

Arvuteooria 11. praktikumi ülesanded:

Algjuured II.

1. Leida kõik algjuured mooduli 49 järgi.
2. Teha kindlaks, kas mooduli n järgi leidub algjuuri ja kui leidub, siis leida nende arv ja üks algjuur, kui a) $n = 2401$, b) $n = 2402$, c) $n = 2403$.
3. Teha kindlaks, kas mooduli n järgi leidub algjuuri ja kui leidub, siis leida nende arv ja üks algjuur, kui a) $n = 2399$, b) $n = 2404$, c) $n = 2738$.
4. Lahendada kongruents $1 - x^8 + x^{16} - x^{24} + x^{32} + \dots - x^{2024} \equiv 0 \pmod{25}$.
5. Olgu p ja q erinevad paaritud algarvud. Tõestada, et neil on ühine algjuur, st $a \in \mathbb{Z}$, mis on algjuur nii mooduli p kui mooduli q järgi.
6. Kui a on algjuur mooduli $p \in \mathbb{P}$ järgi, siis öeldakse, et a on *Fibonacci algjuur* mooduli p järgi, kui a on algjuur mooduli p järgi ja $a^{k+2} \equiv a^{k+1} + a^k \pmod{p}$ iga $k \in \mathbb{N}_0$ korral. Tõestada, et kui a on Fibonacci algjuur, siis ka $a - 1$ on algjuur. Kas $a - 1$ on samuti Fibonacci algjuur?
7. Olgu $a, n \in \mathbb{N}$ ja $(a, n) = 1$. Tõestada, et kui mooduli n järgi ei leidu algjuuri, siis $a^{\frac{\varphi(n)}{2}} = 1$.
8. Olgu a algjuur mooduli $p \in \mathbb{P}$ järgi. Tõestada, et täpselt üks arvudest $a + kp$, $k = 0, \dots, p - 1$ ei ole algjuur mooduli p^2 järgi.
- 9*. Olgu $p > 2$ algarv ja $n \in \mathbb{N}$. Leida kõigi erinevate algjuurte n . astmete summa mooduli p järgi.
- 10**. Olgu $p \in \mathbb{P}$, n arvu $p - 1$ erinevate algtegurite arv ja $N = \frac{2^{n+1}(p-1)}{\varphi(p-1)}$. Tõestada, et kui $\sqrt{p} > N$, siis mistahes $2 \left\lfloor \frac{\sqrt{p}N}{2} \right\rfloor - 2$ järjestikuse täisarvu seas on vähemalt üks algjuur (mooduli p järgi).