

Arvuteooria 2. praktikumi ülesanded:

Suurim ühistegur ja vähim ühiskordne. Eukleidesse algoritm.

$$\text{Võrrand } ax + by = c.$$

1. Leida täisarvud u ja v nii, et

$$(6426, -6006) = u \cdot 6426 + v \cdot 6006.$$

2. Tõestada, et mistahes $a, b, c \in \mathbb{Z}$ korral

$$[a, b][b, c][c, a](a, b, c) = abc[a, b, c].$$

3. Leida $(2^{1688} + 1, 2^{2024} + 1)$.

4. Olgu $a, b, c \in \mathbb{N}$, $(a, b, c) = 1$ ja $a = \frac{bc}{b-c}$. Tõestada, et $b - c$ on täisruut, st $b - c = d^2$, kus $d \in \mathbb{Z}$. Kas tingimus $(a, b, c) = 1$ on tarvilik?

5. Olgu $a, b \in \mathbb{N}$. Tõestada, et $a!b!(a+b)! \mid (2a)!(2b)!$.

6. Mitmel eri viisil on võimalik maksta 20 naela, 19 krooni ja 6 penni veerandfloriinide ja kolmandikginiste müntidega? (1 gini = 21 šillingit, 1 nael = 20 šillingit, 1 floriin = 6 šillingit, 1 kroon = 5 šillingit, 1 šilling = 12 penni)

7. Ukraina brigaad kasutas rindel vabatahtlike hangitud Autel Evo II ja Mavic Mini droone, esimesi hinnaga \$1989 ja teisi \$377 tükist. Kaitseministeeriumist taheti teada, palju neid droone kokku brigaadile anti. Kahjuks oli see info Lanceti-löögi tagajärjel hävinud sülearvutis. Komandöril oli kirjas, et vabatahtlike poolt antud arvete summa oli \$959959 ja üks logistikaseersant mäletas, et mõlemate droonide arvus oli korduv number ja üks neist oli algarv. Päästa sõdurid bürokraatide vaenust ja leida, palju neid kahte tüüpi droone brigaadil kokku oli.

8. Olgu a ja b samamärgilised täisarvud ning $n \in \mathbb{N}$. Tõestada, et leidub $c \in \mathbb{Z}$ nii, et võrrandil $ax + by = c$ on täpselt n erinevat positiivset lahendit, st. lahendipaari (x, y) , kus $x > 0$ ja $y > 0$.

- 9*. Leida kõik naturaalarvude paarid (a, b) ja (c, d) , mille korral kehtivad

$$(a, b) = (c, d), \quad [a, b] = [c, d] \quad \text{ja} \quad \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}.$$

Kas vastus muutub, kui a, b, c, d on naturaalarvude asemel täisarvud?

- 10**. Tõestada, et mistahes 16 järjestikuse naturaalarvu hulgas on vähemalt üks selline, mis on kõigi ülejäänute korrutisega ühistegurita. Näidata, et see väide enam ei kehti 17 järjestikuse naturaalarvu jaoks.