} = \tau_{-\vec{a}+\vec{a}'}\tilde{f} \implies \tau_{\vec{o}}\overline{f} = \tau_{\vec{o}}\tilde{f} \implies e\overline{f} = e\tilde{f} \implies \overline{f} = \tilde{f}.$$

Sellega ühesus on näidatud. ♠

Viimane teoreem on oluline afinse teisenduse esitamiseks koordinaatides. Punktil koordinaatide tekkeks tuleb küll eeldada, et afinne ruum on lõpliku mõõtmega. Niisiis olgu antud afinne teisendus $f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^n$ homogeense osaga $\varphi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$. Võtame suvalise reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$. Punkti X koordinaatide saamiseks tuleb moodustada tema kohavektor $\overrightarrow{OX}$ ja see avaldada reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_i\}$ kaudu

$$\overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i \implies X(x^i).$$

Samas saame kujutispunkti $f(X) := X'$ jaoks analoogiliselt koordinaadid

$$\overrightarrow{OX'} = 'x^i \vec{e}_i \implies X'('x^i).$$

Meie ülesanne on kujutispunkti X' koordinaadid $'x^i$ avaldada originaali X koordinaatide x^i kaudu.

Arutleme. Eelmisest teoreemist teame, et afinse teisenduse saame avaldada rööplükke ja tsentroafinse teisenduse korrutisena. Seejuures tsentroafinse teisenduse konstrueerimisel võib lähtuda suvalisest punktist, mis oleks püsipunktiks. Võtame selleks reeperi alguspunkti O . Saame kirjutada

$f = \tau_{\vec{a}}\overline{f}$, kus $\vec{a} := \overrightarrow{OA}$ ja $A := f(O)$. Järgnevas jagame arutelu etappideks,

a) Afinseks teisenduseks on rööplükke $\tau_{\vec{a}}$. Praegu punkti $X \in \mathcal{A}^n$ kujutiseks on $X' := \tau_{\vec{a}}X = X + \vec{a}$, mis järelduse 5.4 kohaselt on samaväärne vektorseosega

$$\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX} + \vec{a}.$$

Kuna vektorid $\overrightarrow{OX}$ ja $\overrightarrow{OX'}$ on punktide X ja X' kohavektorid, siis viimaste koordinaadid x^i ja $'x^i$ saame avaldistest

$$\overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i, \quad \overrightarrow{OX'} = 'x^i \vec{e}_i,$$

mis asendame viimasesse vektorseosesse. Saame

$$'x^i \vec{e}_i = x^i \vec{e}_i + a^i \vec{e}_i \implies 'x^i = x^i + a^i.$$

Saadud valem annabki rööplükke korral kujutise X' koordinaadid originaali X koordinaatide kaudu.

b) Afiinseks teisenduseks on tsentroafinne teisendus $\overline{f}$, mille püsipunktiks on reeperi alguspunkt O . Homogeenseks osaks olgu $\varphi : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathbf{V}^n$. Reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_i\}$ suhtes saame leida φ maatriksi, mille saame avaldisest

$$\varphi(\vec{e}_i) = a^j_i \vec{e}_j \implies A = (a^j_i).$$

Tähistame punktide X ja $X' := f(X)$ koordinaate vastavalt x ja $'x$. Kuna

$$\begin{aligned} X' = \overline{f}(X) &= \overline{f}(O + \overrightarrow{OX}) = \overline{f}(O) + \varphi(\overrightarrow{OX}) = O + \varphi(\overrightarrow{OX}) \iff \\ X' &= O + \varphi(\overrightarrow{OX}), \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX'} &= \overrightarrow{OO} + \varphi(\overrightarrow{OX}) \implies \overrightarrow{OX'} = \vec{0} + \varphi(\overrightarrow{OX}) \implies \overrightarrow{OX'} = \varphi(\overrightarrow{OX}) \implies \\ 'x^i \vec{e}_i &= \varphi(x^j \vec{e}_j) \implies 'x^i \vec{e}_i = x^j \varphi(\vec{e}_j) \implies 'x^i = x^j a^i_j. \end{aligned}$$

Valem $'x^i = x^j a^i_j$ annabki kujutise X' koordinaadid $'x^i$ originaali X koordinaatide x^i kaudu.

c) Leiame nüüd afiinse teisenduse $f = \tau_{\vec{a}} \overline{f}$ korral kujutuse koordinaadid. Iga punkti $X \in \mathcal{A}^n$ korral

$$X' = f(X) = \tau_{\vec{a}} \overline{f}(X) = \tau_{\vec{a}}(\overline{f}(X)) = \tau_{\vec{a}} \overline{X}.$$

Siin me tähistasime $\overline{X} := \overline{f}(X)$. Tähistame punkte ja koordinaate järgmiselt: $X'('x^i)$, $\overline{X}(\overline{x}^i)$ ja $X(x^i)$. Punkti b) kohaselt on valem $\overline{X} = \overline{f}(X)$ koordinaatides $\overline{x}^i = a^i_j x^j$ ja $X' = \tau_{\vec{a}} \overline{X}$ koordinaatides $'x^i = \overline{x}^i + a^i$. Asendades viimasesse $\overline{x}^i$, saame

$$'x^i = a^i_j x^j + a^i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Viimased valemid on afiinse teisenduse valemid koordinaatides.

8. Afiinse ruumi automorfismid ehk liikumised

Selles punktis vaatleme afiinse ruumi teatavaid tüüpi afiinseid teisendusi.

Definitsioon 8.1. *Afiinse ruumi bijektiivseid afiinseid teisendusi nimetame automorfismideks ehk liikumisteks.*

Afiinse ruumi $\mathcal{A}$ automorfismide hulka tähistame $\text{Aut } \mathcal{A}$ abil.

Teoreem 8.1. *Afinne teisendus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on automorfism siis ja ainult siis, kui tema homogeenne osa $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on automorfism.*

Tõestus. Tarvilikkuse näitamiseks tuleb eeldada, et afinne teisendus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on automorfism. Seega ta on bijektiivne ehk samaaegselt injektiivne ja sürjektiivne. Meil on vaja näidata, et tema homogeenne osa $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on bijektiivne, s.o. injektiivne ja sürjektiivne.

Näitame esmalt, et φ on injektiivne. Selleks tuleb kontrollida, et mistahes kahe erineva vektori $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral

$$\vec{x} \neq \vec{y} \implies \varphi(\vec{x}) \neq \varphi(\vec{y}).$$

Toetume asjaolule, et eelduslikult $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on injektiivne. Seega alati kahe erineva punkti korral

$$X \neq Y \implies f(X) \neq f(Y).$$

Fikseerime mingi punkti $A \in \mathcal{A}$, mille abil saame moodustada kaks uut punkti $A + \vec{x}$ ja $A + \vec{y}$. Kuna $\vec{x} \neq \vec{y}$, siis ka $A + \vec{x} \neq A + \vec{y}$. Vastasel juhul saaksime

$$A + \vec{x} = A + \vec{y} := B \implies \vec{x} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{y} = \overrightarrow{AB} \implies \vec{x} = \vec{y},$$

saades vastuolu. Kuna f on injektiivne, siis

$$\vec{x} \neq \vec{y} \implies A + \vec{x} \neq A + \vec{y} \implies f(A + \vec{x}) \neq f(A + \vec{y}) \implies$$

$$f(A) + \varphi(\vec{x}) \neq f(A) + \varphi(\vec{y}) \implies \varphi(\vec{x}) \neq \varphi(\vec{y}).$$

Seega φ on injektiivne.

Veendume, et φ on surjektiivne, s.o. $\varphi(\mathbf{V}) := \{\varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{V}\} = \mathbf{V}$. Seega mistahes vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral on vaja näidata, et leidub sobiv vektor $\vec{y} \in \mathbf{V}$, et $\varphi(\vec{y}) = \vec{x}$. Me konstrueerime sellise vektori. Kõigepealt fikseerime vabalt punkti $A \in \mathcal{A}$ ja moodustame punkti $X := A + \vec{x}$. Kuna afinne teisendus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on surjektiivne, siis leiduvad punktid $\overline{A}, \overline{X} \in \mathcal{A}$, et $f(\overline{A}) = A$ ja $f(\overline{X}) = X$. Tähistame vörrandi $\overline{A} + \vec{\xi} = \overline{X}$ lahendit $\vec{\xi} := \vec{y}$. Seega $\overline{X} = \overline{A} + \vec{y}$. Osutub, et konstrueeritud vektor $\vec{y}$ ongi otsitavaks vektoriks, sest

$$X = f(\overline{X}) = f(\overline{A} + \vec{y}) = f(\overline{A}) + \varphi(\vec{y}) = A + \varphi(\vec{y}) \implies A + \varphi(\vec{y}) = X.$$

Mõni rida eespool oli $A + \vec{x} = X$. Seega nii $\vec{x}$ kui ka $\varphi(\vec{y})$ on vörrandi $A + \vec{\eta} = X$ lahendid. Kuna sellel vörrandil on ainult üks lahend, mistöttu $\varphi(\vec{y}) = \vec{x}$. Saime, et φ on surjektiivne. Kokkuvöttes oleme näidanud afinse ruumi automorfismi korral tema homogeenne osa on sihiruumi automorfism.

Töestame piisavuse. Vaja on näidata, et kui afinne teisenduse homogeenne osa on automorfism, siis afinne teisendus ise on automorfism. Samaväärselt. Kui lineaarteisendus $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on bijektiivne, siis afinne teisendus $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on bijektiivne. Oletame esmalt, et lineaarteisendus $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on injektiivne lineaarteisendus, s.o.

$$\vec{x} \neq \vec{y} \implies \varphi(\vec{x}) \neq \varphi(\vec{y}).$$

Iga $X \neq Y$ punkti korral leidub $\vec{a} \in \mathbf{V}$, et $X + \vec{a} = Y$, kusjuures $\vec{a} \neq \vec{0}$. Vastasel juhul saaksime $X = Y$, mis on lubamatu. Kuna $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on injektiivne, siis

$$\vec{a} \neq \vec{0} \implies \varphi(\vec{a}) \neq \varphi(\vec{0}) \implies \varphi(\vec{a}) \neq \vec{0}.$$

Leiame nüüd

$$f(Y) = f(X + \vec{a}) = f(X) + \varphi(\vec{a}),$$

millest $\varphi(\vec{a}) \neq \vec{0}$ töttu $f(Y) \neq f(X)$. Seega afinne teisendus f on injektiivne.

Nüüd näitame, et afinne teisendus f on surjektiivne, kui φ on surjektiivne. Vaja on näidata, et iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral leidub $Y \in \mathcal{A}$, et

$f(Y) = X$. Me konstrueerime nüüd sobiva punkti Y . Fikseerime mingi punkti $A \in \mathcal{A}$. Tema kujutist tähistame $A' := f(A)$ abil. Leidub vektor $\vec{x} \in \mathbf{V}$, et $A' + \vec{x} = X$. Kuna $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ on sürjektiivne, siis leidub selline vektor $\vec{y} \in \mathbf{V}$, et $\varphi(\vec{y}) = \vec{x}$. Moodustame punkti $Y := A + \vec{y}$. Seejuures

$$f(Y) = f(A + \vec{y}) = f(A) + \varphi(\vec{y}) = A' + \vec{x} = X.$$

Sellega afinne teisendus f on sürjektiivne. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et kui $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ on bijektiivne, siis ka $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ on bijektiivne. ♠

Teoreem 8.2. *Afinse ruumi $\mathcal{A}$ automorfismide hulk $\text{Aut } \mathcal{A}$ on kujutuste korrutamise suhtes rühm.*

Tõestus. Hulga $\text{Aut } \mathcal{A}$ jaoks on vaja kontrollida rühma aksioomide täidetust. Esimesena tuleb kontrollida, et kujutuste korrutamine on tehteks. Tõepoolest. Iga $f, g \in \text{Aut } \mathcal{A}$ on bijektiivsed afinsed teisendused. Seega

$$f(X + \vec{x}) = f(X) + \varphi(\vec{x}), \quad g(X + \vec{x}) = g(X) + \psi(\vec{x}).$$

Siin homogeensed osad φ ja ψ kuuluvad sihiruumi $\mathbf{V}$ automorfismide rühma $\text{Aut } \mathbf{V}$. Meenutame eelnevalt, et kujutuste korrutamine antakse valemiga

$$X \in \mathcal{A} \mapsto gf(X) := g(f(X)).$$

Kontrollime nüüd, kas afinsete teisenduste korrutis on afinne. See on tõepoolest nii, sest

$$\begin{aligned} gf(X + \vec{x}) &= g(f(X + \vec{x})) = g(f(X) + \varphi(\vec{x})) = \\ &= g(f(X)) + \psi(\varphi(\vec{x})) = gf(X) + \psi\varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Näeme, et korrutis $gf : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ on afinne teisendus homogeense osaga $\psi\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. Kuna ψ, φ kuuluvad rühma $\text{Aut } \mathbf{V}$, siis ka $\psi\varphi \in \text{Aut } \mathbf{V}$. Sellega oleme näidanud, et $g, f \in \text{Aut } \mathcal{A}$.

Edasi tuleb kontrollida, kas see tehe rahuldab rühma aksioome. Esi- teks tuleb veenduda, et tehe on assotsiatiivne: iga kolme automorfismi $f, g, h \in \text{Aut } \mathcal{A}$ korral $(fg)h = f(gh)$. Viimane kehtib, nagu teame, kujutuste korrutamise korral üldse rääkimata meie juhust.

Teiseks tuleb näidata ühikelemendi olemasolu. Selleks on samasusteisendus

$$e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}; \quad X \mapsto e(X) := X,$$

sest iga $f \in \text{Aut } \mathcal{A}$ korral

$$ef(X) = e(f(X)) = f(X) \implies ef = f,$$

$$fe(X) = f(e(X)) = f(X) \implies fe = f.$$

Tuleb veel kontrollida, et $e : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on afinne ja bijektiivne. Afinsus järeldub vahetult, sest

$$e(X + \vec{x}) = X + \vec{x} = e(X) + \epsilon(\vec{x}).$$

Siin $\epsilon(\vec{x}) := \vec{x}$. Teades, et ϵ on rühma $\text{Aut } \mathbf{V}$ ühikelement, siis e ei ole ainult afinne, vaid ka bijektiivne teoreemi 8.1 tõttu.

Kolmandaks on vaja näidata, et iga $f \in \text{Aut } \mathcal{A}$ omab pöördelementi f^{-1} . Kuna $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ on bijektiivne, siis tarkusest kujutuste kohta teame, et eksisteerib pöördkujutus $f^{-1} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, mis on bijektiivne ja seejuures

$$ff^{-1} = e, \quad f^{-1}f = e.$$

On veel vaja kontrollida, et $f^{-1} \in \text{Aut } \mathcal{A}$. Kuna f^{-1} bijektiivsus on teada, siis tuleb kontrollida tema afinsust. Veendume selles. Kuna $f \in \text{Aut } \mathcal{A}$, siis

$$f(X + \vec{x}) = f(X) + \varphi(\vec{x}), \quad \varphi \in \text{Aut } \mathbf{V}.$$

Teame, et $\text{Aut } \mathbf{V}$ on rühm, mistõttu leidub $\varphi^{-1} \in \text{Aut } \mathbf{V}$. Tähistame $f^{-1}(X) := X'$ ja $\varphi^{-1}(\vec{x}) := \vec{x}'$. Seejuures

$$f(X') = f(f^{-1}(X)) = ff^{-1}(X) = e(X) = X,$$

$$\varphi(\vec{x}') = \varphi(\varphi^{-1}(\vec{x})) = \varphi\varphi^{-1}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Arvutame nüüd:

$$\begin{aligned} f^{-1}(X + \vec{x}) &= f^{-1}(f(X') + \varphi(\vec{x}')) = f^{-1}(f(X' + \vec{x}')) = \\ &= f^{-1}f(X' + \vec{x}') = e(X' + \vec{x}') = X' + \vec{x}' = f^{-1}(X) + \varphi^{-1}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Oleme näidanud, et $f^{-1} \in \text{Aut } \mathcal{A}$. Teoreem on tõestatud. ♠

Järgnevas selgitame rühma $\text{Aut } \mathcal{A}$ omadusi.

Teoreem 8.3. Automorfism $f \in \text{Aut } \mathcal{A}^n$ kujutab reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ uueks reeperiks, tähistanme $\{O'; \vec{e}_i'\}$. Seejuures punktil X ja kujutispunktil $f(X)$ vastavalt reeperite $\{O; \vec{e}_i\}$ ja $\{O'; \vec{e}_i'\}$ suhtes on samad koordinaadid.

Tõestus. Et f on afiinse ruumi automorfism, siis tema homogeenne osa on sihiruumi automorfism:

$$f \in \text{Aut } \mathcal{A}^n \implies \varphi \in \text{Aut } \mathbf{V}^n.$$

Reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ abil saame moodustada $O' := f(O)$ ja $\vec{e}_i' := \varphi(\vec{e}_i)$. Tuleb selgitada kas $\{O'; \vec{e}_i'\}$ saab olla reeper. Vastus on jaatav. Kõigepealt automorfismi φ tõttu lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem (baas $\{\vec{e}_i\}$ seda on) kujutub lineaarselt sõltumatuks vektorsüsteemiks. Seega $\{\vec{e}_i'\}$ on lineaarselt sõltumatu. Vektorruumide teooriast teame, et n -mõõtmelises vektorruumis $\mathbf{V}^n$ iga n -vektoriline lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem on baas. Seega $\{O'; \vec{e}_i'\}$ on reeper.

Võrdleme nüüd punktide X ja $f(X)$ koordinaatide vastavalt reeperites $\{O; \vec{e}_i\}$ ja $\{O'; \vec{e}_i'\}$. Arvutame:

$$X(x^i) \iff \overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i; \quad X' := f(X), \quad X'({}'x^i) \iff \overrightarrow{O'X'} = {}'x^i \vec{e}_i'$$

korral

$$\begin{aligned} X' = f(X) &= f(O + \overrightarrow{OX}) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OX}) = O' + \varphi(\overrightarrow{OX}) \iff \\ X' = O' + \varphi(\overrightarrow{OX}) &\iff \overrightarrow{O'X'} = \overrightarrow{O'O'} + \varphi(\overrightarrow{OX}) \iff \\ \overrightarrow{O'X'} &= \varphi(\overrightarrow{OX}) \iff {}'x^i \vec{e}_i' = \varphi(x^i \vec{e}_i) \iff \\ {}'x^i \vec{e}_i' &= x^i \varphi(\vec{e}_i) \iff {}'x^i \vec{e}_i' = x^i \vec{e}_i' \iff {}'x^i = x^i. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 8.4 Afiinse ruumi $\mathcal{A}^n$ mistahes kahe reeperi korral leidub rühmast $\text{Aut } \mathcal{A}^n$ üheselt määratud automorfism, mis viib ühe reeperi teiseks.

Tõestus. Olgu $\{O; \vec{e}_i\}$ ja $\{O'; \vec{e}_i'\}$ afiinse ruumi $\mathcal{A}^n$ kaks suvalist reeperit. Reeper $\{O; \vec{e}_i\}$ laseb määrata $(n+1)$ punkti O ja $E_i := O + \vec{e}_i$, kus $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Samuti teise reeperi $\{O'; \vec{e}_i'\}$ abil saame $n+1$ punkti O' ja $E_i' := O' + \vec{e}_i'$, kus taas $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Samuti on õige $\vec{e}_i = \overrightarrow{OE_i}$

ja $\vec{e}_i' = \overrightarrow{O'E_i'}$. Kuna baasid $\{\vec{e}_i\}$ ja $\{\vec{e}_i'\}$ on lineaarselt sõltumatud, siis definitsiooni 7.2 kohaselt punktisüsteemid $\{O; E_i\}$ ja $\{O'; E_i'\}$ on afinselt sõltumatud. Nüüd omakorda teoreemi 7.2 kohaselt leidub üheselt määratud afinne teisendus $f : \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}^n$, mille puhul $f(O) = O'$ ja $f(E_i) = E_i'$. Seega

$$\begin{aligned} E_i' &= f(E_i) = f(O + \overrightarrow{OE_i}) = f(O + \vec{e}_i) = f(O) + \varphi(\vec{e}_i) = \\ &= O' + \varphi(\vec{e}_i) \iff \overrightarrow{O'E_i'} = \overrightarrow{O'O'} + \varphi(\vec{e}_i) \iff \vec{e}_i' = \varphi(\vec{e}_i). \end{aligned}$$

Kuna $\varphi \in \text{Aut } \mathbf{V}^n$, siis ta kujutab baasi $\{\vec{e}_i\}$ baasiks. Nagu nägime, selleks baasiks on $\{\vec{e}_i'\} = \{\varphi(\vec{e}_i)\}$. Seega oleme näidanud, et $f \in \text{Aut } \mathcal{A}^n$ ja on üheselt määratud. ♠

Sisuliselt kahest viimasest teoreemist järeldub, et afinse ruumi $\mathcal{A}^n$ reeperite hulk $\mathcal{R}(\mathcal{A}^n)$ on isomorfne automorfismide rühmaga $\text{Aut } \mathcal{A}^n$. Varasemast teame (teoreem 5.2), et sama reeperite hulk $\mathcal{R}(\mathcal{A}^n)$ on isomorfne ka afinse rühmaga $\overline{GL}(n+1, \mathbf{R})$. Seega rühmad $\text{Aut } \mathcal{A}^n$ ja $\overline{GL}(n+1, \mathbf{R})$ on isomorfsed. Viimase asjaolu tõttu võime *automorfismide ehk liikumiste rühma* $\text{Aut } \mathcal{A}^n$ nimetada ka *afinseks rühmaks*.

Tutvume veel afinse rühma $\text{Aut } \mathcal{A}$ paari omadusega. Seejuures afinne ruum ei pea olema lõplikumõõtmeline.

Teoreem 8.5. *Afinse rühma $\text{Aut } \mathcal{A}$ elemendid kujutavad m -tasandi m -tasandiks.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{A}$ afinne ruum sihiruumiga $\mathbf{V}$. Nagu ütleb teoreem 5.3 on tema m -tasand m -mõõtmeline afinne alamruum. Seetõttu on teda sobiv tähistada $\mathcal{A}^m$ abil. Meenutuseks paneme kirja ka m -tasandi definitsiooni

$$\mathcal{A}^m = \{A + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\},$$

kus $\mathbf{M}^m$ on sihiruumi $\mathbf{V}$ mingi m -mõõtmeline alamruum ja A vaadeldaval m -tasandil asuv punkt. Iga $f \in \text{Aut } \mathcal{A}$ korral homogeense osaga $\varphi \in \text{Aut } \mathbf{V}$ me saame m -tasandi $\mathcal{A}^m$ kujutiseks

$$f(\mathcal{A}^m) = \{f(X) \mid X \in \mathcal{A}^m\},$$

mis teoreemi väite kohaselt peaks olema taas m -tasand. Veendume selles. Iga punkti $X \in \mathcal{A}^m$ korral

$$X \in \mathcal{A}^m \implies f(X) \in f(\mathcal{A}^m); \quad f(X) = f(A + \vec{x}) = f(A) + \varphi(\vec{x}),$$

kus $\varphi \in \text{Aut } \mathbf{V}$. Teame, et hulk $\varphi(\mathbf{M}^m) = \{\varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}$ omaduse 6.4 kohaselt on alamruum, mis seejuures on m -mõõtmeline, sest φ on automorfism. Tähistame $\overline{\mathbf{M}}^m := \varphi(\mathbf{M}^m)$. Seega $\vec{y} := \varphi(\vec{x})$ on alamruumi $\overline{\mathbf{M}}^m$ suvaline vektor. Oleme saanud

$$f(\mathcal{A}^m) = \{f(A) + \varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\} = \{A' + \vec{y} \mid \vec{y} \in \overline{\mathbf{M}}^m\},$$

kus $A' := f(A)$. Seega $f(\mathcal{A}^m)$ on m -tasand sihiruumiga $\overline{\mathbf{M}}^m$. ♠

Definitsioon 8.2. *Kahte sama sihiruumiga m -tasandit $A + \mathbf{M}^m$ ja $B + \mathbf{M}^m$ nimetame paralleelseteks, kui $B \notin A + \mathbf{M}^m$.*

Teoreemi 5.3 kohaselt paralleelsetel tasanditel pole ühiseid punkte.

Teoreem 8.6. *Afinse ruumi paralleelsed m -tasandid kujutuvad iga $f \in \text{Aut } \mathcal{A}$ abil paralleelseteks.*

Tõestus. Kahe paralleelse m -tasandi $\mathcal{A}^m = \{A + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}$ ja $\mathcal{B}^m = \{B + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}$, kus $B \notin \mathcal{A}^m$, kujutised mistahes $f \in \text{Aut } \mathcal{A}$ korral on

$$f(\mathcal{A}^m) = \{f(A) + \varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\} = \{f(A) + \vec{x}' \mid \vec{x}' \in \overline{\mathbf{M}}^m\}$$

ja

$$f(\mathcal{B}^m) = \{f(B) + \varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{M}^m\} = \{f(B) + \vec{x}' \mid \vec{x}' \in \overline{\mathbf{M}}^m\}.$$

Siin $f(B) \notin f(\mathcal{A}^m)$. Vastasel juhul $f(B) \in f(\mathcal{A}^m)$ tõttu leidub sobiv vektor $\vec{x}' \in \overline{\mathbf{V}}^m$ selline, et $f(B) = f(A) + \vec{x}'$. Samuti on olemas veel selline vektor $\vec{x} \in \mathbf{M}^m$, et $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}'$. Seega

$$f(B) = f(A) + \varphi(\vec{x}) = f(A + \vec{x}).$$

Siit f^{-1} abil vasakult korrutades, saame $B = A + \vec{x}$, s.o. $B \in \mathcal{A}^m$. Saime vastuolu. Oleme näidanud, et m -tasandid $f(\mathcal{A}^m)$ ja $f(\mathcal{B}^m)$ on paralleelsed. Teoreem on tõestatud. ♠

Punkti lõpuosa pühendame eukleidilisele, pseudoeukleidilisele ja süplektilisele afinsele ruumile. Jutt on afinsest ruumist, mille sihiruum on kas eukleidiline, pseudoeukleidiline või sümplektiline vektorruum. Et neid afinse ruumi erijuhte korraga käsitleda, nimetame neid *skalaarkorrutisega afinseteks ruumideks*.

Definitsioon 8.3. *Skalaarkorrutisega afinse ruumi automorfismi nimetame isomeetriliseks liikumiseks, kui tema homogeenne osa on sihiruumi isomeetriline teisendus.*

Praegu siis afinne ruum $\mathcal{A}$ on üks kolmest skalaarkorrutisega afinsest ruumist. Seega kas eukleidiline afinne ruum $\mathcal{E}$, pseudoeukleidiline afinne ruum ${}_t\mathcal{E}$ või siis sümplektiline afinne ruum $\mathcal{Sp}$. Sihiruumiks $\mathbf{V}$ on vastavalt kas eukleidiline vektorruum $\mathbf{E}$, pseudoeukleidiline vektorruum ${}_t\mathbf{E}$ või sümplektiline vektorruum $\mathbf{Sp}$. Definitsiooni 6.6 kohaselt skalaarkorrutamise (sihi)vektorruumi automorfism $\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ on isomeetriline lineaarteisendus, s.t. iga kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}) \rangle$. Vektorruumi isomeetriliste lineaarteisenduste hulka $I(\mathbf{V})$ on tähistatud $I(\mathbf{V})$ abil. Ta on vektorruumi automorfismide rühma $Aut \mathbf{V}$ alamrühm.

Tähistame skalaarkorrutamisega afinse ruumi $\mathcal{A}$ isomeetriliste liikumiste hulka $I(\mathcal{A})$ abil. Ta on automorfismide rühma $Aut \mathcal{A}$ alamhulk, seejuures mittetühi alamhulk, sest rühma $Aut \mathcal{A}$ ühikelement kuulub hulka $I(\mathcal{A})$.

Teoreem 8.7. *Skalaarkorrutamisega afinse ruumi $\mathcal{A}$ isomeetriliste liikumiste hulk $I(\mathcal{A})$ on rühma $Aut \mathcal{A}$ alamrühm.*

Tõestus. Teoreemi 1.1 kohaselt on meil vaja näidata, et iga kahe $f, g \in I(\mathcal{A})$ korral $gf^{-1} \in I(\mathcal{A})$. Eeldusest $f, g \in I(\mathcal{A})$ saame, et nende homogeensed osad – tähistame φ ja ψ – kuuluvad rühma $I(\mathbf{V})$. Eespool teoreemis 8.2 me näitasime, et $Aut \mathcal{A}$ on rühm. Seega, kui $f \in Aut \mathcal{A}$, siis ka $f^{-1} \in Aut \mathcal{A}$, samaväärselt f^{-1} on bijektiivne afinne teisendus. Nende homogeensed osad φ ja φ^{-1} kuuluvad sihiruumi isomeetriliste teisenduste rühma $I(\mathbf{V})$. Kuna eelduse kohaselt $f, g \in I(\mathcal{A}) \subset Aut \mathcal{A}$, siis korrutis $gf^{-1} \in Aut \mathcal{A}$ ja tema hogeneenne osa $\psi\varphi^{-1}$ kuulub hoopis rühma $I(\mathbf{V})$, sest meil $\varphi, \psi \in I(\mathbf{V})$. Seega viimase definitsiooni 8.3 kohaselt $gf^{-1} \in I(\mathcal{A})$. Olemegi näidanud, et isomeetriliste liikumiste hulk $I(\mathcal{A})$ on (alam)rühm.



Definitsioon 8.4. *Skalaarkorrutisega afinse ruumi mistahes kahe punkti $X, Y \in \mathcal{A}$ vaheliseks kauguseks $\rho(X, Y)$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{XY}$ pikkust $|\overrightarrow{XY}|$, s.o. $\rho(X, Y) := |\overrightarrow{XY}|$.*

Teoreem 8.8. *Isomeetriliste liikumiste rühma elemendid säilitavad kahe punkti vahelise kauguse.*

Tõestus. Mistahes $f \in I(\mathcal{A})$ korral tähistame punktide $X, Y \in \mathcal{A}$ kujutusi $X' := f(X)$ ja $Y' := f(Y)$. Ilmsest seosest $X + \overrightarrow{XY} = Y$ saame

$$Y' = f(Y) = f(X + \overrightarrow{XY}) = f(X) + \varphi(\overrightarrow{XY}) = X' + \varphi(\overrightarrow{XY}).$$

Siit järelduse 5.4 abil saame $\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{X'X'} + \varphi(\overrightarrow{XY}) = \varphi(\overrightarrow{XY})$, millest

$$\rho(X', Y') = |\overrightarrow{X'Y'}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{X'Y'}, \overrightarrow{X'Y'} \rangle} = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle} = |\overrightarrow{XY}| = \rho(X, Y).$$

Sellega teoreem on tõestatud. ♠

9. Afinse ruumi kvadriku mõiste

Olgu A^n n -mõõtmeline afinne ruum sihiruumiga $\mathbf{V}^n$. Punktidele koordinaatide saamiseks tuleb võtta mingi reeper $\{O; \vec{e}_i\}$. Sel korral mistahes punkti $X \in A^n$ koordinaatideks loetakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_i\}$ suhtes. Seega kordajaid avaldises $\overrightarrow{OX} = x^i \vec{e}_i$. Punkti X koordinaatidega x^i tähistatakse $X(x^i)$.

Definitsioon 9.1. *Punkti hulka $\{X \in A^n\}$ nimetatakse kvadrikuks, kui selle hulga iga punkti X koordinaadid (x^i) mingi reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ korral rahuldavad võrrandit*

$$K : a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0, \quad (9.1)$$

kusjuures kõik n^2 kordajat a_{ij} ei ole korraka nullid ja $a_{ij} = a_{ji}$.

Kvadriku võrrandis defineerime iga liidetava jaoks tema astme, milleks loetakse muutujate astmenäitajate summat. Seega summas $a_{ij}x^i x^j$ iga liidetav, mille kordaja ei ole null, on teise astme liidetav. Samas näeme, et summas $2a_i x^i$ iga liidetav on nullist eriva kordaja korral esimese astme liidetav ja $a \neq 0$ nullastme liidetav. Kvadriku järguks loetakse tema võrrandi liidetavate astmetest kõrgemat. Seega kvadriku järk on 2. Kvadriku võrrandis liidetavaid $a_{ij}x^i x^j$ nimetatakse ruutosaks. Kvadriku võrrandi kordajate abil saab moodustada kaks maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

ja

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Kvadriku ruutosa kordajatest moodustatud maatriks A on sümmeetriline, sest $a_{ij} = a_{ji}$ tõttu $A^\top = A$. Maatriksi A astakut $\text{rank } A$ nimetame kvadriku astakuks $\text{rank } K$. Definitsiooni 9.1 kohaselt $0 < \text{rank } K \leq n$.

Juhime veel tähelepanu sellele, et kvadriku võrrandit (9.1) võime läbi korrutada nullist erineva arvuga.

Kerkib ülesse kaks küsimust: 1) kas kvadriku võrrand (9.1) on igas reeperis sama ehitusega ja 2) kas kvadriku astak ei sõltu reeperi valikust, sest arvatavasti maatriks A sellest sõltub. Leiame kõigepealt kvadriku võrrandi mistahes teises reeperis $\{O'; \vec{e}'_i\}$. Selleks on vaja kirjeldada uut reeperit vana reeperi suhtes. Selleks on uue alguspunkti koordinaadid kui ka uute baasivektorite koordinaadid vanade baasivektorite suhtes. Suvalise punkti X vanad koordinaadid x^i avalduvad tema uute koordinaatide $'x^i$ kaudu valemi (5.3) tõttu järgmiselt

$$x^i = c_j^i 'x^j + c^i.$$

Asendades siit kvadriku võrrandisse (9.1), saame kvadriku võrrandi uutes koordinaadites. Meie ülesanne on selgitada kas saadud võrrandi uutes koordinaadites saab esitada taas kujul (9.1). Samas saame ka valemid kuidas kvadriku võrrandi uued kordajad avalduvad vanade kaudu. Sooritameme öeldu:

$$\begin{aligned} a_{st}x^s x^t + 2a_s x^s + a = 0 &\implies a_{st}(c_i^s 'x^i + c^s)(c_j^t 'x^j + c^t) + 2a_s(c_i^s 'x^i + c^s) + a = 0 \\ &\implies (a_{st}c_i^s c_j^t) 'x^i 'x^j + (a_{st}c_i^s c^t) 'x^i + (a_{st}c_i^t c^s) 'x^i + 2(a_s c_i^s) 'x^i + \\ &\quad + (a_{st}c^s c^t + 2a_s c^s + a) = 0. \end{aligned}$$

Kuna

$$(a_{st}c_i^t c^s) 'x^i = (a_{ts}c_i^s c^t) 'x^i = (a_{st}c_i^s c^t) 'x^i,$$

siis viimane saab kuju

$$(a_{st}c_i^s c_j^t) 'x^i 'x^j + 2(a_{st}c^t + a_s)c_i^s 'x^i + (a_{st}c^s c^t + 2a_s c^s + a) = 0$$

ehk kompaktsemalt

$$a'_{ij} 'x^i 'x^j + 2a'_i 'x^i + a' = 0.$$

kus

$$a'_{ij} = a_{st}c_i^s c_j^t, \quad a'_i = (a_{st}c^t + a_s)c_i^s, \quad a' = a_{st}c^s c^t + 2a_s c^s + a. \quad (9.4)$$

Näeme, et kvadriku võrrand on iga reeperi korral ehitusega (9.1). Lisaks sellele saime valemid (9.4), mis näitavad, kuidas teisenevad kordajad kvadriku võrrandis. Need valemid saab esitada ka maatrikskujul, kui tähistada

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & a'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & a'_n \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n & a' \end{pmatrix}$$

ja defineerida

$$\overline{C}' := \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siis valemid (9.4) saab esitada maatrikskujul

$$A' = C^\top AC, \quad \overline{A}' = \overline{C}^\top \overline{A} \overline{C}. \quad (9.5)$$

Siit tänu maatriksi C regulaarsusele

$$\text{rank } A' = \text{rank } ((C^\top A)C) = \text{rank } (C^\top A) = \text{rank } A,$$

mis ütleb, et kvadriku astak $\text{rank } K$ on defineeritud korrektselt.

Valemitest (9.4) eraldame välja kaks erijuhtu. Juhul kui me jätame paigale reeperi alguspunkti, siis valemities (9.4) tuleb võtta $c^i = 0$. Me saame

$$a'_{ij} = a_{st} c_i^s c_j^t, \quad a'_i = a_s c_i^s, \quad a' = a. \quad (9.6)$$

Teiseks me muudame reeperis ainult alguspunkti. Sel korral tuleb võtta $c_i^i = \delta_i^j$. Sel korral aga valemities (9.4) saame

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad a'_i = a_{it} c^t + a_i, \quad a' = a_{st} c^s c^t + 2a_s c^s + a. \quad (9.7)$$

10. Kvadriku lõikamine sirgega. Kvadriku asümptootilise sihi mõiste

Lõikame kvadriku mistahes sirgega. Tekkinud lõikepunktid iseloomustavad kvadriku ehitust. Mistahes reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ korral on kvadrik antav võrrandiga

$$K: a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0.$$

Sirge, millega hakkame kvadriku lõikama, olgu antud parameetriliste võrranditega. Kui sirge läbib punkti $B(b^i)$ ja on sihivektoriga $\vec{s} = (s^i) \neq \vec{0}$, siis parameetrilisteks võrranditeks on

$$x^i = b^i + s^i t \quad \forall \mathbf{R}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (10.1)$$

Kuna lõikepunktid asuvad samaaegselt nii kvadrikul kui lõikesirgel, siis lõikepunktide koordinaadid saame järgmisest süsteemist

$$\begin{cases} a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0 \\ x^1 = b^1 + s^1 t \\ x^2 = b^2 + s^2 t \\ \dots\dots\dots \\ x^n = b^n + s^n t \end{cases} \quad (10.2)$$

Asendades n viimasest võrrandist esimesse, me saame

$$a_{ij}(b^i + s^i t)(b^j + s^j t) + 2a_i(b^i + s^i t) + a = 0.$$

Samaväärselt

$$(a_{ij}s^i s^j)t^2 + 2(a_{ij}b^i + a_j)s^j t + (a_{ij}b^i b^j + 2a_i b^i + a) = 0$$

ehk lühemalt

$$At^2 + 2Bt + C = 0. \quad (10.3)$$

Siin me oleme tähistanud

$$A := a_{ij}s^is^j, \quad B := (a_{ij}b^i + a_j)s^j, \quad C := a_{ij}b^ib^j + 2a_ib^i + a. \quad (10.4)$$

Kui me lõikame sama-aegselt kvadrikut ka teise sirgega, mille sihivektorit olgu tähistatud vektoriga $\vec{u} = (u^i)$. Siis tekib kordaja $A = a_{ij}u^iu^j$, mis on hoopis teine arv kui $A := a_{ij}s^is^j$. Segaduse vältimiseks lisame tähele A argumendiks sulgudesse sirge sihivektori. Seega valemis (10.4) olevat A tähistame täpsemalt $A(\vec{s})$ abil. Teisel juhul aga $A(\vec{u})$ abil. Sellist täpsemat tähistust kasutama siis, kui sellise eristamise järele tekib vajadus.

Võrrandi (10.3) lahendamisel saame kätte need parameetri t väärtused, mille asendamisel sirge s parameetrilistesse võrranditesse (10.1), saame kätte lõikepunkti(de) koordinaadid, seega lõikepunkti(d). Lõikepunkte tekib samapalju, kuipalju on võrrandil (10.3) lahendeid. Siin on mõeldavad järgmised olukorrad.

1) Kordaja $A \neq 0$ korral on võrrand (10.3) tundmatu t suhtes ruutvõrrand. Tal on kaks lahendit

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (10.5)$$

Sirge s lõikab kvadrikut K kahes punktis. Millised need lõikepunktid on, sõltub valemi (10.5) diskriminandist

$$D := B^2 - AC.$$

Kui $D > 0$, siis lahendid t_1 ja t_2 on reaalsed ja seejuures erinevad. Saame kaks erinevat lõikepunkti $Q_1(q_1^i)$, $Q_2(q_2^i)$, kus

$$q_1^i := b^i + s^it_1, \quad q_2^i := b^i + s^it_2.$$

Lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on tõepoolest erinevad, sest oletades vastuväiteliselt, et nad langevad kokku, saame

$$Q_1 = Q_2 \iff q_1^i = q_2^i \iff b^i + s^it_1 = b^i + s^it_2 \iff s^i(t_1 - t_2) = 0.$$

Kuna $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis tema koordinaadid s^i ei ole korruga nullid. Seega viimasest n tingimusest saame $t_1 = t_2$. Valem (10.5) lubab öelda $D = 0$, saades vastuolu, sest $D > 0$.

Kui $D < 0$, siis lahendid t_1 ja t_2 ei ole reaalsed, öeldakse, et lahendid on imaginaarsed, ning erinevad. Seega sirge s lõikab kvadriku K kahes erinevas mittereaalsete koordinaatidega punktis. Analoogiliselt nagu $D > 0$ korral veendume, et lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on erinevad.

Kui $D = 0$, siis võrrandi (10.3) lahendid ühtuvad, sest $t_1 = t_2 = \frac{-B}{A}$. Seega tekib kaks lõikepunkti Q_1 ja Q_2 , mis langevad kokku, kuna neil on võrdsed koordinaadid.

2) Kui $A = 0$ ja $B \neq 0$, siis võrrand (10.3) saab kuju

$$2Bt + C = 0.$$

Viimasel on ainult üks lahend

$$t_0 = -\frac{C}{2B}, \quad B \neq 0.$$

Sirge s lõikab kvadriku K ainult ühes punktis $Q(q^i)$, kus $q^i = b^i + s^i t_0$.

3) Kui $A = 0$ ja $B = 0$ ja $C \neq 0$, siis võrrand (10.3) saab kuju

$$0t^2 + 0t + C = 0, \quad C \neq 0.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit. Seega sirge s ei lõika kvadriku K .

4) Kui võrrandis (10.3) kõik kordajad on võrdsed nulliga, s.o. $A = B = C = 0$, siis võrrand (10.3) saab formaalselt kuju

$$0t^2 + 0t + 0 = 0$$

(sisuliselt kaob ära). Viimast rahuldavad kõik reaalarvud. Seega võrranditest (10.1) saame sirge s ja kvadriku K lõikepunktideks kõik sirge s punktid, seega sirge s on täielikult kvadrikul K . Lõikepunktide analüüs on lõppenud.

Definitsioon 10.2. Lineaarkatet $L(\vec{s})$ nimetatakse vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ poolt määratud sihiks.

Näeme, et siht $L(\vec{s})$ on vektorruumi $\mathbf{V}^n$ ühemõõtmeline alamruum. Ilmselt iga nullvektorist erineva vektori $\vec{a} \in L(\vec{s})$ korral $L(\vec{a}) = L(\vec{s})$. Seega sihti määrav vektor on määratud kordse vektori täpsuseni.

Definitsioon 10.3. Sihti $L(\vec{s})$ määratuna vektori $\vec{s} = (s^i) \neq \vec{0}$ poolt nimetame kvadriku K asümptootiliseks sihiks, kui

$$A = 0 \iff a_{ij}s^i s^j = 0.$$

Paneme tähele, et kui kehtib viimane seos vektori $\vec{s}$ korral, siis ta kehtib ka iga vektori $\alpha\vec{s}$ korral. Seega asümptootilise sihi mõiste on tõepoolest sihiga, mitte ainult vektoriga, seotud mõiste.

Definitsioon 10.4. *Sihti $L(\vec{s})$, mis ei ole asümptootiline, s.o.*

$$A \neq 0 \iff a_{ij}s^is^j \neq 0,$$

nimetame mitteasümptootiliseks sihiks.

Teoreem 10.1. *n -mõõtmelises afiinses ruumis leidub n vektorist koosnev lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem, mille vektorite poolt määratud sihid antud kvadriku jaoks on mitteasümptootilised.*

Tõestus. Tõestamisel tugineme ruutvormide teooriale. Kuna reeperi teisenemisel kvadriku maatriks A teiseneb valemiga $A' = C^T AC$, siis seda maatriksit võib tõlgendada ruutvormi maatriksina. Seega tekib ruutvorm

$$F : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathbf{R}; \quad F(\vec{x}) := a_{ij}x^ix^j,$$

kus $\vec{x} = x^i\vec{e}_i$. Ruutvormide teooriast teame, et leidub selline reeperi teisendus

$$\{O; \vec{e}_i\} \longrightarrow \{O; \vec{e}_i'\},$$

mil ruutvorm on normaalkujuga. Teisiti öelduna on tema maatriks järgmise kujuga

$$A' = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_r & 0\dots & O \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & O \end{pmatrix}, \quad (10.6)$$

kus ϵ_α on $+1$ või -1 ja $r = \text{rank} A$. Moodustame vektorsüsteemi

$$\vec{s}_1 = \vec{e}_1', \dots, \vec{s}_r = \vec{e}_r', \quad \vec{s}_{r+1} = \vec{e}_1' + \vec{e}_{r+1}', \dots, \vec{s}_n = \vec{e}_1' + \vec{e}_n', \quad (10.7)$$

mis on lineaarselt sõltumatu. Selle näitamiseks tuleb lahendada võrrand $\xi^i\vec{s}_i = \vec{0}$, mis (10.7) abil saab kuju

$$(\xi^1 + \xi^{r+1} + \dots + \xi^n)\vec{e}_1' + \xi^2\vec{e}_2' + \dots + \xi^n\vec{e}_n' = \vec{0}.$$

Kuna siin $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'\}$ on baas, s.o. lineaarselt sõltumatu, siis viimasest saame

$$\xi^1 + \xi^{r+1} + \dots + \xi^n = 0, \quad \xi^2 = 0, \quad \dots, \xi^n = 0 \implies \xi^1 = \dots = \xi^n = 0.$$

Seega vektorsüsteem (10.7) on lineaarselt sõltumatu. Veelgi enam. Sihid $L(\vec{s}_1), \dots, L(\vec{s}_n)$ on kvadriku jaoks mitteasüptootilised, sest $A'(\vec{s}_1) \neq 0, \dots, A'(\vec{s}_n) \neq 0$. See on (10.6) tõttu ilmne. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

11. Kvadriku keskpunkt

Olgu afinses ruumis A^n sihiruumiga $\mathbf{V}^n$ antud kvadrik võrrandiga

$$K : a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0. \quad (11.1)$$

Definitsioon 11.1. *Me nimetame punkti kvadriku keskpunktiks, kui meie kvadrik on sümmeetriline selle punkti suhtes.*

Rakendame seda definitsiooni kvadriku (11.1) keskpunkti koordinaatide leidmiseks. Tähistame otsitavat keskpunkti $C(c^i)$ abil. Paneme keskpunkti definitsiooni meile sobival kujul kirja. Nimelt vaatleme läbi punkti C kõikvõimalikke sirgeid, mis lõikavad kvadrikut kahes punktis. Seega vaadeldavate sirgete sihivektorid on mitteasasümptootilise sihiga. Iga sellise sirge saame kirja panna parameetriliste võrranditega

$$x^i = c^i + s^i t \quad \forall \mathbf{R}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kusjuures selle sirge sihivektori $\vec{s} = (s^i) \neq \vec{0}$ koordinaadid rahuldavad võrratust

$$A \neq 0 \iff a_{ij}s^i s^j \neq 0.$$

Toimides analoogiliselt nagu eelmises paragrahvis, saame öelda, et iga mitteasümptootilise sihiga sirge lõikab kvadrikut K kahes punktis $Q_1(q_1^i)$ ja $Q_2(q_2^i)$ kus $q_1^i = c^i + s^i t_1$ ja $q_2^i = c^i + s^i t_2$. Kvadriku keskpunkti definitsiooni kohaselt on punkt C lõigu $Q_1 Q_2$ keskpunkt. Järelikult keskpunkti koordinaadid on selle lõigu otspunktide koordinaatide poolsumma, mistõttu

$$c^i = \frac{1}{2}(q_1^i + q_2^i) \implies c^i = \frac{1}{2}[(c^i + s^i t_1) + (c^i + s^i t_2)].$$

Viimast korrastades, saame

$$(t_1 + t_2)s^i = 0.$$

Kuna vektor $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis ei ole tema koordinaadid s^i korraga nullid. Seetõttu viimasest saame $t_1 + t_2 = 0$. Valemi (10.5) abil saame $B = 0$, mis (10.4) tõttu on samaväärne

$$(a_{ij}c^i + a_j)s^j = 0. \quad (11.2)$$

See homogeenne võrrand peab aga kehtima iga miteasümptootilise sihi korral. Teoreemi 10.1 kohaselt leidub n vektorist $\vec{s}_j = (c_j^i)$ koosnev lineaarselt sõltumatu lahendivektorite süsteem. Seega võrrandi (11.2) lahendiruum on lineaarkate $L(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$. Moodustajate lineaarse sõltumatuse tõttu on selle lahendiruumi mõõde $\dim L(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) = n$. Seega võrrandi (11.2) astak on null, mistõttu

$$a_{ij}c^i + a_j = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Tähistame otsitavaid c^i asemel x^i abil ja arvestame $a_{ij} = a_{ji}$. Me saame keskpunktide koordinaatide määramiseks võrrandisüsteemi

$$a_{ij}x^j + a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (11.3)$$

Analüüsime seda süsteemi. Nagu lineaarvõrrandisüsteemide teooriast teame sõltub keskpunktide hulk maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_n \end{pmatrix}$$

astakust. Kroneckeri-Capelli teoreemi kohaselt $\text{rank } A \neq \text{rank } \tilde{A}$ korral võrrandisüsteemil (11.3) lahendid puuduvad. Seega kvadrikul ei ole keskpunkte. Juhul $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = r$ moodustab kvadriku keskpunktide hulk afiinses ruumis A^n aga $(n - m)$ -tasandi. Juhul $r = n$ on kvadrikul üks keskpunkt, sest keskpunktide hulk on 0-tasand.

Definitsioon 11.2. *Kvadrikut nimetame tsentraalseks, kui tal on ainult üks keskpunkt. Ülejäänud kvadrikuid nimetame aga mittetsentraalseteks.*

Definitsioon 11.3. *Kvadriku punkti nimetame iseäraseks punktiks, kui ta on lisaks veel kvadriku keskpunkt.*

12. Kvadriku diameetertasand

Lõikame afiinse ruumi A^n kvadrikut K paralleelsete sirgetega. Seda paralleelsete sirgete hulka nimetame *paralleelsete sirgete parveks*. Nendel sirgetel kõigil on ühine siht, mis on määratav ühise nullvektorist erineva vektori poolt. Tähistame seda vektori $\vec{s}$ abil. Paralleelsete sirgete parve tähistame $\pi(\vec{s})$ abil. Kui selle parve sirgete siht $L(\vec{s})$ on kvadriku K jaoks mitteasümptootiline, siis parve iga sirge lõikab kvadrikut kahes punktis, eraldades temal lõigu. Järelikult paralleelsete sirgete parv tekitab paralleelsete lõikude parve. Veelgi enam, tekib nende lõikude keskpunktide hulk, mida me tähistame $d_K(\vec{s})$ abil.

Definitsioon 12.1. *Kvadriku lõikamisel mitteasümptootilist sihti omavate paralleelsete sirgetega tekib lõikepunktide poolt määratud lõikude keskpunktide hulk, mida nimetame selle kvadriku diameetriks määratuna selle mitteasümptootilise sihi poolt.*

Leiame nüüd kvadriku diameetri võrrandi.

Teoreem 12.1. *Kvadriku diameeter on hüpertasand.*

Tõestus. Olgu meil antud kvadrik K võrrandiga

$$K : a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ suhtes. Võtame oma kvadriku mistahes mitteasümptootilise sihi $L(\vec{s})$, mis olgu määratud vektori $\vec{s} = (s^i)$ poolt. Seejuures $\vec{s} \neq \vec{0}$. Vaatleme paralleelsete sirgete parve $\pi(\vec{s})$, mille iga sirge on mitteasümptootilise sihiga $L(\vec{s})$. Selle parve iga sirge $s(D)$, kus $D(d^i) \in d_K(\vec{s})$, parameetrilisteks võrranditeks on

$$s(D) : x^i = d^i + s^i t.$$

Lugejale on ilmselt selge, et punkt $D(d^i)$ on vaadeldaval sirgel $s(D)$ tekkinud lõigu keskpunkt. Kui punkt $D(d^i)$ hulgas $d_K(\vec{s})$ muutub, siis saame oma parve kõikide paralleelsete sirgete parameetrilised võrrandid. Nendeks on

$$x^i = d^i + s^i t, \quad \forall \quad D(d^i) \in d_K(\vec{s}).$$

Leiame nüüd diameetri suvalise punkti, mida oleme tähistanud $D(d^i)$ abil, koordinaadid d^i . Senini on nad meil kasutusel tähistuse tasemel. Koordinaadid d^i peavad avalduma mingil moel kvadriku võrrandi kordajate kui ka mitteasümptootilise sihi koordinaatide kaudu. Selle selgitamiseks leiame paralleelsete sirgete parve $\pi(\vec{s})$ iga sirge $s(D)$ korral lõikepunktid kvadrikuga K . Tähistame tekkivat kahte lõikepunkti

$$Q_\alpha^{(D)}(q_{(\alpha)}^i), \quad \forall \alpha \in \{1, 2\}.$$

Siin me oleme lõikepunkti tähistele lisanud tähe D . Siin

$$q_{(\alpha)}^i := d^i + s^i t_\alpha, \quad \forall \alpha \in \{1, 2\}, \quad (12.1)$$

kusjuures t_1 ja t_2 saame valemist

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (12.2)$$

Lõigu $Q_1^{(D)}Q_2^{(D)}$ keskpunkti D koordinaadid on otspunktide koordinaatide poolsumma. Järelikult

$$d^i = \frac{1}{2}(q_{(1)}^i + q_{(2)}^i)$$

ehk (12.1) tõttu

$$d^i = \frac{1}{2}[(d^i + s^i t_1) + (d^i + s^i t_2)].$$

Siit saame

$$(t_1 + t_2)s^i = 0.$$

Kuna mitteasümptootilist sihti määrav vektor $\vec{s}$ ei ole nullvektor, siis tema koordinaadid s^i ei ole korraga nullid. Seetõttu

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Asendades siia valemist (12.2), saame $B = 0$. Viimane on (10.4) tõttu samaväärne tingimusega

$$(a_{ij}s^j)d^i + a_i s^i = 0.$$

See on tingimus, mida peavad rahuldama diameetri mistahes punkti D koordinaadid d^i . Seega tegu on diameetri võrrandiga. Tähistame diameetri muutuvat punkti $D(d^i)$ ümber $X(x^i)$ abil. Diameetri võrrandile saame kuju

$$d_P(\vec{s}) : (a_{ij}s^j)x^i + a_is^i = 0. \quad (12.3)$$

Sellees võrrandis otsitavate $x^1, x^2, \dots, x^n$ kõik kordajad

$$a_{1j}s^j, \quad a_{2j}s^j, \dots, a_{nj}s^j$$

ei ole korraga nullid. Oletame vastuväiteliselt, et need kordajad just on nullid, s.o.

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \dots, x^n = 0.$$

Korrutame viimaseid vastavalt koordinaatidega $s^1, s^2, \dots, s^n$ ning liidame kokku. Saame

$$a_{ij}s^is^j = 0.$$

Kuna eelduse kohaselt siht $L(\vec{s})$ on mitteasümptootiline, siis viimane kahekordne summa on nullist erinev. Oleme saanud vastuolu. Järelikult diameetri võrrandi (12.3) matriksi astak on alati üks. Seega diameetertasand on $(n-1)$ -tasand, s.o. hüpertasand. ♠

Teoreem 12.2. *Kvadriku kõik diameetertasandid läbivad igat tema keskpunkti.*

Tõestus. Olgu punkt $D(d^i)$ kvadriku mistahes keskpunkt. Seega tema koordinaadid d^i rahuldavad võrrandisüsteemi (11.3). Seega

$$a_{ij}d^j + a_i = 0, \quad \forall \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (12.4)$$

Vaja on näidata, et keskpunkt $D(d^i)$ on ka mistahes diameetertasandi punkt, s.o. tema koordinaadid peavad rahuldama võrrandit (12.3). Korrutame seostes (12.4) esimest, teist, ..., n -ndat vastavalt vektori $\vec{s}$ koordinaatidega $s^1, s^2, \dots, s^n$ ning liidame seejärel kokku. Saame

$$(a_{ij}d^j + a_i)s^i = 0.$$

Seega keskpunkti D koordinaadid rahuldavad diameetertasandi võrrandit (12.3). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

13. Kvadriku puutujatasand

Olgu antud afinse ruumi A^n kvadrik reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ suhtes võrrandiga

$$K : a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0. \quad (13.1)$$

Võtame kvadrikul punkti $M(m^i)$, seega (13.1) tõttu

$$a_{ij}m^i m^j + 2a_i m^i + a = 0. \quad (13.2)$$

Definitsioon 13.1. *Punktihulka $\{X\}$, mille punktide X koordinaadid x^i leituna reeperis $\{O; \vec{e}_i\}$ rahuldavad võrrandit*

$$(a_{ij}m^i + a_j)x^j + (a_i m^i + a) = 0, \quad (13.3)$$

nimetatakse kvadriku K puutujatasandiks $T_M(K)$ puutepunktiga M .

Juhul, kui kvadriku punkt M on tema iseäranne punkt, siis on ta ka sama-aegselt kvadriku keskpunkt. Järelikult tema koordinaadid m^i rahuldavad võrrandisüsteemi (11.3), mistõttu puutujatasandi võrrandis (13.3) kõik tundmatute x^i kordajad on nullid. See aga tähendab, et sel korral puutuja tasandit ei ole olemas. Võime öelda, et puutujatasand on olemas kvadriku igas mitteiseäranes punktis. Sel korral lineaarse võrrandi (13.3) astak on 1, mis lubab öelda, et kvadriku puutujatasand $T_M(K)$ on hüpertasand. Kuna

$$(a_{ij}m^i + a_j)m^j + (a_i m^i + a) = 0, \quad (13.4)$$

tänu seosele (13.2), siis $M \in T_M(K)$. Iga sirge $l(Y, M)$, kus suvaline punkt $Y \in T_M(K) \setminus \{M\}$, asub puutujatasandil $T_M(K)$. Tõepoolest. Punkti $Y \in T_M(K)$ koordinaadid y^i rahuldavad võrrandit (13.3):

$$(a_{ij}m^i + a_j)y^j + (a_i m^i + a) = 0.$$

Lahutades viimasest (13.4), saame

$$(a_{ij}m^i + a_j)(y^j - m^j) = 0. \quad (13.5)$$

Sirge $l(Y, M)$ sihivektoriks võib võtta $\vec{s} = (y^i - m^i)\vec{e}_i$, sest $Y \neq M$. Sirge suvalise punkti $X \in l(Y, M)$ korral tema koordinaadid x^i avalduvad kujul

$$x^i = m^i + (y^i - m^i)t. \quad (13.6)$$

Kuna

$$\begin{aligned} (a_{ij}m^i + a_j)x^j + (a_im^i + a) &= (a_{ij}m^i + a_j)(m^j + (y^j - m^j)t) + (a_im^i + a) = \\ &= ((a_{ij}m^i + a_j)m^j + (a_im^i + a)) + (a_{ij}m^i + a_j)(y^j - m^j)t = 0. \end{aligned}$$

Siin me arvestasime seoseid (13.4) ja (13.5). Seega $l(Y, M) \subset T_M(K)$. Saame öelda, et puutujatasand ladestub seda tüüpi sirgetest:

$$T_M(K) = \cup_{X \in T_M(K) \setminus \{M\}} l(X, M).$$

Teoreem 13.1. *Iga mitteasümptootilise sihiga sirge $l(Y, M)$, kus punkt $Y \in T_M(K) \setminus \{M\}$, lõikab kvadriku kahes kokkulangevas punktis M . Kui sirge $l(Y, M)$ on asümptootilise sihiga, siis sirge $l(Y, M)$ on kvadriku.*

Tõestus. Kuna $Y \in T_M(K)$, siis tema koordinaadid y^i rahuldavad võrrandit (13.3):

$$(a_{ij}m^i + a_j)y^j + (a_im^i + a) = 0.$$

Samas teame, et $Y \neq M$. Seega $\overrightarrow{MY} \neq \vec{0}$. Sellest tulenevalt võime võtta selle vektori sirge $l(Y, M)$ sihivektoriks $\vec{s} = \overrightarrow{MY}$. Selle sirge parameetrilisteks võrranditeks on (13.6). Lõikepunktide leimiseks tuleb lahendada võrrand

$$At^2 + 2Bt + C = 0. \quad (13.7)$$

Praegu $C = a_{ij}m^im^j + 2a_im^i + a = 0$. Valemi (13.5) tõttu ka $B = (a_{ij}m^i + a_j)(y^j - m^j) = 0$. Seega $At^2 = 0$. Kui sirge $l(Y, M)$ on mitteasümptootilise sihiga, siis $A = a_{ij}(y^i - m^i)(y^j - m^j) \neq 0$, mistõttu $t^2 = 0$ ehk $t_1 = t_2 = 0$. Seega lõikepunktid ühtuvad, milleks (13.6) tõttu on puutepunkt M . Kui

sirge $l(Y, M)$ on asümptootilise sihiga, siis $A = 0$. Võrrand (13.7) kehtib iga $t \in \mathbf{R}$ korral. Seega puutujatasandi $T_M(K)$ sirge $l(Y, M)$ on kvadrikul. ♠

Puutujatasandi (13.3) võrrandi saab kirjutada veidi teisel kujul:

$$a_{ij}m^i x^j + a_i(m^i + x^i) + a = 0. \quad (13.8)$$

Seda valemit on aga kerge meelde jätta. Selleks tuleb kvadriku võrrand (13.1) esitada järgmisel kujul

$$P : \quad a_{ij}\underline{x}^i x^j + a_i(\underline{x}^i + x^i) + a = 0.$$

Viimases võrrandis on vaja pooles ulatuses allakriipsutatud kvadriku muutuva punkti X koordinaatidest asendada puutepunkti M koordinaatidega. Tulemuseks saame puutujatasandi võrrandi kujul (13.8). Kirjeldatud protseduuri nimetame *muutujate pooliti asenduseks*.

14. Kvadrikute afinne klassifikatsioon

Afiinses ruumis A^n kvadriku võrrand annab tingimuse kvadriku punkti X koordinaatidele x^i . Samas, et punktil koordinaadid tekiksid, tuleb võtta reeper $\{O; \vec{e}_i\}$. Samuti teame 9. paragrahvist, et kvadriku võrrandis kordajad muutuvad üleminekul uuele reeperile. Püstitame ülesande valida selline reeper, mille suhtes kvadriku võrrandis on võimalikult palju kordajatest võrdsed nulliga. Seega reeperi valikuga püame võimalikult palju lihtsustada kvadriku võrrandit. Kvadriku võrrandi lihtsustamise aluseks peavad olema muidugi mingid kaalutlused.

Lähtume afiinses ruumis A^n kvadriku võrrandist

$$K : a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0. \quad (14.1)$$

antuna mingi reeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ suhtes. Selle võrrandi lihtsustamisel tuginame esmalt ruutvormide teooriale. Kuna reeperi teisenemisel kvadriku maatriks A teiseneb valemi $A' = C^\top A C$ kohaselt, siis seda maatriksit võib valemi (3.1) tõttu tõlgendada ruutvormi maatriksina. Seega tekib ruutvorm

$$F : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathbf{R}; \quad F(\vec{x}) := a_{ij}x^i x^j,$$

kus $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$. Ruutvormide teooriast teame, et leidub selline reeperi teisen-

$$\{O; \vec{e}_i\} \longrightarrow \{O; \vec{e}_i'\},$$

mil ruutvorm on normaalkujuga. Teisiti öelduna on tema maatriks järgmise kujuga

$$A' = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_r & 0 \dots & O \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & O \end{pmatrix}, \quad (14.2)$$

kus ϵ_α on $+1$ või -1 ja $r = \text{rank} A$. Tegelikult on neid baase, mille korral ruutvorm on normaalkujuga, on palju. Näiteks baasiteisendusel, mis seisneb baasivektorite ümbernummerdamises, maatriksis (10.6) diagonaali elemendid vahetavad diagonaalil oma kohti. Seega maatriksis (14.2) võime vajaduse korral eeldada, et diagonaalil on esimesed ϵ -id $+1$ ja seejärel -1 . Tähistame uues reeperis $\{O; \vec{e}_i'\}$ muutuva punkti X uusi koordinaate $\bar{x}^i$ abil. Kvaadriku võrrand (14.1) saab tublisti lihtsama kuju

$$\epsilon_1(\bar{x}^1)^2 + \epsilon_2(\bar{x}^2)^2 + \dots + \epsilon_r(\bar{x}^r)^2 + 2a_i\bar{x}^i + a = 0.$$

Siin valemitest (9.4) näeme, et kordajad a_i ja a ei teisenenud, sest $c^t = 0$. Järgmisena muudame reeperi alguspunkti muutmata baasi. Seetõttu kvadriku ruutosa ei muutu, mida näeme taas valemitest (9.4), kuna $c_s^t = \delta_s^t$. Reeperi uue alguspunkti koordinaatide valiku idee saame kvadriku saadud võrrandis täisruutude väljaeraldamise teel. Me saame

$$\begin{aligned} & \epsilon_1[(\bar{x}^1)^2 + 2\epsilon_1 a_1 + a_1^2] + \epsilon_2[(\bar{x}^2)^2 + 2\epsilon_2 a_2 + a_2^2] + \\ & + \dots + \epsilon_r[(\bar{x}^r)^2 + 2\epsilon_r a_r + a_r^2] + 2(a_{r+1}\bar{x}^{r+1} + \\ & + \dots + a_n\bar{x}^n) + (a - \epsilon_1 a_1^2 - \epsilon_2 a_2^2 - \dots - \epsilon_r a_r^2) = 0. \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} & \epsilon_1(\bar{x}^1 + \epsilon_1 a_1)^2 + \epsilon_2(\bar{x}^2 + \epsilon_2 a_2)^2 + \dots + \epsilon_r(\bar{x}^r + \epsilon_r a_r)^2 + 2(a_{r+1}\bar{x}^{r+1} + \\ & + \dots + a_n\bar{x}^n) + \bar{a} = 0, \end{aligned}$$

kus

$$\bar{a} := a - \epsilon_1 a_1^2 - \epsilon_2 a_2^2 - \dots - \epsilon_r a_r^2.$$

Võtame reeperi uueks alguspunktiks

$$O'(-\epsilon_1 a_1, -\epsilon_2 a_2, \dots, -\epsilon_r a_r, 0, \dots, 0).$$

Sel korral uued koordinaadid $\tilde{x}^i$ avalduvad

$$\bar{x}^1 = \tilde{x}^1 - \epsilon_1 a_1, \quad \dots, \quad \bar{x}^r = \tilde{x}^r - \epsilon_r a_r, \quad \bar{x}^{r+1} = \tilde{x}^{r+1}, \quad \dots, \quad \bar{x}^n = \tilde{x}^n.$$

Asendades siit kvadriku võrrandisse, saame

$$\epsilon_1(\tilde{x}^1)^2 + \epsilon_2(\tilde{x}^2)^2 + \dots + \epsilon_r(\tilde{x}^r)^2 + 2(a_{r+1}\tilde{x}^{r+1} + \dots + a_n\tilde{x}^n) + \bar{a} = 0. \quad (14.2)$$

Nüüd hakkame kordajate

$$\bar{a}_{r+1}, \bar{a}_{r+2}, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}$$

järgi välja eraldama erijuhte.

Juht 1. Olgu $\bar{a}_{r+1} = \bar{a}_{r+2} = \dots = \bar{a}_n = \bar{a} = 0$. Nagu eespool sai seletatud, võime eeldada, et $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_s = 1$ ja $\epsilon_{s+1} = \dots = \epsilon_r = -1$. Valemist (14.2) saame kvadriku võrrandiks

$$(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2 + \dots + (\tilde{x}^s)^2 - (\tilde{x}^{s+1})^2 - \dots - (\tilde{x}^n)^2 = 0, \quad 1 \leq s \leq r \leq \frac{n}{2}. \quad (14.3)$$

Juht 2. Olgu $\bar{a}_{r+1} = \bar{a}_{r+2} = \dots = \bar{a}_n = 0$, $\bar{a} \neq 0$. Võrrand (14.2) saab kuju

$$\epsilon_1(\tilde{x}^1)^2 + \epsilon_2(\tilde{x}^2)^2 + \dots + \epsilon_r(\tilde{x}^r)^2 + \bar{a} = 0$$

ehk

$$A_1(\tilde{x}^1)^2 + A_2(\tilde{x}^2)^2 + \dots + A_r(\tilde{x}^r)^2 = 1,$$

kus $A_\alpha := -\epsilon_\alpha a^{-1}$. Summeerimine kreeka indeksi α järgi toimub piirides $1, \dots, r$. Osa nullist erinevatest kordajatest A_α võivad olla positiivsed osa aga negatiivsed. Üldsust kitsendamata võime oletada $A_1, \dots, A_s$ on positiivsed ja $A_{s+1}, \dots, A_r$ aga negatiivsed, kus $0 \leq s \leq r$. Seega kvadriku võrrandi saame kirjutada

$$|A_1|(\tilde{x}^1)^2 + |A_2|(\tilde{x}^2)^2 + \dots + |A_s|(\tilde{x}^s)^2 - |A_{s+1}|(\tilde{x}^{s+1})^2 \dots - |A_r|(\tilde{x}^r)^2 = 1.$$

Teeme veel reeperi teisenduse seejuures ainult baasi osas valemitega

$$\vec{e}''_\alpha = \frac{1}{\sqrt{A_\alpha}}, \quad \vec{e}''_{r+1} = \vec{e}''_{r+1}, \dots, \vec{e}''_n = \vec{e}_n.$$

Vanad koordinaadid $\tilde{x}^i$ avalduvad uute $\hat{x}^i$ kaudu järgmiselt

$$\tilde{x}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{A_\alpha}} \hat{x}^\alpha, \quad \tilde{x}^{r+1} = \hat{x}^{r+1}, \dots, \tilde{x}^n = \hat{x}^n.$$

Kvadriku võrrand saab lõplikuks kujuks

$$(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + \dots + (\hat{x}^s)^2 - (\hat{x}^{s+1})^2 \dots - (\hat{x}^r)^2 = 1, \quad 1 \leq s \leq r \leq n. \quad (14.4)$$

Juht 3. Olgu $|\bar{a}_{r+1}| + |\bar{a}_{r+2}| + \dots + |\bar{a}_n| \neq 0$. Kordajate $\bar{a}_{r+1}, \bar{a}_{r+2}, \dots, \bar{a}_n$ seas vähemalt üks on nullist erinev. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $\bar{a}_{r+1} \neq 0$. Kirjutame kvadriku võrrandi (14.2) kujul

$$\epsilon_1(\tilde{x}^1)^2 + \epsilon_2(\tilde{x}^2)^2 + \dots + \epsilon_r(\tilde{x}^r)^2 + 2(a_{r+1}\tilde{x}^{r+1} + a_{r+2}\tilde{x}^{r+2} + \dots + a_n\tilde{x}^n + \frac{\bar{a}}{2}) = 0.$$

Läheme üle uuele reeperile $\{O''; \vec{e}_i''\}$. Baasiosa teisenduse anname valemita

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha'' &= \vec{e}_\alpha, \quad \vec{e}_{r+1}'' = -\frac{1}{a_{r+1}}\vec{e}_{r+1}, \\ \vec{e}_{r+2}'' &= -\frac{a_{r+2}}{a_{r+1}}\vec{e}_{r+1} + \vec{e}_{r+2}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n'' = -\frac{a_n}{a_{r+1}}\vec{e}_{r+1} + \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Reeperi alguspunktiks võtame punkti, mille ainsaks nullist erinevaks koordinaadiks võib olla $r+1$ koordinaat. Selleks olgu $\frac{a}{2a_{r+1}}$. Sel korral vanad koordinaadid avalduvad uute kaudu järgmiselt

$$\tilde{x}^i = \hat{x}^i (i \neq r+1), \quad \tilde{x}^{r+1} = -\frac{1}{a_{r+1}}\hat{x}^{r+1} - \frac{a_{r+2}}{a_{r+1}}\hat{x}^{r+2} - \dots - \frac{a_n}{a_{r+1}}\hat{x}^n - \frac{a}{2a_{r+1}}.$$

Üldsust kitsendamata saame kvadriku kanooniliseks võrrandiks

$$(\hat{x}^1)^2 + \dots + (\hat{x}^s)^2 - (\hat{x}^{s+1})^2 - \dots - \dots + (\hat{x}^r)^2 = \hat{x}^{r+1}, \quad 0 \leq s \leq r < n. \quad (14.5)$$

Saime, et kvadrikud oma afinse kanoonilise kuju järgi jagunevad kolme klassi, mis antakse võrranditega (14.3), (14.4) ja (14.5). Kombineerides arvudega n , r ja s , saame igast klassist veel omakorda terve rida tüüpe. Viimase demonstreerimiseks toome ära tasandi teist järku joonte ja ruumi teist järku pindade afinse liigituse kanooniliste võrrandite järgi.

Tasandi teist järku joonte tüübid

- 1) Ellips $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$,
- 2) imaginaarne ellips $(x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$,

3) paar lõikuvaid imaginaarseid sirgeid reaalse lõikepunktiga

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0.$$

4) hüperbool $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$,

5) paar lõikuvaid sirgeid $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$,

6) parabool $(x^1)^2 = 2x^2$,

7) paar ühtuvaid sirgeid $(x^1)^2 = 0$,

8) paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) sirgeid $(x^1)^2 = 1$,

9) paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) imaginaarseid sirgeid $(x^1)^2 = -1$.

Ruumi teist järku pindade tüübid

1) Ellipsoid $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$,

2) imaginaarne ellipsoid $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1$,

3) imaginaarne teist järku koonus $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$,

4) ühekatteline hüperboloid $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1$,

5) kahekatteline hüperboloid $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1$,

6) teist järku koonus $(x^1)^2 + (x^2)^2 - x_3^2 = 0$,

7) elliptiline paraboloid $x_1^2 + x_2^2 = 2x^3$,

8) hüperboolne paraboloid $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 2x_3$,

9) elliptiline silinder $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$,

10) imaginaarne elliptiline silinder $(x^1)^2 + (x^2)^2 = -1$,

11) paar imaginaarseid lõikuvaid tasandeid $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$,

12) hüperboolne silinder $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 1$,

13) paar lõikuvaid tasandeid $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$,

14) paraboolne silinder $(x^1)^2 = 2x^2$,

15) paar paralleelseid tasandeid $(x^1)^2 = 1$,

16) paar imaginaarseid paralleelseid tasandeid $(x^1)^2 = -1$,

17) paar ühtuvaid tasandeid $(x^1)^2 = 0$.

15. Kvadrikute ortogonaalne klassifikatsioon

Selles paragrahvis vaatleme kvadrikuid eukleidilises afinses ruumis E^n . Meie käsutuses on täiendavalt tema sihiruumis $\mathbf{E}^n$ olemasolev skalaarkorrutamine. Sihiruumiks on eukleidiline vektorruum. Kõrvuti mistahes reeperitega saame vaadelda kitsamat reeperite hulka, mis koosneb ristreeperitest. Me võime kvadrikuid vaadelda, kui soovime, ainult ristreeperite korral. Sel korral reeperi baasi osa $\{\vec{e}_i\}$ korral kehtib $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. Kvadriku võrrand ei pea olema algselt antud ristreeperi suhtes. Sel korral läheme esmalt üle ristreeperile, kasutades baasi ortogonaliseerimise protsessi. Selles paragrahvis me otsime kvadrikule sellist ristreeperit, mille suhtes kvadriku võrrand omandaks võimalikult lihtsa kuju, nn. *kanoonilise kuju*. Kuna ristreeperite hulk on kõigi reeperite alamhulk, siis ilmselt kvadrikute võrrandite kanoonilised kujud ei saa olla nii lihtsad kui eelmises paragrahvis. Ka siin saame kvadrikute liigituse võrrandite kanooniliste kujude järgi. Saadavat kvadrikute liigitust nimetakse *ortogonaalseks klassifikatsiooniks*. Selline nimetus on üsna loomulik, sest ristreeperite hulk on iseloomustatud ortogonaalse afiinse rühma $\overline{O}(n+1, \mathbf{R})$ abil (vt. §5).

Alustame kvadrikute võrrandite lihtsustamist. Olgu kvadriku võrrand

$$K : a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0. \quad (15.1)$$

antud, nagu kokku lepitud, mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_i\}$ suhtes. Üleminekul teisele ristreeperile $\{O'; \vec{e}_i'\}$ kvadriku võrrandis kordajad teisenevad. Meid huvitab esmalt, kuidas teisenevad ruutosa kordajad $A = (a_{ij})$. Valemite (9.5) kohaselt on selleks valemiks $A' = C^T A C$. Selles valemis osaleb ainult reeperi baasiosa teisenemise maatriks C . Alguspunkti koordinaatidest see valem ei sõltu. Seega üleminekul uuele ristreeperile ei ole esimesel reeperiteisendusel põhjust muuta reeperi alguspunkti. Seega sisuliselt on üleminek ristbaasilt uuele ristbaasile. Seejuures baasiteisenduse maatriks C on ristbaasi teisenduse maatriks. Järelikult see maatriks rahuldab täiendavalt mingeid lisatingimusi, mis ka kohe leiame. Kuna praegu $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ ja $\langle \vec{e}_i', \vec{e}_j' \rangle = \delta_{ij}$, siis $\vec{e}_i = c_i^s \vec{e}_s$ tõttu

$$\delta_{ij} = \langle \vec{e}_i', \vec{e}_j' \rangle = \langle c_i^s \vec{e}_s, c_j^t \vec{e}_t \rangle = c_i^s c_j^t \langle \vec{e}_s, \vec{e}_t \rangle = c_i^s c_j^t \delta_{st}.$$

Saime

$$c_i^s \delta_{st} c_j^t = \delta_{ij} \iff C^\top EC = E \iff C^{-1} = C^\top.$$

Näeme, et ristbaasi teisenemismatriks on ortogonaalmatriks. Seetõttu täpsustub kvadriku ruutosa kordajate teisenemise valem, saades seekord $A' = C^{-1}AC$. Kasutades teadmisi algebrast lineaarteisenduste kohta, siis tänu viimasele valemile, saame matriksi $A = (a_{ij})$ abil sihiruumis $\mathbf{E}^n$ defineerida lineaarteisenduse

$$\varphi : \mathbf{E}^n \longrightarrow \mathbf{E}^n; \quad \vec{x} = x^i \vec{e}_i \longmapsto \varphi(\vec{x}) = (a_s^i x^s) \vec{e}_i.$$

Seejuures lubatavateks baasiteisendusteks on ristbaasiteisendused, seega $C \in O(n, \mathbf{R})$. Kuna kvadriku matriks A on sümmeetriline, siis lineaarteisendus $\varphi : \mathbf{E}^n \longrightarrow \mathbf{E}^n$ on sümmeetriline lineaarteisendus. Viimaste kohta on algebra kursusest teada järgmised teoreemid (vt. [1], lk.-d 260–261).

Teoreem 15.1. *Sümmeetrilise lineaarteisenduse karakteristliku n -astme võrrandi $|A - \lambda E| = 0$ lahendid $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ on reaalsed.*

Selle karakteristliku võrrandi lahendeid nimetatakse sümmeetrilise lineaarteisenduse omaväärtusteks.

Teoreem 15.2. *Sümmeetrilise lineaarteisenduse korral normeeritud omavektoritest saab moodustada ristbaasi, mille suhtes lineaarteisenduse matriks on diagonaalkujuga*

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (15.2)$$

Teoreemi 15.1 rakendamine tagab, et saame ristreeperilt $\{O; \vec{e}_i\}$ üle minna sellisele ristreeperile $\{O; \vec{e}'_i\}$, mille suhtes kvadriku võrrand (15.1) saab kuju

$$P : \lambda_i (\bar{x}^2)^i + 2a'_i \bar{x}^i + a = 0. \quad (15.3)$$

Viimane võrrand võib olla tegelikult veidi lihtsam, sest siin kõik omaväärtused ei pea olema nullist erinevad. Nagu saame matriksi (15.2) kujust, on nullist erinevaid omaväärtusi $r := \text{rank } A$ tükki. Ristbaas $\{\vec{e}'_i\}$, milles kvadriku võrrand saab kuju (15.3), ei ole määratud siiski päris üheselt. Näiteks me võime valitud baasis muuta baasivektorite järjekorda, jäädes

ikkagi ristbaasi juurde. Samas muudavad samal moel oma järjekorda maatriksi (15.2) elemendid tema diagonaalil. Seega üldsust kitsendamata võime eeldada, et $\lambda_\alpha = 0$, kus $\alpha \in \{r+1, \dots, n\}$. Nullist erinevatest omaväärtust osa on positiivsed ja osa negatiivsed. Taas üldsust kitsendamata võime eeldada, et positiivsed on $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ja negatiivsed $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$. Siin $0 \leq s \leq r$. Seda arvestades, saame kvadriku võrrandile (15.3) kujuks

$$|\lambda_1|(\bar{x}^1)^2 + \dots + |\lambda_s|(\bar{x}^s)^2 - |\lambda_{s+1}|(\bar{x}^{s+1})^2 - \dots - |\lambda_r|(\bar{x}^r)^2 + 2a'_i \bar{x}^i + a = 0. \quad (15.4)$$

Viimase võrrandi saame kirjutada

$$|\lambda_1| \left(\bar{x}^1 + \frac{a'_1}{|\lambda_1|} \right)^2 + \dots + |\lambda_s| \left(\bar{x}^s + \frac{a'_s}{|\lambda_s|} \right)^2 - |\lambda_{s+1}| \left(\bar{x}^{s+1} + \frac{a'_{s+1}}{|\lambda_{s+1}|} \right)^2 - \dots - |\lambda_r| \left(\bar{x}^r + \frac{a'_r}{|\lambda_r|} \right)^2 + 2a'_\alpha \bar{x}^\alpha + a' = 0,$$

kus

$$a' = a - \frac{(a'_1)^2}{|\lambda_1|} - \dots - \frac{(a'_s)^2}{|\lambda_s|} + \frac{(a'_{s+1})^2}{|\lambda_{s+1}|} + \dots + \frac{(a'_r)^2}{|\lambda_r|}.$$

Siit saame idee, et kasulik on minna ristreeperilt $\{O; \vec{e}'_i\}$ üle risreeperile $\{O'; \vec{e}'_i\}$ alguspunktiga

$$O' \left(-\frac{a'_1}{|\lambda_1|}, \dots, -\frac{a'_s}{|\lambda_s|}, \frac{a'_{s+1}}{|\lambda_{s+1}|}, \dots, \frac{a'_r}{|\lambda_r|}, 0, \dots, 0 \right).$$

(Muuseas alguspunkti $n - r$ viimast koordinaati ei pea ilmtingimata olema nullid, nad võivad olla millised iganes, sest nendest ei sõltu kvadriku võrrand. Seega me võime vajaduse korral muuta veel reeperi alguspunkti, kusjuures tuleb jätta r esimest koordinaati muutmata. Allpool juhul 3 vajadus selle järele ka tekib.)

Kui muutuva punkti X uusi koordinaate tähistada $\tilde{x}^i$, siis need avalduvad vanade kaudu valemitega

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= \bar{x}^1 + \frac{a'_1}{|\lambda_1|}, \dots, \tilde{x}^s = \bar{x}^s + \frac{a'_s}{|\lambda_s|}, \\ \tilde{x}^{s+1} &= \bar{x}^{s+1} + \frac{a'_{s+1}}{|\lambda_{s+1}|}, \dots, \tilde{x}^r = \bar{x}^r + \frac{a'_r}{|\lambda_r|}, \quad \tilde{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha. \end{aligned}$$

Kvadriku võrrand (15.4) saab kuju

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \dots + \lambda_s(\tilde{x}^s)^2 - \lambda_{s+1}(\tilde{x}^{s+1})^2 - \dots - \lambda_r(\tilde{x}^r)^2 + 2a'_\alpha \tilde{x}^\alpha + a' = 0. \quad (15.5)$$

Olenevalt kordajatest a'_α ja a' selles võrrandis hakkame leidma kvadrikute kanoonilisi võrrandeid nagu eelmises paragrahvis.

Juht 1. Olgu $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \dots = a'_n = a' = 0$. Defineerime positiivsed konstandid

$$\alpha_1 := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \alpha_s := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_s|}}, \quad \alpha_{s+1} := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{s+1}|}}, \dots, \alpha_r := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}}.$$

Kvadriku võrrand (15.5) saab selles juhul lõppkujuks

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{(\tilde{x}^s)^2}{\alpha_s^2} - \frac{(\tilde{x}^{s+1})^2}{\alpha_{s+1}^2} - \dots - \frac{(\tilde{x}^r)^2}{\alpha_r^2} = 0, \quad 0 \leq s \leq r \leq n. \quad (15.6)$$

Juht 2. Olgu $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \dots = a'_n = 0$, $a' \neq 0$. Nüüd defineerime järgmised positiivsed konstandid

$$\alpha_1 := \sqrt{\left| \frac{a'}{\lambda_1} \right|}, \dots, \alpha_s := \sqrt{\left| \frac{a'}{\lambda_s} \right|}, \quad \alpha_{s+1} := \sqrt{\left| \frac{a'}{\lambda_{s+1}} \right|}, \dots, \alpha_r := \sqrt{\left| \frac{a'}{\lambda_r} \right|}.$$

Kvadriku võrrand (15.5) saab lõppkujuks

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{(\tilde{x}^s)^2}{\alpha_s^2} - \frac{(\tilde{x}^{s+1})^2}{\alpha_{s+1}^2} - \dots - \frac{(\tilde{x}^r)^2}{\alpha_r^2} = \pm 1, \quad 0 \leq s \leq r \leq \frac{n}{2}. \quad (15.7)$$

Juht 3. Olgu $|a'_{r+1}| + |a'_{r+2}| + \dots + |a'_n| \neq 0$. Seega kordajate a'_{r+1} , $a'_{r+2}, \dots, a'_n$ seas vähemalt üks on nullist erinev. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $a'_{r+1} \neq 0$. Lisaks sellele kordajale võib ülejäänud kordajate seas olla veel teisigi nullist erinevaid. Olgu neid kokku k tükki. Me võime eeldada, et nendeks on $a'_{r+1}, \dots, a'_{r+k}$. Kvadriku võrrand (15.5) saab kuju

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{x}^1)^2}{p_1} + \dots + \frac{(\tilde{x}^s)^2}{p_s} - \frac{(\tilde{x}^{s+1})^2}{p_{s+1}} - \dots - \frac{(\tilde{x}^r)^2}{p_r} - \\ & - 2m(\bar{a}_{r+1} + \dots + \bar{a}_{r+k} + \bar{a}) = 0, \end{aligned} \quad (15.8)$$

kus me oleme tähistanud

$$p_i := \frac{1}{\lambda_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}; \quad m := \sqrt{(a'_{r+1})^2 + \dots + (a'_{r+k})^2},$$

$$\bar{a}_\alpha := -\frac{a'_\alpha}{m}, \quad \alpha \in \{r+1, \dots, r+k\}; \quad \bar{a} := -\frac{a'}{2m}.$$

Võrrandi (15.8) edasiseks lihtsustamiseks muudame veidi ristreeperis $\{O'; \vec{e}'_i\}$ baasi $\{\vec{e}'_i\}$ osa. Tegemist on muidugi sihiruumi $\mathbf{E}^n$ ristbaasiga. Seejuures me võime ristbaasi $\{\vec{e}'_i\}$ asendada sellise ristbaasiga $\{\vec{e}''_i\}$ ilma, et muutuks kvadriku võrrandis (15.8) ruutosaga, mis on saavutanud maksimaalse lihtsuse. Edasise selgitamiseks jagame ristbaasi $\{\vec{e}'_i\}$ vektorid kolme ossa. Esimene osa koosneb kvadriku ruutosaga seotud vektoritest, s.o. vektoritest $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_r\}$, teine osa koosneb kordajatega $\bar{a}_{r+1}, \dots, \bar{a}_{r+k}$ seotud vektoritest, s.o. vektoritest $\{\vec{e}'_{r+1}, \dots, \vec{e}'_{r+k}\}$. Kolmandasse rühma võtame ülejäänud vektorid $\{\vec{e}'_{r+k+1}, \dots, \vec{e}'_n\}$. Viimaste vektorite rühmade abil moodustama lineaarkatte abil kolm alamruumi

$$\mathbf{M}_1^r := L(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_r), \quad \mathbf{M}_2^{r+k} := L(\vec{e}'_{r+1}, \dots, \vec{e}'_{r+k}),$$

$$\mathbf{M}_3^{n-(r+k)} := L(\vec{e}'_{r+k+1}, \dots, \vec{e}'_n).$$

Need alamruumid on paarikaupa ristuvad. Näiteks $\mathbf{M}_1^r \perp \mathbf{M}_2^{r+k}$ tähendab, et iga $\vec{x} \in \mathbf{M}_1^r$ ja $\vec{y} \in \mathbf{M}_2^{r+k}$ korral $\vec{x} \perp \vec{y}$ ehk samaväärselt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Samamoodi $\mathbf{M}_1^r \perp \mathbf{M}_3^{n-(r+k)}$ ja $\mathbf{M}_2^{r+k} \perp \mathbf{M}_3^{n-(r+k)}$. Sihiruum $\mathbf{E}^n$ on nende kolme alamruumi otsesumma

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{M}_1^r \oplus \mathbf{M}_2^{r+k} \oplus \mathbf{M}_3^{n-(r+k)}.$$

Eukleidilise afinse ruumi E^n ristreeperis $\{O; \vec{e}_i\}$ olev ristbaas $\{\vec{e}_i\}$ sai tükeldatud kolme alamruumi $\mathbf{M}_1^r$, $\mathbf{M}_2^{r+k}$ ja $\mathbf{M}_3^{n-(r+k)}$ ristbaasiks. Uue ristbaasi $\{\vec{e}''_i\}$ valikul alamruumide $\mathbf{M}_1^r$ ja $\mathbf{M}_3^{n-(r+k)}$ ristbaasid jätame muutmata. Seega

$$\vec{e}''_1 = \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}''_r = \vec{e}'_r; \quad \vec{e}''_{r+k+1} = \vec{e}'_{r+k+1}, \dots, \vec{e}''_n = \vec{e}'_n.$$

Muudame ainult alamruumi $\mathbf{M}_2^{r+k}$ ristbaasi, moodustades temas uue ristbaasi, mis meile osutub sobivaks. Lähtume ühikvektorist

$$\vec{e}''_{r+1} = \bar{a}_{r+1} \vec{e}'_{r+1} + \dots + \bar{a}_{r+k} \vec{e}'_{r+k}.$$

Ülejäänud ühikvektorid

$$\vec{e}_{r+2}'' = \gamma_{r+2}^{r+1} \vec{e}_{r+1}'' + \dots + \gamma_{r+2}^{r+k} \vec{e}_{r+k}'',$$

.....

$$\vec{e}_{r+k}'' = \gamma_{r+k}^{r+1} \vec{e}_{r+1}'' + \dots + \gamma_{r+k}^{r+k} \vec{e}_{r+k}''$$

võtame nii, et $\{\vec{e}_{r+1}'', \vec{e}_{r+2}'', \dots, \vec{e}_{r+k}''\}$ on alamruumi $\mathbf{M}_2^{r+k}$ ristbaas. Seega alamruumi $\mathbf{M}_2^{r+k}$ baasiteisendus

$$\{\vec{e}_{r+1}', \vec{e}_{r+2}', \dots, \vec{e}_{r+k}'\} \xrightarrow{C_2} \{\vec{e}_{r+1}'', \vec{e}_{r+2}'', \dots, \vec{e}_{r+k}''\}$$

toimub ortogonaalmaatriksi

$$C_2 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{r+1} & \gamma_{r+2}^{r+1} & \dots & \gamma_{r+k}^{r+1} \\ \bar{a}_{r+2} & \gamma_{r+2}^{r+2} & \dots & \gamma_{r+k}^{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{r+k} & \gamma_{r+2}^{r+k} & \dots & \gamma_{r+k}^{r+k} \end{pmatrix}$$

abil. Sellise ristbaasi $\{\vec{e}_i''\}$ uueks ristbaasiks võtamegi. Kergesti on avaldatav vana ristbaas $\{\vec{e}_i'\}$ uue ristbaasi $\{\vec{e}_i''\}$ kaudu. Ilmne on, et

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1'', \dots, \vec{e}_r' = \vec{e}_r''; \quad \vec{e}_{r+k+1}' = \vec{e}_{r+k+1}'', \dots, \vec{e}_n' = \vec{e}_n''.$$

Samuti pole raske avaldada vektorid $\vec{e}_{r+1}', \dots, \vec{e}_{r+k}'$ vektorite $\vec{e}_{r+1}'', \dots, \vec{e}_{r+k}''$ kaudu. Selleks on vaja teada maatriksit C_2^{-1} . Kuna C_2 on ortogonaalmaatriks, siis

$$C_2^{-1} = C_2^\top = \begin{pmatrix} \bar{a}_{r+1} & \bar{a}_{r+2} & \dots & \bar{a}_{r+k} \\ \gamma_{r+2}^{r+1} & \gamma_{r+2}^{r+2} & \dots & \gamma_{r+2}^{r+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r+k}^{r+1} & \gamma_{r+k}^{r+2} & \dots & \gamma_{r+k}^{r+k} \end{pmatrix}.$$

Paneme paika ka uue reeperi alguspunkti O'' , mille koordinaatideks uutes

koordinaatides $(\hat{x}^i)$, olgu $O''(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{r+1}, \bar{a}, 0, \dots, 0)$. Seega uued koordinaadid avalduvad vanade kaudu järgmiselt

$$\hat{x}^i = \tilde{x}^i, \quad i \in \{1, \dots, r; r+k+1, \dots, n\},$$

$$\hat{x}^{r+1} = \bar{a}_{r+1}\tilde{x}^{r+1} + \dots + \bar{a}_{r+k}x^{r+k} + \bar{a},$$

$$\hat{x}^i = \gamma_{r+1}^i\tilde{x}^{r+1} + \dots + \gamma_{r+k}^i\tilde{x}^{r+k}, \quad i \in \{r+2, \dots, r+k\}.$$

Kvadriku võrrand (15.8) uutes koordinaatides saab kuju

$$\frac{(\hat{x}^1)^2}{p_1} + \dots + \frac{(\hat{x}^s)^2}{p_s} - \frac{(\hat{x}^{s+1})^2}{p_{s+1}} - \dots - \frac{(\hat{x}^r)^2}{p_r} = 2\hat{x}^{r+1}, \quad 0 \leq s \leq r < n. \quad (15.9)$$

Saime, et kvadrikud oma kanoonilise kuju järgi jagunevad kolme klassi, mis antakse võrranditega (15.6), (15.7) ja (15.9). Kombineerides arvudega n , r ja s , saame igast klassist veel omakorda terve rida tüüpe. Näitena toome eukleidilise tasandi ja ruumi teist järku joonte ja pindade kanoonilised võrrandid.

Teist järku joonte tüübid

1) Ellips

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

2) Imaginaarne ellips

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1.$$

3) Paar lõikuvaid imaginaarseid sirgeid reaalse lõikepunktiga

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

4) Hüperbool

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

5) Paar lõikuvaid sirgeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

6) Parabool

$$x_2^2 = 2px_1.$$

7) Paar ühtuvaid sirgeid

$$x_2^2 = 0.$$

8) Paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) sirgeid

$$x_2^2 - c^2 = 0, \quad c > 0.$$

9) Paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) imaginaarseid sirgeid

$$x_2^2 + c^2 = 0, \quad c > 0.$$

Teist järku pindade tüübid

1) Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

2) Imaginaarne ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

3) Imaginaarne teist järku koonus

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

4) Ühekatteline hüperboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

5) Kahekatteline hüperboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

6) Teist järku koonus

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

7) Elliptiline paraboloid

$$\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3.$$

8) Hüperboolne paraboloid

$$\frac{x_1^2}{p_1} - \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3.$$

9) Elliptiline silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

10) Imaginaarne elliptiline silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1.$$

11) Paar imaginaarseid lõikuvaid tasandeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

12) Hüperboolne silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

13) Paar lõikuvaid tasandeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

14) Paraboolne silinder

$$x_3^2 = 2px_1.$$

15) Paar paralleelseid tasandeid

$$x_3^2 - \alpha^2 = 0.$$

16) Paar imaginaarseid paralleelseid tasandeid

$$x_3^2 + \alpha^2 = 0.$$

17) Paar ühtuvaid tasandeid

$$x_3^2 = 0.$$

See on parajaga komplekt aastast 1999.

69

rühm T ja gf^{-1} hoopis hulka $I(A)$. T ja liinide
hulki $I(A)$ on alamrühm. $\square$

Liinimiste rühm sisaldab kahe punkti vahelise
kauguse

DEFINITSIOON 2. Skalarnormingega afiinne ruum
kahe punkti $x, y \in A$ vahelise kauguse $s(x, y)$
nimetame vektori $\overrightarrow{xy}$ pikkust $|\overrightarrow{xy}|$: $s(x, y) = |\overrightarrow{xy}|$.

Jga $f \in I(A)$ kernel tähistame x ja y kujun-
tari $x' = f(x)$ ja $y' = f(y)$. Ilmselt kehtib

$$x + \overrightarrow{xy} = y \quad \text{seega}$$

$$x' = f(y) = f(x + \overrightarrow{xy}) = f(x) + f(\overrightarrow{xy}) = x' + f(\overrightarrow{xy}).$$

Siit $\overrightarrow{x'y'} = f(\overrightarrow{xy})$, millest

$$s(x'y') = |\overrightarrow{x'y'}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x'y'}, \overrightarrow{x'y'} \rangle} = \sqrt{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy} \rangle} =$$
$$= |\overrightarrow{xy}| = s(x, y).$$

Sellel viisil on tõestatud.

9 PROJEKTIIVNE RUUM

Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$, ja olgu $P \neq \emptyset$ mingi hulk.

DEFINITSIOON 1. Mõttetu hulk P nimetame
projektiivseks ruumiks, kui leidub vektorruum V
ja kujutus $\pi: V' \rightarrow P$, kus $V' = V \setminus \{0\}$,
millel on omadused

$$1^\circ \pi(V') = P \quad (\pi \text{ on surjektorne kujutus}),$$

$$2^\circ \pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y}) \Rightarrow \vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Tähtselt on ilmselge, et viimases $\lambda \neq 0$, se. $\lambda \in \mathbb{R}'$, kus $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Projektiivse ruumi elemente nimetame punktideks, ja
tähistame nende tähtsuseks $A, B, \dots, X, Y \in P$.

Tähtsustame aksioomi 2° olemit. Tõelise vektorruumi

1-mõõtmeline alamruum $V_1 \subset V$. - Alamine V_1 -l
 tuleb null-vektor välja jätta. Kuna konfigid alam-
 ruumid on nullvektorite vektorruumid V nullvektor,
 siis ka V_1 jäät nullvektorist ilma, saades V_1 ruumi
 $V_1' = V_1 \setminus \{0\}$. Alamine V_1 baas on üks vektor.
 Tähist iga vektor $\vec{x}$, mis ei ole nullvektor, s.o. sobib
 iga vektor V_1' -st. Jaga iga V vektor $\vec{y}$ avaldada
 baasi kaudu kujul $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, kus $\lambda \in \mathbb{R}$. Kui aga
 λ muutub hulgas $\mathbb{R}'$, siis jäät mingist välja vektor
 $\vec{y} = 0\vec{x} = \vec{0}$. Jaga

$$V_1' = \{\lambda \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}'\}.$$

Jaga aruam 2° tähendab, et iga $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ korral
 $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$. Jaga vektorruumi V iga 1-mõõtmeline
 alamruum V_1 ilma nullvektorita kujutab ühe punkti
 projektsiooni ruumi ühe punkti. Täpse üldisena
 projektsiooni ruumi mõistaks punkti $X \in P$ korral
 täielik originaal $\pi^{-1}(X) \subset V_1'$, millele loobes null-
 vektori on vektorruumi 1-mõõtmeline alamruum -
 $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ on 1-mõõtmeline alamruum.

DEFINITSIOON 2 Kui projektsiooni ruumi P
 teatud vektorruumi V mädi. on n , siis projektsiooni
 ruumi mõõtma. nimetatakse $n-1$. Kui vektorruum
 V on lõpmatu mõõtmeline, siis nimetame projektsiooni
 ruumi P ka lõpmatu mõõtmeliseks.

$(n-1)$ -mõõtmelise projektsiooni ruumi tähistame P
 asemel P_{n-1} , sest tähti on tehniliselt vabadus
 n -mõõtmelise projektsiooni ruumi P_n , mis moodustab V ja
 V_{n+1} .

DEFINITSIOON 3 Projektsiooni ruumi P mitte-
 tühi alamhüpe $(Q \subset P, Q \neq \emptyset)$ nimetame tema alam-
 ruumiks, kui $\pi^{-1}(Q) \cup \{0\}$ on vektorruumi V alamruum.

TEOREEM. Projektivse ruumi struktuur indutseerib igal tema alamruumil projektivse ruumi struktuuri.
Tõestati: projektivse ruumi iga alamruum on projektivne ruum.

TÕESTUS. Olgu Q projektivse ruumi P alamruum.
Seeja $\pi^{-1}(Q) \cup \{\vec{0}\} \cong M$ on vektorruumi V alamruum ehk $M' = V \setminus \{\vec{0}\} = \pi^{-1}(Q)$. Kujustas $\pi: V' \rightarrow P$ indutseerib kujutuse $\pi: M' \rightarrow Q$; $\vec{x} \in M' \mapsto \pi(\vec{x})$, sest $M' \subset V'$ ja $M' = \pi^{-1}(Q)$, tātta on tegemine peeltkujutusega, s.o. $\pi(M') = \pi(\pi^{-1}(Q)) = Q$. Lisaks sellele iga ühemõõtmeline alamruum $V_1 \subset M$ on ühemõõtmelises alamruumis vektorruumis $V - V_1 \subset V$. Seejuures $V_1' = V_1 \setminus \{\vec{0}\} \subset \pi^{-1}(Q)$ kernel $V_1' \subset V'$. Seeja P teine akordruum kohaselt $\vec{x}, \vec{y} \in V_1'$ kernel $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ ehk $\pi(V_1')$ on alamruum Q punkt. Seeja alamruum Q projektivne ruum. $\square$

~~Def~~ Paneme tähele, et lõplasmõõtmelisel juhul alamruumi mõõtmes on $\dim Q = \dim(\pi^{-1}(Q) \cup \{\vec{0}\}) - 1$.

DEFINITSIOON 4. Projektivse ruumi ühemõõtmelised ja kahemõõtmelised alamruumi nimetame vastavalt projektivseks sirgeks ja projektivseks tasandiks.

Toome mõned projektivse ruumi näited.

NÄIDE 1. Olgu V vektorruum. Eldame, et tema mõõde ei ole null, sest vastasel juhul oleks $V = \{\vec{0}\}$. Defineerime ~~vektorruumi~~ ^{hulges} V ehk $V' = V \setminus \{\vec{0}\}$, mis on mitte-tähti ekvivalentsuse. Vektorid $\vec{x} \in V'$ loeme ekvivalentses vektoriga $\vec{y} \in V'$ (tähistame $\vec{x} \sim \vec{y}$) kui leidub $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Siin ei ole vaja nõuda, et $\lambda \neq 0$, sest see järgeldub. Veenudume definitsiooni korratavuse, sest peavad kehtima ka ekvivalentsuse aksioomid.

1° Kõik kehtib $\vec{x} \sim \vec{x}$, kui $\vec{x} \in V'$. See on tavalisest tõige, sest $\vec{x} = 1\vec{x}$, s.o. $\lambda = 1$.

2° Kas $\vec{x} \sim \vec{y}$ järgides $\vec{y} \sim \vec{x}$? Eeldame $\vec{x} \sim \vec{y}$ järgides, et leidub λ , et $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Siis $\vec{x} = \frac{1}{\lambda} \vec{y}$. Siis leidub $\mu = \frac{1}{\lambda}$, sest $\lambda \neq 0$, et $\vec{x} = \mu \vec{y}$. Seega $\vec{y} \sim \vec{x}$.

3° Kas, eeldame $\vec{x} \sim \vec{y}$ ja $\vec{y} \sim \vec{z}$ järgides $\vec{x} \sim \vec{z}$, Eeldame $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, $\vec{z} = \mu \vec{y}$ saame $\vec{z} = (\lambda \mu) \vec{x}$, s.o. $\vec{z} \sim \vec{x}$.

Siis siis $\sim$ on V' -l ekvivalentsus.

Hulgal V' ekvivalentsus võimaldab moodustada faktorhulga $V'/\sim \cong P(V)$. Faktorhulk koosneb ekvivalentsiklassidest. Siis $\vec{x} \in V'$ poolt määratud ekvivalentsiklassi antakse valemiga

$$[\vec{x}] := \{ \lambda \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Osutub, et hulgal $P(V)$ tekib loomulikult tul ^{määratlemine} ~~struktuur~~ ^{struktuur}. Täpsemalt, kujutus $\pi_0: V' \rightarrow P(V)$ (siin tähistame π asemel π_0 abil) annab valemiga

$$\vec{x} \mapsto \pi_0(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{x}],$$

Definitsiooni kohaselt $\pi_0(V') = P(V)$, s.o. π_0 on surjektivne kujutus, on veel vaja kontrollida teist aksioomi

Siis $\pi_0(\vec{x}) = \pi_0(\vec{y})$ korral saame

$$\pi_0(\vec{x}) = \pi_0(\vec{y}) \Rightarrow [\vec{x}] = [\vec{y}] \Rightarrow \vec{x}, \vec{y} \in [\vec{x}] \Rightarrow \vec{x} \sim \vec{y} \Rightarrow \vec{y} = \lambda \vec{x}$$

Siis ka teine aksioom kehtib. Siis $P(V)$ on projektivne ruum üle V kujutusega $\pi_0: V' \rightarrow P(V)$.

NÄIDE 2, Olgu kolmemõõtmeline afiinne ruum A_3 sisetruumiga V_3 . Fiksimme temas mingi punkti, tähistame O abil taotleme kõikõimalikke sirgeid läbi punkti O .

Terve hulk tähistame $S(O)$ abil ja nimetame afiinse ruumi A_3 sirgedumise keskpunktiga O .

Osutub, et hulgas $S(O)$ tekib loomulikult tul projektivse ruumi struktuur, kujutuse selle ruumi punktiks on sõnumi sirge. Silgotame äldat. Kujutus $\pi: V'_3 \rightarrow S(O)$ annab valemiga $\vec{x} \in V'_3$ korral $\vec{x} \mapsto \pi(\vec{x}) = \{O + \lambda \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Näeme, et $\pi(\vec{x})$ on punkti O lähiv sirge rüh-
vektorid $\vec{x} \in V_3'$. Näitlikult on selge, et $\pi(V_3')$ üh-
tab ruumi $S(O)$. Seega kujutus $\pi: V_3' \rightarrow S(O)$ on
sürjektivne. Lisaks veel $\vec{x}, \vec{y} \in V_3'$ korral, $\exists$ mil
peas kehtima $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$, me saame

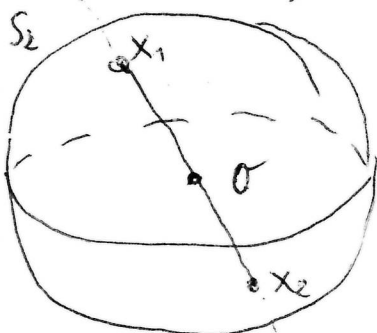
$$\{O + \lambda \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{O + \mu \vec{y} \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Seega $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on sama sirge erinevad rühvektorid,
mistõttu $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Oleme näidanud, et ruumi $S(O)$ on projektiivne
ruum mõõtme $\dim S(O) = \dim V_3 - 1 = 2$. Järelikult
 $S(O)$ on projektiivne tasand.

Selgitame projektiivse tasandi $S(O)$ rühvektori-
list alamruumi - projektiivset sirget. Selleks tuleb
võtta vektorruumi V_3 suvaline 2-mõõtmeline
alamruum M_2 ja leida $\pi(M_2) \subset S(O)$. Vümmene
on tasandil $O + M_2$ asuvad sirged. Sät järeldame, et
projektiivse sirge saamiseks tuleb vaadelda ruumi
keskpunkti O lähivl tasandil asuvaid sirgeid.

NÄIDE 3. Olgu E_3 eukleedilises ruumis E_3 rüh-
vektori E_3 võttes sfäär S_2 keskpunktiga O ja
raadiusega $r \neq 0$. Abiks moodustame ka rühvektori
 $S(O)$ keskpunktiga O . Iga vektori $\vec{x} \in E_3'$, kus
 $E_3' = E_3 \setminus \{O\}$, korral ruumi $S(O)$ sirge $O + L(\vec{x}) \neq X$



$$X = O + L(\vec{x})$$

loikab sfääri S_2 kahes punktis -
tähistame X_1 ja X_2 . Teisib punkti-
paar (X_1, X_2) . Sejuures tuleb leppida
 $(X_1, X_2) = (X_2, X_1)$, sest me ei tea kumb
punkt on esimene, kumb on teine.
Punktid X_1 ja X_2 on sfääri diameetri
otspunktid.

Edasises selgitamises tähistame $\bar{S}_2$ abil

sfääri S_2 ^{diameetraliste} (punktide paaride (x_1, x_2) hulk) oma demess $(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Tekib kujutlus

$$\pi: E_3' \rightarrow \bar{S}_2; \quad \vec{x} \mapsto \pi(\vec{x}) := (x_1, x_2) \in \bar{S}_2.$$

Ilmselt kujutus π on surjektivne - $\pi(E_3') = \bar{S}_2$.

Lisaks $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ korral $\vec{x}, \vec{y} \in E_3'$ saame kirjutada $\pi(\vec{x}) = (x_1, x_2)$ ja $\pi(\vec{y}) = (y_1, y_2)$ tõttu $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, millest $O + L(\vec{x}) = O + L(\vec{y})$ ehk $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on sama sirge sihvvektorid, s.o, üks vektor on teise kordne - $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Oleme näidanud, et $\bar{S}_2$ on kahemõõtmeline projektiivne ruum, s.o. projektiivne tasand.

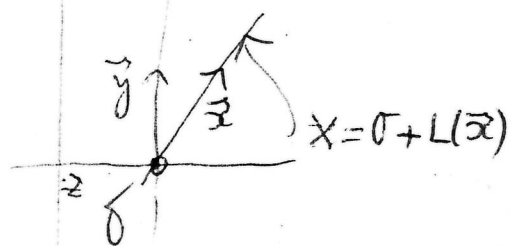
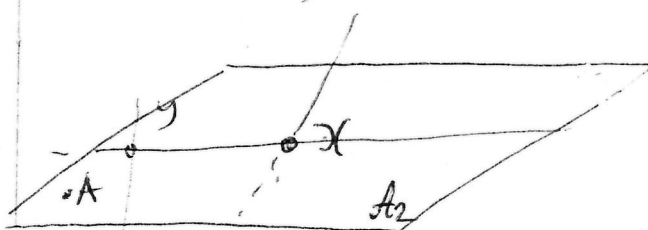
Ilmselt projektiivse sirge saamine tuleb võtta E_3 kahemõõtmeline alamruum $M_2 \subset E_3$ ja moodustada $\pi(M_2')$, mis on tasandi $O + M_2$ ja sfääri S_2 tõikina saadud suurvõrgu $C = S_2 \cap (O + M_2)$, mille abil tuleb moodustada $\bar{C}$ - suurvõrgu diameetraliste punktide (x_1, x_2) hulk.

Nullemõõtmelise projektiivse alamruumi saamine tuleb võtta ühemõõtmeline alamruum $M_1 \subset E_3$ ja moodustada $\pi(M_1')$, mis on sirge $O + M_1$ ja sfääri S_2 lõikepunktide paar (x_1, x_2) . Tuleb nullmõõtmelise alamruumi koostada ühest punktist.

NÄIDE 4. Olgu vastlene all afiinne ruum A_3 sihiruumiga V_3 . Olgu $S(O)$ sõjerdum keskpunkti O ja lõpuks olgu A_2 fikseeritud tasand nõudega $O \notin A_2$. Nüüd on kõik valmis uue projektiivse ruumi, õige mõõtmise projektiivse tasandi, konstrueerimiseks.

Tuleb $\vec{x} \in V_3'$ korral saame sõdame $S(O)$ sõrge

$$\vec{A}_2 = A + M_2; \quad \vec{x} \notin M_2$$



$X = O + L(\vec{x})$, juhul $\vec{x} \notin M_2$, kus M_2 on tasandi A_2 alamruum, s.o V_3 alamruum, mis siia X tõikab tasandit A_2 ühest määratud punktis - tähistame seda X abil.

Tegib küsimus, kas kõrgeldataud protuduur määrab kujutuse $\pi: V_3' \rightarrow A_2; \vec{x} \in V_3' \mapsto \pi(\vec{x}) := X$. Kõigepealt ei ole π (kujutusest), sest tasand A_2 on liialt "väikene" - $\pi(A_2)$ on "nullruum" kui A_2 , nimelt $\vec{x} \in V_3'$, kus $\vec{x} \in M_2$, korral siia $O + L(\vec{x})$ on paralleelne tasandiga A_2 , sest $O \notin A_2$. Seega ei oleki lõikepunkt $O + L(\vec{x}) \cap A_2$. Siin loomistame nii, et tasandile A_2 lisataks uue punkti, saades uue hulga $\bar{A}_2$, et $\pi: V_3' \rightarrow \bar{A}_2$ oleks surjektive kujutus: $\pi(V_3') = \bar{A}_2$. Lisada tuleb punktid, mis asuvad ruumides $\vec{x} \in V_3'$ ja $\vec{x} \in M_2$ korral, s.o, $\pi(\vec{x}) \in \bar{A}_2$. Lisatud punkti $\bar{A}_2 \setminus A_2$ nimetame "tasandil" $\bar{A}_2$ lõpmata kaugtehes punktides. Näitab, et $\bar{A}_2$ on projektivne ruum (täpsemalt tasand), sest kujutus $\pi: V_3' \rightarrow \bar{A}_2$ on surjektive (konstruktsiooni põhjal) ja $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ korral $X = Y$, seega $O + L(\vec{x}) = O + L(\vec{y})$ tõttu $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on sama sirge suhtes fookuselt $\bar{A}_2$ on projektivne tasand.

Vaatleme $\bar{A}_2$ projektivsed sirgeid. Selles tuleb öelda mistahes alamruum $Q_2 \subset V_3$ ja moodustada $\pi(Q_2) \subset \bar{A}_2$. Iluviitav on märgata, et alamruumi $Q_2 = M_2$ korral siia $\pi(M_2) = \bar{A}_2 \setminus A_2$ on lõpmata kaugtehes punktide hulk. Seega tasandile A_2 lisatud lõpmata kaugtehes

punktide hulke hulke annab projektiivse röögi.
 Juhul kui Q_2 erineb alamruumist M_2 , siis $\pi(Q_2)$
 on tasandi A_2 röögi, millele tuleb lisada üks lõpmata
 kaugse punkt $\pi(\bar{x})$, kus $\bar{x} \in Q_2 \cap M_2$. Tõtt näeme, et
 projektiivse röögi on kinnine. (NB!)

Selle meie näited püüdnud.

10. PROJEKTIIVSE RUUMI PROJEKTIIVSE REEPER, PUNKTI KOORDINAADID,

Projektiivse ruumi P mõiste on seotud vektor-
 ruumiga V . Siduvas asjaolus on teatav kujutus
 $\pi: P \rightarrow V$, mis rahuldab kahte aksiooni. See asja-
 olu võimaldab punkti $X \in P$ koordinaadid anda
 temaga seotud vektor $\pi(X) \in V$ koordinaadide
 kaudu. Seda jälgitakse analoogiast afiinsu
 ruumiga A , sest ka seal on ruumi hool alome-
 vektorruum V . Punkti $X \in A$ koordinaadides nimetatakse
 tema kohavektori $\vec{OX} \in V$ koordinaadiks. Seda on ka
 teatav erinevus. Afiiinses ruumis ülemineks punktist
 kohavektorile on bijektiivne kujutus $A \rightarrow V$, kuid
 projektiivses ruumis kujutus $\pi: V' \rightarrow P$ on
^{algult} surjektivne, kuid Teine aksioom projektiivse
 ruumis kätt selgitab, kui palju lähed kaudu
 injektivsus. Seda projektiivse reeperi mõiste
 andmist on teataval komplikatsioonid, võimalik,
 afiinses ruumi reeperi mõistega.

Alustame ittevalmistava tööga. Olgu projektioone ruumi lõplikumõõtmeline P_n . Temaga seotud vektorruum V_{n+1} . Tähistame kõrgpealt rihe fakti vektorruumi V kohta üldse, mis võib olla ka lõpmatu mõõtmeline.

LAUSE. Kui vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$, $a_i \in V$ on lineaarselt sõltumatu, siis ka vektorsüsteem $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$, kus $\vec{b}_i = \lambda^i \vec{a}_i$, $\lambda^i \in \mathbb{R}'$, on lineaarselt sõltumatu. Vastupidi: kui $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ on lineaarselt sõltumatu, siis on ka $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ lineaarselt sõltumatu.

TÖESTUS. Eelduse kohaselt $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ on lineaarselt sõltumatu, s.o. võrrandil $\xi^1 \vec{a}_1 + \xi^2 \vec{a}_2 + \dots + \xi^m \vec{a}_m = \vec{0}$ ainult nulllahend. Siis on vaja näidata, et ka võrrandil $\eta^1 \vec{b}_1 + \eta^2 \vec{b}_2 + \dots + \eta^m \vec{b}_m = \vec{0}$ on ka ainult nulllahend. Väime võrrandi saame korjata

$$\eta^1 (\lambda^1 \vec{a}_1) + \eta^2 (\lambda^2 \vec{a}_2) + \dots + \eta^m (\lambda^m \vec{a}_m) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\eta^1 \lambda^1) \vec{a}_1 + (\eta^2 \lambda^2) \vec{a}_2 + \dots + (\eta^m \lambda^m) \vec{a}_m = \vec{0}$$

Seega võrrandi $\xi^1 \vec{a}_1 + \xi^2 \vec{a}_2 + \dots + \xi^m \vec{a}_m = \vec{0}$ lahendiks on

$$\xi^1 = \eta^1 \lambda^1, \quad \xi^2 = \eta^2 \lambda^2, \quad \dots, \quad \xi^m = \eta^m \lambda^m,$$

millel on ainult null-lahend. Siis

$$\eta^1 \lambda^1 = 0, \quad \eta^2 \lambda^2 = 0, \quad \dots, \quad \eta^m \lambda^m = 0 \Rightarrow \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = 0, \quad \dots, \quad \eta^m = 0,$$

sest $\lambda^i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Seega võrrandil $\eta^1 \vec{b}_1 + \eta^2 \vec{b}_2 + \dots + \eta^m \vec{b}_m = \vec{0}$ on ainult null-lahend, mistõttu $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Nüüd üllame, et süsteem $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ on lineaarselt sõltumatu ja $\vec{b}_i = \lambda^i \vec{a}_i$ ($i = 1, \dots, m$), kus kõik $\lambda^i \neq 0$. Seega saame $\vec{a}_i = \mu^i \vec{b}_i$, kus $\mu^i = \frac{1}{\lambda^i} \neq 0$. Analoogiliselt tähistame viimasele poolale saame, et $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Tarvilikust ja piisavast lausest saab alati tarviliku ja piisava järelduse.

JÄRELDUS, Kui $\vec{b}_i = \lambda^i \vec{a}_i$, $\lambda^i \in \mathbb{R}'$, siis vektorsüsteem $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ on lineaarselt sõltuv.

Pöörduame tagasi projektiivse ruumi $\pi: P_n \rightarrow V_{n+1}$ juurde. Olgu $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ projektiivse ruumi P_n punktide $A_1, A_2, \dots, A_m$ süsteem, olgu $\vec{a}_1 \in \pi^{-1}(A_1)$, $\vec{a}_2 \in \pi^{-1}(A_2)$, ..., $\vec{a}_m \in \pi^{-1}(A_m)$. Teiselt vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$. Väimevõrrele on üheselt määratud. Mõistame teise süsteemi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ korral, kui $\vec{b}_1 \in \pi^{-1}(A_1)$, $\vec{b}_2 \in \pi^{-1}(A_2)$, ..., $\vec{b}_m \in \pi^{-1}(A_m)$, leiduvad arvud $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m \in \mathbb{R}'$, et

$$\vec{b}_1 = \lambda^1 \vec{a}_1, \vec{b}_2 = \lambda^2 \vec{a}_2, \dots, \vec{b}_m = \lambda^m \vec{a}_m.$$

Edmunde lause kohaselt süsteemid

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}, \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$$

on samaaegselt kas lineaarselt sõltumatu või lineaarselt sõltuvad.

DEFINITSIOON, Projektiivse ruumi P_n punktisüsteemi $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ nimetame projektiivselt sõltumatuks (projektiivselt sõltuvaks) kui vektorsüsteem

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$, kus $\vec{a}_1 \in \pi^{-1}(A_1)$, $\vec{a}_2 \in \pi^{-1}(A_2)$, ..., $\vec{a}_m \in \pi^{-1}(A_m)$, on lineaarselt sõltumatu (lineaarselt sõltuv).

LAUSE. Kahepunktiline punktisüsteem $\{A_1, A_2\}$, $A_1, A_2 \in P_n$ on projektiivselt sõltuv siis ja ainult siis, kui $A_1 = A_2$.

TÕESTUS, Kui $\{A_1, A_2\}$ on projektiivselt sõltuv, siis vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\vec{a}_1 \in \pi^{-1}(A_1)$, $\vec{a}_2 \in \pi^{-1}(A_2)$, on lineaarselt sõltuv ehk üks neist avaldub teise kaudu. Et $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ja $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$, siis mõlemal avalduvad teise kaudu. Võtame $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$, kus $\lambda \neq 0$. Siis $\pi(\vec{a}_2) = \pi(\vec{a}_1)$ ehk $A_2 = A_1$, sest $\pi(\vec{a}_2) = A_2$ ja $\pi(\vec{a}_1) = A_1$.

Vastupidi. Kui $A_2 = A_1$, siis $\pi(\vec{A}_2) = \pi(\vec{A}_1)$ ehk 74.

$\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}'$. Tapa $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ on lineaarselt sõltuv järe
punktisüsteem $\{A_1, A_2\}$ projektiivselt sõltuv. $\square$

JÄRELDOUS Punktisüsteem $\{A_1, A_2\}$ on projektiiv-
selt sõltumatu siis ja ainult siis, kui $A_1 \neq A_2$.

Kuna vektorruumis V_{n+1} lineaarselt sõltumatu
vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ saab koosneda ülimalt $(n+1)$ -st
^{vektoriga} ~~punktist~~, siis projektiivse ruumi P_n projektiivselt
sõltumatu punktisüsteem $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ saab koosneda
ka ülimalt $(n+1)$ -st punktist. Iga kõik punktisüs-
teemi $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, kus $m > n+1$, on projektiivselt
sõltuvad.

Teeme nüüd ühe katre projektiivse reperi moodus-
tamiseks ja seagil punkti koordinaatide määramiseks.
Ütleme kahe ette, et see katre ebaõnnestub, kuid avardab
silmaaringi.

Võtame ruumis P_n kõige pikema punktisüsteemi, mis
on projektiivselt sõltumatu, st nappim $(n+1)$ punkti.

Tähistame sellist süsteemi

$$\{E_0, E_1, \dots, E_n\}, \quad E_\alpha \in P_n \quad (\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, n).$$

Iga vektorsüsteem $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ on lineaarselt sõltumatu,

st $\vec{e}_\alpha \in \pi^{-1}(E_\alpha)$, millest $\pi(\vec{e}_\alpha) = E_\alpha$. Teeme, et

vektorruumis V_{n+1} iga $(n+1)$ -st vektoriga koosnev

lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem on tema baas. Iga

$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ on vektorruumi V_{n+1} baas. Nüüd tekib

idee nimetada punkti X koordinaatideks vektor

$\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$ koordinaati baasi $\{\vec{e}_\alpha\}$ suhtes, st avaldada

$\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha$. Tähistame $\vec{x} = (x^\alpha)$. Iga X koordinaatideks

olevat $X(x^0, x^1, \dots, x^n)$. Kuna vektor $\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$ ei määrata

ühelt, siis on sin mudagi ebauneldivat. Iga $\vec{y} \in \pi^{-1}(X)$

kernel $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, kus $\lambda \in \mathbb{R}'$, saame $\vec{y} = y^\lambda \vec{e}_\lambda$ ehk $\vec{y} = (y^\lambda)$,
Sajumme

$$\vec{y} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow y^\lambda = \lambda x^\lambda.$$

Sega punkti X koordinaadid määratakse kordaja $\lambda \neq 0$ täpsusega. Sega $X(\lambda x^\lambda)$, kus $\lambda \in \mathbb{R}'$. Viimast kirjutatakse ka $X(x^0; x^1; \dots; x^n)$.

Tegelikult ei ole ka punktisüsteemi $\{E_\lambda\}$ poolt määratud baas $\{\vec{e}_\lambda\}$ määratud üheselt, mis tähendab tegelikult, et meil idee määrata projektivse punkti koordinaate kordaja täpsusega, ebatäpsustab. Võeldakse siis valvame tein baasi $\{\vec{e}'_\lambda\}$, kus $\vec{e}'_\lambda \in \pi^{-1}(E_\lambda)$.
Sega $\vec{e}'_\lambda = \lambda^\lambda \vec{e}_\lambda$ ja $\lambda^\lambda \neq 0$. Levame X koordinaadid $\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$ abil; avaldades $\vec{x} = x^\lambda \vec{e}'_\lambda$. Saame $X(x^\lambda)$, sel- ~~ts~~ $\vec{x} = x^\lambda \vec{e}_\lambda$ gitame x^λ ja x^λ vahetama. Muldiv oleks saada, et $\vec{x}^\lambda = \lambda x^\lambda$ ($\lambda = 0, 1, \dots, n$), s.o. koordinaadid määratakse kordaja täpsusega. Kahjuks see nii ei ole, sest

$$\vec{x} = x^\lambda \vec{e}'_\lambda = x^\lambda (\lambda^\lambda \vec{e}_\lambda) = (x^\lambda \lambda^\lambda) \vec{e}_\lambda \Rightarrow \vec{x} = x^\lambda \vec{e}_\lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow x^\lambda \lambda^\lambda = x^\lambda \Rightarrow x^\lambda = \frac{1}{\lambda^\lambda} x^\lambda, \text{ sest } \lambda^\lambda \neq 0$$

Sega iga λ kernel λ^λ on erinev. Katse määrata punkti koordinaate kordaja täpsusega projektivselt rühmatu punktisüsteemi $\{E_\lambda\}$ ei õnnestu. Sega midagi tuleb täpsedalt ära võtta.

Valime projektivsest ruumist P_n miind $n+2$ punkti $\{E_0, E_1, \dots, E_n; E\}$ nõudes, et nad ei oleks kollinealsed. Viimane tähendab, et kui alust süsteemist jätame üheksa milline punkti välja, siis $(n+1)$ -line süsteem on projektivselt rühmatu. Sellesse alam süsteemi on $n+2$ tükki. Nõuame, et vastava vektorsüsteemi

$$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n; \vec{e}\}, \quad \vec{e}_\lambda \in \pi^{-1}(E_\lambda), \vec{e} \in \pi^{-1}(E)$$

valome nullvekt, et

$$\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n = \vec{e},$$

Idgitame, et selliste vektorite valok on võimalik.
Rõõgloa on nii, et valodes erandajad $\vec{e}_x$ ja $\vec{e}$
võime an. normeerimis tingimus ei kehti;

$$\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n \neq \vec{e},$$

Näitame, et saab valida need erandajad $\vec{e}_x' \in \pi^{-1}(E_x)$,
 $\{\vec{e}' \in \pi^{-1}(E)\}$ nii, et kehtib $\sum_{x=0}^n \vec{e}_x' = \vec{e}$. Täpsemalt.

Kuna $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ on vektorruumi V_{n+1} baas,
nii iga vektor on avaldatav selle baasi kaudu, ka nende
hulgas vektor $\vec{e}$; s.o.,

$$\vec{e} = \xi^0 \vec{e}_0 + \xi^1 \vec{e}_1 + \dots + \xi^n \vec{e}_n.$$

Võimes avaldada kõik koefitsiendid $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n$ on nullist
erinevad. Näitame näites, et $\xi^0 \neq 0$. Kui oletame, et
 $\xi^0 = 0$, siis saame

$$\vec{e} = \xi^1 \vec{e}_1 + \dots + \xi^n \vec{e}_n \Leftrightarrow \xi^1 \vec{e}_1 + \dots + \xi^n \vec{e}_n + (-1) \vec{e} = \vec{0}.$$

Kuna $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}\}$ on lineaarselt sõltumatu, siis
võrrandil $\eta^1 \vec{e}_1 + \dots + \eta^n \vec{e}_n + \eta \vec{e} = \vec{0}$

on null-lahend, aga meile saame ka lahendada

$$\eta^1 = \xi^1, \dots, \eta^n = \xi^n, \quad \eta = -1,$$

mis pole null-lahend. Saame vastavalt eeldusele $\xi^0 \neq 0$,

Jaga $\xi^0 \neq 0$. Analooziliselt saame, et $\xi^1 \neq 0, \dots, \xi^n \neq 0$.

moodustame vektorid $\vec{e}_x' = \xi^x \vec{e}_x$, et $\xi^x \neq 0$, mis
 $\vec{e}_x' \in \pi^{-1}(E_x)$ ning

$$\vec{e}_0' + \vec{e}_1' + \dots + \vec{e}_n' = \vec{e},$$

Jaga me oleme näidanud, et leiduvad erandajad
 $\vec{e}_x \in \pi^{-1}(E_x)$ ja $\vec{e} \in \pi^{-1}(E)$, mis rahuldavad

normeeritud tingimust $\sum_{x=0}^n \vec{e}_x = \vec{e}$,

Järgnevas selgitame kui palju on süsteemi
 $\{\vec{e}_x, \vec{e}\}$, mis rahuldavad normeeritud tingimust.

Mistahes kahe süsteemi $\{\vec{e}_\alpha, \vec{e}\}$ ja $\{\vec{e}'_\alpha, \vec{e}'\}$ vahel, mil $\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}_\alpha = \vec{e}$ ja $\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}'_\alpha = \vec{e}'$, tänu millele $\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\alpha \in \pi^{-1}(E_\alpha)$ ja $\vec{e}, \vec{e}' \in \pi^{-1}(E)$ me saame $\vec{e}'_\alpha = \lambda^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\vec{e}' = \lambda \vec{e}$, kus kõik $\lambda^\alpha \neq 0$ ja $\lambda \neq 0$. Nüüd teeme arundusel teise normeeritud tingimuse, saame

$$\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}'_\alpha = \vec{e}' \Rightarrow \sum_{\alpha=0}^n \lambda^\alpha \vec{e}_\alpha = \lambda \vec{e}.$$

Arvestame paigutal pool $\vec{e}$ eeldamist normeeritud tingimust. Saame

$$\sum_{\alpha=0}^n \lambda^\alpha \vec{e}_\alpha = \lambda \left(\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}_\alpha \right) \Rightarrow \sum_{\alpha=0}^n (\lambda^\alpha - \lambda) \vec{e}_\alpha = \vec{0},$$

Kuna süsteem $\{\vec{e}_\alpha\}$ on lineaarselt sõltumatu, me saame

$$\lambda^\alpha - \lambda = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n) \Leftrightarrow \lambda^\alpha = \lambda \quad (\alpha = 1, \dots, n).$$

Saame: $\vec{e}'_\alpha = \lambda \vec{e}_\alpha$, $\vec{e}' = \lambda \vec{e}$, kus $\lambda \in \mathbb{R}'$.

Väime nos kirjeldab, kuidas ühest normeeritud süsteemist $\{\vec{e}_\alpha, \vec{e}\}$ kätte saada kõik normeeritud süsteemid — kõik need vektorid tuleb korraldada ühise teguriga $\lambda \neq 0$, millel me saame valida vastavalt, mil eel vektorid võis korraldada erineva (nullist) teguriga, ~~Reaktor~~ ~~kesk~~

DEFINITSIOON. Üldesendis oleval punkti-süsteemi $\{E_0, E_1, \dots, E_n; E\}$ (lühikalt $\{E_\alpha; E\}$) nimetame projektiivseks ruumi P_n projektiivseks ruumiks. Punkti E_α nimetame baaspunktiks ja punkti E ühikpunktiks.

Nüüd selgitame, kuidas leida punkti $X \in P_n$ koordinaadid. Võtame punktide E_α, E sõltuv vektorid $\vec{e}_\alpha \in \pi^{-1}(E_\alpha)$ ja $\vec{e} \in \pi^{-1}(E)$, mis rahuldavad normeeritud tingimust $\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}_\alpha = \vec{e}$. Nüüd valime punkti X vektorvektor $\vec{x} \in \pi^{-1}(X)$

Kuna $\{\vec{e}_i\}$ on vektoriruumi V_{n+1} baas, mis saame $\vec{x} \in V_{n+1}$ avaldada tema kaudu $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$

DEFINITSIOON. Vektori $\vec{x}$ koordinaate x^i nimetatakse ~~ve~~ punkti X koordinaatideks

Teeme paar tähelepanekut. Esites, kuna $\vec{x}$ ei ole null vektor, siis kõik koordinaatidest ei ole kannaga nullid. Tege projektivsel punktil vähemalt üks koordinaat on nullist erinev.

Teises. Projektivne reeper ^{määrat süsteemi} $\{\vec{e}_i\}$ tänu normeeritud ^(ühikvektori täpsusega) ^{koordinaatidele}, aga ka punkti X esindaja $\vec{x}$ määratakse koordinaatide täpsusega.

Tege punkti X koordinaadid projektivse reeperi suhtes ei määrata üheselt. Selgub seda muu.

Mistahes teiste $\vec{x}' \in \pi^{-1}(X)$ ja $\vec{e}'_i \in \pi^{-1}(E_i)$ korral, avaldades $\vec{x}' = x'^i \vec{e}'_i$, saame X koordinaatides x^i . Kuna $\vec{x}' = \mu \vec{x}$, $\mu \neq 0$, ja $\vec{e}'_i = \lambda \vec{e}_i$, $\lambda \neq 0$, me saame

$$\begin{aligned} \vec{x}' = x'^i \vec{e}'_i &\Rightarrow \mu \vec{x} = x'^i (\lambda \vec{e}_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{\lambda}{\mu} x'^i\right) \vec{e}_i \Rightarrow x^i = \frac{\lambda}{\mu} x'^i \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^i = \frac{\lambda}{\lambda} x'^i. \end{aligned}$$

Tege punkti $X \in P_n$ koordinaadid määratakse koordinaatide täpsusega. Tututatu kirjutame $X(\lambda x^i)$, $\lambda \in \mathbb{R}'$ ehk siis $X(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$

Näitena koordinaatide kohta paneme tähele, et

$$E_0(1:0:\dots:0) \text{ ehk } E_0(\lambda, 0, \dots, 0), \lambda \in \mathbb{R}', \text{ sest}$$

$$\vec{e}_0' = 1 \vec{e}_0 + 0 \vec{e}_1 + \dots + 0 \vec{e}_n$$

$$\text{Analoogselt } E_1(0:1:0:\dots:0), \dots, E_n(0:0:\dots:1)$$

$$\text{ja normeeritud vektorid } E(1:1:\dots:1).$$

Selle paragrahvi järgneva osa põhjalame punkti koordinaatide teinumisvalemite tulemusena

ühelt projektivalt reperit tunde,

Olgu $\{E_2, E\}$ ja $\{E'_2, E'\}$ projektivne ruum

$\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ kaks erinevat ~~re~~ projektivset reperi.

Olgu nende poole indutseeritud vektarsüsteemid

$\{\vec{e}_2, \vec{e}\}$ ja $\{\vec{e}'_2, \vec{e}'\}$, kus $\vec{e}_2 \in \pi^{-1}(E_2)$, $\vec{e} \in \pi^{-1}(E)$

ja $\vec{e}'_2 \in \pi^{-1}(E'_2)$, $\vec{e}' \in \pi^{-1}(E')$ ning rahuldavad normeer-

tuse tingimusi $\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}_\alpha = \vec{e}$ ja $\sum_{\alpha=0}^n \vec{e}'_\alpha = \vec{e}'$, Vektorite

süsteemid $\{\vec{e}_2, \vec{e}\}$ ja $\{\vec{e}'_2, \vec{e}'\}$ on määratud korda-
ja täpsuse normeeritud tingimuste tõttu. Need

vektorsüsteemid määravad projektivset reperi, st

$\pi(\vec{e}_2) = E_2$, $\pi(\vec{e}) = E$ ja $\pi(\vec{e}'_2) = E'_2$, $\pi(\vec{e}') = E'$,

Seega reperi teisenduse $\{E_2, E\} \rightarrow \{E'_2, E'\}$ kirjelda-

mise on vektorsüsteemide teisenduse $\{\vec{e}_2, \vec{e}\} \rightarrow \{\vec{e}'_2, \vec{e}'\}$

kirjeldamine. Kuna $\{\vec{e}_\alpha\}$ on vektorruumi V_{n+1}

baas, siis tema kaudu saame avaldada vektorid

$\vec{e}'_2, \vec{e}'$:

$$\vec{e}'_2 = C_2^\beta \vec{e}_\beta, \quad \vec{e}' = C^\beta \vec{e}_\beta,$$

kus $C := (C_\alpha^\beta) \in GL(n+1, \mathbb{R})$, st $\{\vec{e}_\beta\}$ on ka V_{n+1} baas.

On tavaline, et $\vec{e}'$ koordinaadid C^β on määratud

maatriks C poole, sest normeeritud tingimuste abil

$$\vec{e}'_0 + \vec{e}'_1 + \dots + \vec{e}'_n = \vec{e}' \Leftrightarrow C_0^\beta \vec{e}_\beta + C_1^\beta \vec{e}_\beta + \dots + C_n^\beta \vec{e}_\beta = C^\beta \vec{e}_\beta \Leftrightarrow$$

$$(\Rightarrow) (C_0^\beta + C_1^\beta + \dots + C_n^\beta - C^\beta) \vec{e}_\beta = \vec{0} \Leftrightarrow C_0^\beta + C_1^\beta + \dots + C_n^\beta - C^\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\Rightarrow) C^\beta = C_0^\beta + C_1^\beta + \dots + C_n^\beta \quad (\beta = 0, \dots, n)$$

Sit näeme, et C^β on maatriksi C β -ra indeksi kogu
 β elemendi summa. Seega ilmnemise

$$\{\vec{e}_2, \vec{e}\} \rightarrow \{\vec{e}'_2, \vec{e}'\}$$

määrab maatriksi C . Kuna tegevuselt kumbagi süsteemi

on määratud kordaja täpsusega, siis C on määratud kordaja täpsusega, tähistame λC , $\lambda \in \mathbb{R}'$. Tõime, et projektiivne reperi teisendab

$$\{E_2, E\} \xrightarrow{(\lambda C)} \{E'_2, E'\}$$

määratab kordajatäpsusega määratud regulaarse maatriksi λC poolt, kus $C \in GL(n+1, \mathbb{R})$. Tõega λC kuulub faktorrühma $GL(n+1, \mathbb{R})/H$.

Punkti $X \in P_n$ koordinaatide määramine tuleb võtta $\tilde{x} \in \pi^{-1}(X)$ ja avaldada baasi $\{\tilde{e}_2\}$ ja $\{\tilde{e}'_2\}$ kaudu: $\tilde{x} = x^\alpha \tilde{e}_2$, $\tilde{x} = x'^\alpha \tilde{e}'_2$

Teisendame teisest:

$$\tilde{x} = x'^\alpha \tilde{e}'_2 = x'^\beta c_\beta^\alpha e_2$$

Võrdles esimesega, saame

$$x^\alpha = c_\beta^\alpha x'^\beta$$

Arvestades, et x^α ja x'^β on määratud kordaja täpsusega, saame

$$x^\alpha = (\lambda c_\beta^\alpha) x'^\beta, \lambda \in \mathbb{R}'$$

Oleme saanud vanad koordinaadid uute koordinaatide kaudu.

Vaatleme veel projektiivset reperi teisestatud omadusi. Me saame baasi teisenduse

$$\{E_2, E\} \xrightarrow{(\lambda C)} \{E'_2, E'\}$$

maatriksi $\lambda C \in GL(n+1, \mathbb{C})/H$ ühe esondiga $C \in GL(n+1, \mathbb{C})$

vektorruumi V_{n+1} baasi teisenduse $\{\tilde{e}_2\} \xrightarrow{C} \{\tilde{e}'_2\}$

maatriksiks C . Siis $\pi(\tilde{e}_2) = E_2$ ja $\pi(\tilde{e}'_2) = E'_2$.

Teda meenutame ~~koor~~ kasutame ^{projektiivset reperi} ~~teisme~~ omadusi ~~koor~~ tähistamiseks.

OMADUS 1. Projektiivse reperi teisenduse

$\{E_2, E\} \rightarrow \{E_2, E\}$ maatriks on λE , s.o.

rühma $GL(n+1)/H$ ühikuelement.

81

TÕESTUS, Tuleb leida vektorruumi V_{n+1} baasvektoreid $\{E_i\} \rightarrow \{E_i\}$. Tõelis on (vt. vektorruumi) ühikumaatriks E , Tege projektsioonid reeperiti $\{E_i, E\} \rightarrow \{E_i, E\}$ teisendusmaatriks on λE , mis on aga rühma $GL(n+1, \mathbb{R})/H$ ühikuelement.

OMADUS 2. Kui reeperiteeritud $\{E_i, E\} \rightarrow \{E'_i, E'\}$ maatriks on $\lambda C \in GL(n+1, \mathbb{R})/H$, siis reeperiteeritud $\{E'_i, E'\} \rightarrow \{E_i, E\}$ maatriks on λC pöörduelement $(\lambda C)^{-1} = \lambda C^{-1}$.

TÕESTUS, Tõestisvalt. Vt. omaduse 1 tõestus.

OMADUS 3. Kui on baas reeperiteeritud $\{E_i, E\} \xrightarrow{\lambda C_1} \{E'_i, E'\}$, $\{E'_i, E'\} \xrightarrow{\lambda C_2} \{E''_i, E''\}$ ja $\{E_i, E\} \xrightarrow{\lambda C} \{E''_i, E''\}$, siis

$$\lambda C = (\lambda C_1)(\lambda C_2) \Leftrightarrow \lambda C = \lambda (C_1 C_2),$$

TÕESTUS, Tõestisvalt.

Tahistame projektsioon ruumi P_n reeperiti hulka $R(P_n)$. Fikseerime ühe projektsiooni reeperiti $\{E^{(0)}_i, E^{(0)}\}$, mida nimetame algreperitiks

TEOREEM. Projektsioon ruumi P_n kõik projektsioonid reeperitid saame katta algreperit rühma $GL(n+1)/H$ elementide abil. Vastupidis: projektsioonid reeperiti ~~algreperit~~ ^{algreperit} rühma $GL(n+1)/H$.
TÕESTUS, Meil on selgitatud, et iga reeperiti $\{E_i, E\}$ korral koos algreperitiga tekitab reeperitpaar $\{E^{(0)}_i, E^{(0)}\}$ ja $\{E_i, E\}$, mis tekitab üheselt

määratud elemendi rühmas $GL(n+1, R)/H$ representatsiooni
maatriksi λC näol. Osutub, et kehtib ka vastupidine:
iga rühma $GL(n+1, R)/H$ iga element λC
määrab, lähtudes algreperist, projektiivse reperi.
Jälgitame viimast lähemalt: võtame λC seast
ühe konkreetse maatriksi $C = (c_{ij}^\beta)$, mis on rühma
 $GL(n+1, R)$ element. Algreper $\{E_2^{(0)}, E^{(0)}\}$ tekitab
 $\{\tilde{e}_2^{(0)}, \tilde{e}^{(0)}\}$, kus $\{\tilde{e}_2^{(0)}\}$ on V_{n+1} baas. Moodustame
vektoreid $\tilde{e}_2^* = c_{ij}^\beta \tilde{e}_j^{(0)}$. Vektorruumi teooriast on
teada, et kui C on regulaarne (praegu nii on), siis
vektorsüsteem $\{\tilde{e}_2^*\}$ on ka V_{n+1} baas. Edasi
moodustame $c^\beta := c_0^\beta + c_1^\beta + \dots + c_n^\beta$, $\beta = 0, 1, \dots, n$, siis
 $\tilde{e} = c^\beta \tilde{e}^{(0)}$. Eelneval korral vektorsüsteem $\{\tilde{e}_2, \tilde{e}\}$
 $\sum_{i=0}^n \tilde{e}_i = \tilde{e}$ tõttu on normeeritud. Järgi punktisüsteem
 $E_2 = \pi(\tilde{e}_2)$, $E = \pi(\tilde{e})$ määrab projektiivse reperi.
 $\{E_2, E\}$. Kokkuvõttes on tekkinud kujutus
 $f: R(P_n) \rightarrow GL(n+1, R)/H$; $\{E_2, E\} \rightarrow f(\{E_2, E\}) = \lambda C$,
mis saadakse baasvõrdandide $\{E_2^{(0)}, E^{(0)}\} \rightarrow \{E_2, E\}$
maatriksiga λC . Tõepoolest on olemas pöördkujutus
 $f^{-1}: GL(n+1, R)/H \rightarrow R(P_n)$; $\lambda C \mapsto f^{-1}(\lambda C) = \{E_2, E\}$
nii nagu isomorfism. Kujutus, millel on olemas
pöördkujutus, on bijektiivne. Järele f on bijektiivne.
Järgi hulged $R(P_n)$ ja $GL(n+1, R)/H$ on isomorfne.
Seda täpselt teoreem väidabki. $\square$

11. PROJEKTIIVSE RUUMI HÜPERTASAND EHK LINEAAR

Olgu antud projektiivne ruum $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$.

DEFINITSIOON. Projektiivne ruum P_n alamruumi, mille mõõde on üle võrra väiksem kui tema enda mõõde, nimetatakse hüperatasandiks ehk lineaariks.

Kasutades alamruumi definitsiooni, ~~see~~ ^{saame} lineaarset ~~saame~~ ^{saame} kätte $\pi(Q'_n)$ abid, kus Q_n on vektorruumi V_{n+1} hüperalamruum. Kui vaatleme kõiki hüperalamruume Q_n , saame kätte projektiivse ruumi ^{koiki} lineaarid $\pi(Q_n)$.

Et uurida lineaarse $\pi(Q'_n)$, uurime eelnevalt hüperalamruume Q_n .

Iga alamruum Q_n on ka vektorruum, mis temas saab võtta mõnigi baasi $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$.

Iga vektor $\vec{x} \in Q_n$ on avaldatav tema kaudu

$$\vec{x} = t^0 \vec{a}_0 + t^1 \vec{a}_1 + \dots + t^{n-1} \vec{a}_{n-1}, \quad (1)$$

Kõik Q_n vektorid saame kätte, kui $t^0, t^1, \dots, t^{n-1}$ muutuvad $\mathbb{R}$ -l. Seega Q_n on lineaarne

$$\begin{aligned} Q_n &= \{ \vec{x} = t^0 \vec{a}_0 + t^1 \vec{a}_1 + \dots + t^{n-1} \vec{a}_{n-1} \mid t^0, t^1, \dots, t^{n-1} \in \mathbb{R} \} = \\ &= L(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}), \end{aligned}$$

moodustajatega $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Valemit (1) nimetame alamruumi Q_n parameetribasise vektorivandru, muutujad $t^0, t^1, \dots, t^{n-1}$ nimetame parameetriteks.

Kui võtame vektorruumi V_{n+1} baasi $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}\} = \{\vec{e}_\alpha\}$,
siis saame tema kaudu avaldada Q_k suvalise vektor $\vec{x}$ baasi
vektorite $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+1}$:

$$\vec{x} = x^0 \vec{e}_0, \quad \vec{a}_0 = a_0^0 \vec{e}_0, \quad \vec{a}_1 = a_1^0 \vec{e}_0, \dots, \vec{a}_{n+1} = a_{n+1}^0 \vec{e}_0.$$

Arsendades valemissi (1), saame

$$x^L = t^0 a_0^L + t^1 a_1^L + \dots + t^{k-1} a_{n+1}^L \quad (L=0, \dots, k-1), \quad (2)$$

Valemsid (2) nimetame algarvumini Q_k parameetriteks
võrrandites koordinaatides. Siis võrrandite (2) on
võrrandeid $(n+1)$ tükki; parameetreid n tükki. Seega
sobivad n võrrandit saame parameetrid $t^0, \dots, t^{k-1}$
avaldada n-ja arsendada ülejäänud võrrandisse,
saades avalduse kujul $f(x^0, x^1, \dots, x^k) = 0$.

Realiseerime aelduse, s.o. elunduse parameetrid.

See toimub isik kaastõekult. Tevõitame võrrandit

(2) järginult:

$$\begin{aligned} a_0^0 t^0 + a_1^0 t^1 + \dots + a_{n+1}^0 t^{k-1} &= x^0 \\ a_0^1 t^0 + a_1^1 t^1 + \dots + a_{n+1}^1 t^{k-1} &= x^1 \\ \dots &\dots \\ a_0^L t^0 + a_1^L t^1 + \dots + a_{n+1}^L t^{k-1} &= x^L \\ \dots &\dots \\ a_0^n t^0 + a_1^n t^1 + \dots + a_{n+1}^n t^{k-1} &= x^n \end{aligned} \quad (3)$$

See on $(n+1)$ -st võrrandist koosnev mittelineaarne
võrrandisüsteem tundmatutega $t^0, t^1, \dots, t^{k-1}$, vabalühem-
tega $x^0, x^1, \dots, x^k$ ja maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \dots & a_{n+1}^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \dots & a_{n+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^L & a_1^L & \dots & a_{n+1}^L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Selle $(n+1) \times n$ maatriksi A abil moodustame determinandi D_λ , jättes ära $(\lambda+1)$ rea $a_0^\lambda, a_1^\lambda, \dots, a_{n-1}^\lambda$:

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \dots & a_{n-1}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^{\lambda-1} & a_1^{\lambda-1} & \dots & a_{n-1}^{\lambda-1} \\ a_0^\lambda & a_1^\lambda & \dots & a_{n-1}^\lambda \end{vmatrix}$$

Kõik determinandid on $n+1$ tükki, sest $\lambda = 0, 1, \dots, n$.
 Vastame viimasele märgiga, defineerides $a_\lambda = (-1)^\lambda D_\lambda$.
 (Viimase valemis ei toimu muudugi λ järgi nummerdust.)
 Järgnevas korvutame süsteemi (3) iga viimanele vastavalt kordajatega $a_0, a_1, \dots, a_n$ ja liidame kokku. Alustame parameetrist λ :

$$\sum_{\lambda=0}^n a_\lambda x^\lambda = a_\lambda (a_0^\lambda t^0 + a_1^\lambda t^1 + \dots + a_{n-1}^\lambda t^{n-1}) =$$

$$= a_\lambda a_i^\lambda t^i \quad (i=0, \dots, n-1).$$

Muutame kordajat t^i juures, s.o. $a_\lambda a_i^\lambda$. Sellele moodustame abodeterminandi

$$|A_i| = \begin{vmatrix} a_i^0 & a_0^0 & a_1^0 & \dots & a_i^0 & \dots & a_{n-1}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i^\lambda & a_0^\lambda & a_1^\lambda & \dots & a_i^\lambda & \dots & a_{n-1}^\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i^n & a_0^n & a_1^n & \dots & a_i^n & \dots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} \quad (i=0, \dots, n-1).$$

Nagu näeme on maatriksi A ilteliseks tema i -s veerg, seades maatriksi A_i . A juures on alati kas, vähemalt varju, mistõttu kõik determinandid $|A_i|$ on võrdsed nulliga. Teiselt poolt, arendades determinanti $|A_i|$ esimese veeru järgi, saame

$$|A_i| = a_i^0 a_0 + a_i^1 a_1 + \dots + a_i^n a_n = a_i^\lambda a_\lambda = a_\lambda a_i^\lambda.$$

Juures $a_\lambda a_i^\lambda = 0$ iga $i=0, \dots, n-1$ korral. Viimast arvestades, $\sum a_\lambda x^\lambda = 0$

Täame, et iga hüperalamruum Q_n on antud
ühelt võrrandest koosneva homogeense võrrandlogi

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n = 0 \quad (4)$$

(Märkus: algebrast teame, et iga homogeense võrrand-
süsteemi määrab vektorruumi alamruumi. Tein on
muretses probleemi teinud sünni - iga alamruumi
(praeu hüperalamruumi) on saadav homogeense võrrand-
lahendite abil.)

Tegelikult on veel vaja näidata, et võrrand (4)
on isegi alevne, s.o. kõik kordajad $a_0, a_1, \dots, a_n$
ei ole korraga nullid. Tõustame vastavõrdeluse,
olebades, et kõik a_i on nullid. Siis ka kõik D_i
on ka nullid. Sellest omakorda maatriksi A
astak rank $A < n$, s.o. väiksem kui vektorvektori
arv. Selle põhjal maatriksi A vektorvektorid on
lineaarult sõltuvad. Lineaarse sõltuvuse definitsio-
ni kohaselt leiduvad arvud $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}$, mis
ei ole korraga nullid, et

$$\lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^{n-1} a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \lambda^i a_i = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n),$$

Vimasti abil saame

$$(\lambda^i a_i) \vec{e}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^i (a_i \vec{e}_i) = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

Rohutades, et kõik $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}$ ^{pole} nullid, saame vektor-
süsteemi $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$ lineaarse sõltuvuse, s.o. Q_n
baas on lineaarult sõltuv. Täame vastavalt. Siis
võrrand (4) kõik kordajad ei ole nullid.

Selgitame veel. Kaks korrektsuse probleemi:
üksik erimehe: kuidas rääkida lineaar Q_n võrrand (4)
teine baas $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$ valikust. Mõtlesime teine baas
 $\{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}\}$ korral $Q_n = L(\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1})$. Siis
sellele

$$\vec{b}_i = C_i^j \vec{a}_j, \quad (5)$$

poolt tekitab n -järku Q_n -s baasistandardi maatriks $C = (C_i^j)$

on regulaarne - $|C| \neq 0$. Arutleme analoogiliselt
nagu baasi $\{\bar{a}_i\}$ korral moodustame $\bar{b}_i = b_i^{\lambda} \bar{e}_i$ abil
maatriksi $B = (b_i^{\lambda})$. Tema abil D_{λ} ja a_{λ} analoo-
giliselt

$$\bar{D}_{\lambda} = \begin{vmatrix} b_0^0 & b_1^0 & \dots & b_{n-1}^0 \\ b_0^{\lambda-1} & b_1^{\lambda-1} & \dots & b_{n-1}^{\lambda-1} \\ b_0^{\lambda+1} & b_1^{\lambda+1} & \dots & b_{n-1}^{\lambda+1} \\ b_0^{\lambda} & b_1^{\lambda} & \dots & b_{n-1}^{\lambda} \end{vmatrix}, \quad b_{\lambda} = (-1)^{\lambda} \bar{D}_{\lambda}, \quad (6)$$

Võrrandi (4) analoogiks on

$$b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_n x^n = 0. \quad (7)$$

Uurime võrrandit (4) ja (7) vaheliste, Teoremi (5)
koordinaatides baasi $\{\bar{e}_i\}$ suhtes saame

$$b_i^{\lambda} = c_i^j a_j^{\lambda} \quad (\lambda=0, 1, \dots, n) \Leftrightarrow b_i^{\lambda} = a_j^{\lambda} c_i^j,$$

mis võimaldab ridaile maatriksid B ja A , saades

$B = AC$. Tähistades determinante D_{λ} ja $\bar{D}_{\lambda}$ moodus-
tamises kasutatud maatriksid vastavalt A_{λ} ja B_{λ} , saame
 $B_{\lambda} = A_{\lambda} C$ iga $\lambda = 0, 1, \dots, n$ korral. Siis

$$\bar{D}_{\lambda} = |B_{\lambda}| = |A_{\lambda} C| = |A_{\lambda}| |C| = D_{\lambda} |C| \Leftrightarrow \bar{D}_{\lambda} = |C| D_{\lambda}$$

$$\Rightarrow b_{\lambda} = |C| a_{\lambda}.$$

Asendades võrrandis (7), saame

$$b_{\lambda} x^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow (|C| a_{\lambda}) x^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow |C| (a_{\lambda} x^{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow a_{\lambda} x^{\lambda} = 0,$$

Yhteis võrrand (4) ja (7) on samaväärne. Täpsemalt
võrrandit (4) korrutatakse läbi nullist erineva teguriga $|C|$

Teine probleem: kuidas võrrand (4) tähtsust V_{n+1}
baasi $\{\bar{e}_i\}$ valikut. Tegelikult meil huvitab alu-
kord, kui elimineerime nulle baasi $\{\bar{e}_i'\}$ iga vektorit
korrutades ühe ja sama nullist erineva teguriga λ , st
 $\bar{e}_i' = \lambda \bar{e}_i$. Baasiteinenduse maatriks $\{\bar{e}_i\} \rightarrow \{\bar{e}_i'\}$

kernel on $\lambda E = (\lambda \delta_{\beta}^{\alpha})$, leiades vektorite kõikidele
vektorite koordinaadid baaside $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ ja $\{\vec{e}'_{\beta}\}$ suhtes, me
saame:

$$\vec{x} = x^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad \vec{x} = \hat{x}^{\beta} \vec{e}'_{\beta} \Rightarrow x^{\alpha} = (\lambda \delta_{\beta}^{\alpha}) \hat{x}^{\beta} \Rightarrow x^{\alpha} = \lambda \hat{x}^{\alpha},$$

$$\vec{a}_i = a_i^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad \vec{a}_i = \hat{a}_i^{\beta} \vec{e}'_{\beta} \Rightarrow a_i^{\alpha} = (\lambda \delta_{\beta}^{\alpha}) \hat{a}_i^{\beta} \Rightarrow a_i^{\alpha} = \lambda \hat{a}_i^{\alpha}.$$

Omavõrre maatriksid $A = (a_i^{\alpha})$ ja $A' = (\hat{a}_i^{\alpha})$ jääs
saame $A = \lambda A'$. Viimaste tõttu $\vec{a}_{\alpha} = \lambda^{\alpha} \hat{a}_{\alpha}$ ja
 $a_{\alpha} = \lambda^{\alpha} \hat{a}_{\alpha}$. Nii baasi suhtes loetud lineaar võrre

$$\hat{a}_{\alpha} \hat{x}^{\alpha} = 0 \quad \text{saame} \quad (\lambda^{\alpha} a_{\alpha}) \left(\frac{1}{\lambda} x^{\alpha} \right) = 0 \quad \text{ehk} \quad \lambda^{\alpha-1} a_{\alpha} x^{\alpha} = 0$$

millest $a_{\alpha} x^{\alpha} = 0$. Tuleb ka siin võrdvõrtse korvutub
võrrand (4) nullist erineva teguriga.

Nüüd on aeg küps, et pöörduda tagasi lineaars
 $\pi(Q'_n)$ juurde.

Lineaari andmehes on vaja fikseerida alamruum Q_n
 Q'_n , mille võib anda lineaarselt abil, moodustajate
tuleb võtta alamruumi mistahes baas $\{\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$, kus
 $Q_n = L(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$. Teisalt projektivne ruum
punktide $\pi(\vec{a}_0) \stackrel{+}{=} A_0, \dots, \pi(\vec{a}_{n-1}) = A_{n-1}$. Kuna baasi
 $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$ vektorid ei ole nullvektorid, kus iga $\vec{a}_i \in Q'_n$
nõrg sellest tulevalt $\pi(\vec{a}_i) = A_i$ kuulub hüperalaamruumi
 $\pi(Q'_n)$. Kuna vektorisüsteem $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$ on lineaarselt
rõltumatu, siis punktisüsteem $\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ on projektiiv-
selt sõltumatu. Jät saame, et hüperalaamruumi ehk
lineaari andmehes P_n tuleb võtta teinest n punktist
kõikide projektiivselt sõltumatu punktisüsteem
 $\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$, $\vec{a}_i \in P_n$. Siis meenub meil moodustada
vektorisüsteem $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$, mis on lineaarselt sõltumatu,
viimane abil meil moodustada n -mõistmeline alamruum,
 $Q_n = L(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$, kusjuures $P_n = \pi(Q'_n)$.

89
 Yaga alamruumi P_n igat punkti X saab eseloomustada, sest
 vektor $\vec{x} \in Q_n'$ abil $\vec{x} = t^i \vec{a}_i$. Votta propätiivse
 reepere $\{E_1, E\}$ teist korda täpsemat määratud vektor-
 süsteini $\{\vec{e}_1, \vec{e}\}$, kus $\vec{e}_1 \in E^{-1}(E_1)$ ja $\vec{e} \in E(E)$, $\sum_{i=0}^n \vec{e}_i = \vec{e}$,
 Punkti X koordinaadid on vektor $\vec{x}$ koordinaadid V_n ,
 baasi $\{\vec{e}_1\}$ suhtes — $\vec{x} = x^1 \vec{e}_1$. Punkti X konal $X(x^1)$,
 Kui $X \in P_n$, siis $\vec{x} \in Q_n' \subset Q_n$, siis ehk $\vec{x} \in Q_n$, Suga
 koordinaadid $\vec{x} = (x^1)$ rahuldavad võrandit tüüpi.

$$a_2 x^1 = 0,$$

Esiprool on kirjeldatud, kuidas leida kordajad a_2 ,
 Kui $x^1 = c^1$ on vüman lahendus — $a_2 c^1 = 0$, siis
 on ka lahendus $x^1 = \lambda c^1$, $\lambda \in \mathbb{R}'$, sest

$$a_2 (\lambda c^1) = \lambda (a_2 c^1) = \lambda \cdot 0,$$

Jätame mänuks välja ka null-lahendus $x^1 = 0$, ja
 vaatleme selle süsteini lahenduse lahendite komplekti
 λc^1 , $\lambda \in \mathbb{R}'$, mis vüman ^{määrab} ~~on~~ (alamruumi P_{n-1} punkti X
 lahendus λc^1 abil. Selline tõlgendus on $a_2 x^1 = 0$
 kirjutasandis 2. lineaari võrrand.

Märgime, et P_{n-1} määratud punkti $\{A_0, \dots, A_{n-1}\}$
 abil, Kui see punktisüstein arendada meega $\{B_1, \dots, B_{n-1}\}$
 siis vüman ^{määrab} kirjeldada erandiga vektorite,
 s.o. Q_n erandiga baasid $\{\vec{a}_1\}$ ja $\{\vec{b}_1\}$ abil Esiprool
 on näidatud, et võrrand $a_2 x^1 = 0$ kasutab nullist
 erandiga tegevise ehk kordajad a_2 on määratud
 nullist erandiga tegevise $\lambda \in \mathbb{R}'$ täpsemat vii kogu
 on seda propätiivse ruumi punkti koordinaadid
 propätiivse ruumi ^{projektiivse} reepere suhtes.

Pöördume tagasi lineaari võrrandi juurde.
 Oustab, et teda saab esitada ka determinandina. Nimelt

arendades a_2 -d silemi võrrandit, saame

$$\begin{vmatrix} x^0 & a_0^0 & \dots & a_{n-1}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^2 & a_0^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & a_0^n & \dots & a_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Et veeendada viimase võrrandis, tuleb arendada viimast silemest veeru järgi,

Küsimus nüüd, kas iga võrrand $\bar{a}_2 x^2 = 0$, kas kõik kordajad $\bar{a}^2$ ei ole korraga nullid, määrat lineaari? Osutub, et see on tõepoolest nii. Täpsemalt see lineaar on silem, et teda määravaas võrrandis on ette võetud võrrand $\bar{a}_2 x^2 = 0$.

Nüüd võtame võrrandi

$\bar{a}_2 x^2 = 0$, kus kõik $\bar{a}_2$ -d ei ole nullid. Olgu näiteks $\bar{a}_n \neq 0$. Tõttud eeldus ei ole üldiselt kehtiv, sest $\bar{a}_i \neq 0$ korral kehtib analoogiliselt. Keskume võrrandit teguriga $\frac{1}{\bar{a}_n} \neq 0$. Saame

$$\bar{a}_2 x^2 = 0 \Leftrightarrow b_2 x^2 = 0, \quad b_2 = \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_n}.$$

Detaililt

$$b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0 \quad (8)$$

Modustame koordinaatide abil projektsiooni ruumi P_n punktid

$$B_0 (1:0:0:\dots:0:(-b_0)),$$

$$B_1 (0:1:0:\dots:0:(-b_1)),$$

$$B_{n-1} (0:0:0:\dots:1:(-b_{n-1})),$$

Viimaste koordinaadid saadakse võrrandist (8), kui ka ^{koost} võrrandit $\bar{a}_2 x^2 = 0$. Punktisüsteem $\{B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}$ on projektivselt sõltumatu, sest vastavalt

$$\vec{b}_0 = \vec{e}_0 + (-b_0)\vec{e}_n, \quad \vec{b}_{n-1} = \vec{e}_{n-1} + (-b_{n-1})\vec{e}_n, \quad (9)$$

mis rehkelduvad $\pi(\vec{b}_0) = B_0, \dots, \pi(\vec{b}_{n-1}) = B_{n-1}$, moodustatud
vektorite $\{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}\}$ on lineaarselt sõltumatu, sest
võrreli

$$\xi^0 \vec{b}_0 + \xi^1 \vec{b}_1 + \dots + \xi^{n-1} \vec{b}_{n-1} = \vec{0}$$

lahendamisel saame korr (9) abil

$$\xi^0 (\vec{e}_0 - b_0 \vec{e}_n) + \xi^1 (\vec{e}_1 - b_1 \vec{e}_n) + \dots + \xi^{n-1} (\vec{e}_{n-1} - b_{n-1} \vec{e}_n) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi^0 \vec{e}_0 + \xi^1 \vec{e}_1 + \dots + \xi^{n-1} \vec{e}_{n-1} + [- (\xi^0 b_0 + \xi^1 b_1 + \dots + \xi^{n-1} b_{n-1})] \vec{e}_n = \vec{0},$$

Seega $\{\vec{e}_i\}$ lineaarselt sõltumatu tõttu võimest saame

$$\xi^0 = 0, \xi^1 = 0, \dots, \xi^{n-1} = 0, \quad - (\xi^0 b_0 + \xi^1 b_1 + \dots + \xi^{n-1} b_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi^0 = 0, \xi^1 = 0, \dots, \xi^{n-1} = 0,$$

mis tähistabki väärdelava vektorsüsteemi lineaarselt sõltumatus,
n-mõistmeline alamruum

$$Q_n = L(\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1}) \subset V_{n+1}$$

määrab projektsiooni ruumi P_n lineaarselt $\pi(Q'_n)$. Oletades, et
konstrueeritud lineaarselt $\pi(Q'_n)$ võrreldes on ette võetud
võrrand $a_n x^n = 0$. Selles ruumis $\pi(Q'_n)$ võrreli. Punktide
 $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ koordinaatide abil saame maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix},$$

mille abil saame

$$D_0 = (-1)^n b_0, \quad D_1 = (-1)^{n+1} b_1, \dots, \quad D_{n-1} = (-1)^{2n-1} b_{n-1}, \quad D_n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = (-1)^n b_0, \quad a_1 = (-1)^{n+1} b_1, \dots, \quad a_{n-1} = (-1)^n b_{n-1}, \quad a_n = (-1)^n.$$

Seega lineaarselt $\pi(Q'_n)$ võrreli, on

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

ehk

$$(-1)^k b_0 x^0 + (-1)^k b_1 x^1 + \dots + (-1)^k b_{n-1} x^{n-1} + (-1)^k x^n = 0 \quad | \cdot (-1)^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0 \quad | \cdot \bar{a}^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}_0 x^0 + \bar{a}_1 x^1 + \dots + \bar{a}_n x^n = 0 \quad \Leftrightarrow \bar{a}_n x^n = 0.$$

Seega lineaarset $\Pi(P_n')$ võrandit on tõepoolest ette võetud võrand $\bar{a}_n x^n = 0$. Täpsemalt tuleb öelda, et on võetud võrandite klass $(\lambda \bar{a}_n) x^n = 0$, kus λ kuulub hulka $\mathbb{R}'$.

Tähistame projektsiooni ruumi P_n lineaaride hulka Π_n abil ja võrandite klassi $(\lambda \bar{a}_n) x^n = 0, \lambda \in \mathbb{R}'$ hulka $\mathcal{V}_n$ abil, siis näeme, et leiab kujutat $\varphi: \Pi_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ kus igale lineaarsele seadusele vastab kirjeldatud viisil vastav võrandiklass. Tänu sellele, et võrandite klassi seadusele vastav lineaar, mille võrandiklassis on võetud võrandiklass. Seega leiab kujutat $\varphi: \mathcal{V}_n \rightarrow \Pi_n$, mis on kujutat $\varphi: \Pi_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ pöördkujutat, s.o. $\varphi = \varphi^{-1}$. Tänu, et kujutat, millel on olemas pöördkujutat on bijektsioon. Seega $\varphi: \Pi_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ on bijektsioon.

TEOREEM. Projektsiooni ruumi $\Pi(V_{n+1}) \rightarrow P_n$ lineaaride hulka Π_n on samuti projektsiooni ruumi $\bar{\Pi}: V_{n+1} \rightarrow \Pi_n$, see-juure, kus $\dim \Pi_n = \dim P_n$.

TOESTUS Definime kujutat $\bar{\Pi}: V_{n+1} \rightarrow \Pi_n$.

Selles me definime seltselt abikujutat $f: P_n \rightarrow \Pi_n$ järgmiselt. Võtame suvalise punkti $A \in P_n$, tal teinud korraga täpsusega punkti määratal koordinaadid $\lambda a^x (\lambda \in \mathbb{R}')$ kujutat projektsiooni ruumi Π_n iga punkti jaoks kõik koordinaadid korraga nullid, seega a^x -de seas on vähemalt üks null. Määratame võrand

$$\sum_{x=0}^n (\lambda a^x) x^x = 0,$$

mis määrab ^{punkt} Π_n liinid, tähistame $\ell(A)$. Tänu kujutat $f: P_n \rightarrow \Pi_n$

on bijektívne, sest tal on olema pöidkujitus: lineaar määrab ühenult väärdiklassi $\sum_{\lambda=0}^n (\lambda a^\lambda) x^\lambda = 0$, mille kordejate λa^λ abil saame määrata punkti $A(\lambda a^\lambda) \in P_n$.
Kujutuste

$$\pi: V_{n+1}' \rightarrow P_n, \quad f: P_n \rightarrow \Pi_n$$

korruks: $f\pi: V_{n+1}' \rightarrow \Pi_n$ ongi meile sobivaks kujutuseks, $\bar{\pi} = f\pi$. Selleks on vaja kontrollida, et valitud $\bar{\pi}$ rahuldab projektiivse ruumi definitsiooni kohaselt kolme aksiooni. Kuna f on bijektívne, siis on ta ka surjektívne. Seda on ka π , on teada, et surjektívne kujutus on surjektívne. Seega $\bar{\pi} = f\pi$ on surjektívne. Teisest, kui $\bar{\pi}(\bar{x}) = \bar{\pi}(\bar{y})$, siis

$$\bar{\pi}(\bar{x}) = \bar{\pi}(\bar{y}) \Leftrightarrow f\pi(\bar{x}) = f\pi(\bar{y}) \Leftrightarrow f(\pi(\bar{x})) = f(\pi(\bar{y})) \Leftrightarrow$$

(Arvestame, et f on ka injektívne)

$$\Leftrightarrow \pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y}) \Leftrightarrow \bar{y} = \lambda \bar{x},$$

Seega $\bar{\pi}$ rahuldab projektiivse ruumi teist aksiooni.

Oleme saanud, et $\bar{\pi}: V_{n+1}' \rightarrow \Pi_n$ on projektiivne ruum. Lisaks

$$\dim \Pi_n = \dim V_{n+1}' - 1 = \dim P_n \quad \square$$

12. PROJEKTIIVSE RUUMI SIDUMID. DUAALSUSE PRINTSIIP

Olgu $\pi: V_{n+1}' \rightarrow P_n$ n -mõõtmeline projektiivne ruum. Meenutame, et saaks tema punkte koordinaate, tuleb võtta projektiivne reeper $\{E_x; E_y\}$. Ta määrab kordeja $\lambda \in \mathbb{R}'$ täpse normeeritud vektoristseini $\{\bar{e}_x; \bar{e}_y\}$, kusjuures

$$\pi(\vec{e}_\alpha) = E_\alpha, \quad \eta(\vec{e}) = E, \quad \sum_{\alpha=0}^n \vec{e}_\alpha = \vec{e}.$$

Yün $\{\vec{e}_\alpha\}$ vektorruumi V_{n+1} baas, et saade punkti $A \in P_n$ koordinaate tuleb võtta kärke täpsusega määratud vektor $\vec{a} \in V_{n+1}$, nii, et $\pi(\vec{a}) = A$, ja avaldada baasi $\{\vec{e}_\alpha\}$ kaudu — $\vec{a} = a^\alpha \vec{e}_\alpha$. Vektori $\vec{a}$ koordinaadid a^α on üks seega punkti A koordinaatidest.

Eelmisest paragrahvist on meil olemas bijektsioon kujutatav projektiivselt ruumist P_n lineaaride projektiivsesse ruumi, tähistatuna $f: P_n \rightarrow \Pi_n$. Toimib see nii. Iga punkti $A \in P_n$ koordinaatide λa^α abil määratakse lineaarne $f(A)$ võrrandiga

$$\sum_{\alpha=0}^n (\lambda a^\alpha) x^\alpha = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sum_{\alpha=0}^n a^\alpha x^\alpha = 0. \quad (1)$$

See on tõesti lineaarne võrrand, sest projektiivselt ruumis pole punkti, mille kõik koordinaadid on nullid. Võrrandis (1) on x^α (täpselt λx^α) lineaarne $f(A)$ minituna punkti X koordinaadid.

DEFINITSIOON 1. Projektiivne ruum P_n m -mõõtme alamruumi P_m poolt määratud lineaaride hulk

$$f(P_m) = \{f(A) \mid A \in P_m\} \subset \Pi_n$$

nimitame lineaaride m -rdumaks

DEFINITSIOON 2. m -rdumane $f(P_m)$

kuuluvate lineaaride ühiste punktide hulk

$$T(P_m) := \bigcap_{A \in P_m} f(A)$$

nimitame m -rdumi $f(P_m)$ tuumaks $T(P_m)$.

järgnevas me uurime tume $T(P_m)$ elu tust,

alamruumi $P_m \subset P_n$ saame anda projektioonult sõltu-
matu punktisüsteemi $\{A_0, \dots, A_m\}$ abil, kus $A_0, \dots, A_m \in P_m$.

Võime eeldada lineaarselt sõltumatute vektorisüsteemi $\{\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_m\}$, kus $\pi(\vec{a}_0) = A_0, \dots, \pi(\vec{a}_m) = A_m$.

Lineaarkatte abil moodustatud alamruumi

$$Q_{m+1} = L(\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_m) \subset V_{n+1}$$

on selline, et $\pi(Q_{m+1}) = P_m$. Muutame kujutust

$$V_{n+1} \xrightarrow{\pi} P_n \xrightarrow{f} \Pi_n \Rightarrow V_{n+1} \xrightarrow{f\pi} \Pi_n \Leftrightarrow V_{n+1} \xrightarrow{\bar{\pi}} \Pi_n.$$

Uue kujutuse $\bar{\pi}$ saame rakendada Q'_{m+1} -le, saades

$$Q'_{m+1} \rightarrow \bar{\pi}(Q'_{m+1}) = f(P_m).$$

Arvestades, et $\bar{\pi}: V_{n+1} \rightarrow \Pi_n$ on projektioon ruumi, fa-
arvestades $f(P_m)$ on saadav Q'_{m+1} kujutuse $\bar{\pi}(Q'_{m+1})$
 $\bar{\pi}$ abil. Projektioon ruumi alamruumi märgib kohalt
saame öelda, et m -rdumi $f(P_m)$ on projektioon ruumi
 Π_n m -mõõtmelise alamruumi. Alamruumi $f(P_m)$ iga
punkt, s.o. lineaar, on antav võrrandiga

$$A \in P_m \Leftrightarrow \vec{a} \in Q'_{m+1}, \pi(\vec{a}) = A \Leftrightarrow \vec{a} = a^L \vec{e}_L; \sum_{L=0}^n (\lambda a^L) x^L = 0. \quad (3)$$

Kui punkt A kuulub alamruumis P_m , siis tekivad
 m -rdumi $f(P_m) = \bar{\pi}(Q'_{m+1})$ kõigi lineaaride võrrandid.

Nende võrrandite koostamismeetod

$$\begin{cases} \sum_{L=0}^n (\lambda a^L) x^L = 0 \\ A \in P_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{L=0}^n (a^L) x^L = 0 \\ A \in P_n \end{cases} \quad (3)$$

annab tume $\pi(P_m)$. Kuna

$$\vec{a} = t^0 \vec{a}_0 + t^1 \vec{a}_1 + \dots + t^m \vec{a}_m \Leftrightarrow a^L = t^0 a_0^L + t^1 a_1^L + \dots + t^m a_m^L$$

nii tume määrab süsteem (3) saab kehtida

$$\sum_{\lambda=0}^n (t^0 a_0^\lambda + t^1 a_1^\lambda + \dots + t^m a_m^\lambda) x^\lambda = 0, \quad (4) \quad 96$$

kus $t^0, t^1, \dots, t^m$ on suvalised reaalarvud, v.a. $t^0 = t^1 = \dots = t^m = 0$.
 Oustub, et süsteemist võib enamuse võranduid ära jätta, võttes ainult võrandid, kui parameetritele anname ainult järgmised väärtused

$$t^0 = 1, t^1 = \dots = t^m = 0; \quad t^0 = 0, t^1 = 1, t^2 = 0, \dots, t^m = 0, \dots$$

$$\dots, t^0 = t^1 = \dots = t^{m-1} = 0, t^m = 1.$$

Süsteemist (4) saame alamsüsteemi

$$\sum_{\lambda=0}^1 a_0^\lambda x^\lambda = 0, \sum_{\lambda=0}^1 a_1^\lambda x^\lambda = 0, \dots, \sum_{\lambda=0}^1 a_m^\lambda x^\lambda = 0 \quad (5)$$

Oustub, et süsteemidel (4) ja (5) on samad lahendid. On selge, et süsteemi (4) iga laheal on ka süsteemi (5) lahendiks ja vastupidi. Iga süsteemi (5) tuleb vaadelda tühjana $T(P_n)$ määrava võrandisüsteemina. Igaüks laheal $x^\lambda = 0$ ei ole lubatud. Lõikes lahendina tuleb vaadelda klassi λC^λ , kus C^λ on süsteemi (5) lahendiks. Kui need hõldeid ei löe, siis süsteem (5) määrab vektorruumi V_{n+1} alamruumi. Iida teame lineaarvõrandisüsteemide teooriat. Selle alamruumi mõõtmes on muutujate arv (praegu $n+1$) miinus süsteemi maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 & \dots & a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^0 & a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

astak. Kuna selle maatriksi ridadeks on lineaarselt sõltumatute vektorite $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ koordinaadid, siis

$$\text{rank } A = \text{rank } \{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} = m+1$$

Iida süsteemi (5) poolt määratud alamruumi n $(n+1)-(m+1)=$

$= n-m$ mõõtmeid. Tähistame teda Q_{n-m} . Seega⁹⁷ tume avaldub tema kaudu: $T(P_m) = \bar{\pi}(Q_{n-m})$.

Sit saame olulise tulemuse: tume $T(P_m)$ on projektsiooni ruumi Π_n alamruum mõõtme $n-m-1$.

TEOREEM. Olgu P_k ja P_m projektsiooni ruumi ^{P_n} alamruumid, mil $P_k \subset P_m$. Sel korral tume $T(P_k)$ ja $T(P_m)$ rahuldavad $T(P_m) \subset T(P_k)$, s.o.,

$$P_k \subset P_m \Rightarrow T(P_m) \subset T(P_k),$$

TÕESTUS. Tume $T(P_m)$ ja $T(P_k)$ antakse süsteemidega:

$$T(P_m): \begin{cases} \sum_{\alpha=0}^n a^\alpha x^\alpha = 0 \\ A(a^\alpha) \in P_m \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{ja} \quad T(P_k): \begin{cases} \sum_{\alpha=0}^n a^\alpha x^\alpha = 0 \\ A(a^\alpha) \in P_k. \end{cases} \quad (7)$$

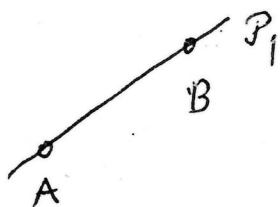
Kuna $A \in P_k$ korral ka $A \in P_m$, siis süsteem (7) on osa süsteemist (6). Teisiti süsteemi (6) iga lahend on ka süsteemi (7) lahend. Järeldub $T(P_m) \subset T(P_k)$. ■

See teoreem on oluline projektsiooni ruumi duaalse printsiibi rihastamises. Õigemini see teoreem sisuliselt ongi duaalse printsiip. Teda rakendatakse olukorras, kui P_k on nullmõõtuline, s.o. koosneb ühest punktist, ja P_m on lineaar, s.o. $P_0 \stackrel{+}{=} A$ ja $P_m = P_{n-1}$. Sel korral tume $T(P_0) = T(A)$ on $n-m-1 = n-0-1 = n-1$ mõõtuline, s.o. $T(A)$ on lineaar. Tõest tume $T(P_{n-1})$ on $n-(n-1)-1 = 0$ mõõtuline, s.o. punkt $T(P_{n-1}) \stackrel{+}{=} B$. Teoreem annab

$$A \in P_{n-1} \Rightarrow (\pi(P_{n-1}) = B) \in T(A)$$

Kui projektivne ruumi osas on projektivne tasand, siis lineaarilis on projektivne ruum ja alamruumid, $P_m = P_0$, s.o. punktid.

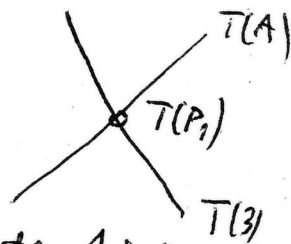
Vaatleme näitena olukorda, kus punktid A ja B kuuluvad projektivsele sirgele. Tuumad $T(A)$ ja $T(B)$ projektivsed sirged ja lineaar $T(P_1)$ on punktid. Viimase teoreemi kohaselt



$$A \in P_1 \Rightarrow T(P_1) \in T(A),$$

$$B \in P_1 \Rightarrow T(P_1) \in T(B)$$

millest $T(P_1) \in T(A) \cap T(B)$.



Me saime lause! Kaks erinevat punkti A ja B määravad need lätidat sirge P_1 .

Automaatselt tekis teine lause; Kaks projektivset sirget lätidat ühest punktist (s.o. lõikuvad).

Projektivse geometria sõnad "kuuluma" geomeetria sõnaga "intidendent". Jäs tõdal lause saab sõnastada

Sirge on intidendent kaks erinevat punkti.

Teine lause (duaalne lause)

Punkt on intidendent kaks ^{erinev} sirge

Oluline on märgata, etime lause sõnad "sirge" ja "punkt" tuleb ära vahetada, et saada teine (duaalne) lause.

13. PROJEKTIVSE RUUMI LIIKUMISED, PROJEKTIVSE GEOMEETRIA MÕISTE

Eespool on juttu afiinse ruumi, tema erijähtude – skalaarkorrutisega afiinsete ruumide liikumistest. Jän me tähele rääkida projektivse ruumi liikumistest. Edasvalt me räägime üldisemast mõistest.

DEFINITSIOON 1. Me ütleme, et hulgal $K \neq \emptyset$ on antud rühma G tõime, kui on antud kujutus

$$G \times K \rightarrow K; (g, X) \mapsto g(X),$$

mis rahuldab aksioome

$$1^\circ (gh)(X) = g(h(X)), \quad \forall g, h \in G, \quad \forall X \in K;$$

$$2^\circ e(X) = X, \quad e \in G \text{ (ühikulement)}, \quad \forall X \in K,$$

Kõik eespool toodud liikumised on seda tüüpi, s.o. vaadeldava teatava rühma tõime. Rühma tõime antakse koordinaatide abil. Selleks vaadeldaval ruumil peavad olema lõplikumõistmised, et saaks valida vektorruumi korral baasi, afiinsel ruumil korral referentsi. Tõime ^{mõnel} eespool toodud näited praeguse käsitluses.

NÄIDE 1. Olgu V_n lõplikumõistmeline vektorruum. Tema liikumiste rühmas on automorfismide $\text{Aut } V_n$ rühm ehk isomorfne rühm, s.o. täielik lineaar-rühm $GL(n, \mathbb{R})$. Mistas baasi $\{\vec{e}_i\}$ korral iga vektori $\vec{x} \in V_n$ saab avaldada baasi kaudu $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, kus kordajad on vektori $\vec{x}$ koordinaadid. Tähistame $\vec{x} = (x^i)$. Iga $A = (a_i^j)$ korral rühmast $GL(n, \mathbb{R})$ moodustame arvud $\vec{x}^i = a_i^j x^j$ ja nende abil vektori $\vec{x}' = \vec{x}^i \vec{e}_i$. Vektor $\vec{x}'$ ongi vektori $\vec{x}$ kujutis rühma $GL(n, \mathbb{R})$ elemendi A abil. Kerge on kontrollada, et definitsiooni 1 aksioomid on täidetud. Iga vektorruumi liikumine on rühma $GL(n, \mathbb{R})$ tõime vektorruumil V_n .

Järgmine aspekt vektorruumi liikumistele on see, kui valitud A tähistab ka baasi teisendamist

$$\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{A} \{\vec{e}'_i\}; \quad \vec{e}'_i := a_i^j \vec{e}_j.$$

LAUSE. Vektoril $\vec{x}$ ja $A \in GL(n, \mathbb{R})$ abil leitud kujutisvektoril $\vec{x}'$ vastavalt baasid $\{\vec{e}_i\}$ ja $\{\vec{e}'_i\}$ on samad koordinaadid.

TÕESTUS. Vektori $\vec{x}$ koordinaadid baasil $\{\vec{e}_i\}$ on $\vec{x}^i = a^i_j x'^j$, mille abil saame

$\vec{x} = \vec{x}^i \vec{e}_i = (a^i_j x'^j) \vec{e}_i = x'^j (a^i_j \vec{e}_i) = x'^j \vec{e}'_j = x'^i \vec{e}'_i$
 Süt näeme, et vektoritel $\vec{x}$ ja $\vec{x}'$ on võetud baasidel samad koordinaadid. ■

NÄIDE 2. Olgu A_n lõpliku mõõtmelise afiinne ruumi nihetruumiga V_n . Tema liikumiste rühmas on pööratavad afiinsed teisendused, s.o. rühm $G(A_n)$, mille elementides on $(n+1)$ -järku regulaarset maatriksid kujul

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c^1 & & & \\ c^2 & & A & \\ \vdots & & & \\ c^n & & & \end{pmatrix}, \text{ kus } A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

(Rühm $G(A_n)$ on rühma $GL(n+1, \mathbb{R})$ alamrühm.)
 Mistahes reperi $\{O; \vec{e}_i\}$ korral iga punkti $X \in A_n$ koordinaatides on kohavektori $\vec{OX} \in V_n$ koordinaadid baasil $\{\vec{e}_i\}$. Tege avaldades $\vec{OX} = x^i \vec{e}_i$, saame $X(x^i)$. Võttes elemendi $\bar{A} \in G(A_n)$ tekitab $A = (a^i_j)$ rühmas $GL(n, \mathbb{R})$ Definemme

$$\vec{x}^i = a^i_j x'^j + c^i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

nüüd meile abil $X'(\vec{x}^i)$, kusjuures $\vec{OX}' = \vec{x}^i \vec{e}'_i$,
 olemegi andnud liikumise koordinaatide abil,

Ka nüüd iga $\bar{A} \in G(A_n)$ tekitab reperi teisendamise

$$\{\sigma; \bar{e}_i\} \xrightarrow{\bar{A}} \{\sigma'; \bar{e}'_i\},$$

kus σ ja $\bar{e}_i$ antakse valemitega

$$\sigma(c^i) \Leftarrow \bar{\sigma}\bar{e}'_i = c^i \bar{e}_i, \quad \bar{e}'_i = a^j_i \bar{e}_j.$$

LAUSE. Punktis $X \in A_n$ ja $\bar{A} \in G(A_n)$ abil leitud kujutispunktis $X' \in A_n$ on samad koordinaadid leitud vastavalt reperite $\{\sigma; \bar{e}_i\}$ ja $\{\sigma'; \bar{e}'_i\}$ suhtes,

TÕESTUS. Punkti X koordinaate tähistame x^i , kujutispunktis X' koordinaadid leidume valemi $\bar{x}^i = a^i_j x^j + c^i$ abil, reperi $\{\sigma; \bar{e}_i\}$ suhtes. Leidame X koordinaadid reperi $\{\sigma'; \bar{e}'_i\}$ suhtes. Tuleb leida kohavektori $\bar{\sigma}X'$ koordinaadid baasil $\{\bar{e}'_i\}$. Tähtsuse võrdusest

$$\bar{\sigma}\bar{e}'_i + \bar{\sigma}X' = \bar{\sigma}X,$$

milleni

$$c^i \bar{e}_i + \bar{\sigma}X' = x^j \bar{e}_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^i \bar{e}_i + \bar{\sigma}'X' = (a^i_j x^j + c^i) \bar{e}_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}'X' = (a^i_j x^j) \bar{e}_i = x^j (a^i_j \bar{e}_i) = x^j \bar{e}'_j = x^i \bar{e}'_i,$$

Jät X koordinaatideks reperi $\{\sigma'; \bar{e}'_i\}$ on x^i , s.o.

X koordinaadid reperi $\{\sigma; \bar{e}_i\}$

Nende näidetega me jõudume. Et lühikalt anda projektsiooni ruumi liikumised võtame definitsiooni aluseks rühma näite analoogilised laused

Olgu antud projektsiooni ruum $\pi: V_{k+1}' \rightarrow P_k$,

mis on alama projektsiooni ruumi $G(P_k)$, mis on

täieliku lineaarrühmast $G(k+1, \mathbb{R})$: skalaarmatriksite

alamrühma $H = \{ \lambda E \mid \lambda \in \mathbb{R}' \}$ abil moodustatud faktor-
rühm. Seega $G(P_n) = GL(n+1; \mathbb{R}) / H$. Lähitundes näitatakse,
elementidest $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ faktorrühma $G(P_n)$ elemendi
saame ^{järgnevalt} $[A] = \{ \lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}' \}$. Seejärel kinnitatakse
kõik järgnevalt

$$[A] \cdot [B] = [A \cdot B],$$

See kõik on eestpoolelt teada,

Päname nüüd koordinaatide abil teada rühma
 $G(P_n)$ elementide toime projektiivsel ruumil P_n .
Tuleb võtta projektiivse ruumi $\{E_2; E\}$, et näitaks
punktidel $X \in P_n$ tekitasid koordinaadid. Mõnetunde
see formalism käis nõnda: Teab leida kordaja täpsuse
määratud vektorid $\{\vec{e}_2, \vec{e}\}$, kusjuures $\pi(\vec{e}_2) = E_2$ ja
 $\pi(\vec{e}) = E$. Kehtib ka normeeritud tingimus $\sum_{i=0}^n \vec{e}_i = \vec{e}$, mis
ei ole mitte otseselt vajalik. Punktide $X \in P_n$ koordi-
naatide saamiseks tuleb võtta kordaja täpsuse

määratud vektor $\vec{x} \in V_{n+1}$, kus $\pi(\vec{x}) = X$, ja aval-
dada baasi $\{\vec{e}_2\}$ kaudu $\vec{x} = x^2 \vec{e}_2$. Tema koordi-
naatide x^2 abil saame punkti X koordinaadid λx^2

($\lambda \in \mathbb{R}'$) kui koordinaatide klass. ^{Tähistame seda klassi $[x^2]$.} Rühma $G(P_n)$
elemendi $[A] = (\lambda a_\beta^2) = [a_\beta^2]$ abil defineerime koordi-
naadid

$$[\vec{x}^2] = [a_\beta^2] \cdot [x^\beta] = [a_\beta^2 x^\beta] \tag{1}$$

Võime abil saab moodustada uue punkti - tähistame X' ,
mille koordinaatideks võtame $[\vec{x}^2] = \{ \lambda' x^2 \mid \lambda' \in \mathbb{R}' \}$. Siis
 $X'(\lambda' x^2)$. Punkt X nimetame punkti X kujuti-
set projektiivse rühma $G(P_n)$ elemendi $[A]$ abil.

Valemi (1) võime kirjutada ka
vektoriga kaudu

$$\vec{x} = (x^2) \Rightarrow \vec{x}^2 = a_\beta^2 x^\beta \Rightarrow \vec{x}' = x^2 \vec{e}_2 \Rightarrow X' = \pi(\vec{x}') \Rightarrow \tag{2}$$
$$\Rightarrow X'(\lambda' x^2).$$

Jälgib, et projektiivsete teisenduste korral kehtib näidetes 1 ja 2 toodud lause. Nimelt iga $[A] \in G(P_n)$ tekitab projektiivse reeperi $\{E_2, E\}$ teisenduse

$$\{E_2; E\} \longrightarrow \{E'_2; E'\}$$

järgmiselt. Võtame $A = (a_{\alpha}^{\beta})$, mille abil moodustame

$\vec{e}'_2 := a_2^{\beta} \vec{e}_{\beta}$. Samuti tekitab $\vec{e}'$ (vaata paragrahvi "Projektiivne reeper"). Vektorruutem $\{\vec{e}'_2, \vec{e}'\}$ määrab punktide $E'_2 := \pi(\vec{e}'_2)$ ja $E' := \pi(\vec{e}')$ abil uue projektiivse reeperi $\{E'_2; E'\}$.

LAUSE. Punktidel $X \in P_n$ ja $[A] \in G(P_n)$ abil loetud kujutis/punktidel X' on samad koordinaadid loetuna vastavalt projektiivsete reeperide $\{E_2; E\}$ ja $\{E'_2; E'\}$ suhtes.

TÕESTUS. Lähtume valemist (2). Tekib võrdust

$$\begin{aligned} X(\lambda x^2) &\Leftrightarrow \vec{x} = x^2 \vec{e}_2 \Rightarrow 'x^2 = a_2^{\beta} x^{\beta} \Rightarrow \vec{x} = x^2 \vec{e}_2 = \\ &= (a_2^{\beta} x^{\beta}) \vec{e}_2 = x^{\beta} (a_2^{\beta} \vec{e}_2) = x^{\beta} \vec{e}'_2 = x^{\beta} a_2^{\alpha} \vec{e}'_{\alpha} \\ &\Rightarrow X'(\lambda x^2). \end{aligned}$$

Näeme, et X' koordinaadid projektiivse reeperi $\{E'_2; E'\}$ suhtes on λx^2 , samad mis punktidel X projektiivse reeperi $\{E_2; E\}$ suhtes. $\square$

Järgnevas tõestame kaks teoreemi.

TEOREEM 1. Rühma $G(P_n)$ iga element kujutab projektiivselt sõltumata punkti süsteemi projektiivselt sõltumatuks punkti süsteemiks.

TÖESTUS. Olgu projektivne ruumi P_n punktisüsteem $\{B_0, B_1, \dots, B_m\}$ projektivselt sõltumatu. Ial kernal iga vektorisüsteem $\{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$, kus $\pi(\vec{b}_i) = B_i$, $i=0, 1, \dots, m$, on lineaarselt sõltumatu. Avaldades iga vektori $\vec{b}_i$ ruumi $\{E_1, E\}$ indutseeritud baasi $\{\vec{e}_1\}$ kaudu

$$\vec{b}_i = b_i^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$$

saame punktide B_i koordinaadid λb_i^{α} , $\lambda \in \mathbb{R}^1$,

Valemi (2) kohaselt moodustame $\vec{b}'_i := a^{\alpha}_{\beta} b^{\beta}_i$,

kus $[A] = [a^{\alpha}_{\beta}]$. Jaame moodustada vektorid

$$\vec{b}'_i = b'^{\alpha}_i \vec{e}_{\alpha} \quad \text{neude abil punktid} \quad B'_i := \pi(\vec{b}'_i)$$

Punktrisüsteem $\{B'_0, B'_1, \dots, B'_m\}$ on punktisüsteem $\{B_0, B_1, \dots, B_m\}$ kujutiseos rühma $G(P_n)$ elemendi $[A]$ abil.

Vaja on näidata, et punktisüsteem $\{B'_0, B'_1, \dots, B'_m\}$ on projektivselt sõltumatu ehk teadeti vektorisüsteem $\{\vec{b}'_0, \vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m\}$ on lineaarselt sõltumatu. Tegeme algebra kursuse tulemustele. Sillas defineerime $(n+1, m+1)$

maatriksid $B' = (b'^{\alpha}_i)$ ja $B = (b^{\beta}_i)$. Olemas on juba $(n+1)$ -järku regulaarne maatriks $A = (a^{\alpha}_{\beta})$. Jaame kirjutada

$$b'^{\alpha}_i = a^{\alpha}_{\beta} b^{\beta}_i \Leftrightarrow B' = AB,$$

Algebrast teame, et regulaarne A kernal (praegu kui on)

on $\text{rank } B' = \text{rank } B$ maatriksite B ja B'

vargudeks on vastavalt vektorite $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ ja $\vec{b}'_0, \vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m$

koordinaadid. Vektorisüsteem $\{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ on

lineaarselt sõltumatu, mistõttu $\text{rank } \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} = m+1$.

Kuna algebrast teame, et $\text{rank } B = \text{rank } \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$, kus

$\text{rank } \{\vec{b}'_0, \vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m\} = \text{rank } B' = \text{rank } B = \text{rank } \{\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} =$
 $= m+1$. Seega vektorisüsteem on vektorisüsteemi astaku
 definitsiooni kohaselt lineaarselt sõltumatu. Punktisüsteem $\{B'_0, B'_1, \dots, B'_m\}$ on projektiivselt sõltumatu. $\square$

TEOREEM 2. Projektiivse ruumi iga element kujutab projektiivse ruumi iga alamruumi taas alamruumiks, millele mõõtmel on võrdus.

TÕESTUS. Olgu P_m projektiivse ruumi P_n m -mõõtmeline alamruum. Tema võib anda temalt sõltuvalt $(m+1)$ projektiivselt sõltumatu punkti abil. Tähistame seda punktisüsteemi $\{B_0, B_1, \dots, B_m\}$ abil, kus $B_0, B_1, \dots, B_m \in P_m$. Viimasti abil saame kõige parema alamruumi P_m parameetridel viiendada. näge teame espooll. Tõuues see järgnevalt. Võtame vektorid $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \in V_{n+1}$, nii et $\pi(\vec{b}_i) = B_i$ ($i=0, \dots, m$). Iga $X \in P_m$ saame ikalle vektorile $\vec{x}$, kus $\pi(\vec{x}) = X$, abil

$$\vec{x} = t^0 \vec{b}_0 + t^1 \vec{b}_1 + \dots + t^m \vec{b}_m,$$

kus $t^0, t^1, \dots, t^m$ omavahel kõik väärtused võivad võtta, v.a. juht $t^0 = t^1 = \dots = t^m = 0$, Viimane koordinaatide

$$x^\lambda = t^0 b_0^\lambda + t^1 b_1^\lambda + \dots + t^m b_m^\lambda, \quad (3)$$

Jään $\lambda x^\lambda, \lambda b_0^\lambda, \dots, \lambda b_m^\lambda$ on vastavalt punktide $X, B_0, \dots, B_m$ koordinaadid mõnigi projektiivses ruumis $\{E_\lambda; B'_\lambda\}$. Võtame suvalise elemendi $[A] = [a_\beta^\lambda]$ projektiivselt ruumist, mille abil moodustame punktide $X, B_0, \dots, B_m$ kujutised. Tõuues, tulb moodustada

$$\vec{x}^\lambda = a_\beta^\lambda x^\beta, \quad \vec{b}_0^\lambda = a_\beta^\lambda b_0^\beta, \dots, \vec{b}_m^\lambda = a_\beta^\lambda b_m^\beta, \quad (4)$$

mille abil saame $\vec{x}^\lambda$ ($\vec{b}_0^\lambda, \dots, \vec{b}_m^\lambda$)

Kui $X \in P_m$, siis tema kujutuse $\bar{X}$ koordinaadid
valemi (3) kohaselt saame avaldada järgnvalt

$$\begin{aligned} \bar{x}^\alpha &\stackrel{(4)}{=} a_\beta^\alpha x^\beta \stackrel{(3)}{=} a_\beta^\alpha (t^0 b_0^\beta + t^1 b_1^\beta + \dots + t^m b_m^\beta) = \\ &= t^0 (a_\beta^\alpha b_0^\beta) + t^1 (a_\beta^\alpha b_1^\beta) + \dots + t^m (a_\beta^\alpha b_m^\beta) = \\ &\stackrel{(4)}{=} t^0 \hat{b}_0^\alpha + t^1 \hat{b}_1^\alpha + \dots + t^m \hat{b}_m^\alpha \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}^\alpha = t^0 \hat{b}_0^\alpha + t^1 \hat{b}_1^\alpha + \dots + t^m \hat{b}_m^\alpha \quad (5)$$

Võime määrat alamruumi P_m kujutuse punktide $\bar{X}$
koordinaadid, seega ka punktid $\bar{X}$. Võttes (5)
tunneme ära P_m kujutuse punktide hulk $\{X'\}$
on alamruum. See on teoreemist – alamruum
kujutub alamruumiks – on tõestatud. Arutleme
kujutuse ruumi mõtte üle. Võttes (5) taas
näeme, et mängus on punktid $B'_0, B'_1, \dots, B'_m$
koordinaadid. Teoreemi 1 kohaselt süstein $\{B'_0, B'_1, \dots, B'_m\}$
on projektivselt sõltumatu. Seega kujutis-alamruumi
mõtte on ühe võna väiksem kui punktide arv, s.o.
 m , sama, mis P_m mõde. Teoreem on tõestatud. $\square$

Lõpuks sõnastame projektivse geomeetria
mõiste. Projektivse geomeetria ruum projektioon
ruumi P_n alamhulga neid omadusi, mis saadakse,
kui alamhulga kujutamisel ruumi alamhulgas, mis kehtib
komendi abil rühmast $G(P_n)$. Võime on tõestatud
Klein'i postulaate kohaselt.

14. PROJEKTIIVSE RUUMI

KVADRIKUD.

Vastava mäisteni jõudmikul meenutame analoogi-
lise asju analüütilisest geometriast. Võtame tasandi,
mis seal oli eukleediline afiinne tasand E_1 . Fiktiiv-
ses tasandil E_2 rupev $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tekivad
igal punktil $X \in E_2$ koordinaadid, milles võetakse
kohevektor $\vec{OX}$ koordinaadid avaldusest

$$\vec{OX} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 \Rightarrow X(x^1, x^2).$$

Iga sümmeetrilise maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kanal $A^T = A$, millest ^{same} $a_{21} = a_{12}$, Väiman abil
moodustatakse võrrand

$$a_{11}x^1x^1 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}x^2x^2 + 2a_1x^1 + 2a_2x^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}x^ix^j + 2a_ix^i + a = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

Võrrand määrab teatava punktihulga, mida nimeta-
takse teist järku kõveraks.

Eukleediline ruum E_3 kanal rupev $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
suhtes tekib igal punktil $X \in E_3$ kolm koordinaati
 x^1, x^2, x^3 lestu avaldusest

$$\vec{OX} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 \Rightarrow X(x^1, x^2, x^3).$$

Võttes nüüd null-maatriksist erineva kolmanda
järku sümmeetrilise maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}$$

moodustame viimandi

võrand.

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Punktihulka, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrandit (2), nimetatakse teist järku pööraks.

Teist järku kõvera ja pööraka mõiste on üldistatav kõrgema mõõtmelise eukleedilise (afiinse) ruumi E_n juhtide. Võtame taas reperi $\{O; \vec{e}_i\}$, et ^{mistahes} saada punkti $X \in E_n$ koordinaadid avalduse

$$\vec{OX} = x^i \vec{e}_i \Rightarrow X(x^i).$$

Mistahes nullmaatriksist erineva n -järku sümmeetrilise maatriksi $A = (a_{ij})$, kus $A^T = A$, korral moodustatakse võrand

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + a = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Punktihulka, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrandit (3), nimetatakse kvadriks. Siiet näeme, et $n=2, 3$ korral saame vastavalt teist järku kõvera ja pööraka.

Märgime, et kvadriksit ei pea ^{siiski} vaatluse eukleedilises, afiinses ruumis, vaid võib vaadelda afiinses ruumis A_n .

Pärast tehtud viisjohatust püüame anda kvadriksile mõiste projektiivses ruumis P_n . Kuusa võrrand, mis peab kvadriksile andma, kaib punkti koordinaatide kohta, mis sellest tingituna tuleb võtta projektiivse reperi $\{\vec{E}_i; \vec{E}\}$, mille suhtes iga punkt $X \in P_n$ saab koordinaadid $X(\lambda x^a)$.

Eralgne mõte on projektiivse ruumi kvadriks võrandiga (3), s.o. võtame nullmaatriksist erineva $(n+1)$ -järku sümmeetrilise maatriksi $A = (a_{ij}^B)$ ja

109

$(n+2)$ konstanti a_α^λ ja a way moodustame võrrandi,

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2a_\alpha x^\alpha + a = 0. \quad (4)$$

Osutub, et sellisel kujul kvadrüku võrrandit võtta ei saa. Nimelt kui me võrrandile (4) ühe lahendi $x^\alpha = c^\alpha$ leiame, siis

$$a_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta + 2a_\alpha c^\alpha + a = 0 \quad (5)$$

Kuid komplekt c^α ei pea veel määrame projektivse ruumi punkti. Punkt määratakse siis, kui võrrand (4) lahendiks on veel λc^α iga $\lambda \in \mathbb{R}'$ korral. Kontrollime: Asendame võrrandisse (4) ja kasutame seost (5), saame

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} (\lambda c^\alpha) (\lambda c^\beta) + 2a_\alpha (\lambda c^\alpha) + a &= \lambda^2 a_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta + \lambda (2a_\alpha c^\alpha) + a = \\ &= (\lambda-1) (2a_\alpha c^\alpha), \end{aligned}$$

(5)

mis reeglina ei võidu nulliga. Et kvadrüku võrrandil oleks omades, et lahendil on klemide hulgal λx^α tuleb kvadrüku defineerida valem

$$K: a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad (6)$$

kus $A = (a_{\alpha\beta})$ on sümmeetriline maatriks, mis on nullmaatriksist erinev. Viimase juhul näeme, et kui lahendiks on c^α , siis on seda ka λc^α , $\lambda \in \mathbb{R}'$. Jaga võrrand (6) määrab projektivses ruumis punkti. Võrrand (6) lahendite λc^α sealt tuleb ära jätta null-lahend λc^α , kus $c^\alpha = 0$, sest projektivse ruumi punktidel on vähemalt üks koordinaat nullist erinev. Märkime veel, et võrrandis (6) ka maatriks A on määratud kordaja täpsusega. Tegelikult A asemel on klass λA , kus $\lambda \in \mathbb{R}'$. Jaga A asemel on $[A]$. Ka x^α asemel on klass λx^α ehk $[x^\alpha]$. Tegelikult

$$K: [A][x^\alpha][x^\beta] = 0, \quad (7)$$

Võrrandit (6) tuleb vaadelda võrrandi (7) ühe erivormi-
jana,

Jelgitame, kuidas teineks koodraku maatriks
projektiivse reperi teisendamisel

$$\{E_\alpha; E\} \xrightarrow{[C]} \{E'_\alpha, E'\}$$

kus $[C] \in G(P_n)$, Kui tähistada $[C] = [c_\alpha^\beta]$, siis
punkti X vana koodinaatid $[x^\alpha]$ tõrnuvad uude
koodinaatides $[\hat{x}^\alpha]$ valemiga

$$x^\alpha = c_\beta^\alpha \hat{x}^\beta \Leftrightarrow [\hat{x}^\alpha] = [c_\beta^\alpha][\hat{x}^\beta]. \quad (8)$$

Tamal ajal võrrand (6) (repa ka (7)) tõrnuvad uude
võrrandiks

$$K: \hat{a}_{\alpha\beta} \hat{x}^\alpha \hat{x}^\beta = 0 \Leftrightarrow [\hat{a}_{\alpha\beta}][\hat{x}^\alpha][\hat{x}^\beta] = 0.$$

Arendades valemist (8) valemisse (6), saame

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 &\Leftrightarrow a_{\alpha\beta} (c_\gamma^\alpha \hat{x}^\gamma) (c_\delta^\beta \hat{x}^\delta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_{\alpha\beta} c_\gamma^\alpha c_\delta^\beta) \hat{x}^\gamma \hat{x}^\delta = 0 \Leftrightarrow \hat{a}_{\gamma\delta} \hat{x}^\gamma \hat{x}^\delta = 0. \end{aligned}$$

Viimast saame tähistatuna

$$\hat{a}_{\gamma\delta} = a_{\alpha\beta} c_\gamma^\alpha c_\delta^\beta \Leftrightarrow \hat{a}_{\gamma\delta} = c_\gamma^\alpha a_{\alpha\beta} c_\delta^\beta \quad (9)$$

Valem (10) annab koodraku maatriksi $[A]$ tõrnuvate
valemide uude maatriksi $[A'] = [\hat{a}_{\gamma\delta}]$. Valemist (9)
võime kirjutada ka maatriksvõrrand

$$A' = C^T A C \Leftrightarrow [A'] = [C]^T [A] [C], \quad (10)$$

Valemist (10) saame

$$\text{rank } [A'] = \text{rank } A' = \text{rank } (C^T A C) = \text{rank } A = \text{rank } [A]$$

mida tähendab, et astak $m = \text{rank } [A]$ on koodraku (7)
irreduktiivne ruum.

DEFINITSIOON 1. Kvadrilise maatriksi astast
nõutame kvadrilise astakus; $\text{rank } K := \text{rank } [A] \leq n$.

Kvadrilise astak n võib olla $1, \dots, n+1$. Järgi
astaka järgi saab kvadrilised jagada $(n+1)$ -ks klas-
siks. Kvadriliseid, mille astak on maksimumaalne.
(praeu $n+1$) nõutame regulaarseks kvadriliseks,
Kvadriliseid, mille astak ei ole maksimumaalne, s.o.
 $1 \leq \text{rank } K < n+1$, nõutatakse mitte-regulaarseks
kvadriliseks.

Lõpuks me leame kvadriliste kanoonilist
võrandit. Probleem seisneb selles, et otsida selline
projektiivne reeper $\{\bar{E}_2; E'\}$ projektiivse reeperi
 $\{E_2; E\}$ asemel, kes kvadrilise maatriksi A teisendab
maksimaalselt lihtsaks kujule. Sel kanal toimub
võrandi K teisendamine:

$$K: \alpha_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0 \Leftrightarrow K: \bar{\alpha}_{\alpha\beta} \bar{x}^{\alpha} \bar{x}^{\beta} = 0.$$

Siin on suurus abimehes valem (10): $A' = C^T A C$,
mis ütleb kvadrilise võrandi varas pool ~~reeper~~

$$F(\bar{x}) = \bar{\alpha}_{\alpha\beta} \bar{x}^{\alpha} \bar{x}^{\beta} \quad (11)$$

määrab ruumivormi. Siin $\bar{x}$ on punktivormi-
 $\pi(\bar{x}) = X$. Ruumivormide teooriast teame, et saab
baasilt $\{\bar{e}_2\}$ üle minna nullivale baasile $\{\bar{e}_2'\}$, kes
ruumivormi (11) saab kanoonilise kujul, s.o. A teisendab
kujule

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$\text{rank } K = 2$ kernel. Siin me pidevame selles, et
reeper $\{E_2, E\}$ määrab $\{\bar{e}_2; \bar{e}\}$. Edasi tekitab ülemine
baasilt $\{\bar{e}_2\}$ sobivale baasile $\{\bar{e}_2'\}$ teatava maatriksi

114.
 Cabil: $\{\bar{e}_2\} \hookrightarrow \{\bar{e}'_2\}$. Tanne moodustada vajaduse
 $\bar{e}'$. Vektorsüsteem $\{\bar{e}'_2; \bar{e}'\}$ määrab uue projektiivse
 reperi $\{E'_2; E'\}$. Uue reperi aldu võib sõnastada
 ka nii.

Leidub selline projektiivne reperi $\{E'_2; E'\}$, et
 kvadriku maatriks $[A]$ võetakse kujul $[A']$, kus A'
 on kujuga (12). Arvestades valemit (12) kvadriku
 võrrand saab kujul

$$K: (\bar{x}^0)^2 + \dots + (\bar{x}^{s-1})^2 - (\bar{x}^{s+1})^2 - \dots - (\bar{x}^{2s-1})^2 = 0. \quad (13)$$

Kanoonilist kujut (13) ehk tema maatriksi A' kujut
 (12) näeme, et kvadrikul astakuga 2 saab täien-
 davalt klassifitseerida maatriksis (12) elementide 1-
 arv järgi.

Regulaarse kvadriku kanooniline kujut on

$$K: (\bar{x}^0)^2 + \dots + (\bar{x}^{s-1})^2 - (\bar{x}^s)^2 - \dots - (\bar{x}^{2s-1})^2 = 0. \quad (14)$$

15. KVADRIKU LÕIKAMINE SIRGEGA.

Võtame projektiivses ruumis $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ projek-
 tiivse reperi, mille tulemusena iga punkt $X \in P_n$
 saab koordinaadid λx^i . Kõigutame $X(\lambda x^i)$, alga-
 antul kvadriku võrrandiga

$$K: \alpha_2 \beta x^i x^j = 0. \quad (1)$$

Projektiivse ruumi P_n , millega me hakkame kvadri-
 kut K lõikama, saame anda temalt viitad
 kahe projektiivselt sõltumatu punkti A ja B abil
 Viimane nõue tähendab (nagu eel poollt teame) $A \neq B$.
 Kuid tähistada $A(\lambda a^i)$ ja $B(\lambda b^i)$, mis ruumi P_n suvalise

punkti $X \in P_1$ koordinaadid $\lambda \in \mathbb{C}$ avalduvad

$$x^2 = t a^2 + \tau b^2 \quad (t, \tau \text{ wõivad olla isegi nullid}) \quad (1)$$

(vaata P_m parametrisatsioon võrandid).

Et leida lõikepunkti(e) $P_1 \cap K$ tuleb moodustada süsteem võranditest (1) ja (2):

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \\ x^\alpha = t a^\alpha + \tau b^\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n) \end{cases} \quad (3)$$

Süsteemi ruumilises arutamise (41)-st viimast võrandist erimeerime võrandisse. Esmene võrand saab kujul:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} (t a^\alpha + \tau b^\alpha) (t a^\beta + \tau b^\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta) t^2 + (a_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta + a_{\alpha\beta} b^\alpha a^\beta) t \tau + \\ & + (a_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta) \tau^2 = 0 \end{aligned}$$

Viimast saab kirjutada kompaktsemalt, kui arvestame $A^T = A$ ehk $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Nõuelt

$$a_{\alpha\beta} b^\alpha a^\beta = a_{\beta\alpha} b^\alpha a^\beta = a_{\beta\alpha} a^\alpha b^\beta = a_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta,$$

mistõttu

$$(a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta) t^2 + 2(a_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta) t \tau + (a_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta) \tau^2 = 0.$$

Et viimast veel sobivamal kujul kirjutada võime kasutada tähtsusi:

$$F(A, A) := a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta, \quad F(A, B) := a_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta, \quad F(B, B) := a_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta,$$

Süsteemi (3) esimest võrandit saab kujul

$$F(A, A) t^2 + 2 F(A, B) t \tau + F(B, B) \tau^2 = 0. \quad (4)$$

Viimane võrand on t ja τ suhtes reitvõrand. Tema on lahendamiseks antud arvupaaride (t_0, τ_0) , mis arendame neid P_1 parametrisatsioon võranditeks, saades lõikepunkti $K \cap P_1$ koordinaadid λ_0 , kus $x_0^\alpha = t_0 a^\alpha + \tau_0 b^\alpha$ täpselt t_0 ja τ_0 ei taha alla kanaga nullid.

Loikepunktide $K \cap P_1$ arv on võrreldi (4) lahendamise (5) arvuga. Lahendite arvu leidmiseks vaatleme erijuhte. Need on kaks,

$$a) F(A, A) = 0, F(A, B) = 0, F(B, B) = 0$$

Sin

$$F(A, A) = 0 \Leftrightarrow A \in K, \quad F(B, B) = 0 \Leftrightarrow B \in K,$$

mis tähendab, et sirget määravad punktid $A, B \in P_1$ on koaradikud (on loikepunktides).

Tehitud eeldustel võrreldi (4) kehtib iga (t, τ) korral. Seega sirge P_1 on koaradik.

b) Sirge P_1 leidub vähemalt üks punkt, mis ei ole koaradik. Selle punkti võib võtta ühes punktides punktidest A ja B , sest A ja B pole mingi sirge punkt, kui $A \neq B$, oleks selles punktis väärtus A .

Seega $A \notin K$ ehk $F(A, A) \neq 0$. Lahendame võrreldi (4) t suhtes:

$$t = \frac{-F(A, B)\tau \pm \tau \sqrt{(F(A, B))^2 - F(A, A)F(B, B)}}{F(A, A)} \quad (\Rightarrow)$$

$$t = \frac{-F(A, B) \pm \sqrt{(F(A, B))^2 - F(A, A)F(B, B)}}{F(A, A)} \tau \quad (5)$$

MÄRKUS: Kui $F(B, B) \neq 0$, siis τ suhtes lahendamisel saame

$$\tau = \frac{-F(A, B) \pm \sqrt{F(A, B)^2 - F(A, A)F(B, B)}}{F(B, B)} t \quad (6)$$

Valemitel (5) ja (6) on lihtsajad vahetused. See on oluline, sest lahendite (t, τ) arv sõltub lihtsast arvust ainult ühest. Tähistame juurdelt avaldist (diskriminant) Δ abil:

$$\Delta = F(A, B)^2 - F(A, A)F(B, B).$$

Kui $D > 0$, siis võrrandil (4) on kaks reaalsel omavahel erinevat lahendit. Sirge P_1 lõikab kvadriku kahes erinevas punktis,

Kui $D = 0$, siis võrrandil (4) on kaks ühtuvat lahendit. Sirge P_1 lõikab kvadriku kahes ühtuses punktis,

Kui $D < 0$, siis võrrandil (4) on kaks mitte reaalsel lahendit. Üeldakse, et sirge P_1 lõikab kvadriku kahes erinevas imaginaarses punktis. Reaalsed lõikepunktid puuduvad.

Märkus. Ka juhul a) võib moodustada $D = F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)$, olgugi et $F(x, y) = F(x, x) = F(y, y) = 0$.

16. KVADRIKU ISEÄRASED PUNKTID, LAGUV KVADRIK, TEMA ISEÄRASED PUNKTID,

Olgu antud n -mõõtmeline projektivne ruum $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$. Punktide koordinaatide saamiseks fikseerime projektivse reperi $\{E_2; E\}$, mis tekitab kordaja täpsusega määratud normeeritud vektorsüsteemi $\{\vec{e}_2; \vec{e}\}$, kus $\pi(\vec{e}_2) = E_2$ ja $\pi(\vec{e}) = E$. Tüüp $\{\vec{e}_2\}$ on vektorruumi V_{n+1} baas. Punkti $X \in P_n$ koordinaatide saamiseks võetakse kordaja täpsusega määratud vektor $\vec{x} \in V_{n+1}$, et $\pi(\vec{x}) = X$, ja avaldatakse baasi $\{\vec{e}_2\}$ kaudu, $\vec{x} = x^\perp \vec{e}_2$. Punkti X koordinaatideks loetakse

$$[x^\perp] = \{\lambda x^\perp \mid \lambda \in \mathbb{R}^1\}$$

dear eesmärk on murda kvadriku, mis antakse võrrandiga

$$K: a_{\alpha\beta} x^\perp x^\beta = 0 \quad (\Rightarrow) \quad K: [a_{\alpha\beta}][x^\perp][x^\beta] = 0 \quad (1)$$

116,

Yüa $A = (a_{\alpha\beta})$ on teine maatriks, kusjuures $A^T = A$ ja $r = \text{rank } A = \text{rank } K \geq 1$,

DEFINITSIOON 1. Kvadriliku K punktis $C(\lambda^2)$ nimetame teine isäraseks punktiks kui kõik $a_{\alpha\beta}c^{\lambda}$, $\beta = 0, 1, \dots, n$, on väärtused nullid, ja mitte-isäraseks punktiks, kui kordejätkes leitud vähemalt üks, mis on nullist erinev.

Järgnevas selgitame kui palju võib olla kvadrilikal K isäraseid punkte. Alustame ettevalmistavast tööst. Kvadriliku maatriksi A abil moodustame $(n+1)$ -st võrrandist koosneva homogeeni võrrandisüsteemi

$$a_{\alpha\beta}x^{\lambda} = 0 \quad (\beta = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

Kui käitame nii naga abgebras õpetatakse, siis igit lahendit $x^{\lambda} = c^{\lambda}$, s.o. $a_{\alpha\beta}c^{\lambda} = 0$, võib tõlgendada lahendivektorina $\vec{c} := c^{\lambda} \vec{e}_{\lambda} \in V_{n+1}$. Teame, et kõigi lahendivektorite hulk, talustame L abil, on vektorruumi V_{n+1} alamruum, mille mõõde on võrdne tundmatute arv $n+1$ miinus süsteemi maatriksi astak $r := \text{rank } A$. Taja

$$\dim L = (n+1) - r = (n+1) - \text{rank } K,$$

Kirjutame $L = L_{(n-r)+1}$. Kui süsteemi (2) lahendivektorite hulgast jätta välja nullvektor, saades $L'_{(n-r)+1}$,

Siis lahendivektorite hulga $L'_{(n-r)+1}$ "faktoriseerime" korduse järgi: tekitab alamhulga $\{\lambda \vec{c} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, kus $\vec{c} \in L'_{(n-r)+1}$.

Iga selline klass määrab projektivse ruumi P_n punkti. Taja $\pi(L'_{(n-r)+1}) \stackrel{\neq}{=} P_{n-r}$ on projektivse ruumi $(n-r)$ -mõõtmeline alamruum.

Kokkuvõttes võrrandisüsteemi määrab projektiivne ruum P_n alamruumi P_{n-1} , mille mõõde on $n-1$.

TEOREEM 1, Kvadriline K isärasele punktide hulk on $(n-1)$ -mõõtmeline alamruum P_{n-1} , mis määratakse süsteemi (2) poolt.

TÕESTUS, Olgu kvadriline punkt $C \in K$ tema isärase punkt, seega $a_\beta c^\beta = 0$ jga $\beta = 0, 1, \dots, n$ korral. Siit saame, et c^β rahuldaval süsteemi (2), mistõttu $C \in P_{n-1}$.

Vastupidi. Olgu C alamruumi P_{n-1} suvaline punkt. Sellest tulenevalt tema koordinaadid rahuldavad süsteemi (2) — $a_\beta c^\beta = 0$. Seega isärase punkti tingimused on täidetud. Vaja on veel kontrollida, et C on kvadriline punkt.

Nii see on, sest

$$a_\beta c^\beta c^\beta = (a_\beta c^\beta) c^\beta = \sum_{\beta=0}^n 0 \cdot c^\beta = 0 \Rightarrow C \in K.$$

Olleme näidanud, et kvadriline isärasele punktide hulk ühtib alamruumiga P_{n-1} . $\square$

JÄRELDUS, Regulaarsetel kvadrikelitel isäraseid punkte ei ole.

TÕESTUS. Tehtud eeldusel $r = \text{rank } K = n+1$. Seega süsteemi (2) lahendivektorite alamruumi $L \subset V_{n+1}$ mõõde on $(n+1) - r = (n+1) - (n+1) = 0$. Seega L koosneb ainult ühest vektorist — nullvektorist. Sellest tulenevalt $L' = L \setminus \{0\}$ on tühi hulk, seega alamruumi $\pi(L')$ ei tekigi. Kvadrikelil ei ole isäraseid punkte. $\square$

118

Järgnevas nimeme lineaarseid punkti laeava
kvadriku kanal.

DEFINITSIOON 2. Kvadriku $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$
nimetame laeavaks, kui võrandi vasaku poole
saab esitada kahe teguri korrutisena järgmiselt

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = (b_\alpha x^\alpha)(c_\beta x^\beta).$$

Suga selgub, et meil on tegemist laeava
kvadrikuaga

$$K: (b_\alpha x^\alpha)(c_\beta x^\beta) = 0. \quad (3)$$

Leiame selle kvadriku maatriksi. Selles peame
võrandi (3) kirjutama nii, et ^{teine} maatriks oleks süm-
meetriline. Arutleme! teinudades võrandi (3) vasakut
poole:

$$\begin{aligned} (b_\alpha x^\alpha)(c_\beta x^\beta) &= (b_\alpha c_\beta) x^\alpha x^\beta = \frac{1}{2} b_\alpha c_\beta x^\alpha x^\beta + \frac{1}{2} b_\beta c_\alpha x^\beta x^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} b_\alpha c_\beta x^\alpha x^\beta + \frac{1}{2} b_\beta c_\alpha x^\alpha x^\beta = \frac{1}{2} (b_\alpha c_\beta + b_\beta c_\alpha) x^\alpha x^\beta. \end{aligned}$$

Võrandi (3) saame kirjutada:

$$K: (b_\alpha c_\beta + b_\beta c_\alpha) x^\alpha x^\beta = 0. \quad (4)$$

Arutab, et kvadriku maatriksis $A = (a_{\alpha\beta})$ on

$$a_{\alpha\beta} = b_\alpha c_\beta + b_\beta c_\alpha, \quad (5)$$

rest

$$a_{\alpha\beta} = b_\alpha c_\beta + b_\beta c_\alpha = b_\beta c_\alpha + b_\alpha c_\beta = a_{\beta\alpha} \Leftrightarrow A^T = A.$$

Valemi (5) näeme, et kõik kordajad b_α ei ole
korraga nullid, aga samuti kõik kordajad c_α ei ole
korraga nullid, sest vastasel juhul $a_{\alpha\beta} = 0$. See
on loomulik, kuna maatriks A ei ole null-maatriks.

Edasi arutleme võrandi kuju (3) käesides.

Väime näeme, et laeav kvadrik koosneb punktide-
st, kus esimene tegur on null, ja punktidest, kus

teine tegev on võrdne nulliga. Seega saame
kvadratik koostada lineaaride

$$l_1: b_1 x^2 = 0, \quad l_2: c_2 x^2 = 0 \quad (6)$$

punktidest. Seega $K = l_1 \cup l_2$, võrrandid (6) on
tõesti lineaaride võrrandid, sest kõik b_2 (kõik a_2)
pole kunagi nullid.

Vaatleme lineaaride l_1 ja l_2 lõiget $l_1 \cap l_2$,
mis määratakse süsteemist

$$b_2 x^2 = 0, \quad c_2 x^2 = 0.$$

Süsteemi maatriks

$$M = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

astak on kas 1 või 2. Kui rank $M = 1$, siis
maatriksi üks rida avaldub teise kaudu; näiteks

teine ridade kaudu $c_2 = \mu b_2$, kus $\mu \neq 0$.

Lineaari l_2 võrrand saab kujul

$$c_2 x^2 = 0 \Leftrightarrow \mu b_2 x^2 = 0 \Leftrightarrow b_2 x^2 = 0.$$

Näeme, et l_1 ja l_2 võrrandid kordaja täpselt
ühituvad. Järelokselt $l_2 \cap l_1 = l_1$, mis tähendab $l_1 \cap l_2 = l_1$.

Kui rank $M = 2$, siis maatriksi üks rida ei ole
teine korduse mõõdu lähedusvõrrandi ruum on $(n+1)-2 =$
 $= n-1$ mõõtmeid. Seega ühisosa, ~~kui~~ mis on alamruum,
on mõõtme $(n-1)-1 = n-2$.

Seega, et leppida kvadratik korral dim $l_1 \cap l_2$
on kas $n-1$ või $n-2$.

Nüüd vaatleme leppida kvadratik astakut, s.o.
teine maatriksi astakid. Arvestame, et teine maatriksi
astak ei sõltu projektiivse ruumi $\{E_2, E\}$ valikust.

Juhul kui $l_1 = l_2$ saame kindlalt määrata
 n projektiivselt sõltumatu punkti abil, mis võime

võtta me projektivse reperi punktides $E_0, \dots, E_{n-1} \in l_1$ tulb liinide E_n, E nii, et $\{E_2; E\}$ oleksid üldasendis.

Punktide E_n, E ei ole lineaaril l_1 , sest sin w alga rüstam $\{E_2; E\}$ üldasendis. Selleks reperi punktide

$E_0, \dots, E_{n-1}$ koordinaadid valitud lineaaril

$b_2 x^2 = 0$ võrandit. Näiteks $E_0(1 \ 0 \ \dots \ 0) \in l_1$ saame

arvutada $b_0 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \dots + b_{n-1} \cdot 0 + b_n \cdot 0 = 0$ millest

$b_0 = 0$. Analogiliselt saame $b_1 = 0, \dots, b_{n-1} = 0$, kuid $b_n \neq 0$,

sest b_n kordajad b_2 ei ole nullid. Seega l_1

võrandis on

$$l_1: b_n x^n = 0 \Leftrightarrow l_1: x^n = 0.$$

Kuna $l_2 = l_1$, siis $c_0 = \dots = c_{n-1} = 0$ ja $c_n = 1$, Valem (5)

abid saame kvadrant maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sel korral leprva kvadrant astase on 1,

Juhul kui $l_1 \neq l_2$, siis valime ^{projekt.} reperi, kus rühmas $l_1 \cap l_2$ on $n-2$ punkti $E_0, \dots, E_{n-2}$ punkt, E_{n-1} on kvadrant l_1 , kokkuvõttes $E_0, \dots, E_{n-2}$ ja E_{n-1} on lineaaril l_1 ja $E_0, \dots, E_{n-2}$ lineaaril l_2 . Punktide E_n ja E võtame ⁿⁱⁱ et tekiks projektivne reperi. Selleks projektivse reperi lineaaride l_1 ja l_2 võranded on

$$l_1: x^n = 0, \quad l_2: E_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n = 0$$

Juh $c_{n-1} \neq 0$, vastasel juhul $c_n \neq 0$ ja $l_1 \neq l_2$, seega ka

nüüd valem (5) abil leprva kvadrant maatriksid:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & \dots & c_{n-1} & 2c_n \end{pmatrix},$$

mille astak $c_{n-1} \neq 0$ tähta on 2, lõhestame tulemuse.

TEOREEM 2, Lagrua koadruki astak $l_1 = l_2$ korral on 1 ja $l_1 \neq l_2$ korral 2,

Teevms muuvas saab kergesti tõestada järgmisi teoreeme.

TEOREEM 3 Iga koadruki astakuga 1 on lagru ja koosneb kahest üksteisest lineaarist.

TÕESTUS, Eeldame kohaselt koadruki

$$K: a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$$

maatruki $A = (a_{\alpha\beta})$ astak on rank $A = 1$, leidub selline reeper, kus A on kujuga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Iga

$$K: (x^0)^2 = 0 \Leftrightarrow K: x^0, x^0 = 0.$$

Võime and on kujuga: (-3) , kusjuures

$b_0 = c_0 = 1$, $b_1 = c_1 = 0, \dots, b_n = c_n = 0$,
Koadruki on lagru.
Lineaaride l_1 ja l_2 võrreldatuse on

$$l_1: x^0 = 0, \quad l_2: x^0 = 0,$$

millest $l_1 = l_2$. Teoreem on tõestatud. $\square$

Lõpuks uurime lagrua koadruki isärsesid punkte.

TEOREEM 4. Lagrua koadruki isärsesid punkte hulk on võrdne lineaaride l_1 ja l_2 ühisosaga $l_1 \cap l_2$.

TÕESTUS, Koadruki isärsesid punktid liitame üksteisest

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha = 0 \Leftrightarrow (b_\alpha c_\beta + b_\beta c_\alpha) x^\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b_2 x^2) c_\beta + b_\beta (c_2 x^2) = 0, \quad (7) \quad 122$$

olgu $y(\lambda y^2)$ lagune kvaadriku iseärvane punkt.
 Seega tuleb koordinaadid rahuldavad võrrandist
 (7) ja kvaadriku võrrandist (3):

$$(b_2 y^2) c_\beta + b_\beta (c_2 y^2) = 0, \quad (8)$$

$$(b_2 y^2)(c_\beta y^\beta) = 0$$

Võttesest võrrandist saame $b_2 y^2 = 0$ või $c_\beta y^\beta = 0$.

Kui $b_2 y^2 = 0$, siis (8) annab

$$b_\beta (c_2 y^2) = 0, \quad b_2 y^2 = 0.$$

Kuna kõik b_β -d pole nullid, siis leidub $b_{\beta_0} \neq 0$.

Seega

$$b_{\beta_0} (c_2 y^2) = 0 \Rightarrow c_2 y^2 = 0.$$

Seega $y \in l_1$ ja $y \in l_2$, millest $C \in l_1 \cap l_2$.

Analoogiline tulemusena jõuame, kui $c_\beta y^\beta = 0$.

Järeldub kvaadriku iga iseärvane punkt on l_1 ja l_2 ühisosa punkt.

Vastupidi, Iga punkt $C \notin l_1 \cap l_2$ korral $C \in l_1$ ja $C \notin l_2$, millest C koordinaadid rahuldavad kuusmapi lineaarvõrrandit (6). Sel korral võrrandid (8) ka kehtivad, mistõttu C on iseärvane punkt. Teoreem on tõestatud. $\square$

17. KVADRIKU PUUTUJAROOM

Olgu projektsioon, ruumis $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ fikseeritud projektsioonide reeper $\{E_x; E\}$, mille suhtes on antud kvadrik

$$K: a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0,$$

maatriksiga $A = (a_{\alpha\beta})$, kusjuures $A^T = A$ ja rang $J < n+1$.

Kvadriku mõtteaärase punkti $C(x \in \mathbb{A}^n)$ korral kõik $n+1$ kordajat $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ pole korraga nullid. Seetõttu võime $a_{\beta} x^\beta = 0$ määrab lineaari.

DEFINITSIOON 1. Lineaari $T_C(P)$ $a_{\beta} x^\beta = 0$ nimetame kvadriku K punktijärgumise punktis C .

Näeme, et punkt C on ka punktijärgumise punkt, sest $C \in K$ tähendab $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$ abil saame

$$a_{\beta} x^\beta = (a_{\alpha\beta} x^\alpha) x^\beta = a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \Rightarrow C \in T_C(K).$$

Järgnevas me püüame geometrialt iseloomustada punktijärgumise $T_C(K)$.

Vaatleme läbi punkti C kõrvorajad, mis lõikavad kvadriku kahe ühtlase punktis. Iga selline rõngas saame anda kahe projektsiooni tõttu - matu ehk samaväärselt kahe erineva punkti abil.

Nüüd me on C , teist tähistame Y abil. Tähistame neid rõngas $l(C, Y)$. Et $Y \neq C$, siis $Y \notin K$ ehk $F(Y, Y) \neq 0$.

Nemutameas olgu öeldud, et

$$F(C, C) = a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad F(C, Y) = a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad F(Y, Y) = a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \neq 0$$

Tilks, et projektsioon rõngas $l(C, Y)$ lõikab kvadriku ainult kahe ühtlase punktis, peab olema teatav rühmitõrjumine diskriminant võrdne nulliga (vt. §15).

Kuna $D = F(C, Y)^2 - F(C, C) F(Y, Y)$, siis

$$D = 0 \Leftrightarrow F(C, Y) = 0,$$

Seega projektivsed sirged, millel on koordinaatide
kaks ühtuvat punkti, ~~mis~~ ^{mis} tšarimunge $F(C, Y) = 0$,
ile veddi laadame oma vaatekohta. Vaatluse võetakse
mil $F(C, Y) = 0$ nõudmata, et vaatluse all on ainult
nullid sirged, mis onaval koordinaatide ainult kahte
ühituvat punkti. Tuge vaatluse all on sirged, mil

$$F(C, Y) = 0 \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} c^{\alpha} y^{\beta} = 0 \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} y^{\beta} = 0.$$

Väinast võib ka vaadelda kõigi nullide punktide $\{Y\}$
hulga, mil $a_{\alpha\beta} y^{\beta} = 0$. Seega näeme, et punktijaruum
 $T_C(K)$ koosneb punkti C lähimatest sirgetest, mis
lõikavad koordinaatide kahel ühtuvas punktis. Need
sirgete tühjuseks olid $F(Y, Y) \neq 0$. Me laadame
oma sirgete hulga sirgete $F(Y, Y) = 0$. Selliste sirgete
iga punkt on kvadratuur, sest parameetrite
võrandsid

$$X \in \langle C, Y \rangle \Leftrightarrow x^{\alpha} = t c^{\alpha} + \tau y^{\alpha}$$

abil saame

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} (t c^{\alpha} + \tau y^{\alpha}) (t c^{\beta} + \tau y^{\beta}) &= t^2 (a_{\alpha\beta} c^{\alpha} c^{\beta}) + \\ &+ t\tau (a_{\alpha\beta} c^{\alpha} y^{\beta} + a_{\alpha\beta} y^{\alpha} c^{\beta}) + \tau^2 (a_{\alpha\beta} y^{\alpha} y^{\beta}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= t^2 F(C, C) + 2t\tau F(C, Y) + \tau^2 F(Y, Y) = \\ &= t^2 \cdot 0 + 2t\tau \cdot 0 + \tau^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Kokkuvõttes näeme, et punktijaruum $T_C(K)$ on
nullid, et punkti C lähimad sirged lõikavad
koordinaatide kahel ühtuvas punktis, seega punktid kvadratuur-
punkt, või on täielikult kvadratuur.

18. LIITSUHE

Projektiivses ruumis $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ võetakse keli paarikaupa võrreld punkti A, B, C ja D , mis asuvad mingil sirgel P_1 . Neude abil defineeritakse teatav P_1 reaalarv, mida tähistame (AB, CD) ja nimetame punktide A, B, C ja D

lühtriteks. Järgnevas selgitame, kuidas (AB, CD) defineerime, võtame punktide A ja B vundaja vektorid $\vec{a}, \vec{b} \in V_{n+1}$, mis $A \neq B$ tõttu ehk $\{A, B\}$ projektiivse rühmatuue tõttu on lineaarselt sõltumatus. Võtame ka C ja D vundajad $\vec{c}$ ja $\vec{d} \in V_{n+1}$. Projektiivsel sirgel kui rühmatuulises alamruumis kõik punktisüsteemid, milles on kolm punkti, on juba projektiivselt sõltuvad. Seega $\{A, B, C\}$ ja $\{A, B, D\}$ on projektiivselt sõltuvad, mistõttu vektorsüsteemid $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ja $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ on lineaarselt sõltuvad. Viimane on selge sellest, et $\pi^{-1}(P_1) \cup \{\vec{0}\}$ on vektorruumi V_{n+1} kahemõõtmeline alamruum. Tähistame Q_2 abil. Tegijures $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in Q_2' \subset Q_2$. Kuna Q_2 baasiks on iga kaks lineaarselt sõltumatut vektorit, siis $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ võib vaadelda Q_2 baasina. Vektorid $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ saame avaldada nende kaudu

$$\vec{c} = x\vec{a} + \lambda\vec{b}, \quad \vec{d} = \mu\vec{a} + \gamma\vec{b} \quad (1)$$

Viimases ühmi kordaja pole võidne nulliga. Täpsemalt. Kui oletada, et $x=0$, siis $\vec{c} = \lambda\vec{b}$. Tegijures $\lambda \neq 0$, sest $\vec{c} \neq \vec{0}$. Siis saame $C = \pi(\vec{c}) = \pi(\vec{b}) = B$ vastuolule, sest $C \neq B$. Analoogiliselt näitame, et ka $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ ja $\gamma \neq 0$.

DEFINITSIOON 1. Punktide A, B, C ja D lühtriteks (AB, CD) nimetame arvu $(AB, CD) = \frac{\lambda}{x} : \frac{\gamma}{\mu}$.

Tekib küsimus, kas liitruhkite definitsioon on korrektne, s.o., kas ei sõltu punktide A, B, C ja D erindajavektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ja $\vec{d}$ valikust. Läheme üle uutele erindajatele $\vec{a}' = \mu \vec{a}$, $\vec{b}' = \lambda \vec{b}$, $\vec{c}' = \tau \vec{c}$, $\vec{d}' = \varsigma \vec{d}$, kus $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\tau \neq 0$ ja $\varsigma \neq 0$. Liitruhkite definitsiooni kohaselt tuleb uuevalt vektorid $\vec{c}'$ ja $\vec{d}'$ avaldada baasi $\{\vec{a}', \vec{b}'\}$ kaudu. Saame

$$\begin{cases} \vec{c}' = \tau \vec{c} = (\tau x) \vec{a} + (\tau y) \vec{b} \\ \vec{d}' = \varsigma \vec{d} = (\varsigma \mu) \vec{a} + (\varsigma \lambda) \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{c}' = \frac{\tau x}{\mu} \vec{a}' + \frac{\tau y}{\lambda} \vec{b}' \\ \vec{d}' = \frac{\varsigma \mu}{\mu} \vec{a}' + \frac{\varsigma \lambda}{\lambda} \vec{b}' \end{cases}$$

Uute erindajate kaudu

$$(AB, CD) = \frac{\frac{\tau y}{\mu}}{\frac{\tau x}{\mu}}; \frac{\frac{\varsigma \lambda}{\lambda}}{\frac{\varsigma \mu}{\mu}} = \frac{\lambda}{x}; \frac{y}{\mu} = \frac{\lambda}{x}; \frac{y}{\mu}.$$

Näeme, et liitruhkite definitsioon ei sõltu punktide A, B, C ja D erindajavektorite valikust.

Mõnikord antakse liitruhkite (AB, CD) mõistet P_i vektorid projektiooni reeperi $\{E_0, E_1, E\}$ suhtes tekivate punktide A, B, C ja D koordinaatide kaudu. Tuleb võtta normeeritud vektorisüsteem $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}\}$, kusjuures $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1\}$ on alamruumi $\pi^{-1}(P_i) \cup \{\vec{e}\} = Q_2$ baas. Tuleb avaldada

$$\vec{a} = a^0 \vec{e}_0 + a^1 \vec{e}_1 \Rightarrow A(a^0; a^1),$$

$$\vec{b} = b^0 \vec{e}_0 + b^1 \vec{e}_1 \Rightarrow B(b^0; b^1),$$

$$\vec{c} = c^0 \vec{e}_0 + c^1 \vec{e}_1 \Rightarrow C(c^0; c^1),$$

$$\vec{d} = d^0 \vec{e}_0 + d^1 \vec{e}_1 \Rightarrow D(d^0; d^1),$$

Liitruhkite definitsiooni kohaselt tuleb vektorid $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ avaldada baasi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ kaudu — kahast erandisest leida $\vec{e}_0$ ja $\vec{e}_1$ ning asendada $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ avalduse. Tege

$$\vec{e}_0 = \frac{b_1}{d} \vec{a} + \left(-\frac{a^1}{d}\right) \vec{b}, \quad \vec{e}_1 = \left(-\frac{b^0}{d}\right) \vec{a} + \left(\frac{a^0}{d}\right) \vec{b},$$

mille abil

$$\begin{cases} \vec{c} = c^0 \vec{e}_0 + c^1 \vec{e}_1 \\ \vec{d} = d^0 \vec{e}_0 + d^1 \vec{e}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} = \frac{c^0 b^1 - c^1 b^0}{d} \vec{a} + \frac{-c^1 a^1 + c^1 a^0}{d} \vec{b} \\ \vec{d} = \frac{d^0 b^1 - d^1 b^0}{d} \vec{a} + \frac{-d^1 a^1 + d^0 a^0}{d} \vec{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{c} = - \frac{\begin{vmatrix} b^0 & b^1 \\ c^0 & c^1 \end{vmatrix}}{d} \vec{a} + \frac{\begin{vmatrix} a^0 & a^1 \\ c^0 & c^1 \end{vmatrix}}{d} \vec{b} \\ \vec{d} = - \frac{\begin{vmatrix} b^0 & b^1 \\ d^0 & d^1 \end{vmatrix}}{d} \vec{a} + \frac{\begin{vmatrix} a^0 & a^1 \\ d^0 & d^1 \end{vmatrix}}{d} \vec{b} \end{cases}$$

Liitruhte avaldameks saame

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^0 & a^1 \\ c^0 & c^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^0 & b^1 \\ c^0 & c^1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a^0 & a^1 \\ d^0 & d^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^0 & b^1 \\ d^0 & d^1 \end{vmatrix}}.$$

Järgnevas selgitame, mis juhtub liitruhtega, kui liitruhte tähtsuse muuta punktide perigutust.

OMADUS 1, Kehtib $(AB, CD) = (CD, AB)$, s.o. liitruhte ei muutu paari vahetuseel.

TÕESTUS. Liitruhte (CD, AB) arvutamisel tuleb definitsiooni kohaselt vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ avaldada $\{\vec{c}, \vec{d}\}$ kaudu.

Teame

$$\begin{cases} \vec{c} = x\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ \vec{d} = \mu\vec{a} + \gamma\vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{x}{d}\vec{c} + (-\frac{\lambda}{d})\vec{d} \\ \vec{b} = (-\frac{\mu}{d})\vec{c} + \frac{\gamma}{d}\vec{d} \end{cases},$$

kus $d = \begin{vmatrix} x & \lambda \\ \mu & \gamma \end{vmatrix}$. Saame

$$(CD, AB) = \frac{-\frac{\lambda}{d}}{\frac{x}{d}} : \frac{\frac{x}{d}}{-\frac{\mu}{d}} = \frac{-\lambda}{x} : \frac{x}{-\mu} = \frac{\lambda}{x} : \frac{x}{\mu} = (AB, CD). \quad \square$$

OMADUS 2, Kehtib $(BA, CD) = (AB, CD)^{-1}$ ja

$$(AB, DC) = (AB, CD)^{-1}$$

TÕESTUS. Esmene osa tõestuseks avaldame vektorid $\{\vec{b}, \vec{a}\}$ kaudu. Saame

$$\begin{cases} \vec{c} = x\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ \vec{d} = \mu\vec{a} + \gamma\vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} = \lambda\vec{b} + x\vec{a} \\ \vec{d} = \gamma\vec{b} + \mu\vec{a} \end{cases},$$

mõistet

$$(BA, CD) = \frac{\mu}{\lambda}; \frac{\mu}{\lambda} = \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{\gamma}{\mu} = \left(\frac{\lambda}{x} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \right)^{-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\gamma}{\mu} \right)^{-1} =$$

$$= (AB, CD)^{-1},$$

Teine osa saame juba tõestatu abil:

$$(AB, DC) = (DC, AB) = (CD, AB)^{-1} = (AB, CD)^{-1}. \quad \square$$

OMADUS 3°. Kehtib $(AC, DB) = [1 - (AB, CD)]^{-1}$.

TÕESTUS, Vektorid $\vec{d}$ ja $\vec{e}$ on vaja avaldada $\{\vec{a}, \vec{c}\}$

kaudu:

$$\begin{cases} \vec{c} = x\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ \vec{d} = \mu\vec{a} + \gamma\vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{d} = \left(\mu - \frac{x\gamma}{\lambda}\right)\vec{a} + \frac{\gamma}{\lambda}\vec{c} \\ \vec{b} = \left(-\frac{x}{\lambda}\right)\vec{a} + \frac{1}{\lambda}\vec{c} \end{cases}$$

mõtte abil

$$(AC, DB) = \frac{\frac{\gamma}{\lambda}}{\mu - \frac{x\gamma}{\lambda}}; \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{\gamma}{\lambda\mu - x\gamma}; \frac{1}{-x} = \frac{\gamma}{\lambda\mu - x\gamma}(-x) =$$

$$= \frac{\gamma x}{\gamma x - \lambda\mu} = \left(\frac{\gamma x - \lambda\mu}{\gamma x} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{\gamma x} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{x} : \frac{\gamma}{\mu} \right)^{-1} = [1 - (AB, CD)]^{-1}, \quad \square$$

OMADUS 4. Kehtib $(AD, BC) = 1 - (AB, CD)^{-1}$.

TÕESTUS, Vektorid $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on vaja avaldada $\{\vec{a}, \vec{d}\}$

kaudu:

$$\begin{cases} \vec{c} = x\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ \vec{d} = \mu\vec{a} + \gamma\vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{b} = \left(-\frac{\mu}{\gamma}\right)\vec{a} + \frac{1}{\gamma}\vec{d} \\ \vec{c} = \left(x - \frac{\mu\lambda}{\gamma}\right)\vec{a} + \frac{\lambda}{\gamma}\vec{d} \end{cases}$$

mõistet

$$(AD, BC) = \frac{\frac{1}{\gamma}}{-\frac{\mu}{\gamma}}; \frac{\frac{\lambda}{\gamma}}{x - \frac{\mu\lambda}{\gamma}} = \frac{-1}{\mu}; \frac{\lambda}{x\gamma - \mu\lambda} = \frac{\lambda\mu - x\gamma}{\lambda\mu} =$$

$$= 1 - \frac{x\gamma}{\lambda\mu} = 1 - \left(\frac{\lambda}{x} : \frac{\gamma}{\mu} \right)^{-1} = 1 - (AB, CD)^{-1}, \quad \square$$

Selleaomadused piirduvad. Lisaks punktide A, B, C, D paigutus liitruutis (kogu $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ võimalust) on lestaroodud omaduste abil. Näites

$$(CA, DB) \stackrel{2^o}{=} (AC, DB)^{-1} \stackrel{3^o}{=} 1 - (AB, CD),$$

$$(BD, CA) = (CA, BD) = (AC, BD)^{-1} = (AC, DB) = [1 - (AB, CD)]^{-1},$$

Üldistame liitruute mõistet, kui punktideks kasutada laagerd kokku. Teine koha piirväärtuse abil:

Definime!

$$1) (AB, CC) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{D \rightarrow C} (AB, CD)$$

Kui $D \rightarrow C$, siis $\vec{d} \rightarrow \vec{c}$. Tule avaldada

$$\begin{cases} \vec{c} = x\vec{a} + \lambda\vec{b} \\ \vec{d} = \mu\vec{a} + \gamma\vec{b} \end{cases} \quad \text{lähened } \mu \rightarrow x \text{ ja } \gamma \rightarrow \lambda.$$

Taame

$$(AB, CC) = \lim_{\substack{\mu \rightarrow x \\ \gamma \rightarrow \lambda}} \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{x}{\mu} = \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{x}{\lambda} = 1.$$

$$2) (AB, CB) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{D \rightarrow B} (AB, CD).$$

Kuna $D \rightarrow B$, siis $\vec{d} \rightarrow \vec{b} \Rightarrow (\mu \rightarrow 0) \wedge (\gamma \rightarrow 1)$. Tule

$$(AB, CB) = \lim_{D \rightarrow B} \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{\mu}{\gamma} = \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{0}{1} = 0$$

$$3) (AB, CA) = \lim_{D \rightarrow A} (AB, CD).$$

Kuna $D \rightarrow A$, siis $\vec{d} \rightarrow \vec{a}$. Tule $(\gamma \rightarrow 0) \wedge (\mu \rightarrow 1)$.

Taame:

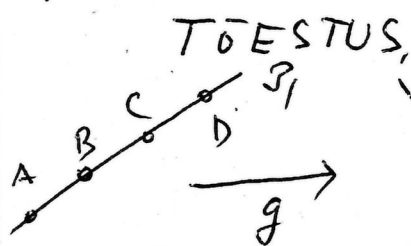
$$(AB, CA) = \lim_{D \rightarrow A} \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{1}{0} = \infty,$$

Lõpuks aruame kas, olulist fakti liitruute kohta. Tõestame need inegi teoreemid.

TEOREEM 1. Liktunke ei ratta projektioone ruumi.
 $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ reperi $\{E_2; E\}$ valikut.

TÖESTUS. Põhjuses on arjoolu, et muil en
 liktunke defoneeritud punktide A, B, C ja D koordinaate
 kasutamata. (Märkus: inepi vastav valem en luktunata!)

TEOREEM 2. Projektioone ruuma toonul
 liktunke sari lub: $(AB, CD) = (g(A)g(B), g(C)g(D))$
 iga $g \in G(P_n)$ karnal.



TÖESTUS. Mistasen $g \in G(P_n)$
 karnal alamruum teinend
 samamõõtunlunas alamruumies,
 mis wye P_1 kuptut
 wye $g(P_1)$. Projektioone

reperi $\{E_2; E\}$ kuptut projektioone reperi

$\{g(E_2); g(E)\}$. Tugjures punktidel A, B, C ja D lottunq
 projektioone reperi $\{E_2; E\}$ suhtes en vastavelt samad

Koordinaadid kui punktidel $g(A), g(B), g(C)$ ja $g(D)$
 lottunq reperi $\{g(E_2); g(E)\}$ suhtes. Tultattu

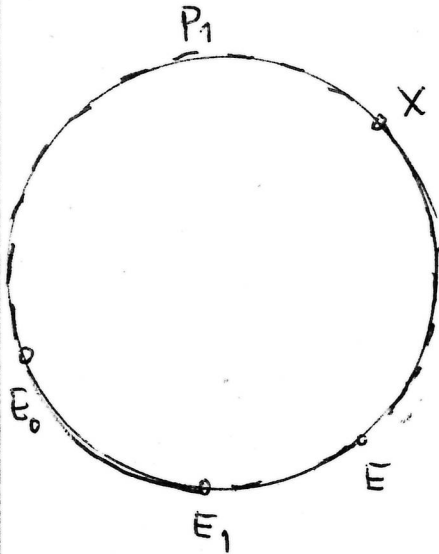
luktunetel (AB, CD) ja $(g(A)g(B), g(C)g(D))$ tulevad samad
 ar-aldused. Tuge

$$(AB, CD) = (g(A)g(B), g(C)g(D)).$$

19. PROJEKTIIVSE SIRGE PUNKTI- PAARIDE LAHUTAVUS, HARMONILINE PUNKTI NELIK

Eestpoolt rihe näitevaral näitlokult saime,
 et projektioone sirge P_1 en koornu. Võtame teinq
 reperi $\{E_0, E_1; E\}$. Yee koland peab muures aland

üldarendis, s.o. paarid $\{E_0, E_1\}$, $\{E_0, E\}$ ja $\{E_1, E\}$ peavad olema projektivselt võtmatud, mis on samaväärne sellega, et punktipaard on erinevad. Mistahes $X(x^0, x^1)$ korral



$$\vec{e} = 1\vec{e}_0 + 1\vec{e}_1 \quad (\text{normeeritud})$$

$$\vec{x} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1$$

Ette liitruki $(E_0 E_1, EX)$ avaldub

$$(E_0 E_1, EX) = \frac{1}{1} \cdot \frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{x^0}.$$

Ta määratakse punkt X koordinaatide poolest.

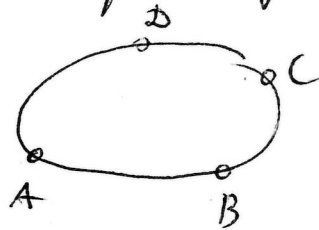
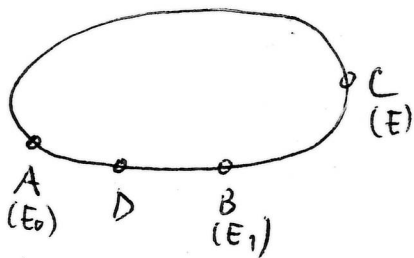
Nüüd panev tähele, et P_1 kinninev Ette x oma mõtet, et X on E_0 ja E_1 vahel, kui $X \neq E_0$ ja $X \neq E_1$. Liitruki abil saab projektivse sirge P_1 punktide E_0 ja E_1 abil jagada kahte osse: joonisel sirge on — ja — — —. Kõik punktidega E_0 ja E_1 sama kogu projektivse sirge. Sirge osa kuhu kuulub punkt E tähistame P_1^+ abil, teist osa aga P_1^- abil.

Paneme tähele, et $(E_0 E_1, EX) > 0$ korral X ja E kuuluvad samasse klassi, sest $(E_0 E_1, EE) = 1 > 0$. Seega $X \in P_1^+$. Kui $(E_0 E_1, EX) < 0$, siis $X \in P_1^-$. Projektivse reperi punktid E_0 ja E_1 ei kuulu kumbagi klassi, sest

$$(E_0 E_1, EE_0) = \frac{1}{0} = \infty, \quad (E_0 E_1, EE_1) = \frac{0}{1} = 0.$$

DEFINITSIOON 1. Olgu A, B, C ja D projektivse sirge neli erinevat punkti. Me ütleme, et punktipaar (C, D) lahutab punktipaari (A, B) , kui $(AB, CD) < 0$. Tähistame $CD \nparallel AB$. Kui $(AB, CD) > 0$, siis ütleme, et (C, D) ei lahuta paari (A, B) . Tähistame $CD \nparallel AB$.

Et saaks definitsioonist tülde selges võtame punktide projektivse reperi punktides järgnult: $E_0 = A$, $E_1 = B$ ja $E = C$. Kui $(AB, CD) < 0$, siis on tegemist vesakpoolse joanuga, s.o. $AB \parallel CD$.



Kui aga $(AB, CD) > 0$, siis on tegemist

parempoolse joanuga, s.o. $AB \nparallel CD$.

Märksuseks lisame: algebrilise et siin liitruumi antakse koordinaatide abil on ^{teht} karneatsioon, sest liitruumi ei määra koordinaatide (s.o. projektivse reperi) valikust.

Lõpuks selle paragrahvi lõpuks, mis annab harmoonilise punktidele mõiste projektivsel sirjel.

Olgu A, B, C ja D projektivse sirje P_1 nelk erinevat punkti. Me teame liitruumi omadustest, et punktide vahetamine ei muuda liitruumi:

$(AB, CD) = (CD, AB)$. Vahetunud paari sees liitruumi

režiim ei säili. Kehtib nimelt $(AB, CD) = (AB, DC)^{-1}$.

Analoogiline on olukord punktide vahetamisel ruumilises paaris. Kõrvaldame, et kas ei saa selge ^{erinevat} punkti nii

valida, et ka teisel juhul oleks võrdus: $(AB, CD) =$

$= (AB, DC)$, s.o. $(AB, CD) = (AB, CD)^{-1}$, millest

$(AB, CD) = \pm 1$. Siin juht $(AB, CD) = 1$ ei kalla,

sest siis ei ole erinevate punktide nelk. Jätk

nelja punkti valikust juht $(AB, CD) = -1$

DEFINITSIOON 2. Me ütleme, et projektivse sirje P_1 punktidele A, B, C ja D on harmooniline kui $(AB, CD) = -1$.

Definiitvuseis pole vaja leida, et punktid A, B, C ja D olevad erinevad, sest $(AB, CD) = -1$ seda garanteerib. Tõepoolest $(AB, CD) = -1$ korral öeldes ka, et kolmas punkt D on harmooniline punktidega A, B ja C . Muinas $(AB, CD) = -1$ korral $AB \parallel CD$,

20. POOLUS JA POLAAR

Täpsemalt on siin tegemist kvadrilatera positsiooni ja polaariga. Olgu antud projektivne ruum $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ kvadrilatera

$$K: a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad (1)$$

kus $A = (a_{\alpha\beta})$ on sümmeetriline ($A^T = A$) ja rank $K \geq 1$. Võrrand (1) on antud mitu projektivne reperi $\{E_i; E\}$ suhtes.

Mistahes fikseeritud punkti $C(\lambda c^\alpha) \in P_n$ korral, mis ei ole kvadrilatera, i.e.,

$$C \notin K \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta \neq 0 \Leftrightarrow F(C, C) \neq 0, \quad (2)$$

vaatleme läbi tema kõiki röövnud projektivseid sirgeid $P_1(C, y)$, $y \neq C$, mis lõikavad kvadrilatera K kahes erinevas punktis. Tähistame need lõikepunkti X_1 ja X_2 abil. Iga muutuva sirge $P_1(C, y)$ tekitab kolmest erinevast punktist koosseisva punktikolmnurga X_1, X_2, C . Otsime sellel sirgel veel mõnda punkti Z , mis on harmooniline punktidega X_1, X_2 ja C . Iga punkt Z tuleb ette võrrandis $(X_1 X_2, CZ) = -1$. Kui vaatleme kõiki röövnud sirgeid, mis tekitab teatud punktihulka $\{Z\}$. Meie järgnevas leides selle hulga võrrandi. Asume tööle. Kõigepealt me

oma töid lihtsustame. Kirje $P_1(C, Y)$ võib anda ka punktipaari C, Z abil, sest $Z \in P_1$ ja $Z \neq C$ (harmoonilise punktivõrku punktid on erinevad).
 Tege $P_1(C, Y) = P_1(C, Z)$, Lõikepunktide $X_1, X_2 \in P_1(C, Z)$ leidmiseks pane kirja selle riigi parametrisatsioon võrrandid

$$x^L = t c^L + \tau z^L \quad (L=0, \dots, n), \quad (3)$$

kus $X(x^L)$ on siin ^{uue} kirjeldatud punkt. Kuna $X_1, X_2 \in P_1(C, Z) \cap K$, siis X_1 ja X_2 koordinaadid saame kirjutada

$$a_L x^L x^L \beta = 0, \quad x^L = t c^L + \tau z^L, \quad (4)$$

Asendades esimese teinist seerwast saame esimesi võrrande kirjeld (vt. §)

$$t = \frac{F(C, Z) \pm \sqrt{F(C, Z)^2 - F(C, C) F(Z, Z)}}{F(C, C)} \tau. \quad (5)$$

Sit lahendid (t, τ) määrataks kordunega, seega on viiem kirjeld $t \neq \tau$. Silevud lahendid on ka erinevad $t_1 \neq \tau_1$ ja $t_2 \neq \tau_2$, sest lõikepunktide X_1 ja X_2 on erinevad. Järele oluad lahendid peaksid eraldu vaje leida. Punktide X_1 ja X_2 koordinaadid saame seega valem (3) abil,

$$\begin{aligned} X_1: \quad x_1^L &= t_1 c^L + \tau_1 z^L, \\ X_2: \quad x_2^L &= t_2 c^L + \tau_2 z^L. \end{aligned} \quad (6)$$

Punkti Z koordinaatide leidmiseks tuleb kasutada tingimust

$$(X_1, X_2, C, Z) = -1 \Leftrightarrow (C, Z, X_1, X_2) = -1.$$

Lisaks defineerime kohalt punktide X_1 ja X_2 esindajavektorid $\vec{x}_1$ ja $\vec{x}_2$ on vaja asendada punktide C ja Z esindajavektorid $\vec{c} = c^L \vec{e}_L$ ja $\vec{z} = z^L \vec{e}_L$ kaudu. Need avaldused saame valemist (6):

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1^2 \bar{z}_2 \\ \bar{x}_2 = x_2^2 \bar{z}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = t_1 \bar{c} + \tau_1 \bar{z} \\ \bar{x}_2 = t_2 \bar{c} + \tau_2 \bar{z} \end{cases} \quad (7)$$

Võimees $t_1 \neq 0, \tau_1 \neq 0$ ja $t_2 \neq 0, \tau_2 \neq 0$, sest punktide x_1, x_2, c ja z on erinevad. Näid leiame lihtsasti

$$(CZ, x_1, x_2) = \frac{\tau_1}{t_1}, \frac{\tau_2}{t_2} = \frac{\tau_1 t_2}{t_1 \tau_2}.$$

Seame:

$$(CZ, x_1, x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{\tau_1 t_2}{t_1 \tau_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\tau_1}{t_1} = (-1) \frac{\tau_2}{t_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tau_1}{t_1} = - \frac{\tau_2}{t_2} \Leftrightarrow \frac{t_1}{\tau_1} = - \frac{t_2}{\tau_2} \Leftrightarrow \frac{t_1}{\tau_1} + \frac{t_2}{\tau_2} = 0,$$

Jagades valem (5) läbi teguriga τ_1 saame võrrand
abil

$$\frac{F(C, z) + \sqrt{F(C, z)^2 - F(C, c)F(z, z)}}{F(C, c)} + \frac{F(C, z) - \sqrt{F(C, z)^2 - F(C, c)F(z, z)}}{F(C, c)} =$$

$$= 0: \Leftrightarrow \frac{2F(C, z)}{F(C, c)} = 0 \Leftrightarrow F(C, z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{\alpha\beta} c^\alpha z^\beta = 0. \quad (8)$$

Võrrand võrrand annabki hulga $\{z\}$ punktide
koordinaadid.

Uurime võrrandi (8) abil hulka $\{z\}$. Tähistame
konstanti $a_{\alpha\beta} c^\alpha$ lühidalt $a_\beta := a_{\alpha\beta} c^\alpha$. Tegimees
kõik konstandid a_β ei ole võrdselt nullid, sest
vastasel juhul saame

$a_\beta = 0 \Rightarrow a_{\alpha\beta} c^\alpha = 0 \Rightarrow (a_{\alpha\beta} c^\alpha) c^\beta = 0 \Rightarrow C \in K$,
mis annab vastuolu. Seega võrrand (8), mis
saab abitahtselt kirjutada kujul

$$a_\beta z^\beta = 0, \quad (9)$$

mis on lineaarne võrrand.

DEFINITSIOON 1. Lineaars $a_{\beta} x^{\beta} = 0$ nimetame
 koalgebraga K punkti $C \notin K$ polaarses (tähistame $P_C(K)$ abil) ja
 punkti C nimetame pooluseks.

Paneme kahe tähele, et poolus C ei kuulu
 oma polaarsse: $C \notin P_C(K)$. Tõepoolest. Vastand
 juhul $C \in P_C(K)$ korral $a_{\beta} C^{\beta} = 0$. Aruandeks ei
 ole

$$C \in P_C(K) \Leftrightarrow a_{\beta} C^{\beta} = 0 \Leftrightarrow (a_{\alpha\beta} C^{\alpha}) C^{\beta} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} C^{\alpha} C^{\beta} = 0 \Leftrightarrow C \in K$$

Jaame vastuolu, sest $C \notin K$.

OMADUS. Kui punkt $D \in P_C(K)$ kuulub punkti
 C polaarsse, siis C kuulub punkti D polaarsse, i.e.,

$$D \in P_C(K) \Leftrightarrow C \in P_D(K), \quad (7)$$

TÕESTUS. Kirjutame

$$D \in P_C(K) \Leftrightarrow a_{\beta} D^{\beta} = 0 \Leftrightarrow (a_{\alpha\beta} C^{\alpha}) D^{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{\alpha\beta} C^{\alpha}) D^{\beta} = 0 \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} C^{\alpha} D^{\beta} = 0 \Leftrightarrow (a_{\alpha\beta} D^{\alpha}) C^{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha \leftrightarrow \beta$ $A^T = A$

$$\Leftrightarrow C \in P_D(K).$$

Sellest amadas on tõestatud.

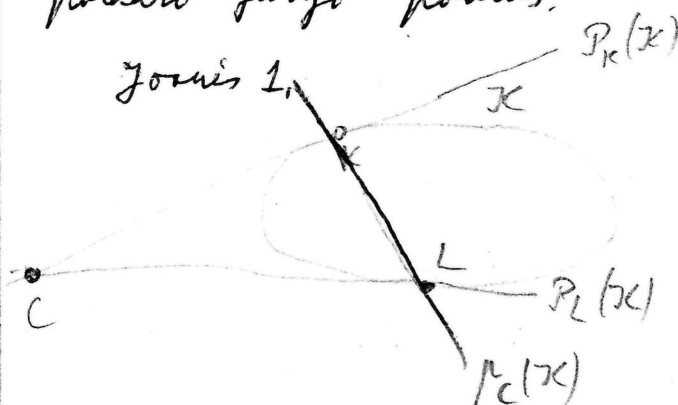
Märkus. Kui C peab olema koalgebraga K mitte-
 inärvane punkt ($C \notin K$), siis polaarid võivad olla
 punkti C lähiva punktiaruumi võranda. Seda
 punktiaruumi on võimalik punktiarumi polaarsse.

DEFINITSIOON 2. Punktide A ja B nimetame
 koalgebraga K suhtes teineteise kaarpunktideks,
 kui $a_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta} = 0$,

Definitsioonist saame, et punkti A kaarpunktide
 hulk on lineaar $P_A(K)$,

Lõpetus tüme projektiooni tasand P_2 kaudu
 jõuavad, kuidas punktide järgi määrata polaari ja
 polaaride järgi poalus.

137.



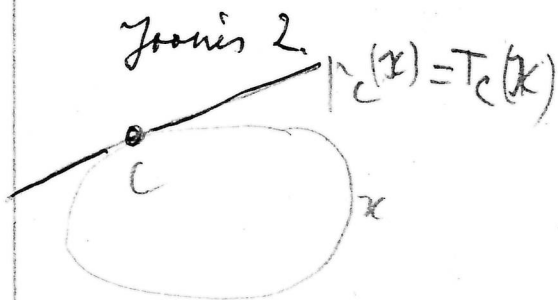
Võtame $C \notin K$, mis on
 „väljaspool“. Joonestame
 läbi C punktide, millede
 punktidega tähistame K
 ja L abil mõne punktidega
 vastavalt p_K ja p_L ,
 moodustame projektiooni

mõne $P_1(K, L)$. Tänaa korjutada!

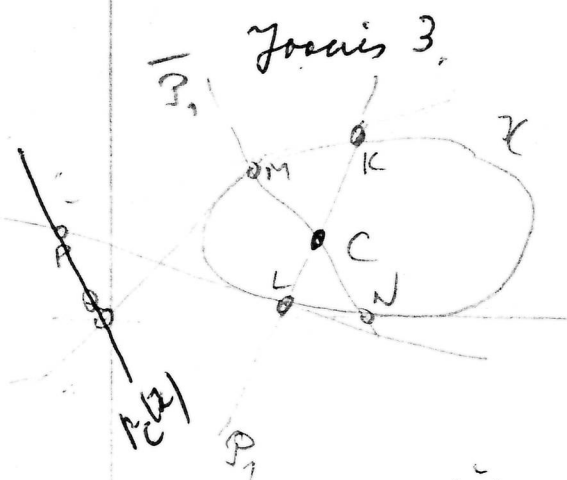
$$C \in p_K(X) \quad C \in p_L(X) \Rightarrow K \in p_C(X), \quad L \in p_C(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_C(X) = P_1(K, L).$$

Tüga punkti C polaarid oleme konstrueerinud.



Kui C on koalidku
 punkt, siis polaar $p_C(X)$
 on punkt C läbi punktiga.



Olgu C koalidku sees.
 Konstrueerime $p_C(X)$,
 võtame läbi C kas
 erinevat projektivset mõtet
 P_1 ja P_2 . Nende lõike-
 punktidega tähistame vastaval
 K, L ja M, N . Joonestame

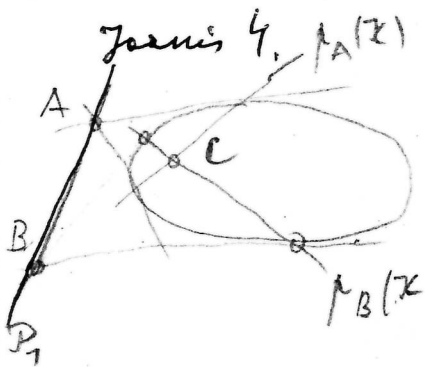
läbi nende punktide punktiga, s.o. polaarid!

$p_K(X)$, $p_L(X)$ ja $p_M(X)$, $p_N(X)$. Tähistame
 lõikepunktide $P \in p_K(X) \cap p_L(X)$ ja $Q \in p_M(X) \cap p_N(X)$.
 Juhul 1 (joonis 1) kohalt punkt C polaarid on $P_1(K, L)$
 ja $P_2(M, N)$. Omaduse põhjal le. B6 saame

$$C \in P_1 \Leftrightarrow C \in p_P(X) \Leftrightarrow P \in p_C(Z)$$

$$C \in \bar{P}_1 \Leftrightarrow C \in p_Q(X) \Leftrightarrow Q \in p_C(Z)$$

Juuga $p_C(Z)$ läbib punkti P ja Q . Tada $p_C(Z) = P_1(P, Q)$.
Nüüd hakkame poleari järgi poolust konstrueerima.



Olgu P_1 projektiivne sirge, mis kvadrant ω lõika. Võtame tavaliselt kahe punkti A ja B , joonistame nende punktide polearid $p_A(X)$ ja $p_B(X)$ (vaata joonis 1). Olgu $C = p_A(X) \cap p_B(X)$.

Kuna

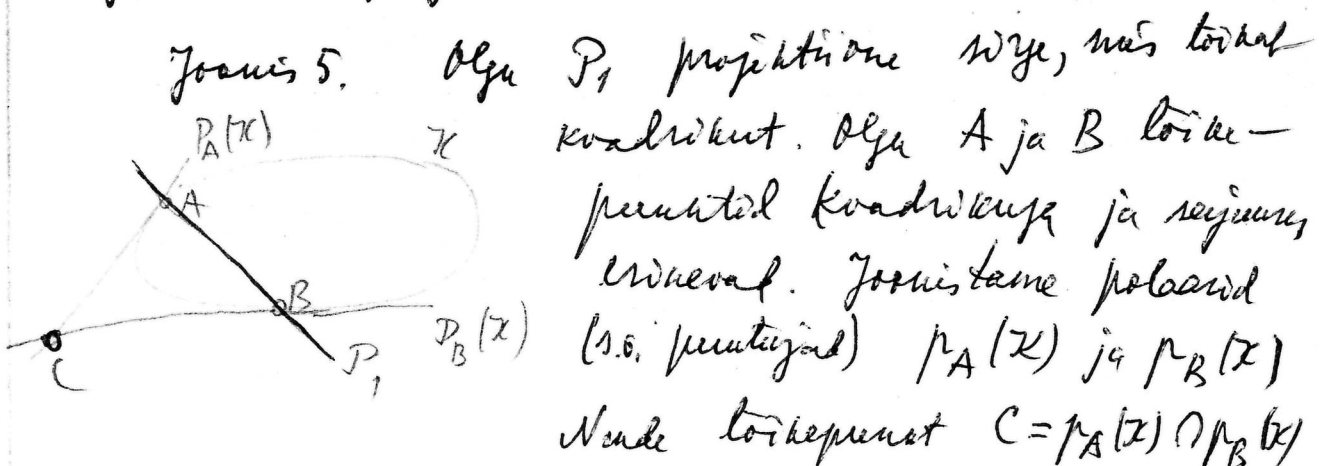
$$C \in p_A(\omega) \Rightarrow A \in p_C(X)$$

$$C \in p_B(X) \Rightarrow B \in p_C(X)$$

Väimast

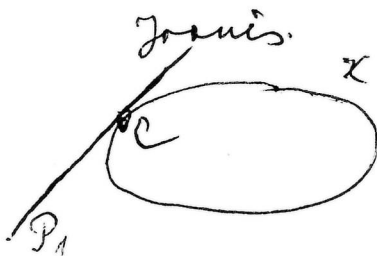
$$A \in p_C(X), B \in p_C(X) \Leftrightarrow p_C(X) = P_1(A, B) = P_1$$

Juuga C on projektiivne sirge P_1 poolus.



Joonis 5. Olgu P_1 projektiivne sirge, mis lõikab kvadrant. Olgu A ja B lõikepunktide kvadrantide ja sirgeline, mis on ω . Joonistame polearid (s.o. punktide) $p_A(X)$ ja $p_B(X)$. Nende lõikepunkt $C = p_A(X) \cap p_B(X)$

on projektiivne sirge P_1 poolus (vt. joonis 1)



Kui projektiivne sirge P_1 puutub kvadrantiga, siis poleeriks, on punktide punkt C .

21. KVADRIKU AUTO POLAARNE REEPER

Projektiivses ruumis $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ vaadeldes kvaadriku saab võtta sellese projektiivse ruumi $\{E_2; E\}$, mille milles kvaadriku on kanooniline kuju:

$$K: (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^{s-1})^2 - (x^s)^2 - (x^{s+1})^2 - \dots - (x^{2s-1})^2. \quad (1)$$

Tiin r on kvaadriku astak: $r = \text{rank } K \geq 1$.

Juhul kui kvaadrik on regulaarne ($r = n+1$), siis ruumi $\{E_2; E\}$, milles saadakse kanooniline kuju, saab kirjeldada pooluse ja polaari mõiste abil.

Võrrandi (1) saame kirjutada

$$K: \sum_{i=0}^r \varepsilon_i (x^i)^2 = 0, \quad (2)$$

kus teatav arv epulendest $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}$ on võrdsed $+1$ ja ülejäänud $\varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_n$ on võrdsed -1 .

Võtame ruumi $\{E_2; E\}$ mõelme punkti E_2 ($\alpha = 0, 1, \dots, n$). Tema koordinaadid on

$$E_2(\underbrace{0:0:\dots:0}_{\alpha}:1:0:\dots:0),$$

mille abil näeme, et tema koordinaadid ei rahulda võrrandit (2). Seega E_2 ei ole kvaadriku punkt. Me näeme, et nimmest $a_\beta = a_{\alpha\beta} c^\beta$ on ($C = E_2$) korral

$$a_0 = 0, \dots, a_{\alpha-1} = 0, a_\alpha = \varepsilon_\alpha, a_{\alpha+1} = 0, \dots, a_n = 0.$$

Tiin me poleme võlmas, et kvaadriku maatriks on kuju:

$$A = (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & 0 \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Punkti E_2 korral polaari $p_{E_2}(K)$ võrrand $a_\beta x^\beta = 0$

lõhtpunktis,

$$p_{E_2}(K): x^2 = 0$$

(3)

Punktide $E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n$ koordinaadid rahuldavad võrrandit (3). Tege nad asuvad punkti E_2 polaaril: $E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n \in p_{E_2}(K)$. Tege n punktist koosnev süsteem $\{E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n\}$ on projektioonult rühmitatud, sest on projektioonult rühmitatud süsteemi $\{E_2\}$ alam süsteem. Tege punktisüsteem $\{E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n\}$ määrab polaari $p_{E_2}(K)$.

$$p_{E_2}(K) = P(E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n)$$

Polaari omaduse kohaselt arjatakse

$$E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n \in p_{E_2}(K)$$

järeldub

$$E_2 \in p_{E_0}(K), \dots, E_2 \in p_{E_{2-1}}(K), E_2 \in p_{E_{2+1}}(K), \dots,$$

$$E_2 \in p_{E_n}(K); \quad E_2 \notin p_{E_2}(K).$$

Võimevast

$$E_2 \in \bigcap_{\substack{\beta=0 \\ \beta \neq 2}}^n p_{E_\beta}(K)$$

(4)

Kuna selle lõike punktidele saadame süsteemist (vanta (3))

$$x^0 = 0, \dots, x^{2-1} = 0, x^{2+1} = 0, \dots, x^n = 0.$$

Süsteemis on n alalist võrrandit. Lahendruumi vektorruumi seisukoht on rühmitatud, projektioon ruumi seisukoht lohud koosneb rühmitatud punktist. Tege (4)

$$\text{täpsustub } E_2 = \bigcap_{\substack{\beta=0 \\ \beta \neq 2}}^n p_{E_\beta}(K). \text{ Tame reperi punkt } E_2$$

on ülejäänud punktide $E_0, \dots, E_{2-1}, E_{2+1}, \dots, E_n$ polaaride lõikepunkt.

DEFINITSIOON. Projektioon reperi, mille nullis on koordinaat normaalkaani võrdutatakse selle koordinaatidele.

autopolaarset reeperst.

Regulaarne koordinaatidena kasvatatakse autopolaarset koordinaatide projektiivset reeperst iirello-
mustade pooluse ja polaarid mäistat abil kesepol-
dada.

22. PROJEKTIIVSE TASANDI KVADRIKUTE TÕÜBID, NENDE EHITUS

Lähtume projektiivse tasandi korral üldjuhul
kanonilistest kujudest. Tegijures 2-rakke $K \geq 1$ talle
omaadab väärtusi 1, 2 ja 3, üldse on määrat-
tasandil viis kvadriku klassi (kanonilise
kujuga järjekorras). Kasutame klasside tähistamises
ü. tunnist ja K . Arvata, Analüütilise geometria
epitaks toodud tähistamist

1. Klass $A(a)$ võrrandiga (1)

$$K: (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$$

Iga kvadriku sellest klassist on oma punkt, sest
lahend $x^0 = x^1 = x^2 = 0$ on võimalik, sest projektiivses ruumis
punktis kõik koordinaadid on ole nullid.

Kvadrant võrrandiga (1) nimetatakse

nullkvadrantiks.

2. Klass $A(b)$. Kvadrant kanonilise
võrrandiga

$$K: (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0 \quad (2)$$

Sellest kvadrantist nimetatakse ovaalkvadrantiks
Tema ehitust seatakse paragrahvi teises punktis

3. Klass $B_1(a)$. Kvadrant kanonilise
võrrandiga

$$K: (x^0)^2 + (x^1)^2 = 0 \quad (3)$$

Vänerist võrreldist saame $x^0 = x^1 = 0$ ja x^2 on muutuva
Koordinaat juba konnab- aduult võhest punktist $(0:0:1)$

4. Klass $B_1(b)$, Koodwa kanoniline võrreld

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^0 - x^1)(x^0 + x^1)$$

Koodwa konnab kahest mittetühjast (s.o. lõikuvast)
projektiivsest võhest. (Tegevist en lajuva koodwinge.)

5. Klass $B_2(c)$. Koodwa kanoniline võrreld

lige $x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 0$

Koodwa konnab kahest tühjast lõikuvast võhest.

Tellige koodwinge klayd en toodud.

Ehitan konnabhatt jõi ruumata ovaalkoodwa.

Teda alljärgneves kohe teeme.

Tähistame ovaalkoodwinge

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$$

vasakult poolt

$$f(x^0, x^1, x^2) := (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2$$

Näeme, et koodwa jagab projektiivse tasandi P_2
kolmeks erinevaks lõikumataks alamhuljaks

$$K^+ = \{X \mid f(x^0, x^1, x^2) > 0\},$$

$$K = \{X \mid f(x^0, x^1, x^2) = 0\},$$

$$K^- = \{X \mid f(x^0, x^1, x^2) < 0\},$$

Ilmselt kõik need huljad en mittetühjad huljad.

TEOREEM 1. Ovaalkoodwa K en projektiivse tasandi kõnnuue kõnnuue.

TÕESTUS. Võtame kaks punkti $A \in K^-$ ja

$B \in K^+$, Tege $f(a^0, a^1, a^2) < 0$ ja $f(b^0, b^1, b^2) > 0$

ühendame punktid A ja B mistahes kõnnuue.

Lõikumisel punktist A punktist B peab funktsioon

143

oma pidevuse tõttu mingis punktis C võidma hullu -
 $f(c^0, c^1, c^2) = 0$, mis ütleb, et $C \in X$. Siit saamegi, et ovaal-
kvadriku on konvexne. $\square$

DEFINITSIOON 1. Projektivne tasandi punkt:

$X \in P_2$ nimetame ovaalkvadriku sisepunktiks, kui

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 < 0, \quad (4)$$

ja välispunktiks, kui

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 > 0. \quad (5)$$

Selle definitsiooni abil saame projektivse tasandi
punktid jagada kolmeks omavahel lõikumatuks alam-
hulgaks: ovaalkvadriku punktid K , sisepunktid K^- ja
välispunktid K^+ ovaalkvadriku suhtes,

TEOREEM 2. Ovaalkvadriku iga välispunkti kor-
ral leidub ovaalkvadrikul kaks punktijat, mis seda
punkti läbivad. Sisepunkti korral teda läbivaid
punktijaid ei leida.

TÕESTUS. Välispunkti $C \in K^+$ korral $(c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2 > 0$
Meil on vaja näidata ovaalkvadrikul K sellise punkti
 $Y(\lambda y^0)$ olemasolu, et punktija $T_Y(X)$ läbiks punkti C . Tõega
stutavatel on punkti $Y \in X$ koordinaadid y^0, y^1, y^2 .
Võime need tulist leida tingimuste

$$Y \in X, \quad C \in T_Y(X), \quad C \in K^+,$$

mis on samaväärsed tingimustega

$$(y^0)^2 + (y^1)^2 - (y^2)^2 = 0, \quad c^0 y^0 + c^1 y^1 - c^2 y^2 = 0, \quad (c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2 > 0. \quad (6)$$

Tedest saame

$$c^0 y^0 + c^1 y^1 = c^2 y^2 \Rightarrow (c^0 y^0 + c^1 y^1)^2 = (c^2 y^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(c^0 y^0)^2 + 2(c^0 c^1)(y^0 y^1) + (c^1 y^1)^2 = (c^2)^2 (y^2)^2.$$

Võimevõime arendamine $(y^2)^2 = (y^0)^2 + (y^1)^2$. Teame

$$[(c^0)^2 - (c^2)^2](y^0)^2 + 2c^0c^1y^0y^1 + [(c^1)^2 - (c^2)^2](y^1)^2 = 0 \quad (7)$$

Tegemist on kas y^0 või y^1 nulliga ruutvõrrandiga. Vastasel juhul oleksid $(y^0)^2$ ja $(y^1)^2$ kordajad võrdsed nulliga:

$$\left. \begin{aligned} (c^0)^2 - (c^2)^2 = 0, \quad (c^1)^2 - (c^2)^2 = 0 &\Leftrightarrow (c^0)^2 = (c^2)^2, \quad (c^1)^2 = (c^2)^2 \\ c^0c^1 = 0 &\Leftrightarrow (c^0 = 0 \vee c^1 = 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^0 = c^1 = c^2 = 0$$

mis on lubamatu, sest projektivne ruumi punktidel on vähemalt üks koordinaat nullist erinev. Võnandi (7) lahendite $y^0 : y^1$ lahendite arv sõltub tema diskriminantist. Kuna

$$\begin{aligned} D &= (c^0c^1)^2 - [(c^0)^2 - (c^2)^2][(c^1)^2 - (c^2)^2] = \\ &= [(c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2](c^2)^2 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Järele arvatakse, et C on välispunkt. Tege võnandi (7) kas erinevat reaalsel lahendit y^0 ja y^1 jaoks. Koordinaadi y^2 saame tingimusest

$$c^2y^2 = c^0y^0 + c^1y^1.$$

Terrami erinev pool tõestatud.

Tõel järele on analüüs samavõrt, arvestades $C \in X^-$ talle tingimus $(c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2 > 0$ arendub tingimusega

$$(c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2 < 0.$$

Võnandi (7) diskriminant D (8) seega on $D < 0$, mis tähendab, et ei ole reaalsel lahendest. Tege punktiga, mis lubatud punkt C punktina.

23 ELLIPTILINE RUUM H. WEYLI JÄRGI

Hermann Weyli järgi on elliptiline ruum teatav projektivne ruum $\mathbb{P}(V_{n+1}) \rightarrow P_n$, milles on fikseeritud teatavad tüüpi regulaarne kvadrik, täpsemalt on fikseeritud nullkvadrik. Väimast mõistatakse absoluutiks. Osutub, et elliptilises ruumis saab defineerida kahe punkti vahelise kauguse, mida tavalises projektivses ruumis teha ei saa.

Enne kui asume elliptilise ruumi's kauguse käitlemisel meetame, mis kauguse mõist peab täheldama. Selles on vaja määratleda meetrilise ruumi mõist.

DEFINITSIOON 1. Lühitühje hulka T nime-
tame meetrilises ruumis, kui on antud kulgatus

$$\varrho: T \times T \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \varrho(x, y),$$

mis rahuldab aksioome

$$1^\circ \quad \varrho(x, y) \geq 0; \quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$2^\circ \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x),$$

$$3^\circ \quad \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z),$$

Arvu $\varrho(x, y)$ mõistatakse punktide x ja y vahelises kauguses.

Taseme nimel peab näidat meetrilise ruumi kohta.

NÄIDE 1, Defineerime eukleedilises ruumis E 146;
 kahe punkti $x, y \in E$ vaheline kaugus $g: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
 valemiga $(x, y) \mapsto g(x, y) := |\overrightarrow{xy}|$. Kontrollame
 tingimusi tavadest, mis tegelikult järelduvad eukleedilise
 (vektori) ruumi omadustest. Vahelult saame 2° ja 3° kehtivuse.
 Nimelt

$$g(x, y) = |\overrightarrow{xy}| = |\overrightarrow{yx}| = g(y, x),$$

$$g(x, y) + g(y, z) = |\overrightarrow{xy}| + |\overrightarrow{yz}| \geq |\overrightarrow{xz}| = g(x, z),$$

Tingimusest 1° on ilmsel $g(x, y) = |\overrightarrow{xy}| \geq 0$.

Lõpuks jääs saame skalaarkorrutuse definitsiooni allt

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{xy}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} = \vec{0}$$

Afiinne ruumi definitsiooni (3°) $x + \overrightarrow{xy} = y$, millest

järeldub $x + \vec{0} = y$. Kui vast 2° kohaselt $x + \vec{0} = x$.

Seega $y = x$. See annabki alati tavalise ja piisava.

Tõsi $\overrightarrow{xy} = \vec{0}$ on samaväärne $x = y$.

NÄIDE 2, Olgu eukleedilises ruumis E_{n+1} antud
 sfäär keskpunktiga M ja raadiusega $r > 0$.

$$S_n = \{x \mid x \in E_n; |\overrightarrow{Mx}| = r\},$$

See tähendab sfääri diameetri otspunktid samastada,
 mis saame (kogu teame) n -mõõtmele projektivse
 ruumi P_n . Tegelikult sellisel projektivsel ruumil
 on täiendav omadus - ruumi E_{n+1} skalaarkorru-
 tamine. Osutub, et sellises projektivses ruumis
 saab anda kahe punkti vaheline kaugus. Selgitame
 lähemalt. Tähistame P_n suvalist punkti $X = (x_1, x_2)$,
 kus x_1, x_2 on diameetri otspunktid, mis samastati.

Punktid x_1 ja x_2 määravad kahe vektori

$$\vec{x}_1 = \overrightarrow{Mx_1}, \quad \vec{x}_2 = \overrightarrow{Mx_2}, \quad \vec{x}_2 = -\vec{x}_1,$$

Analoogiliselt $Y = (y_1, y_2)$ korral

$$\vec{y}_1 = \overrightarrow{My_1}, \quad \vec{y}_2 = \overrightarrow{My_2}, \quad \vec{y}_2 = -\vec{y}_1.$$

$$\frac{|\langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 \rangle|}{|\vec{x}_1| |\vec{y}_1|} = \frac{|\langle -\vec{x}_1, \vec{y}_1 \rangle|}{|-\vec{x}_1| |\vec{y}_1|} = \frac{|\langle \vec{x}_1, -\vec{y}_1 \rangle|}{|\vec{x}_1| |-\vec{y}_1|} = \frac{|\langle -\vec{x}_1, -\vec{y}_1 \rangle|}{|-\vec{x}_1| |-\vec{y}_1|}$$

tõttu nimetatud arv määratakse punkti X ja Y poolt üheselt. Järgnevas loame võranda

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \pm \vec{x}_1, \pm \vec{y}_1 \rangle|}{|\pm \vec{x}_1| |\pm \vec{y}_1|} \geq 0$$

lahenduna nurga φ ^{võttakse} ~~primitiiv~~ ^{veerandist} $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

Definime X ja Y vahelise kauguse vahemik

$$g(X, Y) := \varphi.$$

Edasi tuleb kontrollida, et kas kehtivad omadused 1°-3°. See on nähtavalt ilmne, sest $g(X, Y)$ nurkvaagjoone kaar (lühem), mis läbib punkti X ja Y . Kuna kontroll poleks nii lihtne, siis meie siin seda ei tee. Sellega see näide on lõpetatud.

MARKUS. Kuna projektivne ruum pole reaalvõrdeline ruumidega, siis nii nagu täites 2, me kahe punkti vahelist kaugust defineerida ei saa.

DEFINITSIOON 2. Projektivne ruum P_n , milles on antud kahe punkti vahelise kauguse nullkvadratu abil mõistatav elliptilise ruumina H. Weyli järgi.

Järgnevas me avame selle defineeritud ruumi. Praegu on ta paljuski ebamäärane. Kauguse defineerimiseks karutame mõne punkti lihtsate märgide, aga ka teatavat kvadrant.

Kuna meie arutelu käib koordinaatide abil, siis tuleb fikseerida projektivne ruum $\{E_1; E\}$, mis tekitab korduse täpsuse määrat ^{määrat} ~~vektor~~ ^{vektor} ~~süsteemi~~ ^{süsteemi} $\{\vec{e}_1, \vec{e}\}$, kus $\{\vec{e}_1\}$ on vektorruumi V_{n+1} baas. Punkti X koordinaadid saame vektori $\vec{x}$, $\pi(\vec{x}) = X$, koordinaatide x^i abil ^{saadakse} avaldised $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$.

Näga eeldad, tule mil fikseerida nn. nullkordus 148

$$K: \alpha_\beta x^\beta x^\beta = 0. \quad (1)$$

DEFINITSIOON 3. Regulaarset kvadrant K nimetame nullkordrühm, kui antud paarses reperi tema maatriks A on invertimaatriks, s.o.

$$K: (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0,$$

Luge me eeldame, et mil on fikseeritud mõni nullkordus.

DEFINITSIOON 4. Fikseeritud kvadrant (pragu nullkordus) nimetatakse projektiivse ruumi absoluutiks.

Parame tähele, et nullkordus on pole punkt - $K = \emptyset$.
MÄRKUS. Värdelena üle kompleksarvude $\mathbb{C}$ on nullkordus punktide alamruum.

Onitub, et teatud eeldustel saab defineerida kahe punkti $x, y \in P_n$ vaheline kaugus. Eeldame me küll eeldame, et punktid x ja y on erinevad - $x \neq y$.
Levame projektiivse ruumi $P_1(x, y)$ lõikepunktide nullkordusruumi K . Tähistades x ja y koordinaatide $x(x^\alpha)$ ja $y(y^\alpha)$, siis ruumi mistahes punkti $z(x^\alpha z^\alpha) \in P_1(x, y)$ koordinaatid saame parameetritest viimastest

$$z^\alpha = t x^\alpha + \tau y^\alpha. \quad (2)$$

Teame süsteemi

$$\alpha_\beta x^\beta x^\beta = 0, \quad z^\alpha = t x^\alpha + \tau y^\alpha$$

lahendamise. Süsteemi erime viimast saame kirjutada,

$$\alpha_\beta z^\beta z^\beta = 0 \Rightarrow \alpha_\beta (t x^\beta + \tau y^\beta) (t x^\beta + \tau y^\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_\beta x^\beta x^\beta) t^2 + 2(\alpha_\beta x^\beta y^\beta) t\tau + (\alpha_\beta y^\beta y^\beta) \tau^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x, x) t^2 + 2F(x, y) t\tau + F(y, y) \tau^2 = 0, \quad (3)$$

Kuna nullkvadrantid K pole punkti, siis $x, y \notin K$. 149

Seega $F(x, x) \neq 0$ ja $F(y, y) \neq 0$. Seega võrreld (3) on nii t kui $\bar{t}$ suhtes ruutvõrrand. Teame saame kahe lahendi $t_1, \bar{t}_1$ ja $t_2, \bar{t}_2$:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{F(x, x)} \tau_1, \\ t_2 &= \frac{-F(x, y) \mp \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{F(x, x)} \tau_2, \end{aligned} \quad (4)$$

Kuna ruutvõrrandi korral pole teada, kumb lahend on erinev, kumb teine, siis töötame kummalgi võimalusega eraldi. Teise võimaluse erinevus märkides on antud selguses. Kesktes saadud lahendid $t_1, \bar{t}_1$ ja $t_2, \bar{t}_2$ saame kätte lõikepunktide z_1 ja z_2 koordinaadid

$$z_1: z_1^2 = t_1 x^2 + \bar{t}_1 y^2, \quad z_2: z_2^2 = t_2 x^2 + \bar{t}_2 y^2. \quad (5)$$

on teadaud keli punkti, mistõttu saame moodustada lütrekti: Need hunket

$$\begin{aligned} (xy, z_1, z_2) &= \frac{\tau_1}{t_1}, \frac{\tau_2}{t_2} = \frac{t_2}{\tau_2}, \frac{\tau_1}{t_1} = \frac{t_2}{\tau_2}, \frac{t_1}{\tau_1} = \\ &= \frac{-F(x, y) \mp \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{-F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}} \end{aligned} \quad (6)$$

Laiendades lugeja, saame

$$(xy, z_1, z_2) = \frac{[F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}]^2}{F(x, x)F(y, y)}. \quad (7)$$

Mida on teada kahe fakti a) $(xy, z_2, z_1) = (xy, z_1, z_2)^{-1}$ ja

b) $(xy, z_2, z_1), (xy, z_1, z_2) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mida me arvame.

Tedrest ja valemit (6) saame, et (xy, z_1, z_2) on kujul

$$(xy, z_1, z_2) = \frac{a+bi}{a-bi}, \text{ millest } \text{tean} \text{ moodul on}$$

$$|(xy, z_1, z_2)| = \left| \frac{a+bi}{a-bi} \right| = \frac{|a+bi|}{|a-bi|} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Edan

$$(Xy, z_1, z_2) = \frac{a+bi}{a-bi} = 2+\beta i, \quad |2+\beta i| = (2^2+\beta^2) = 1 \quad (8)$$

$$(Xy, z_2, z_1) = (Xy, z_1, z_2)^{-1} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{1}{2+\beta i} = \frac{2-\beta i}{2^2+\beta^2} = 2-\beta i.$$

Yasme, et lütkuhtel (Xy, z_1, z_2) ja (Xy, z_2, z_1) on teineteise kaaskompleksaarvad.

Edanmõttes on vajalik teha kõrvalepoole matemaatilise analüüsi valdkoale. Eritatav on väärtul 4. Kaugro, Matemaatilise analüüsi II osast lk. 91.

Kompleksarv $z \in \mathbb{C}$ defineeritakse eksponentfunktsioon, kosinus ja sinus lõpmatu rea abil:

$$\begin{aligned} e^z &:= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \cos z &:= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} z^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin z &:= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \quad (9)$$

Yät näeme, et

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}). \quad (10)$$

Funktsiooni e^z pöördkehtest wõrutame lõpmatuks tureks lk. Väärtul on samasugund aradund, mis $h-l$ reaalarvude korral.

Läheme oma teeme juurde tagasi. Defineerime suuruse

$$\hat{\zeta}(X, y) = \frac{\pi}{2i} \ln(Xy, z_1, z_2), \quad (11)$$

kus z on mõne punktis reaalarv. Kas see valem kõlbab kehe punktis vahelises kauguses pole kaugeltki selge, sest määrga $\hat{\zeta}(X, y)$ ei pea olema üldsegi reaalne. Kompleksarv on ta igal juhul, võtame kompleksarvuse z järgmiselt:

$$z = \frac{1}{\pi} \hat{\zeta}(X, y) = \frac{1}{2i} \ln(Xy, z_1, z_2). \quad (12)$$

Tõlme z korral

$$e^{iz} = (e^{\ln(xy, z_1, z_2)})^{\frac{1}{2}} = (xy, z_1, z_2)^{\frac{1}{2}}, \quad e^{-iz} = (xy, z_1, z_2)^{-\frac{1}{2}} \quad 151$$

Valemi (10) abil saame

$$\cos z = \frac{1}{2} [(xy, z_1, z_2)^{\frac{1}{2}} + (xy, z_1, z_2)^{-\frac{1}{2}}] \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} [(xy, z_1, z_2)^{\frac{1}{2}} + (xy, z_2, z_1)^{\frac{1}{2}}].$$

Võimast valemist näeme, et ta ei rääki, millest kahet koordineeritud tähistada z_1 ja millest z_2 . Nüüd asendame viimases valemis (7), arvestades, et üks märkivatest valemis annab (xy, z_1, z_2) , teine määts selgudes annab (xy, z_2, z_1) , lle saame

$$\cos z = \frac{F(x, y)}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} \quad (14)$$

Võimast valemis peab olema väga ettevaatlik, sest avaldise tüüpi muutus ja juures võib avaldise tüüpi muutuda. Me ei tea täpselt, kas $F(x, y)$ arendub positiivseks $-F(x, y)$. See vajab täpsustamist. Me kirjeldame (14) avaldise

$$\cos z = \pm \frac{F(x, y)}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} \quad (15)$$

Parame tähele, et $F(x, x) > 0$ ja $F(y, y) > 0$. Täpsustame, et

$$F(x, x) = a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0,$$

$$F(y, y) = a_{\alpha\beta} y^{\alpha} y^{\beta} = (y^0)^2 + (y^1)^2 + \dots + (y^n)^2 > 0.$$

Teise $\sqrt{F(x, x)F(y, y)}$ eksistents ja on positiivne. Täpsustame valemis (15). Valem (15) peab kehtima ka x^{α} ja y^{α} arendamisel λx^{α} ja μy^{α} . Sel korral $F(x, y)$, $F(x, x)$ ja $F(y, y)$ arenduvad $\lambda \mu F(x, y)$, $\lambda^2 F(x, x)$ ja $\mu^2 F(y, y)$. Seega valemis ilma märkivate parame pool arendub ümber:

$$\frac{F(x, y)}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} \rightarrow \frac{\lambda \mu F(x, y)}{\sqrt{\lambda^2 F(x, x) \mu^2 F(y, y)}} = \frac{\lambda \mu F(x, y)}{|\lambda| |\mu| F(x, y)}.$$

Seejuures peab säilima võrde. Näeme, et valem (15) on kehtiv hoopis järjekorral koguul

$$\cos z = \frac{|F(x, y)|}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} \quad (16)$$

Süst saame, et z on reaalarv. Valemist (12) saame, et

$\frac{1}{2i} \ln(x, y, z_1, z_2)$ on reaalarv. Tähistame

$$\frac{1}{2i} \ln(x, y, z_1, z_2) = \frac{\mu}{2}, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln(x, y, z_1, z_2) = \mu i$$

Süst

$$\ln(x, y, z_2, z_1) = \ln(x, y, z_1, z_2)^{-1} = -\ln(x, y, z_1, z_2) = -\mu i,$$

Valemist (11) saame

$$\hat{g}(x, y) = \frac{\mu}{2}.$$

$\hat{g}(x, y)$ kahe punktide vaheline kaugus ei sobi, sest see kaugus võib tulla ka negatiivne, kui väärtus on μ .

Sage punktide x ja y vaheline kaugus on meil ka difoneeride valemiga $g(x, y) = |\hat{g}(x, y)|$, s.o.

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{i} \ln(x, y, z_1, z_2) \right|. \quad (17)$$

Märkus: Tegelikult valemist (15) võttes valemist (16) tõeliseks tuleb tähele panna valemist (11) täpsustamist valemis (17)

Edasi tuleb kontrollida, kas valem (17) rahuldab kauguse vajalikke aksioome. Nüüd saame esimesel on lihtne kontrollida, sest see on lihtne kontrollida, sest see on lihtne kontrollida.

See on selge, et $g(x, y) \geq 0$. Väga on kontrollida, kas $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Arvutame.

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{1}{i} \ln(x, y, z_1, z_2) \right| = 0 \Leftrightarrow \ln(x, y, z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z_1, z_2) = 1 \Leftrightarrow x = y, \text{ sest } z_1 \neq z_2,$$

Seejuures saame aru, kuidas

Kontrollime aksooni $s(X, Y) = s(Y, X)$. See täpselt 153. kehtib, sest

$$\begin{aligned} s(X, Y) &= \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{i} \ln(X, Y, z_1, z_2) \right| = \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{i} \ln(Y, X, z_1, z_2) \right| = \\ &= \frac{\pi}{2} \left| -\frac{1}{i} \ln(Y, X, z_1, z_2) \right| = \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{i} \ln(Y, X, z_1, z_2) \right| = \\ &= s(Y, X), \end{aligned}$$

Tegelikult kehtib see ka

$$s(X, Y) + s(Y, Z) \geq s(X, Z).$$

Ide meie w kontrolli.

Lõpuks märgime, et kui võtta projektivse rühma mis tahes element $g \in G(P_n)$, siis punktide X ja Y tõmmad uutes punktides $g(X)$ ja $g(Y)$, aga samuti tõmmad uutes punktides z_1 ja z_2 — $g(z_1)$ ja $g(z_2)$. Teame, et lihtsate sarnaste projektivse rühma toimel:

$$(X, Y, z_1, z_2) = (g(X), g(Y), g(z_1), g(z_2)).$$

Silbest tulebki $s(X, Y) = s(g(X), g(Y))$. Kõik punkti vahelise kauguse on projektivse invariant.

Sil sama, et elliptilise ruumi geometria koosneb alankulge $M \subset P_n$ silbest erandest, mis sarnast projektivse rühma $G(P_n)$ toimel. Kõik absoluut rühma toimel w tõrjast, sest tal pole punkti. See vajadust "kõrvaldada" projektivset rühma pole vaja.

24. HÜPERBOLNE EHK LOBATŠEVSKI RUUM H. WEYLI JÄRGI

Projektivse ruumi $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ alge minge projektivse ruumi $\{E_1, E_2\}$ suhtes antud omaduse koodiks

$$x: \alpha \beta x^2 \alpha \beta = 0,$$

(1)

millega väärtused antipolaarne reepere suhtes on

$$K: (x^0)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 - (x^n)^2 = 0.$$

Väname näeme, et projektivne ruumi ^{normaalselt} ~~punktide~~ karnal võrreldes vasal pool on suurem nullist, mõnagasti karnal väiksem nullist ja koadriku enda punktide karnal võrdne nulliga.

DEFINITSIOON 1. Projektivne ruumi punkti $C(\lambda c^i)$ nimetatakse koadriku sisepunktiks, kui $a_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta < 0$, välispunktiks, kui $a_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta > 0$. Tähistame koadriku sisepunktide ja välispunktide hulka vastavalt K^- ja K^+ abil.

Projektivne ruumi jaguneb kolmeks omavahel lohkumatuks hulaks:

$$P_n = K^- \cup K^+ \cup K,$$

TEOREEM 1. Ovalkoadrik on kõhune hüperpiin.

TÕESTUS. Võtame projektivne ruumi sisepunkti A ja välispunkti B . Sel karnal funktsiooni

$$f(x^0, \dots, x^n) = a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

kohal A ja B on vastavalt negatiivne ja positiivne —

$$f(a^0, \dots, a^n) = a_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta < 0, \quad f(b^0, \dots, b^n) = a_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta > 0.$$

Ühendame punktid A ja B mistahes kõveraga γ
 $\gamma: x^i = x^i(t).$

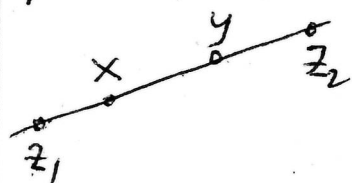
Pidev funktsiooni kõveral $f(x^0(t), \dots, x^n(t)) \stackrel{\pm}{=} \bar{f}(t)$ omab otspunktides A ja B erinevad väärtused. Seega peab kõveral γ leiduma punkt $K(\lambda k^i)$, mille

$$f(k^0, \dots, k^n) = 0. \text{ Seega } K \text{ on koadriku punkt.}$$

Seega koadriku sisepunktis mõneal välispunkti peab läbima koadriku punkti. Seega ovalkoadrik on kõhune. $\square$

Nüüd olgu projektivne ruumi P_n absoluutne väetis ovalkoadrik. Vastlöö all võtame aduvalt sisepunktid K^+ .

Definime mistahes kahe erineva punkti $x, y \in K$ abil nende vahelise kauguse $g(x, y)$ taas liitrukti abil, nagu elliptilise ruumi korral. Võtame projektiivse sõrje $P_1(x, y)$, mis lõikab kvadriinti kahe reaalse punkti - tähistame z_1 ja z_2 . Liitrukti (xy, z_1, z_2) on reaalne, täpselt invari positiivne - $(xy, z_1, z_2) > 0$. Põhjuseks on asjaolu, et punktidele x, y, z_1 ja z_2 korral punktid x ja y ei lahuta teineteist.



Liitrukti leidmisel tuleb leida lõikepunktid z_1 ja z_2 , mis saame süsteemist

$$ax^2 + by^2 = 0, \quad z^2 = tx^2 + \tau y^2 = 0. \quad (5)$$

Arvutades ühijärguul erinevate saame võrandsi lõikepunktidele vastavate t ja τ leidmisel. Erinevate võrandsi saab kirjutada

$$F(x, x)t^2 + 2F(x, y)t\tau + F(y, y)\tau^2 = 0.$$

Järelikult $F(x, x) \neq 0$ ja $F(y, y) \neq 0$, nii väime on nii t , aga τ suhtes ruutvõrand. Saame

$$t_1 = \frac{-F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{F(x, x)} \tau_1$$

$$t_2 = \frac{-F(x, y) \mp \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{F(x, x)} \tau_2$$

mille abil saame lõikepunktid (järjesten täpsemalt)

$$z_1: z_1^2 = t_1 x^2 + \tau_1 y^2, \quad z_2: z_2^2 = t_2 x^2 + \tau_2 y^2.$$

Liitrukti definitsiooni kohaselt

$$(xy, z_1, z_2) = \frac{\tau_1}{t_1} : \frac{\tau_2}{t_2} = \frac{t_2}{\tau_2} : \frac{t_1}{\tau_1} = \frac{-F(x, y) \mp \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{-F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}} \\ \Rightarrow (xy, z_1, z_2) = \frac{F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}{F(x, y) \mp \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}}. \quad (6)$$

Definime punktide x ja y vahelise kauguse $g(x, y)$ valemi:

$$s(x, y) := \frac{z}{2} |\ln(xy, z_1 z_2)|, \quad z > 0 \quad (7)$$

Sünn definitsioonis on loomulik, et on absoluutväärtus, sest tulemus ei tahi rääkida lõikepunktide nummerdamisest. Seega valem peab kehtima, kui milles valemis z_1 ja z_2 ära vahetame:

$$|\ln(xy, z_1 z_2)| = |\ln(xy, z_2 z_1)| = |-\ln(xy, z_2 z_1)| = |\ln(xy, z_2 z_1)|$$

Valem (7) täpselt ka, et $s(x, y) \geq 0$

Valem (7) kahe punkti vahelise kauguse leidmisel on isegi ebamugav. Oritub, et lihtne on leida $\cosh \frac{s(x, y)}{z}$, millest saame kätte $s(x, y)$.

Arvestame, et $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Seega

$$\cosh \frac{s(x, y)}{z} = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{s(x, y)}{z}} + e^{-\frac{s(x, y)}{z}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(e^{\pm \ln(xy, z_1 z_2)} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(e^{\mp \ln(xy, z_1 z_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(e^{\ln(xy, z_1 z_2)} \right)^{\pm \frac{1}{2}} + \left(e^{\ln(xy, z_1 z_2)} \right)^{\mp \frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(xy, z_1 z_2)^{\pm \frac{1}{2}} + (xy, z_1 z_2)^{\mp \frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(xy, z_1 z_2)^{\frac{1}{2}} + (xy, z_1 z_2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[(xy, z_1 z_2)^{\frac{1}{2}} + (xy, z_1 z_2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Edasises rehtendaluses terme arendused valemist (6), teha almuvalt teisendades laadudes lugejaga:

$$(xy, z_1 z_2) = \frac{[F(x, y) \pm \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}]^2}{F(x, x)F(y, y)}$$

Seame:

$$\begin{aligned} \cosh \frac{s(x, y)}{z} &= \frac{1}{2} \frac{[F(x, y) + \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}] + [F(x, y) - \sqrt{F(x, y)^2 - F(x, x)F(y, y)}]}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 |F(x, y)|}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} = \frac{|F(x, y)|}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}} \end{aligned}$$

$$\text{ch } \frac{g(x, y)}{2} = \frac{|F(x, y)|}{\sqrt{F(x, x)F(y, y)}}.$$

(8)

Eelminele leheskiljel plüatroga lisatud absoluutväärtuse määrgid on lisatud seepärast, et $g(x, y)$ peab olema mitte-negatiivne. Valemis (8) nõuetes alaruumi eksisteerib, mis

$$F(x, x) < 0, F(y, y) < 0 \Rightarrow F(x, x)F(y, y) > 0,$$

Valem (8) on tõepoolest lihtne ch $\frac{g(x, y)}{2}$ leidmiseks. Täiend saab kergesti omakorda leida $g(x, y)$.

Lõpuks tuleks kontrollida, kas $g(x, y)$ rahuldab kaupuri korda kinnistatavaid aksioome 1^o-3^o. Nii et kahe ruumi kontroll on lihtne. Nii et võtame me siin ei kontrolli.

Järgnevas me vaatleme Lobatševski tasand, riigi mudelit. Ruumi mõde on võetud seepärast nii väike, et saaksime teha joonist. Lobatševski tasand saamiseks tuleb lehtide projektivne tasandist $\pi: V_3' \rightarrow P_2$. Me eeldame, et V_3 on pseudoeukleedilise vektorruumi 1E_3 . Teise järele $\pi: {}^1E_3 \rightarrow P_2$. Paralleelselt võime vaadelda ka pseudoeukleedilist afiinsu ruumi 1E_3 siinruumiga 1E_3 . Ruumis 1E_3 on algebras skalaarkorrutamine $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Võttes tühja baasi $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja avaldades

$$\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha, \vec{y} = y^\beta \vec{e}_\beta \Leftrightarrow \vec{x} = (x^\alpha), \vec{y} = (y^\beta),$$

saame skalaarkorrutuse jaoks

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = \langle \vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta \rangle \quad (9)$$

juhul kui $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on ristreeper, siis

$$G = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mis talle valem (9) lihtsustub:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^0 y^0 + x^1 y^1 - x^2 y^2.$$

Võime vektor $\vec{x}$ pikkuse $|\vec{x}|$ rinda järele saame

$$|\vec{x}|^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2.$$

Vektoreid $\vec{x}$ pikkusega null (kogu teame) nimetatakse isotroopseteks. Nad antakse võrrandiga

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0, \quad (10)$$

mille lahendite abil saame vektorid $\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha$. Lõpuks baasi $\{\vec{e}_\alpha\}$ vektari $\vec{e}_1 = \vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ saame üldisemas oleva vektarsüsteemi $\{\vec{e}_\alpha; \vec{e}\}$, mis määrab projektiivse tasandi $\pi: {}^1E_3 \rightarrow P_2$ projektiivse reperi $\{E_\alpha; E\}$, kus $E_\alpha = \pi(\vec{e}_\alpha)$ ja $E = \pi(\vec{e})$. Kus muil on võrrand (10)

lahend $\vec{c} = c^0 \vec{e}_0 + c^1 \vec{e}_1 + c^2 \vec{e}_2$, mis eraldab null-lahendist, siis on lahendiks ka vektorid $\vec{c}_\lambda = (\lambda c^0) \vec{e}_0 + (\lambda c^1) \vec{e}_1 + (\lambda c^2) \vec{e}_2$, kus $\lambda \in \mathbb{R}'$, sest

$$(c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda c^0)^2 + (\lambda c^1)^2 - (\lambda c^2)^2 = \lambda^2 [(c^0)^2 + (c^1)^2 - (c^2)^2] = 0.$$

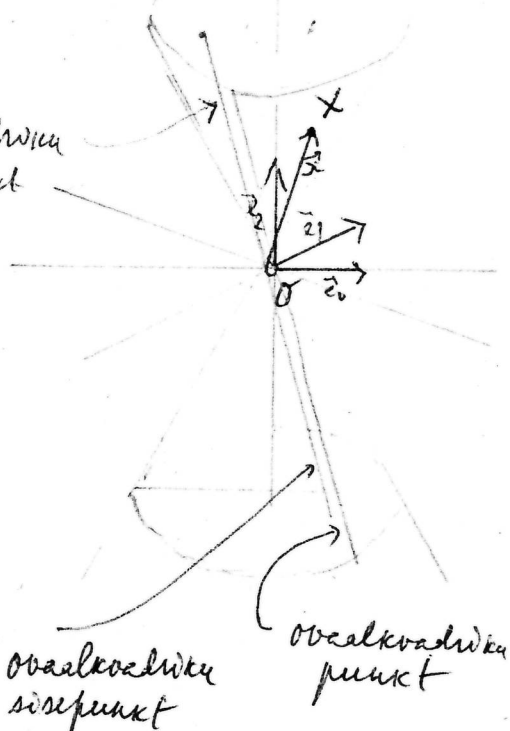
Järe võrrandit (10) võime vaadelda projektiivse tasandi $\pi: {}^1E_3 \rightarrow P_2$ võrrandina reperi $\{E_\alpha; E\}$ suhtes. Lahendina tulib vaadelda komplekti $\{\lambda c^\alpha\}$, $\lambda \in \mathbb{R}'$. Järe nägime, et isotroopsete vektorite hulka ruumis 1E_3 indutseerib projektiivsel tasandil ovaalkoordinatide võrrandiga (10). Kuna võrrand (10) on kaheastmelisel kujul, siis projektiivne reper $\{E_\alpha; E\}$ on antipolaarne. Võttes ruumis 1E_3 reperi $\{O; \vec{e}_\alpha\}$ siis iga vektor $\vec{x}$ indutseerib punkti $X \in {}^1E_3$ tingimusega $\vec{O}X = \vec{x}$. Seega,

$$\vec{x} = (x^\alpha) \Leftrightarrow X(x^\alpha),$$

Eespool vaadeldud isotroopsete vektorite hulka on võrdne punktihulgaga $\{X\}$, kus $\vec{O}X = \vec{x}$ ja $\vec{x}$ on isotroopne.

Selle punktihulga määrab taas võrrand (10). Tekkinud punktihulka nimetatakse isotroopseks koosseisiks, milleks on tšist jätku koosseis.

ovaalkvadriline
välispunkt



ovaalkvadriline
sisepunkt

ovaalkvadriline
punkt

Kui projektivne tasandona P_2 vaadelda sirgete ruumist $S(O)$ keskpunktiga O . Isotroopne koornel annab aruol võrd (s.o. projektivne tasand P_2 punkt) on ovaalkvadriline K punkt. Ovaalkvadriline K sisepunktid on ruumi $S(O)$ sirget, mis on isotroopne koornel sees (ovaalkvadriline ruu) ja välispunktid on $S(O)$ võrd, mis on isotroopne koornest väljas pool.

Ovaalkvadriline sisepunktid hulk K^+ annab Lobatševski tasandi. See on üks võimalik

Loebatševski tasandi tõlgendamiseks ruumi $\mathbb{E}_3$ ruumina.

Arvame Lobatševski tasandile ved kaas tõlgendust. Arvame teine tõlgenduse juures: võtame sfääri keskpunktiga O . Ruumi $S(O)$ iga sirge lõikab sfääri kahele diameetralise vastaspunktis. Sellise paaride hulk annab projektivne tasandi teine mudeli. Sirgete lõikepunktide hulk sfääril annab Lobatševski tasandi. Järele aland sfääri võtaval on vaja rõhutada, et selle saab kokku paada „kolmeist sfääril“ - reaalselt ruumilise $r > 0$ sfäär, piktimaapinnale raadiusega $r_i, r > 0$, sfäär ja raadiusega $r = 0$ sfäär. Nende viirandit on

$$1) |\vec{OX}| = r, \quad 2) |\vec{OX}| = r_i \quad 3) |\vec{OX}| = 0 \Leftrightarrow$$

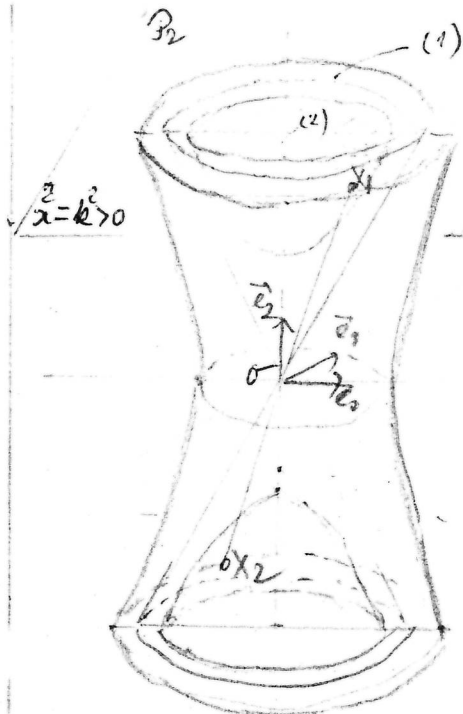
$$\Leftrightarrow 1) |\vec{OX}|^2 = r^2, \quad 2) |\vec{OX}|^2 = -r^2, \quad 3) |\vec{OX}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1) (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = r^2,$$

$$2) (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = -r^2,$$

$$3) (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0.$$

Näeme, et sfäär koosneb 1) kahetahelisest hüperboloidist, 2) ühetahelisest hüperboloidist ja 3) teist järku koornest.



Kõrvalekaleval jaamisel on
joonestatud sfäär (kõnnub kolmest
türist. Lobatševski tasandi
saamises on vitta sfäär

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = -r^2. \quad (11)$$

(kaksikahelise hüperboloid).

Võimevõ on joonisel rõhutatud.

Võttes võtme $S(0)$ siinpunktis
ovaalkuadriku suhtes, saame
koorpunktide kaksikahelise hüper-
boloidiga (11) — mis kehtib on
ühel kettel, teine teisel kettel

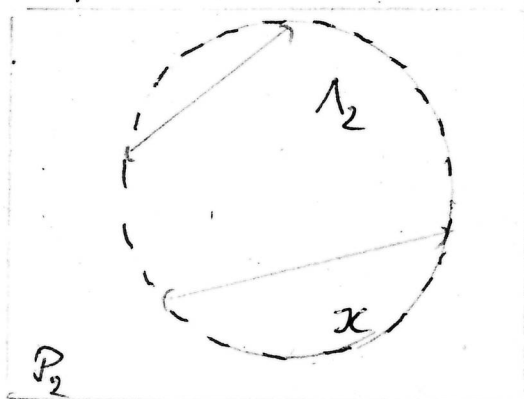
Paaride (x_1, x_2) hulk annab Lobatševski tasandi.
Kui pilduda kaksikahelise hüperboloidi ühe kattega (või ka
joonisel „võtme“, siis iga paaris (x_1, x_2) teine punkt
langeb ära. Seega Lobatševski tasandil on ka kaks-
katteline hüperboloidi üks kattedest. „Võtme“ katti punkti-
de kaudu valitud veepiir $\{0; \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kaudu punktis
 $X(x^0, x^1, x^2)$ on koordinaat x^2 suurem nullist: $x^2 > 0$,

stõndamine, mis tähendab, et Lobatševski tasandi võtme
saamises, tuleb võtta sfääri keskpunkti läbi tasand.
Tema kõige sfäärige (s.o. kaksikahelise hüperboloidi ühe
kattega võttes „pooli“ suunaga joonest. Sellest on hüper-
boloidi üks kattedest. Seega võttes on üks võtme kover as.

Nüüd lõpetame vaatleme Lobatševski tasandi kol-
mandat tõlgendust. Me vaatleme projektivset tasandit
ebapunktiidega tähistatud ruumi E_2 tasandil. Selle
tasandi viis viitide vahel asuvasse võtme, et võtme $S(0)$
punkt 0 ei kuulu tasandile. Me võtame tasandi, mille
viitide ruum on $L(\vec{e}_0, \vec{e}_1)$. Kõige võtme koveriga
annab ovaalkuadriku (joonisel (1)), sellest on võtme, mille
saame siin.

$$\begin{cases} (x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0 \\ x^2 = k^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^0)^2 + (x^1)^2 = k^2 \\ x^2 = k^2 > 0 \end{cases}$$

See võrras on täpselt ringjoone raadiuses $k^2 > 0$.
Et saada niin Lobatševski tasandi punktid, tuleb võtta
 $S(0)$ kantsles võtta Lobatševski tasandi punktid, s.o. sir-
nyed (vt joonis lk. 168) ja leida kõrgepunktid tasandis
 P_2 (vt joonis lk. 169). Selleks on ringjoone raadiuses $k^2 > 0$
sirpunktid - lehtone ring. Kõrvaleleval joonisel punktis



antud ringjoone on ovaalkraad. Tema sirp on Lobatševski tasand. Selgitame lõpus, mis on selline kantsles Lobatševski tasandi punktid. Selleks on vaja vaadelda punkti O laboos

tasandis, mis ringi sirpust lõikab. Nendeks on vaadel-
dava ringjoone kõlul ilma otspunktide. Otspunktid on
juba ovaalkraadi punktid, mis ei Lobatševski tasandi
punktid.

25. PROJEKTIIVSE RUUMI ALAMHULGA STATSIONAARSUSE RÜHM. ELLIPTILISE JA HÜPERBOOLSE RUUMI LIIKUMISTE RÜHM.

Olgu F projektivne ruum $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ mitteühis alam-
hulk - $F \subset P_n$ ja $F \neq \emptyset$. Me vaatleme projektivse ruumi (s.o. liikum-
iste rühma selliseid elemente g , mil $g(F) = F$. Teisest alamhulga

$$G(F) := \{ g \in G(P_n) \mid g(F) = F \}$$

Teiseks $G(F) \subset G(P_n)$ on mitteühis, sest rühma $G(P_n)$ ühiselementi e
kernel $e(X) = X$, kus X on seelõike projektivse ruumi P_n punkt.
Järelikult $e(F) = F$, millest $e \in G(F)$, s.o. $G(F) \neq \emptyset$.

TEOREEM 1. Mitteühis alamhulk $G(F) \subset G(P_n)$
on projektivse rühma $G(P_n)$ alamrühm.

TÕESTUS. Meil on §1 kohaselt näidata, et iga $g, h \in G(F)$ korral ke $gh \in G(F)$ ja, tehes, et iga $g \in G(F)$ korral ke $g^{-1} \in G(F)$. Kontrollime kas ka see kehtib. Iga $g, h \in G(F)$ korral $g(F) = F$ ja $h(F) = F$. Sellest tulebki $gh(F) = g(h(F)) = g(F) = F$. Iga $gh \in G(F)$. Tehes, Iga $g \in G(F)$ korral $g(F) = F$. Et ka $g \in G(P_n)$, siis selle rühmas leidub $g^{-1} \in G(P_n)$. Tema korral $g^{-1}(F) = g^{-1}(g(F)) = g^{-1}g(F) = e(F) = F$, mistõttu $g^{-1} \in G(F)$. Teorem on tõestatud. $\square$

DEFINITSIOON 1. Alamrühma $G(F)$ nimetame projektivse ruumi P_n mittetühja alamhulge F stativnaarsusrühmaks

Moodeldame mittetühja alamhulge $F \subset P_n$ täiesti ruumina P_n . Kui me $\bar{F} := P_n \setminus F$ peame arutuma mittetühjaks, siis tekib ka hulge F stativnaarsusrühm $G(\bar{F})$.

TEOREEM 2. Alamhulgede $F \neq \emptyset$ ja $\bar{F} := P_n \setminus F \neq \emptyset$ stativnaarsusrühmad $G(F)$ ja $G(\bar{F})$ langevad ühte.

TÕESTUS. Meil on vaja näidata $G(F) \subset G(\bar{F})$, $G(\bar{F}) \subset G(F)$.

Iga $g \in G(F)$ korral $g(F) = F$. Iga $x \in F$ korral $g(x) \in F$. Näitame, et $g \in G(\bar{F})$. Sellises on vaja näidata, et $g(\bar{F}) = \bar{F}$. Alustame tagasihoidlikumalt. Näitame, et iga $x \in \bar{F}$ korral $g(x) \in \bar{F}$. Alame vastuväiteliselt, et $g(x) \neq x'$ ei kuulu alamhulka $\bar{F}$, siis $x' \in F$. Element g pööritleb $g^{-1} \in G(F)$ abil saame

$$F \ni g^{-1}(x') = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x \in \bar{F}.$$

Kuna $F \cap \bar{F} = \emptyset$, siis saime vastuolu järeldub $x' \in \bar{F}$.

Tellige oleme näidanud, et $g \in G(\mathbb{F})$ korral $g(\overline{\mathbb{F}}) \subset \overline{\mathbb{F}}$.
 Analooziliselt g pöördelemendi $g^{-1} \in G(\mathbb{F})$ abil saame
 $g^{-1}(\overline{\mathbb{F}}) \subset \overline{\mathbb{F}}$. Kahe peale kokku saame:

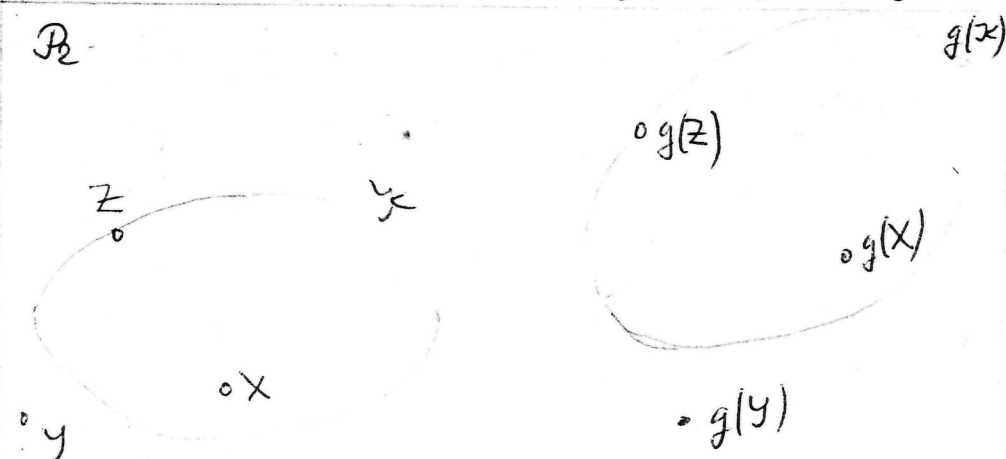
$$\overline{\mathbb{F}} = g(\overline{\mathbb{F}}) = g^{-1}g(\overline{\mathbb{F}}) = g^{-1}(g(\overline{\mathbb{F}})) \supset \overline{\mathbb{F}},$$

sest $g(\overline{\mathbb{F}}) \subset \overline{\mathbb{F}}$, saame $\overline{\mathbb{F}} \subset \overline{\mathbb{F}}$. See on võimalik, kui
 $g(\overline{\mathbb{F}}) = \overline{\mathbb{F}}$. Tellige oleme näidanud

$$(g \in G(\mathbb{F}) \Rightarrow g \in G(\overline{\mathbb{F}})) \Leftrightarrow G(\mathbb{F}) \subset G(\overline{\mathbb{F}}),$$

Analooziliselt näitame, et $G(\overline{\mathbb{F}}) \subset G(\mathbb{F})$. Kokkuõttes
 $G(\mathbb{F}) = G(\overline{\mathbb{F}})$. Teoreem on tõestatud. $\square$

Rakendame saadud tulemusi Lobatševski ruumi
 korral. Tegemist on projektivse ruumiga $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$,
 mille absoluutis on ovaalkoordinaat K , mis jagab
 projektivse ruumi P_n kolmeks alamhulgaks (toikumatuse):
 koordinaat (absoluut) punktid K , koordinaat siirpunktid K^+
 ja väärpunktid K^- . Lobatševski ruumis Λ_n on mitatati
 hulk K^- . Kuna K on mittetühi, siis tekib absoluut
 stationaarne rühm $G(K)$, mistahes $g \in G(P_n)$ korral



teinud ta projektivse reperi $\{E_i; E\}$ uue projektiva-
 ses repertis $\{E'_i; E'\}$:

$$\{E_i; E\} \xrightarrow{g} \{E'_i; E'\}$$

Seega on punkt $X \in P_n$ ja kujutis $g(X)$ on samal
 koordineeritud vastavalt projektivsete repertide $\{E_i; E\}$ ja

$\{E'_2; E'\}$ suhtes. Tõugu kvadriku K ja $g(K)$ võrandsel
antud vastavalt reperi $\{E_2; E\}$ ja $\{E'_2; E'\}$ suhtes on
sama võrandselge;

$$K: a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \iff g(K): a'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = 0$$

(reperis $\{E_2; E\}$) (reperis $\{E'_2; E'\}$)

Samuti saimead võrandselge K on kvadriku K
keskpunkt, ^(välispunkt) mis $g(X)$ on kvadriku $g(K)$ keskpunkt (välispunkt)
Kui g on kvadriku statsionaarsete rühmast $G(K)$, mis
 $g(K)=K$. Tõugu K^- kujutub kvadriku K keskpunkti
hulgaks, sest $K=g(K)$. Tõugu, $g(K^-)=K^-$. Analooziliselt
muudab, $g(K^+)=K^+$. Tõugu tulemus;

TEOREEM 3, Ovaalkvadriku statsionaarsete
rühm $G(K)$ rühm keskpunkti K (välispunkti)
statsionaarsete rühmade $G(K^-)$ ($G(K^+)$);

$$G(K)=G(K^+)=G(K^-),$$

Kuna hüperboolse (Lobatskovi) ruumi on keskpunkti
 K^- hulk, kujutub kvadriku K peab jääma paigale, mis
hüperboolse ruumi liikumiste rühmas, on kvadriku K
statsionaarsete rühm $G(K)$.

Lõpuks paar sõna elliptilise ruumi liikumiste rühma
kohta. Kuna absoluutse ja nullkvadriku K , Kuna $K=\emptyset$,
mis pole vaja vaadelda tema statsionaarsete rühma, sest
kvadriku paigalhoidmise probleeme pole. Tõugu
elliptilise ruumi liikumiste rühmas on projektivne
rühm $G(P_n)$.

Kahes järgmises paragrahis uurime elliptilise ja
hüperboolse tasandi geometriat.

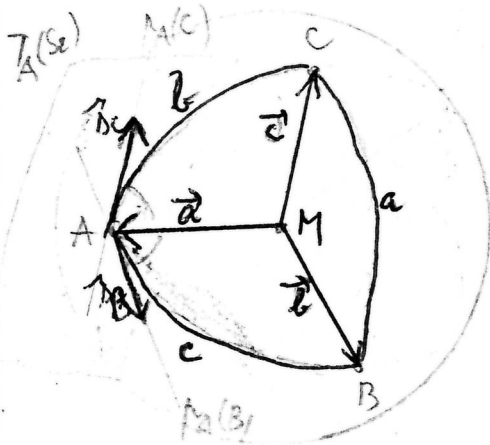
26. SFÄÄRILINE SIINUS- JA KOOSINUS-

TEOREEM, DUAALNE KOOSINUSTEOREEM,
KOLMNURGA PINDALA, SISENURKADE SUMMA.

Kahes järgnevas paragrahis me emaldume
projektiivsest geometriast.

Võtame kolmemõõtmelises eukleedilises ruumis
 E_3 sfääri keskpunktiga M ja raadiusega $r > 0$:

$$S_2(M; r) := \{X \mid X \in E_3, |\overrightarrow{MX}| = r\},$$



Sfääril nagu tasandil saab
vaadelda kolmnurki, võttes
kõigedeks suurvõrrejooni
kaared. Joonud on kolm-
nurk joonistatud punasega.
Tippude on tähistatud tähtedega
 A, B ja C ning kaardid joonud

päri vastupäeva. Tippude A, B ja C vastaskülgi on tähis-
tatud vastavalt tähtedega a, b ja c . Sfääri kesk-
punktist M tippudesse minevaid vektoreid on tähis-
tatud

$$\vec{a} = \overrightarrow{MA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{MB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{MC}.$$

Jaame

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha}{r}, \quad \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\beta}{r}, \quad \angle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\gamma}{r}.$$

DEFINITSIOON 1. Kolmnurk ABC mõne tipu
sisenurgaks nimetatakse vaadeldavat tippuist kummalgi
küljel (suurvõrrejoone kaarile) tõmmatud punktide vahelist
nurka. Sisenurka tähistame sama tähega, millega tähistame
tippu.

Lisame rakenduseks sobiva velami kolmnurga
sisenurga arvutamiseks vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu.

Teeme seda tippu A korral. Joonistame tippu A
külgede AB ja AC punktide - tähistame $p_A(B)$ ja $p_A(C)$.

Punktidel $\mu_A(B)$ ja $\mu_A(C)$ on risti vektoriga $\vec{a}$.
 Peale selle on nad punktis A peetud punktijalasandil
 $T_A(S_2) - \mu_A(B) \subset T_A(S_2)$, $\mu_A(C) \subset$ järgnevas punktijalasandil
 $\mu_A(B)$ ja $\mu_A(C)$ vahelise nurga leidmiseks on vaja
 nende rühmvektoreid, sejuures seltsuvad, mis punktis A
 rakendatakse lähedal vastavalt B ja C „suunas“. Tõel-
 tame need $\vec{s}_B$ ja $\vec{s}_C$ abil. Pörame need vektoreid
 vastu päeva nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra, saades uued vektorid

$$\vec{s}_B \rightarrow \vec{s}'_B, \quad \vec{s}_C \rightarrow \vec{s}'_C$$

Sejuures

$$\angle A = \angle(\mu_A(B), \mu_A(C)) = \angle(\vec{s}_B, \vec{s}_C) = \angle(\vec{s}'_B, \vec{s}'_C).$$

Järgmisena paneme tähele, et

$$\vec{s}'_B \uparrow \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{s}'_C \uparrow \vec{a} \times \vec{c},$$

saame valemi

$$\angle A = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c})$$

Analoogiliselt saame

$$\angle B = \angle(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{a}), \quad \angle C = \angle(\vec{c} \times \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b}),$$

TEOREEM 1. Kehtib nn. kosinusteoreem

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A,$$

TÕESTUS. Kasutame eelnevalt loetud geomeetria-
 teoreeme, valemeid. Skalaarkorrutuse definitsiooni
 saame

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle(\vec{b}, \vec{c}) = r^2 \cos \angle(\vec{b}, \vec{c}) = r^2 \cos \frac{a}{r},$$

Seega

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = r^2 \cos \frac{a}{r}, \quad \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = r^2 \cos \frac{b}{r}, \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = r^2 \cos \frac{c}{r}.$$

Vektor korrutuse definitsiooni saame

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = r^2 \sin \frac{a}{r}, \quad |\vec{c} \times \vec{a}| = r^2 \sin \frac{b}{r}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = r^2 \sin \frac{c}{r}.$$

Arvutame nüüd nurgangu A kosinusi;

$$\cos A = \cos \angle (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}) = \frac{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} =$$

$$= \dots$$

Vahepeal arvestame!

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle = \langle (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{a}, \vec{c} \rangle =$$

$$= \langle |\vec{a}|^2 \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{a}, \vec{c} \rangle = a^2 \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle.$$

Piin me kasutame rekursiooni ja tõeltestarkor-
rutuse omadusi. Me saame

$$\cos A = \frac{a^2 \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} = \frac{a^2 \cos \frac{a}{a} - a \cos \frac{c}{a} \cos \frac{b}{a}}{a^2 \sin \frac{c}{a} \cdot a^2 \sin \frac{b}{a}} \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{a} - \cos \frac{b}{a} \cos \frac{c}{a}}{\sin \frac{b}{a} \sin \frac{c}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{a}{a} = \cos \frac{b}{a} \cos \frac{c}{a} + \sin \frac{b}{a} \sin \frac{c}{a} \cos A,$$

Idelge koosmisteoreem on tõestatud.

TEOREEM 2. Kehtib nn. siinusteoreem

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{a}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{a}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{a}}.$$

TÕESTUS. Arvutame $\sin A$:

$$\sin A = \sin \angle (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}) = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} =$$

$$= \frac{|\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle \vec{a}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} = \frac{|-\langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle \vec{a}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|}$$

$$= \frac{|\langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle| |\vec{a}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} = \frac{|\vec{a} \vec{b} \vec{c}| a}{a^2 \sin \frac{c}{a} \cdot a^2 \sin \frac{b}{a}} = \frac{|\vec{a} \vec{b} \vec{c}|}{a^3 \sin \frac{b}{a} \cdot \sin \frac{c}{a}},$$

Yt

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{a}} = \frac{|\vec{a} \vec{b} \vec{c}|}{a^3 \sin \frac{a}{a} \sin \frac{b}{a} \cdot \sin \frac{c}{a}} = k.$$

Niil saame ilma arvutamata kirjutada

$\frac{\sin B}{\sin \frac{b}{a}}$ ja $\frac{\sin C}{\sin \frac{c}{a}}$. Idelge tuleb veatvad $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ja kelpid a, b, c

trükkimiseks. Lõpetad avalduse $\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{2}}$ parema pool w muutma. 76.8

Jaame, et ke

$$\frac{\sin B}{\sin \frac{b}{2}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{2}} = k.$$

Kokkuvõttes saame:

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{2}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{2}} \quad \square$$

Antud, et sfäärilise kolmnurga tekitab ^{võl} teine sfäärilise kolmnurga. Leitudes väites tipust C võtame temaga mitteseatud vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorikorrutise $\vec{a} \times \vec{b}$ abil tema kardri vektari

$$\vec{c}_1 = \frac{r}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b}.$$

Vektor $\vec{c}_1$ on pööramisega $|\vec{c}_1| = r$. Tege, rakendades selle vektari $\vec{c}_1$ punktist M, tema otspunkt määrab sfäärilise punkti C_1 . Analoogiliselt selle meemi ishanult saame veel kares punkti:

$$B \rightarrow \vec{b}_1 = \frac{r}{|\vec{c} \times \vec{a}|} \vec{c} \times \vec{a} \rightarrow B_1, \quad \widehat{MB}_1 = \vec{b}_1,$$

$$A \rightarrow \vec{a}_1 = \frac{r}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \vec{b} \times \vec{c} \rightarrow A_1, \quad \widehat{MA}_1 = \vec{a}_1.$$

DEFINITSIOON. Sfäärilist kolmnurka $A_1B_1C_1$ nimetatakse polaarseis sfäärilise kolmnurgaga ABC.

TEOREEM 3. Sfäärilised kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on teineteisega poleaarnad.

TÕESTUS. On vaja näidata, et kolmnurgaga ABC poleaarn kolmnurga $A_1B_1C_1$ polaarseis kolmnurgas on ABC. Teeme vastavad arvutused:

$$A_1 \rightarrow \vec{a}_2 = \frac{r}{|\vec{b}_1 \times \vec{c}_1|} \vec{b}_1 \times \vec{c}_1 = \frac{r}{\left| \left(\frac{r}{|\vec{c} \times \vec{a}|} \vec{c} \times \vec{a} \right) \times \left(\frac{r}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} \right) \right|}$$

$$\cdot \left(\frac{r}{|\vec{c} \times \vec{a}|} \vec{c} \times \vec{a} \right) \times \left(\frac{r}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} \right) = \frac{r \frac{r^2}{|\vec{c} \times \vec{a}| |\vec{a} \times \vec{b}|}}{\frac{r^2}{|\vec{c} \times \vec{a}| |\vec{a} \times \vec{b}|} |(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})|}$$

$$\cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{r}{|(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})|} (\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

$$= \frac{r}{|(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})|} \left(\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \vec{c} \right) =$$

$$= \frac{r}{|\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \vec{a}|} \cdot \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \vec{a} = \frac{r (\vec{a} \vec{b} \vec{c})}{|(\vec{a} \vec{b} \vec{c})| r} \vec{a} = \frac{r \vec{a} \vec{b} \vec{c}}{|\vec{a} \vec{b} \vec{c}| |r|} \vec{a} =$$

Kuna $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parema käe kolmik, siis $|\vec{a} \vec{b} \vec{c}| = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Seega $\vec{a}_1 = \vec{a}$. Analoogiliselt arvestades, saame

$\vec{b}_1 = \vec{b}$ ja $\vec{c}_1 = \vec{c}$. Seega kolmnurga A, B, C polaar-
kolmnurga on ABC . Teoreem on tõestatud. ▀

TEOREEM 4. Sfäärilise kolmnurga A, B, C , mis on
polaarne kolmnurgaga ABC , küljed a_1, b_1 ja c_1
avalduvad kolmnurga ABC nurgade A, B ja C
ning sfääri raadius r kaudu järgmiselt:

$$a_1 = (\pi - A)r, \quad b_1 = (\pi - B)r, \quad c_1 = (\pi - C)r.$$

TÕESTUS. Arvutame

$$\begin{aligned} \cos \frac{a_1}{r} &= \frac{\langle \vec{b}_1, \vec{c}_1 \rangle}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left\langle \frac{r}{|\vec{c} \times \vec{a}|} \vec{c} \times \vec{a}, \frac{r}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{|\vec{c} \times \vec{a}| |\vec{a} \times \vec{b}|} \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \frac{-1}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle = \end{aligned}$$

$$= - \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}) =$$

$$= - \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}) = - \cos A,$$

$$\text{Seega} \quad \cos \frac{a_1}{r} = - \cos A \quad \text{ehk} \quad \cos \frac{a_1}{r} = \cos(\pi - A).$$

Kuna sfäärilise kolmnurga küljed on π vahendi
nurgad, siis viimast saame:

$$\frac{a_1}{r} = \pi - A \Rightarrow a_1 = r(\pi - A)$$

Analoogiliselt saame:

$$b_1 = r(\pi - B), \quad c_1 = r(\pi - C).$$

Teoreem on tõestatud. ▀

JÄRELDUS, Kehitaval valemil

$$a = 2(\pi - A_1), \quad b = 2(\pi - B_1), \quad c = 2(\pi - C_1),$$

kus A_1, B_1, C_1 on sfäärilise kolmnurga $A_1 B_1 C_1$ sisemurgad.

TÕESTUS, Arvestame teoreeme 3 ja 4. $\square$

TEOREEM 5. Kehitub nn. duaalne koornustoruse

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{r},$$

TÕESTUS, Kolmnurga $A_1 B_1 C_1$ koornustorusest

$$\cos \frac{a_1}{r} = \cos \frac{b_1}{r} \cos \frac{c_1}{r} + \sin \frac{b_1}{r} \sin \frac{c_1}{r} \cos A_1$$

valemite

$$\cos \frac{a_1}{r} = \cos(\pi - A), \quad \cos \frac{b_1}{r} = \cos(\pi - B), \quad \cos \frac{c_1}{r} = \cos(\pi - C)$$

abil saame

$$\cos(\pi - A) = \cos(\pi - B) \cos(\pi - C) + \sin(\pi - B) \sin(\pi - C) \cdot \cos\left(\pi - \frac{a}{r}\right).$$

Järe arvestamine, et

$$a = 2(\pi - A_1) \Rightarrow A_1 = \pi - \frac{a}{r},$$

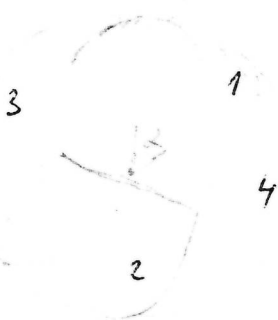
Edasi saame

$$-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + \sin B \sin C (-1) \cos \frac{a}{r} \Rightarrow$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{r}.$$

Täiely teoreem on tõestatud. $\square$

Järgmiseks leame sfäärilise kolmnurga pindala ja nurgade summa.



Kõrvad oleval joonisel oleme sfääri kahe suvrongjoone abil joonud nurgas, tükis, Teoreem (1) ja (2) on pindalalt võrdsed nii kaks tükid (3) ja (4). Kui teame

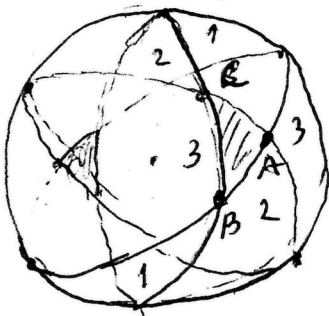
iga "tüki" kahetahulist mure d , siis saame sfääri tüki 1/4

pindala S_1 leida
$$S_1 = \frac{4\pi r^2}{2\pi} \cdot d = 2d r^2.$$

Täps kogu sfääri jaoks saame

$$S = 2S_1 + 2S_2 \Leftrightarrow 4\pi r^2 = 4r^2 + 4(\pi - 2)r^2.$$

Nüüd teeme joonise, mis on seotud sfäärilise kolmnurkiga ABC. Sfäär on tükeldatud kolmnurga



ABC külgede poolt määratud suurus-
joonte kaarti poolt. Iga tükke A, B ja C
juures toimub analoogiline situatsioon
nagu eelmisel joonisel. Samas tekitab
kolmnurkiga piiratud kolmnurk.

Kahetahulistel nurkades on kolmnurga nurkad, ja

Täps tekitab piiraldajad

$$2S_1 = 4Br^2, \quad 2S_2 = 4Cr^2, \quad 2S_3 = 4Ar^2,$$

Nende summa

$$2S_1 + 2S_2 + 2S_3 = 4(A+B+C)r^2$$

on suurem kui sfääri pindala $4\pi r^2$, sest piiraldatud
kolmnurkide kaarte täiendavalt veel kaks korda.

Kui kolmnurga pindala tähistame S abil, siis saame
välja kirjutada

$$4\pi r^2 + 4S = 4(A+B+C)r^2 \Leftrightarrow \pi r^2 + S = (A+B+C)r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = (A+B+C-\pi)r^2,$$

oleme saanud sfäärilise kolmnurga pindala.

Võime väita, et $S > 0$ ja $r^2 > 0$. Täps ka

$$A+B+C-\pi > 0.$$

Siis saame $A+B+C > \pi$ tõtta, et sfäärilise
kolmnurga sisenurkade summa on suurem kui π .

KOLMNURGA TRIGONOMEETRIA

Pseudoeuklideses ruumis E_3 kolme tüüpi meetod:
vektorid 1) positiivse pikkusega 2) pikkusega null ja
3) omajärgse pikkusega. Tule rühmas ruumis saab
vaadelda kolme tüüpi raadiusga sfääri: 1) $\rho > 0$, 2) $\rho = 0$
ja 3) $\rho = r i$.

Me vaatleme siin sfääri $r i$, mille raadius on $\rho = r i$.
Tegemist on punktidega $X \in E_3$, mille koguks keskpunkti
on ρ . Tule

$$S_2 = \{ X \in E_3 \mid |\vec{MX}| = \rho \} \Leftrightarrow S_2 = \{ X \in E_3 \mid \langle \vec{MX}, \vec{MX} \rangle = -\rho^2 \}$$

Kui on ristruum, siis kordinaatides sfääri võrrandiks on

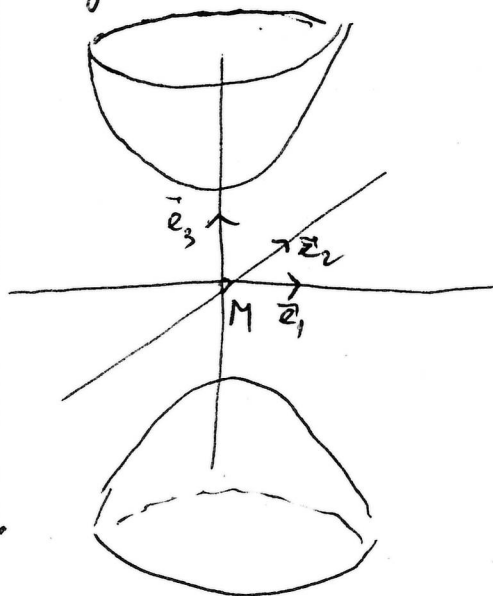
$$+ (x^1 - m^1)^2 + (x^2 - m^2)^2 - (x^3 - m^3)^2 = -\rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^1 - m^1)^2 - (x^2 - m^2)^2 - (x^3 - m^3)^2 = \rho^2$$

Kui ristruumi alguspunkt viia sfääri keskpunkti,
siis $m^1 = m^2 = m^3 = 0$ ning sfääri võrrand lohtub

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \frac{(x^1)^2}{\rho^2} + \frac{(x^2)^2}{\rho^2} - \frac{(x^3)^2}{\rho^2} = -1.$$

Sit näeme, et tavalise euclidilise ruumi termino-
loogias viimane võrrand on "kahetikelise hüperboloidi



võrrand. Sellisel sfääril me
oma kolmnurksi vaatleme.

Teurajõujooned saame sfääri
loikaamisel keskpunkti M
läbiva tasandiga. Ilma tõesta-
misi märgime, et loigetis eucli-
dilise ruumi terminoloogias on
hüperboloid.

Kolmnurga trigonomeetria
saadame, kui elaviste väärtustes r
asendada $r i$. Tulem
arvutused:

Eukleedilise ruumi sfääriliste kolmnurkade korral 1B.

Seega

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A \quad (\text{koosinusiteoreem})$$

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{r}} \quad (\text{sinusteoreem})$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{r} \quad (\text{dualne koosinusiteoreem})$$

Üleminniskul ruumi E_2 sfääriliste kolmnurkade analoogil
 $r \rightarrow r_i$ valemid saavad kujul:

$$\cos \frac{a}{r_i} = \cos \frac{b}{r_i} \cos \frac{c}{r_i} + \sin \frac{b}{r_i} \sin \frac{c}{r_i} \cos A,$$

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{r_i}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{r_i}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{r_i}};$$

(1)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{r_i}.$$

Nüüd valemid me natuke teiseme teisel kujul.

Arvestame, et $z = a + bi \in \mathbb{C}$ korral

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}),$$

(2)

Prägu $z = \frac{a}{r_i} = (-\frac{a}{r_i})i$, $z = (-\frac{b}{r_i})i$ või $z = (-\frac{c}{r_i})i$

Endamisi juhul saame valemite (2) abil saame

$$\cos \frac{a}{r_i} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{r_i}i} + e^{-\frac{a}{r_i}i} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{r_i}} + e^{-\frac{a}{r_i}} \right) = \text{ch } \frac{a}{r_i},$$

$$\sin \frac{a}{r_i} = \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{a}{r_i}i} - e^{-\frac{a}{r_i}i} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{a}{r_i}} - e^{-\frac{a}{r_i}} \right) = \frac{1}{i} \text{sh } \frac{a}{r_i}$$

Teeme analoogilisi valemite (1). Saame

$$\text{ch } \frac{a}{r_i} = \text{ch } \frac{b}{r_i} \text{ch } \frac{c}{r_i} - \text{sh } \frac{b}{r_i} \text{sh } \frac{c}{r_i} \cos A,$$

$$\frac{\sin A}{\text{sh } \frac{a}{r_i}} = \frac{\sin B}{\text{sh } \frac{b}{r_i}} = \frac{\sin C}{\text{sh } \frac{c}{r_i}}.$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} \frac{a}{r}.$$

Taolised on kosinus-, siinus- ja dualine koosnustesreem. Viimase teoreemi abil saame hinnata kolmnurga nurgade summat. Nimelt, alati $\operatorname{ch} \frac{a}{r} > 1$. Kõik $\frac{a}{r} > 0$, kuid tõuast ei rõlta midagi. Kuna A, B ja C on esimeses veerandis, siis nende siinused on suuremad nullist. Me saame

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} \frac{a}{r} > -\cos B \cos C + \sin B \sin C = -\cos(B+C) = \cos[\pi - (B+C)].$$

Seega

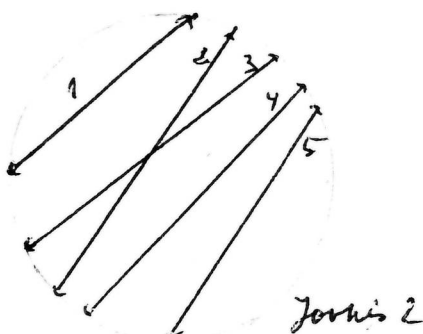
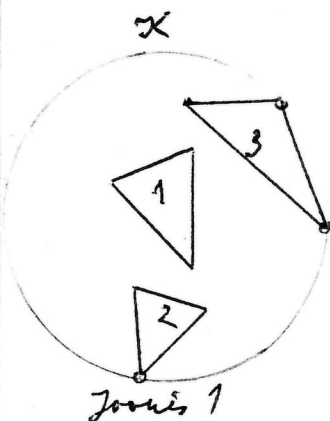
$$\cos A > \cos[\pi - (B+C)],$$

Sit esimese veerandi nurkade tõttu

$$\pi - (B+C) > A \Leftrightarrow A+B+C < \pi.$$

Seega saime alalise tulemuse: hüperboolse tasandi kolmnurga nurgade summa on väiksem kui π . Tavalisel eukleedilisel (tasandil) ja kolmnurga nurgade summa võrdne π -ga.

28. HÜPERBOOLSE e. LOBATŠEVSKI TASANDI KOLMNURKADEST JA PARALLEELSETEST SIRGETEST



Lobatševski tasand on tõlgendatav teatava rööpmise ruumina. Rööpmise on tema abeleenduse, K .

Muinas selles on ovaalkraadik, lõigutis on ilma otspunktideta kõõlid. Vaadeldes kolmnurki

Lobatševski tasandil, siis on selge, et tema külgedes on sirgete (s.o. otspunktideta rööpmekude) osad.

Pohimõtteliselt oma servukohalt
on kolme tüüpi kolmnurki (vt. joonis 1).

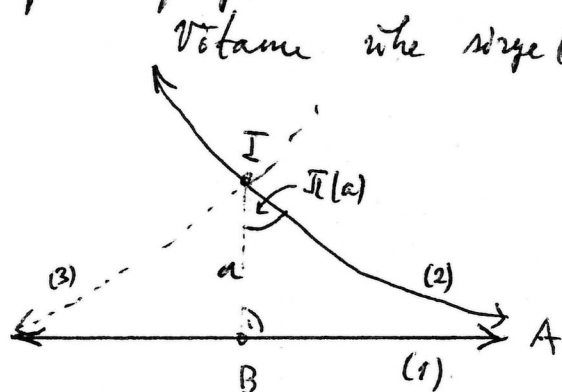
Kolmnurgal (1) on kolm tippu, kolmnurgal 2 on kaks tippu ja kolmnurgal (3) on üks tipp. "Pänduvad tipud" hakkavad tekkima püüprotsessis, kuid ei saa ka tekkinudga kunagi valmis, sest vastasel juhul jõuaksime absoluudile, kus siis ei oleks tegemist Lobatševski tasandi puunkirga. Püüprotsessi kolmnurga tipus tähistame küljel noolega. Kolmnurki (1), (2) ja (3) edaspidi tähistame järgmiselt:



Nüüd vaatleme Lobatševski tasandi paralleelsust sõrget.

DEFINITSIOON 1. Lobatševski tasandi kahte sõrget nimetatakse piiratudaks paralleelsuks, kui neil pole ühiseid punkte.

Järgmine 2 sõrge (1) on paralleelsed kõik sõrget (2)-(5). Me näeme, et antud sõrge on paralleelsed sõrget lõpmata palju.



Võtame ühe sõrge (1) ja teisel mittetäieliku punkti I, millest tõmbame ristlõike antud sõrge (trigonomeetria võrrandite abil, vt. § 27). Moodustame teist tüüpi kolmnurga BIA, mis on täismurk ($\angle B = \frac{\pi}{2}$). Külje (2) poolt määratud

sõrge on paralleelsed sõrge (1), ta on nioõlele "viimane" sõrge, mis on paralleelsed sõrge (1). Nimetame seda sõrget piirsõrgeks. Läbi punkti I läheb veel teine piirsõrge, mis on järgneval peenusek ja tähistatud (3) abil. Tõenäoliselt küsimus, kui suur on nioõle (ristlõike BI ja piirsõrge (2) vahel). Kõik punkti I läbivad sõrget, millele nioõle tõmbame IB on lõigud $[\pi(a), 2\pi - \pi(a)]$ on sõrge (1) paralleelsed.

DEFINITSIOON 2. Nurga $\pi(a)$ nimetatakse kahe sõrge paralleelsuskunaks.

Seadame valemid paralleelsuunuga liiduvõrkude, Lühitule
dunahelst koostisvõrkudele

176.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sh} B \operatorname{sh} C \operatorname{ch} \frac{a}{2}.$$

Selle rakendamisel tuleb võtta $A=0$, $B=\frac{\pi}{2}$ ja $C=\pi(a)$.

Me saame

$$\cos 0 = -\cos \frac{\pi}{2} \cos \pi(a) + \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \pi(a) \operatorname{ch} \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \cdot \operatorname{sh} \pi(a) \operatorname{ch} \frac{a}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sh} \pi(a) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}}.$$

Teades valem võimalike arvutata paralleelsuunuga võrkude.
on saanud tavalis, anda valem $\tan \frac{\pi(a)}{2}$ jaoks. Arvutame

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \pi(a) &= \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 \pi(a) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}}; \quad \cos^2 \pi(a) = \\ &= 1 - \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} - 1}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2}} = \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Seega

$$\operatorname{sh} \pi(a) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}}, \quad \cos \pi(a) = \operatorname{th} \frac{a}{2}.$$

Arvutame edasi:

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\pi(a)}{2} &= \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(a)}{2}}{\cos^2 \frac{\pi(a)}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \pi(a))}{\frac{1}{2}(1 + \cos \pi(a))} = \frac{1 - \cos \pi(a)}{1 + \cos \pi(a)} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{th} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{th} \frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{2} - \operatorname{sh} \frac{a}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} + \operatorname{sh} \frac{a}{2}} = \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}} = e^{-2\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \\ \tan \frac{\pi(a)}{2} &= e^{-\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

oleme saanud ettevala valemid.

Väime valemid saame arvestada

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

millist

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x.$$

Rakeme me Lobatševski teoreemid me ei ruri.

29. AFIINNE RUUM PROJEKTIIVSE RUUMI SEISUKOHALT

Võtame projektiivses ruumis $\pi: V_{n+1} \rightarrow P_n$ absoluutseks kvadriku K , mille astakas on rank $K=1$. Nagu eespoolt teame, on tegemist lagune kvadrikuks, mis koosneb kehast ühtuvalt lineaarist. Fikseerides mõnigi projektiivse ruumi $\{E_\lambda; E\}$, mis kuuluvad korda täpsusega määratud vektorsüsteemi $\{\vec{e}_\lambda, \vec{e}\}$. Siin $\sum_{\lambda=0}^n \vec{e}_\lambda = \vec{e}$ ja $\pi(\vec{e}_\lambda) = E_\lambda$, $\pi(\vec{e}) = E$. Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_\lambda\}$ on vektorruumi V_{n+1} baas. Absoluutne koordinaat on

$$K: (a_\lambda x^\lambda)(q_\mu x^\mu) = 0, \quad (1)$$

mis annab lineaari

$$l: a_\lambda x^\lambda = 0, \quad (2)$$

nende võtta on kaks korda. Nüüd loeme üle järgmise projektiivse ruumi $\{E_\lambda, E\}$, kus $E_1, \dots, E_n \in l$. Sel korral need punktid määravad lineaari $l = l(E_1, \dots, E_n)$. Järgmine lineaari võrrand (2) lihtnustub, sest punktide $E_1, \dots, E_n$ koordinaadid rahuldavad võrrandit (2). Punkt E_i on koordinaadid $E_i(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0)$, siin $i=1, \dots, n$.

Järe

$$\begin{aligned} E_i \in l &\Leftrightarrow a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_{i-1} \cdot 0 + a_i \cdot 1 + a_{i+1} \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_i = 0 \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

Lineaar võrrand on

$$l: a_0 x^0 = 0, \quad a_0 \neq 0 \Leftrightarrow l: x^0 = 0. \quad (3)$$

Valitud ruumis on lineaar (absoluut) paritid hõlts tavadad — need koordinaat x^0 on alati null.

Hõlts on ära tavadad ka punktid, mis ei kuulu absoluutse — need punktidele erinev koordinaat ei ole null. Järgmises sellised punktid meid just huvitaavad. Tähistame seda hulka

$$A_n := P_n \setminus K = P_n \setminus l,$$

Loomuldikult tul tekib kujutus $\varphi: A_n \rightarrow V_{n+1}$. Nõuelt iga $X \in A_n$ kernel enneme koordinaat $x^0 \neq 0$. Kuna X koordinaadid on määratud kerdega $\lambda \in \mathbb{R}^1$ täpsusega, siis saame valida koordinaatide sellise seeria, kus esimene koordinaat on 1. Seega kui mõnigi seeriast $x^0, x^1, \dots, x^n$ lähtume, siis tuleb need koordinaate kerutades teguriga $\lambda = \frac{1}{x^0}$.

Seega seeria saame

$$\left(\frac{x^0}{x^0}, \frac{x^1}{x^0}, \dots, \frac{x^n}{x^0}\right) = (1, \xi^1, \dots, \xi^n), \quad \xi^i = \frac{x^i}{x^0}. \quad (4)$$

Vektor $\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_0 + \xi^i \vec{e}_i = \vec{e}_0 + \xi^i \vec{e}_i$ on punktis $X \in A_n$ üheselt määratud erindejavektor — $\pi(\vec{x}) = X$. Seega φ defineerime valekuga

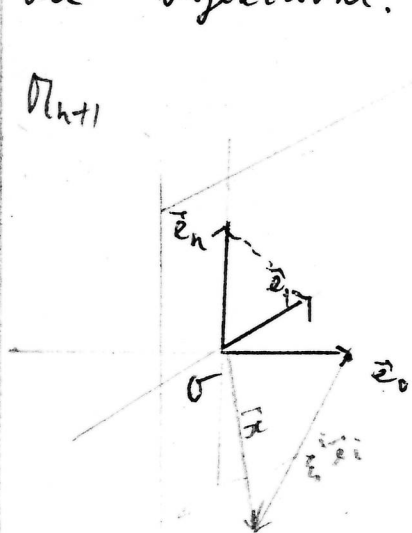
$$X \mapsto \varphi(X) := \vec{x}.$$

Kuna $X, Y \in A_n$ ja $X \neq Y$ kernel vektorid: $\varphi(X) = \vec{x}$ ja $\varphi(Y) = \vec{y}$ on erinevad, s.o. $\varphi(X) \neq \varphi(Y)$, siis kujutus φ on injektivne. Võttes V_{n+1} asemel alamhulge $\varphi(A_n)$, siis kujutus

$$\varphi: A_n \rightarrow \varphi(A_n)$$

on bijektivne. Et äärmiselt joomine abil selitada, võtame

$\mathcal{O}_{n+1}$



näga $(n+1)$ -mõõtmealise afiine ruumi $\mathcal{O}_{n+1}$ sõltuvusega V_{n+1} , mis on punktis $O \in \mathcal{O}_{n+1}$ kernel koos $\{\vec{e}_1\}$ -ga tekitab reperi $\{O; \vec{e}_1\}$. Joomineel viimastest osa on reperi vektorid $\vec{e}_0$ otspunkti läbi n -tasand sõltuvusega $L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Seega $\varphi(A_n) \subset V_{n+1}$ vektorid

$$\vec{x} = \vec{e}_0 + \xi^i \vec{e}_i \text{ on sellised, et rakendatuna}$$

reperi algpunktist O nende otspunkti kirjeldab viimastel n -tasandil.

Uurime hulka $\varphi(A_n)$. Tema „punkt“ (vektoreid) võib

$$\text{eritada } \vec{x} = \vec{e}_0 + \vec{\xi}, \text{ kus } \vec{\xi} = \xi^i \vec{e}_i \text{ on lineaarselt } L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

$$\varphi(A_n) = \{ \vec{x} = \vec{e}_0 + \vec{\xi} \mid \forall \vec{\xi} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \} \quad (5)$$

Osutub, et hulgas $\varphi(A_n)$ tekib loomulikul teel afiinne ruumi struktuur. Täpseltamaks rõõpselt otsima tema sõhruumi, mida tähistame $\mathcal{V}$ abil. Tema vektorid anname etpunktide

$$\vec{x}, \vec{y} \in \varphi(A_n) \text{ abil } \vec{y} - \vec{x} := \vec{y} - \vec{x} = (\vec{e}_0 + \vec{\eta}) - (\vec{e}_0 + \vec{\xi}) = (\vec{\eta} - \vec{\xi}) = (\vec{\eta} - \vec{\xi}) \vec{e}_1$$

Kui punktid $\vec{x}, \vec{y} \in \varphi(A_n)$ on suvalised, siis on suvalised ka $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Tõmmati on suvaline $\vec{\eta} - \vec{\xi} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

Jaga hulk $V = L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, milles vektorruumi V_{n+1} tekitab ka lineaarkattis $V \subset V_{n+1}$ vektorruumi struktuuri, sejuures $\dim V = n$. Järgnevas on vaja näidata, et $\varphi(A_n)$ on afiinne ruumi sõhruumiga $\mathcal{V}$. Alustame sellega.

Kõigepealt on vaja defineerida kujutus

$$\varphi(A_n) \times \mathcal{V} \longrightarrow \varphi(A_n), \quad (6)$$

Mistahes $\vec{x} \in \varphi(A_n)$ ja $\vec{\eta} \in \mathcal{V}$ korral saame $\vec{x} + \vec{\eta}$ punktide eritada kujul

$$\vec{x} = \vec{e}_0 + \vec{\xi}, \quad \vec{\xi} \in V \quad (7)$$

Defineerime $(\vec{x}, \vec{\eta}) \mapsto \vec{x} + \vec{\eta}$ vektorruumi V_{n+1} liikumise abil. Keeme

$$\vec{x} + \vec{\eta} = (\vec{e}_0 + \vec{\xi}) + \vec{\eta} = \vec{e}_0 + (\vec{\xi} + \vec{\eta}),$$

kus $\vec{\xi} + \vec{\eta} \in V$, mis $\vec{x} + \vec{\eta}$ on tõesti $\varphi(A_n)$ element.

Järgnevas on vaja kontrollida veeldelise kujutuse korral kas afiinne ruumi aksioomid 1°-3° on täidetud.

1° Käs $\vec{x} \in \varphi(A_n)$ ja $\vec{0} \in \mathcal{V}$ korral $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, mis on ilmselt, sest V_{n+1} on vektorruum

2° Käs $\vec{x} \in \varphi(A_n)$ ja $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathcal{V}$ korral kehtib

$$\vec{x} + (\vec{\xi} + \vec{\eta}) = (\vec{x} + \vec{\xi}) + \vec{\eta},$$

mis on ilmselt vektorruumi V_{n+1} ühe aksioomi kehtselt

maandub, 3° Käs aga $\vec{x}, \vec{y} \in \varphi(A_n)$ korral leidub üllone vektor $\vec{c} \in \mathcal{V}$, et $\vec{x} + \vec{c} = \vec{y}$. Tõepoolest: $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ saame eritada

kupit

$$\vec{x} = \vec{e}_0 + \vec{\xi}, \quad \vec{y} = \vec{e}_0 + \vec{\eta}, \quad \vec{\xi}, \vec{\eta} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

Võrrand, kus $\vec{r}$ tuleb leida sama kupit

$$(\vec{e}_0 + \vec{\xi}) + \vec{r} = \vec{e}_0 + \vec{\eta},$$

saame

$$\vec{r} = (\vec{e}_0 + \vec{\eta}) - (\vec{e}_0 + \vec{\xi}) = \vec{\eta} - \vec{\xi}.$$

kus $\vec{\eta} - \vec{\xi} \in L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Järelygi $\vec{r}$ kätte. Kuna vektorite liitmine määratakse üheselt, siis $\vec{r}$ määratakse üheselt

Järe $\mathcal{V}(A_n)$ on n -mõistmeline afiinne ruumi sihiruumiga $\mathcal{V} = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Püüame selgitada, kas afiinsel ruumil $\mathcal{V}(A_n)$ tekib ka mingi rühm.

Projektiivne ruumi P_n absoluut peab- perigale jääma, selleks on stativnaarsuse rühm $G(K) = G(l)$, mis on projektiivse rühma $G(P_n)$ alamrühm. Jamas tekib A_2 stativnaarsuse rühm $G(A_2)$, kusjuures $G(A_2) = G(l)$.

Püüame uurida seda alamrühma. Rühma $G(P_n)$ element g on kordaja täpsusega määratud $(n+1)$ -järku ruumlaarne maatriks $C = (c_{\beta}^{\alpha})$, kus $|C| \neq 0$. Seejuures $X(x^0, x^1, \dots, x^n)$ teiselt viies punktiks $g(X)(x^0, x^1, \dots, x^n)$, mille koordinaadid avalduvad

$$x^{\alpha} = c_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} \quad (8)$$

Et välja eraldada rühmast $G(P_n)$ alamrühm $G(l)$, peavad $G(P_n)$ elemendid rahuldama teatud tingimusi, mis seab selles, et iga $X \in l$ kuul peame sama punkti $g(X)$, mis kuulub taas absoluutide l . Jga $X \in l$ korral $\forall (0, x^1, \dots, x^n)$ peab ja $g(X)(0, x^1, \dots, x^n)$

Valemi (8) abil saame

$$x^0 = c_0^0 x^0 + c_i^0 x^i \Rightarrow 0 = c_j^0 x^j$$

Vimant $E_i \in l$ tõttu saame $0 = c_j^0 \delta_i^j = c_i^0$

Järe, et rühma $G(l)$ elemendid $C = (c_{\beta}^{\alpha})$ on sellised,

et $c_0^0 = 0$, Jaga

181

$$C = \begin{pmatrix} c_0^0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_j^i \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} c_0^0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \bar{C} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = (c_{ij}^0). \quad (9)$$

Maatriks C regulaarsust saame

$$|C| \neq 0 \Leftrightarrow c_0^0 |\bar{C}| \neq 0 \Leftrightarrow c_0^0 \neq 0, |\bar{C}| \neq 0. \quad (10)$$

Valemid (9) ja (10) kirjeldavad alamrühma $G(l)$, mis
ka alamrühma $G(A_n)$ elementide elutust. Järelikult

$X(x^0, x^1, \dots, x^n) \in A_2$ korral $C \in G(A_n)$ kujutab

punkti $X(x^0, x^1, \dots, x^n)$ valemite (8):

$$\hat{x}^i = c_j^i x^j.$$

Siis

$$\hat{x}^0 = c_0^0 x^0, \quad \hat{x}^i = c_j^i x^j. \quad (11)$$

Valemite (4) abil saame $\varphi(A_n)$ punktide teisendamise valemid

koordinaatides $(\xi^i) \rightarrow (\hat{\xi}^i)$, kus $\xi^0 = \frac{x^0}{x^0} = 1$ ja $\hat{\xi}^0 = \frac{\hat{x}^0}{\hat{x}^0} = 1$

ja $(\xi^i = \frac{x^i}{x^0}, \hat{\xi}^i = \frac{\hat{x}^i}{\hat{x}^0}$, Valemite (11) saame

$$\hat{\xi}^i = \frac{\hat{x}^i}{\hat{x}^0} = \frac{c_j^i x^j}{c_0^0 x^0} = \frac{c_0^i}{c_0^0} + \frac{c_j^i}{c_0^0} \frac{x^j}{x^0} = \frac{c_0^i}{c_0^0} + \frac{c_j^i}{c_0^0} \xi^j$$

Jätkame $a_0^i = \frac{c_0^i}{c_0^0}, a_j^i = \frac{c_j^i}{c_0^0}$, Jaga

$$\hat{\xi}^i = a_0^i + a_j^i \xi^j, \quad (12)$$

kujutades maatriks $A = (a_j^i)$ on regulaarne, sest

$$|A| = \left| \frac{1}{c_0^0} \bar{C} \right| = \frac{1}{(c_0^0)^n} |\bar{C}| \neq 0. \quad (13)$$

Jaga $\varphi(A_n)$ punktide teisendusest ilmumustaval valemite

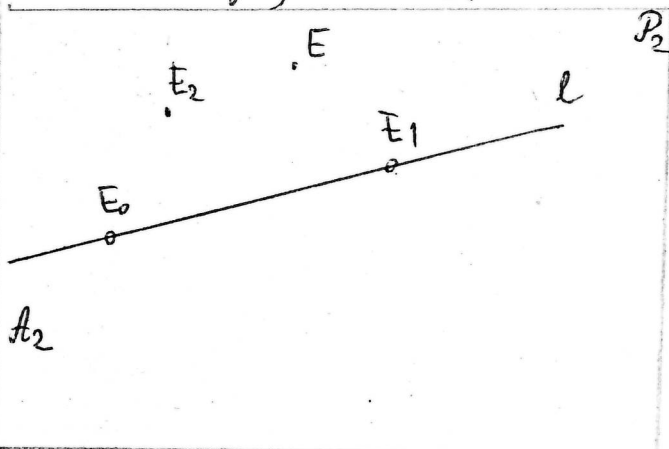
(12), mil kehtib. Näeme on afiinne ruumi liikumiste

ruum.

Keskmeestes A_n on afiinne ruumi tänu bijektiivsele
 $\varphi: A_n \rightarrow \varphi(A_n)$. Rühm $G(A_n)$ on isomorfeafiline afiinselt liikumiste
rühmaga.

30. AFIINNE TASAND PROJEKTIIVSE TASANDI SEISUKOHALT; MÖNINGAD TEIST JÄRKU KÖVERAGA SEOTUD MÕISTED

Projektiivsel tasandil $\pi: V_3 \rightarrow P_2$ tuleb fikseerida absoluut, s.o. üks sirge l . Afiinne tasand A_2 on projektiivne tasand P_2 ilma absoluudita. Eespoolt teame, et tavalisest tasandist saada ^{projektiivne tasand} tuleb lõigata üks sirge, mis koonneb lõpmata kaugtest punktidest. Nüüd jätame tasandilt P_2 ära ühe sirge, mis teda tuleb lugeda lõpmata kauges sirges.



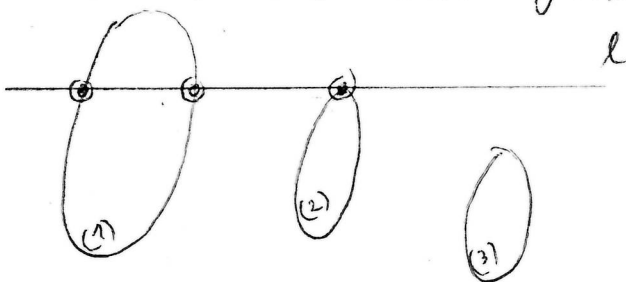
Algse tasandil võetud projektiivses reppuris $\{E_0, E_1, E_2, E\}$, kus $E_0, E_1 \in l$, võetud koordinaatide $K: a_{ij} x^i x^j = 0 (=)$

$$K: a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{01}x^0x^1 + 2a_{02}x^0x^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0$$

Kui vaatleme kvadrikest ainult neid punkte, mis kuuluvad afiinsele tasandile A_2 , siis saame üle võtta afiinsetele koordinaatidele $\xi^1 = \frac{x^1}{x^0}$ ja $\xi^2 = \frac{x^2}{x^0}$. Jagades kvadriku võrrandi $(x^0)^2$ -ga läbi, saame

$$K \setminus K \cap l: a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(\xi^2)^2 + 2a_{12}\xi^1\xi^2 + 2a_{01}\xi^1 + 2a_{02}\xi^2 + a_{00} = 0$$

teist järku kõvera võrrandi. Nähtav, kui me võtame ovaalkvadriku, mis on kõhnune, ja jätame ära lõpppunktide absoluudiga l , sest need punktid pole tasandi A_2 punktid, saame teataval teist järku kõverad. Kiriime, millised?

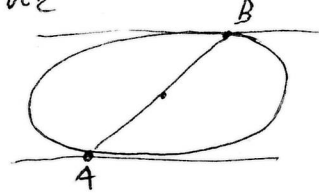


Kõvalaleval joonisel on toodud kolm võimalust kuidas ovaalkvadrilik võid saada absoluudi (lõpmata kauges sirges) suhtes. Ära

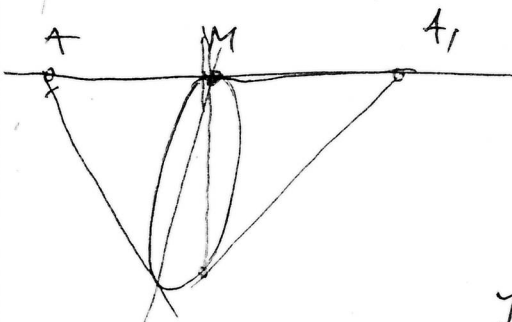
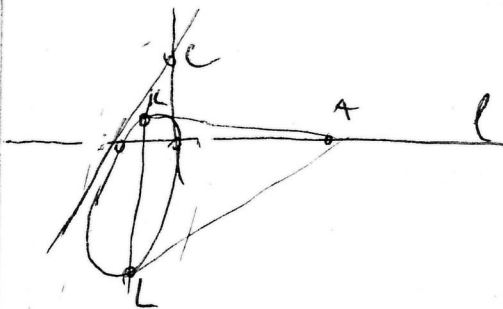
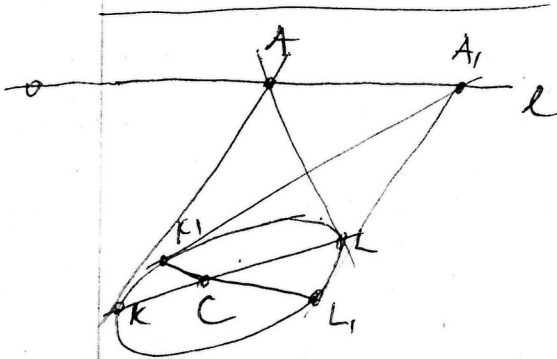
tuleb jätta $\odot$ abil märgitud punktid

Teades afiinne tasandi kõveraid, siis (1) koosneb kahest
tükist - nurga hüperbool, (2) on laktone, kuid koosneb ühest tükist -
nurga parabool ja (3) on kõnnone - nurga ellips.

Järgnevas vaatleme kuidas afiinsel tasandil A_2
konstrueerida teist järku kõvera diameetreid. Analüütilisest



geomeetriast teame, et diameeter on
keskpunkti läbi v lõik. Tema ots -
punktides A ja B väärtus kõvera punktide,
mis on paralleelsed. Projektivsel tasandil
nad lõikuvad, s.o. lõikuvad lõpmatu
kaugel sirgel, s.o. sirgel l . Tõugu võttes
sirgel mingi punkti $A \in l$, millest
joonistame punktidega. Punktidepunkt
ühendav sirge $l(K, L)$ on punkti
A polaar. Tema lõik KL on
diameeter. Kui A absoluudil
mentub, saame kätte kõik
diameetrid. Diameetrite
lõikepunkt on kõvera keskpunkt.
Parabooli kõik diameetrid,
mis kõik lõikuvad punktis $M \in l$,
s.o. lõpmata kaugel punktis,
mis diameetrid on kõik paralleelsed.
Nende lõikepunkt M on keskpunkt,
kuid kahjuks pole
afiinne tasandi punkt.



Tellele me nlla paragrahvi lõpetame.

Aga lõpetame ka loomikunne

Pühapäev, 2. mai 1999.

1. Rühm (1)
2. Vektorruum (6)
3. Ruutvormid (13)
4. Eukleediline, pseudoeukleediline ja sümplektiline vektorruum (16)
5. Afiinne ruum, Eukleediline, pseudoeukleediline ja sümplektiline afiinne ruum (26)
6. Vektorruumi lineaarteisendused (39)
7. Afiinset kujutused ja teisendused, (47)
8. Afiinse ruumi automorfismid ehk liikumised. (56)
9. Projektivne ruum (64)
10. Projektivse ruumi projektivne reper. Puncto koordinaadid. (71)
11. Projektivse ruumi hüper tasand ehk lineaar (83)
12. Projektivse ruumi rõhmed. Duaalne printsiip (93)
13. Projektivse ruumi liikumised. Projektivse geometria mõiste (98)
14. Projektivse ruumi kvadriigid (107)
15. Kvadriigi loendamise sõrge (112)
16. Kvadriigi isärsed punktid. Tüüp kvadriik, tema isärsed punktid (115)
17. Kvadriigi punktjäre ruum (123)
18. Liitruhi (125)
19. Projektivse sõrge punktipaari lahutamise. Harmooniline punktideviik. (130)
20. Poolus ja polaar (133)
21. Kvadriigi autopolaarne reper (139)
22. Projektivse tasandi kvadriikide tüübid. Nende ehitus (141)
23. Elleptiline ruum H. Weyli järgi (145)

24. Hüperbolne ehk Lobatševski ruumi H. Weyli järvi (157)
25. Projektiivse ruumi alamhulge staatvaraarude rühm. Elliptiline ja hüperbolse ruumi (161) liikuvate rühm.
26. Sfääriline siinus- ja kosinusteoreem. Duaalne kosinusteoreem. Kolmnurga pindala ja räämuseid ruumi (165)
27. Inapsaarse raadiusega sfäär kolmnurga trigonomeetria (172)
28. Hüperbolse e. Lobatševski tasandi kolmnurkadest ja paralleelsetest sirgetest. (174)
29. Afine ruumi projektiivse ruumi seadusall (177)
30. Afine tasand projektiivse tasandi seadusall:
mõned teist järku kõveraga seotud mõisted. (181)
31. Jätkusord (183)