

Arvuteooria 14. praktikumi ülesanded:

Ruutjäägid II.

1. Leida Jacobi sümboli väärtus: a) $\left(\frac{673}{967}\right)$, b) $\left(\frac{2424}{1787}\right)$, c) $\left(\frac{7077}{9523}\right)$.
2. Leida, milliste (mitte tingimata algarvuliste) moodulite n järgi on arv -6 ruutjääk.
3. Olgu a täisarv ja n naturaalarv, kusjuures $n \equiv 19 \pmod{24}$. Tõestada, et kui $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$, siis kongruents $x^2 + 6(x + a) + 9 \equiv 0 \pmod{n}$ ei ole lahenduv. Kas kehtib ka vastupidine väide?
4. Leida võrrandi $39x^2 - 90xy + 11y^2 = 2024$ täisarvuliste lahendite arv.
5. Tõestada, et kui $n \in \mathbb{N}$ ja $2^n - 1 \mid 3^n - 1$, siis $n = 1$.
6. Tõestada ilma Dirichlet' teoreemi kasutamata, et leidub lõpmata palju algarve kujul $22k + 1$.
7. Olgu $2 < p \in \mathbb{P}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $p \nmid b$. Tõestada, et

$$\sum_{c=1}^{p-1} \left(\frac{(ac + b)c}{p} \right) = - \left(\frac{a}{p} \right).$$

8. Olgu $2 < p \in \mathbb{P}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1 = (b, p)$. Tõestada, et kongruentsil $ax^2 + by^2 \equiv 1 \pmod{p}$ on täpselt $p - \left(\frac{-ab}{p}\right)$ erinevat lahendit.

9*. Olgu $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ sellised mittenegatiivsed täisarvud, et $\sum_{i=1}^{2024} a_i^n$ on täisruut iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Leida, ülimalt mitu arvu a_i võivad nullist erineda, ja tuua maksimaalse juhu kohta arvuline näide.

- 10**. Olgu a täisarv ja $p > 2$ algarv. Leida kongruentsi

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2axyz \pmod{p}$$

lahendite (x, y, z) arv.