

Sissejuhatus algebra struktuuridesse

Sügis 2024

Eksam

Eksam koosneb pooletunnisest kirjalikust osast ja hiljem toimuvast suulisest osast. Kirjalikus osas küsitakse kursuses käsitletud mõistete definitsioone, näiteid ja teatud tulemuste sõnastusi (vt. nimekirja allpool). Kirjaliku osa eest on võimalik saada kuni 20 punkti ja küsimustele tuleb vastata materjale kasutamata.

Pärast kirjaliku osa lõppu valib üliõpilane juhuslikult suulise osa küsimuse, milleks on ühe teoreemi tõestus (vt. nimekirja allpool). Siis on üliõpilasel mõni tund aega vastamiseks valmistuda. Valmistumisel ei pea viibima eksamiruumis ja võib kasutada mistahes materjale. Vastamine toimub suuliselt ja tahvli ees. Vastamise ajal materjale kasutada ei või ja vastamiseks on aega 45 minutit üliõpilase kohta. Suuline vastus annab kuni 80 punkti. Kirjaliku ja suulise osa punktidele liidetakse võimalikud praktikumist saadud lisapunktid ja saadud punktisumma alusel kujuneb eksamihinne.

Tõestused

1. Tõestada, et igas mittetriviaalses vektorruumis leidub baas. (Teoreem 1.54)
2. Tõestada esimene ja teine isomorfismiteoreem rühmade jaoks. (Teoreem 2.25 ja teoreem 2.27)
3. Tõestada, et jaguv Abeli rühm on injektiivne objekt Abeli rühmade kategoorias. (Lause 3.13)
4. Tõestada, et perioodiline Abeli rühm on oma p -komponentide sisemine otsesumma. (Teoreem 3.20)
5. Tõestada, et mittetriviaalne väändeta jaguv rühm on rühmaga $\mathbb{Q}$ isomorfsete alamrühmade sisemine otsesumma. (Lause 3.26 ja teoreem 3.27)
6. Tõestada, et kui D on jagamisega ring ja $n \in \mathbb{N}$, siis ring $Mat_n(D)$ on lihtne ja sisaldab minimaalset parempoolset ideaali. (Lause 4.17 ja lause 4.19)
7. Tõestada vabade moodulite struktuuri kirjeldav tulemus. (Lause 5.12 ja teoreem 5.14)
8. Tõestada, et täiesti lihtne poolrühm on rühmade ühend. (Lause 6.40)
9. Tõestada projektiivsete polügoonide struktuuri kirjeldav tulemus. (Teoreem 7.20)
10. Tõestada, et iga algarvu p ja naturaalarvu n jaoks leidub korpus, milles on p^n elementi. (Teoreem 8.16)
11. Tõestada, et võre on modulaarne parajasti siis, kui ta ei sisalda võrega N_5 isomorfses alamvõret. (Teoreem 9.16)
12. Tõestada, et iga universaalalgebra on isomorfne mingi sama tüüpi absoluutselt vaba algebra faktoralgebraga. (Lause 10.12)

Definitsioonid, näited ja muu kirjalikus osas

Vektorruum

1. Defineerida Ω -algebra.
2. Milline on vektorruumi signatuur?
3. Def. Ω -algebra alamalgebra.
4. Def. Ω -algebrate homomorfism.
5. Def. Ω -algebrate isomorfism.
6. Def. Ω -algebra kongruents.
7. Kuidas saab kirjeldada vektorruumi kongruentse?
8. Def. Ω -algebra faktoralgebra.
9. Def. vektorruumi faktorruum.
10. Sõnastada vektorruumide homomorfismiteoreem.
11. Sõnastada Zorni lemma.
12. Def. vektorruumide otsekorutus.
13. Def. vektorruumide väline otsesumma.

Rühm

1. Def. rühm.
2. Tuua näiteid rühmadest.
3. Sõnastada Lagrange'i teoreem.
4. Def. normaaljagaja.
5. Näide: normaaljagaja.
6. Def. rühmade homomorfismi tuum.
7. Def. faktorrühm.
8. Sõnastada rühmade isomorfismiteoreemid.
9. Def. lihtne rühm.

Abeli rühm

1. Def. Abeli rühm.
2. Def. jaguv Abeli rühm.
3. Näide: jaguv Abeli rühm, mittejaguv Abeli rühm.
4. Def. Abeli rühma alamrühmade sisemine otsesumma.
5. Def. rühma elemendi järk.
6. Def. Abeli rühma perioodiline osa.
7. Def. perioodiline Abeli rühm.
8. Näide: lõpmatu perioodiline Abeli rühm.
9. Def. Abeli rühma p -komponent.
10. Def. p -rühm.
11. Def. väändeta Abeli rühm.
12. Näide: väändeta Abeli rühm.

Ring

1. Def. ring.
2. Def. jagamisega ring.
3. Def. korpus.
4. Def. ringi ideaal.
5. Näide: ringi ideaal.
6. Def. ringi peaideaal.
7. Def. lihtne ring.
8. Näide: lihtne ring.
9. Def. minimaalne parempoolne ideaal.
10. Näide: minimaalne parempoolne ideaal.
11. Kuidas saab kirjeldada lihtsaid minimaalset parempoolset ideaali sisaldavaid ringe?

Moodul

1. Def. moodul.
2. Näide: moodul.
3. Def. täpne jada.
4. Kuidas saab moodulite täpsete jadade abil kirjeldada injektiivseid ja sürjektiivseid homomorfisme?
5. Def. lühike täpne jada.
6. Def. vaba moodul.
7. Def. projektiivne moodul.

Poolrühm

1. Def. poolrühm.
2. Def. monoid.
3. Näide: poolrühm.
4. Def. poolrühma ideaal.
5. Näide: poolrühma ideaal.
6. Def. minimaalne ideaal.
7. Def. peaidaal.
8. Def. lihtne poolrühm.
9. Näide: lihtne poolrühm.
10. Def. Greeni seosed.
11. Def. poolrühma idempotent.
12. Kui palju on rühmas idempotente?
13. Def. primitiivne idempotent.
14. Def. täiesti lihtne poolrühm.
15. Mida saab öelda poolrühma $\mathcal{H}$ -klassi kohta, kui on teada, et ta sisaldab idempotenti?
16. Mida saab öelda täiesti lihtsa poolrühma $\mathcal{H}$ -klasside kohta?
17. Sõnastada mõni tingimus, mis on samaväärne poolrühma täiesti lihtsusega.
18. Def. Reesi maatrikspoolrühm.

Polügoon

1. Def. polügoon üle monoidi.
2. Näide: polügoon.
3. Def. lahutumatu polügoon.
4. Def. polügooni baas.
5. Def. vaba polügoon.
6. Kuidas saab kirjeldada vabu polügoone?
7. Def. projektiivne polügoon.
8. Kuidas saab kirjeldada projektiivseid polügoone?
9. Kuidas on seotud polügoonide vabadus ja projektiivsus?

Lõplik korpus

1. Def. korpuse karakteristika.
2. Milliste naturaalarvude n jaoks leidub n -elemendiline korpus?
3. Def. lõpliku korpuse primitiivne element.

Võre

1. Def. võre (2 tk).
2. Def. täielik võre.
3. Näide: täielik võre.
4. Def. modulaarne võre.
5. Näide: modulaarne võre.
6. Näide: mittemodulaarne võre.
7. Modulaarsete võrede kirjeldus teatud alamvõrede abil.
8. Def. distributiivne võre.
9. Kuidas on seotud distributiivsus ja modulaarsus?
10. Näide: distributiivne võre.
11. Distributiivsete võrede kirjeldus teatud alamvõrede abil.

Universaalalgebra

1. Def. universaalalgebra.
2. Def. homomorfismi tuum.
3. Sõnastada Homomorfismiteoreem.
4. Def. term.
5. Näide: term.
6. Def. absoluutselt vaba algebra.
7. Def. termfunktsioon.
8. Universaalalgebrate klassi vaba algebra.
9. Def. samasus.
10. Def. muutkond.
11. Näide: muutkond.
12. Sõnastada Birkhoffi teoreem.

Kategooria

1. Def. kategooria.
2. Def. alamkategooria.
3. Def. täielik alamkategooria.
4. Näide: täielik alamkategooria.
5. Def. monomorfism.
6. Def. koretraktsioon.
7. Kuidas on seotud monomorfismid ja koretraktsioonid?
8. Def. epimorfism.
9. Def. bimorfism.
10. Def. isomorfism.
11. Def. lõppobjekt, algobjekt, nullobjekt.
12. Näide: lõppobjekt, algobjekt.
13. Def. projektiivne objekt.
14. Def. injektiivne objekt.
15. Def. korrutis, kokorrutis.